Àlgebra i Geometria I

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 3a. **Espais vectorials**

1.– Estudia la possible estructura d'espai vectorial del conjunt $\mathbb{R}^3$ sobre el cos dels nombres reals $\mathbb{R}$, amb les operacions suma de vectors i producte per un escalar següents: $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$, $\alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z)$.

[Sol.: no és espai vectorial.]

2.– Demostra que són espais vectorials:

(i) El conjunt $\mathbf{P}[x]$ dels polinomis amb coeficients reals i variable indeterminada x, sobre el cos $\mathbb{R}$, respecte de les operacions usuals de suma de polinomis i producte d'un nombre real per un polinomi.

(ii) El conjunt $\mathbf{E}$ de les aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sobre el cos $\mathbb{R}$, amb les lleis $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$.

3.– Estudia la possible estructura de subespai vectorial dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^n$:

(i) $\{(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n \;/\; \sum_{i=1}^n x^i=0\}$

(ii) $\{(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n \;/\; \sum_{i=1}^n x^i=1\}$

(iii) $\{(x^1,x^2,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n \;/\; x^i=nx^{i-1}$ per a $2\le i\le n\}$

[Sol.: (i) si; (ii) no; (iii) si.]

4.– Siga $\mathbf{E}$ un espai vectorial sobre el cos K i siguen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ dos subespais vectorials d'$\mathbf{E}$. Prova que $\mathbf{E}_1\cup\mathbf{E}_2$ és un subespai vectorial d'$\mathbf{E}$ si, i sols si, $\mathbf{E}_1\subseteq\mathbf{E}_2$ o $\mathbf{E}_2\subseteq\mathbf{E}_1$.

5.– Prova que el conjunt $\mathbf{E}=\{(x,y,z)\;/\;x,y,z\in\mathbb{R},\,3x-2y+4z=0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

6.– Determina el subespai $\mathbf{E}$ de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1,2,0,0)$, $(0,3,-1,0)$ i $(0,0,5,4)$.

[Sol.: $\mathbf{E}=\{(x^1,x^2,x^3,x^4)\in\mathbb{R}^4\;/\;8x^1-4x^2-12x^3+15x^4=0\}$.]

7.– Estudia la dependència o independència lineal dels següents sistemes de vectors:

(i) $\{(0,1,-2,1),(-1,7,2,-4),(1,3,2,-1),(1,0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$,

(ii) $\{(i,-i,i,-i),(1,1,1,1,),(1+i,-i,1,-i)\}$ en $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$,

(iii) $\{x+x^3,1-x^2+x^3,x^3,-1+2x+x^2+2x^3\}$ en $\mathbf{P}[x]$ sobre $\mathbb{R}$,

(iv) $\{x^{2n}+x^{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}\}$ en $\mathbf{P}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

[Sol.: (i) dependents; (ii) independents; (iii) dependents; (iv) independents.]

8.– Sabem que els vectors $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ són linealment independents. Estudia la dependència o independència lineal dels vectors $\{w_1=v_1+v_2+v_3,w_2=v_2+v_3+v_4,w_3=v_3+v_4+v_1,w_4=v_4+v_1+v_2\}$.

[Sol.: independents.]

9.– Demostra que el conjunt $\mathbf{P}_n[x]$ dels polinomis de grau menor o igual a n és un subespai vectorial del conjunt dels polinomis $\mathbf{P}[x]$. Determina una base d'aquest subespai i la seua dimensió.

[Sol.: base, $\{x^k\}_{k=0}^n$; dim$\mathbf{P}_n[x] = n+1$.]

10.– Prova que els vectors $\mathbf{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$. Determina les components del vector $(3,2,1)$ en aquesta base.

[Sol.: $(3,2,1) = (1,1,1)_{\mathbf{B}}$.]

11.– Determina una base i la dimensió de cadascun dels subespais del problema **3**.

[Sol.: (i) $\{(1,0,...,-1),(0,1,0,...,-1),....,(0,0,...,1,-1)\}$, dim $= n-1$; (iii) $\{(1,n,n^2,...,n^{n-1})\}$, dim $= 1$.]

12.– Prova que si $\mathbf{E}_1$ és un subespai d'un espai vectorial $\mathbf{E}$, i si $\mathbf{E}$ té dimensió finita, aleshores $\mathbf{E}_1$ també té dimensió finita i se satisfà que $\dim\mathbf{E}_1 \leq \dim\mathbf{E}$. A més, la igualtat se satisfà si, i sols si, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$.

13.– En l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$, considera els subespais $\mathbf{E}_1 = \{(x,y,z)\ /\ x=0\}$ i $\mathbf{E}_2$ generat pels vectors $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$. Troba una base de $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$ i una altra d'$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Comprova que $\dim(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \dim\mathbf{E}_1 + \dim\mathbf{E}_2 - \dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2)$.

[Sol.: $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \langle(0,1,2)\rangle$; $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbb{R}^3$.]

14.– Prova que en un espai vectorial $\mathbf{E}$ de dimensió finita, si $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$ són subespais complementaris d'$\mathbf{E}$, i $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ són bases de $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$, respectivament, aleshores $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ és una base d'$\mathbf{E}$.

15.– Considera el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\ /\ x+y-z=0,\ x+y+z=0\}$.

(i) Determina un espai complementari d'$\mathbf{E}$,

(ii) Descompon el vector $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ com suma de dos vectors, un d'$\mathbf{E}$ i un altre del seu complementari.

[Sol.: (i) $\{(x,y,z)/x=0\}$; (ii) $(1,2,1) = (1,-1,0) + (0,3,1)$.]

16.– Considera el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\ /\ z=0\}$. Determina dos subespais complementaris diferents d'$\mathbf{E}$ en $\mathbb{R}^3$.

[Sol.: (i) $\langle\{(0,0,1)\}\rangle$; (ii) $\langle\{(1,1,1)\}\rangle$.]