Àlgebra i Geometria I

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 1. **Nombres complexos**

1.– Considera els nombres complexos z i w donats per $z = 3 + 4i$, $w = 2 - i$. Representa sobre el diagrama de Argand:

(i) $z + w$; (ii) $w - z$; (iii) wz ; (iv) z/w ; (v) $z^*w + w^*z$; (vi) w^2 .

[Sol.: (i) $5 + 3i$; (ii) $-1 - 5i$; (iii) $10 + 5i$; (iv) $\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$; (v) 4 ; (vi) $3 - 4i$.]

2.– Demostra les següents propietats de la conjugació complexa:

(i) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$;

(ii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$;

(iii) $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$;

(iv) $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$; $z - z^* = 2i\,\mathrm{Im}\, z$.

3.– Demostra les següents propietats del mòdul d'un nombre complex:

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

(ii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$;

(iii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

4.– Si $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ y $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcula:

(i) $|3z_1 - 4z_2|$; (ii) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$; (iii) $(z_3^*)^4$; (iv) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2$.

[Sol.: (i) $\sqrt{157}$; (ii) $-7 + 3i$; (iii) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (iv) 1 .]

5.– Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

(i) $2 + 2\sqrt{3}i$; (ii) $-5 + 5i$; (iii) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$; (iv) $-3i$.

[Sol.: (i) $4\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; (ii) $5\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$; (iii) $2\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$; (iv) $3\,(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$.]

6.– Calcula:

(i) $\mathrm{Re}(e^{2iz})$; (ii) $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$; (iii) $|e^{\sqrt{i}}|$; (iv) $\ln[(\sqrt{3} + i)^3]$.

[Sol.: (i) $e^{-2y}\cos 2x$, $z = x + iy$; (ii) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)$, $\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)$; (iii) $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$; (iv) $\ln 8 + i\frac{\pi}{2}$.]

7.– Calcula:

(i) $\dfrac{\left[2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})\right]^7}{\left[4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^4}$; (ii) $\left(\dfrac{7+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}-i}\right)^7$; (iii) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$; (iv) i^{8532} .

[Sol.: (i) $\frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}=\frac{1}{2}(\cos(-\frac{5\pi}{12})+i\sin(-\frac{5\pi}{12}))$; (ii) $2^7e^{i\frac{7\pi}{6}}=-64(\sqrt{3}+i)$; (iii) $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$; (iv) 1 .]

8.– Calcula les arrels següents:

(i) $\sqrt[4]{-1}$; (ii) $\sqrt[5]{i}$; (iii) $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}i}$; (iv) $\sqrt{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}$.

[Sol.: (i) $e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, $e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$;
(ii) $e^{i\frac{\pi}{10}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $e^{-i\frac{7\pi}{10}}$, $e^{-i\frac{3\pi}{10}}$; (iii) $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{7\pi}{9}}$, $\sqrt[3]{4}e^{-i\frac{5\pi}{9}}$; (iv) $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.]

9.– A partir de les parts real i imaginària del producte $e^{i\theta}e^{i\phi}$ prova les fòrmules estàndar per a $\cos(\theta+\phi)$ i $\sin(\theta+\phi)$.

10.– Usa el teorema de Moivre per a demostrar les identitats:

(i) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$;

(ii) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$;

(iii) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

11.– Calcula els logaritmes següents:

(i) $\ln(1-i)$; (ii) $\ln(\sqrt{3}-i)$; (iii) $\ln(3i)$; (iv) $\ln i$; (v) $\ln(-4)$; (vi) $\ln\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

[Sol.: (i) $\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}i$; (ii) $\ln 2-\frac{\pi}{6}i$; (iii) $\ln 3+\frac{\pi}{2}i$; (iv) $\frac{\pi}{2}i$; (v) $\ln 4+\pi i$; (vi) $-\frac{2\pi}{3}i$.]

12.– Utilitzant que $a^z=e^{z\ln a}$, calcula les potències següents:

(i) i^i ; (ii) $1^{\sqrt{2}}$; (iii) $|(-i)^{(-i)}|$; (iv) $(1+i)^i$; (v) 4^i ; (vi) $\mathrm{Re}\{(1-i)^{1+i}\}$.

[Sol.: (i) $e^{-\frac{\pi}{2}}$; (ii) 1 ; (iii) $e^{-\frac{\pi}{2}}$; (iv) $e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2})$; (v) $\cos\ln 4+i\sin\ln 4$; (vi) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.]

13.– En la teoria de la relativitat especial, la posició x, i el temps t, d'un succés mesurats per un observador inercial estan relacionats amb la posició x', i temps t', mesurats per un altre observador inercial, per equacions de la forma:

$$x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi$$

$$t' = -\frac{x}{c}\sinh\phi + t\cosh\phi.$$

on c és la velocitat de la llum en el buit, i $c\tanh\phi$ és la velocitat relativa entre els observadors. Expressa x i t en termes de x', t' i ϕ i mostra que $x^2-(ct)^2=(x')^2-(ct')^2$.