ÀLGEBRA I GEOMETRIA I

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 2. **Estructures algebraiques**

1.– Siga $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals. Es defineix la l.c.i. $*$ de forma que, donats $x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = (x + y)/2$. Comprova si la llei és associativa i commutativa.

[Sol.: la llei és commutativa, però no associativa.]

2.– Considera els conjunts dels nombres naturals, enters, racionals, reals i complexos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, respectivament) i les operacions suma ($+$) i producte ($\cdot$) usuals definides sobre els respectius conjunts. Comprova que:

(i) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$ són grups commutatius.

(ii) $(\mathbb{N}, +)$ no és grup.

(iii) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ són grups commutatius.

3.– Siga p un nombre enter positiu. Comprova que $(\{1^{(1/p)}\}, \cdot)$, on $\cdot$ representa el producte usual de nombres complexos, és grup.

4.– Demostra que un grup $(\mathbf{G}, *)$ és abelià si i sols si $\forall a, b \in \mathbf{G}$, $(a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$.

5.– Considera un conjunt $\mathbf{G}$ amb la l.c.i. $*$ i un subconjunt $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ format pels elements $x \in \mathbf{G}$ tals que $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall y, z \in \mathbf{G}$. Prova que $\mathbf{F}$ és estable amb la llei $*$ i que $*$ és associativa en $\mathbf{F}$.

6.– Prova que $(\mathbb{Z}, +)$ és un subgrup commutatiu de $(\mathbb{R}, +)$.

7.– Prova que $(\mathbf{G}, \cdot)$, on $\mathbf{G} = \mathbb{R} \cup \{ix \;/\; i = \sqrt{-1}, x \in \mathbb{R}\} - \{0\}$, és un subgrup de $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ ($\cdot$ representa el producte usual de nombres complexos).

8.– Prova que $(\mathbf{E}, \cdot)$, on $\mathbf{E} = \{z \in \mathbb{C} \;/ |z| = 1\}$, és un subgrup de $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ ($\cdot$ representa el producte usual de nombres complexos).

9.– Considera el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters, el conjunt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i les aplicacions $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x, y) = x - y$, i $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(x) = (x, -x)$.

(i) Determina l'aplicació composta $g \circ f$.

(ii) Justifica que f és sobrejectiva, g injectiva i $g \circ f$ ni injectiva ni sobrejectiva.

[Sol.: (i) $g \circ f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(g \circ f)(x, y) = (x - y, y - x)$.]

10.– Siguen $f : (\mathbf{E}, *) \longrightarrow (\mathbf{F}, \perp)$ i $g : (\mathbf{F}, \perp) \longrightarrow (\mathbf{G}, \triangle)$ dos homomorfismes de grups. Prova que $g \circ f : (\mathbf{E}, *) \longrightarrow (\mathbf{G}, \triangle)$ és un homomorfisme de grups.

11.– Prova que si f és un isomorfisme de grups, f^{-1} també ho és.

12.– Siga $f : (\mathbf{E}, *) \longrightarrow (\mathbf{F}, \perp)$ un homomorfisme entre grups. Demostra que f és monomorfisme si, i sols si, $\mathrm{Nucl}(f) = \{e\}$, on e és l'element neutre de $\mathbf{E}$.

13.– En un grup $(\mathbf{G}, *)$ es defineix l'aplicació $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ tal que $f(a) = a * a$. Prova que: (i) $f(e) = e$; (ii) $[f(a)]^{-1} = f(a^{-1})$; (iii) f és un endomorfisme sii $(\mathbf{G}, *)$ és abelià.

14.– En un grup $(\mathbf{G}, *)$ es defineix l'aplicació $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ tal que $f(x) = a * x * a^{-1}$, essent a un element arbitrari de $\mathbf{G}$. Prova que f és un automorfisme de $(\mathbf{G}, *)$.

15.– Siga $(\mathbf{G}, *)$ un grup amb element neutre e i siga a $(\neq e)$ un element qualsevol de $\mathbf{G}$. Prova que l'aplicació $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ tal que $f(x) = a * x$ no és un endomorfisme de $(\mathbf{G}, *)$.

16.– Demostra que l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, $f(x) = e^{2\pi i x}$, és un homomorfisme entre els grups $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ ($+$ i $\cdot$ són les operacions suma i producte usuals en els conjunts corresponents).

17.– Demostra que els grups $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \text{ parell }\}, +)$, on $+$ representa la suma de nombres enters, són isomorfs, és a dir, que existeix un isomorfisme entre ells.

18.– Considera el conjunt $\mathbf{E} = \{x \ / \ x = i^n, i = \sqrt{-1}, n \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Demostra que el conjunt $(\mathbf{E}, \cdot)$, on $\cdot$ és el producte usual de nombres complexos, és un grup.

(ii) Demostra que l'aplicació $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{E}$, $f(n) = i^n$, és un homomorfisme entre els grups $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbf{E}, \cdot)$.

(iii) Determina el nucli de f.

[Sol.: (iii) Nuc(f) $= \{n = 4k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.]

19.– Comprova que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ són anells commutatius i unitaris.

20.– Prova que $(\{a + bi \in \mathbb{C} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ és un anell.

21.– Comprova que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ són cossos.

22.– Escriu les ordenacions possibles dels conjunts:

(i) {1,2,3,4}, (ii) {1,2,3,4,5}.

23.– Descompon les següents permutacions en producte de cicles independents.

(i) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,1\,5\,2\,3 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,1\,4\,2\,3 \end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 8\,1\,3\,6\,5\,7\,4\,2 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.

[Sol.: (i) $(1\,4\,2)(3\,5)$; (ii) $(1\,6\,3)(2\,5)(4)$; (iii) $(1\,8\,2)(4\,6\,7)(3)(5)$; (iv) $(1\,4)(2\,5)(3\,6)$.]

24.– Descompon les permutacions de l'exercici **23** en producte de transposicions, i determina la seua signatura.

[Sol.: (i) $(1\,2)(1\,4)(3\,5), -1$; (ii) $(1\,3)(1\,6)(2\,5), -1$; (iii) $(1\,2)(1\,8)(4\,7)(4\,6), +1$; (iv) $(1\,4)(2\,5)(3\,6), -1$.]

25.– Multiplica les permutacions

(i) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,1\,3\,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,4\,1\end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\2\,4\,5\,1\,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\5\,3\,4\,1\,2\end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,5\,1\,2\,4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,4\,1\,5\,2\end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,3\,4\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$.

[Sol.: (i) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,1\,2\,4\end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,5\,1\,2\,4\end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,2\,3\,4\,5\end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,3\,2\end{pmatrix}$.]

26.– Determina la permutació χ de la igualtat $\sigma_1\,\chi\,\sigma_2 = \sigma_3$, on

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\7\,3\,2\,1\,6\,5\,4\end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\3\,1\,2\,7\,4\,5\,6\end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\5\,1\,3\,6\,4\,7\,2\end{pmatrix}.$$

[Sol.: $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\4\,2\,6\,7\,1\,3\,5\end{pmatrix}$.]

27.– Calcula el valor dels següents símbols de Levi-Civita:

(i) ε_{23541}; (ii) ε_{31524}; (iii) ε_{33152}; (iv) ε_{24512}; (v) ε_{53142}; (vi) ε_{1423}; (vii) ε_{1221}; (viii) ε_{4321}.

[Sol.: (i) -1; (ii) $+1$; (iii) 0; (iv) 0; (v) -1; (vi) $+1$; (vii) 0; (viii) $+1$.]