Àlgebra i Geometria I

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 3b. **Aplicacions lineals**

1.– Considera l'aplicació $\mathcal{A}_\alpha : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}\,;\ \mathcal{A}_\alpha(v) = \alpha v$, on $\mathbf{E}$ és un espai vectorial real i α un nombre real. Demostra que $\mathcal{A}_\alpha$ és un operador lineal i determina el seu nucli i la seua imatge. Determina, si existeix, l'operador invers.

[Sol.: si $\alpha = 0$, $\mathbf{Im}(\mathcal{A}_0) = \{0\}$, $\mathbf{N}(\mathcal{A}_0) = E$, i l'operador no és ni injectiu ni sobrejectiu; si $\alpha \neq 0$, $\mathbf{Im}(\mathcal{A}_\alpha) = \mathbf{E}$, $\mathbf{N}(\mathcal{A}_\alpha) = \{0\}$, l'operador és un automorfisme, i l'operador invers és $\mathcal{A}_\alpha^{-1} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}\,;\ \mathcal{A}_\alpha^{-1}(v) = \frac{1}{\alpha} v$.]

2.– Considera l'aplicació $\mathcal{A}_u : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}\,;\ \mathcal{A}_u(v) = u + v$, on $\mathbf{E}$ és un espai vectorial real i $u \in \mathbf{E}$. Demostra que $\mathcal{A}_u$ no és un operador lineal.

3.– Considera l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ f(x, y, z) = z$. Demostra que f és una aplicació lineal i determina el seu nucli i la seua imatge. Determina, si existeix, l'aplicació inversa.

[Sol.: $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{N}(f) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. L'aplicació no és injectiva i si que és epijectiva (epimorfisme).]

4.– Considera l'aplicació $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,;\ g(x, y, z) = (x - y,\ x - z)$. Demostra que g és una aplicació lineal i determina el seu nucli i la seua imatge. Determina, si existeix, l'aplicació inversa.

[Sol.: $\mathbf{Im}(g) = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{N}(g) = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$. L'aplicació no és injectiva i si que és epijectiva (epimorfisme).]

5.– Considera l'aplicació $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,;\ \mathcal{B}(x, y, z) = (2x - z,\ y + z,\ x)$. Demostra que $\mathcal{B}$ és un operador lineal i determina el seu nucli i la seua imatge. Determina, si existeix, l'operador invers.

[Sol.: $\mathbf{Im}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{N}(\mathcal{B}) = \{0\}$. L'operador és un automorfisme, i l'operador invers és $\mathcal{B}^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,;\ \mathcal{B}^{-1}(x, y, z) = (z,\ x + y - 2z,\ 2z - x)$.]

6.– Considera l'aplicació $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,;\ \mathcal{A}(x, y, z) = (x - y + \lambda z, x + \lambda y - z, -\lambda x + y + z)$, on λ és un paràmetre real. Demostra que $\mathcal{A}$ és un operador lineal i determina la dimensió de la seua imatge.

[Sol.: si $\lambda = -1$, $\dim(\mathbf{Im}(\mathcal{A})) = 2$; si $\lambda \neq -1$, $\dim(\mathbf{Im}(\mathcal{A})) = 3$.]

7.– Troba un operador lineal $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que el seu nucli, $\mathbf{N}(\mathcal{A})$, siga el subespai generat pel vector $(0, 0, 1)$ i la seua imatge siga $\mathbf{Im}(\mathcal{A}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\}$.

[Sol.: $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y,\ y,\ 0)$.]

8.– Determina els valors del paràmetre real λ per als quals l'operador lineal $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definit per $\mathcal{A}(x, y, z) = (3x + 4y + z, 2x + 6y + 3z, x + 3y + \lambda z)$, és invertible.

[Sol.: $\lambda \neq 3/2$.]

9.– Siga $\mathcal{P}$ un projector ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$). Demostra que: (i) $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ és un projector; (ii) $\mathcal{I} + \mathcal{P}$ és invertible.

10.– Demostra que els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{E}_1 = \langle\{(0, 1, 1),\ (0, 2, 3)\}\rangle$, $\mathbf{E}_2 = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$ són complementaris. Determina el projector $\mathcal{P}_1$ sobre $\mathbf{E}_1$ amb nucli $\mathbf{E}_2$. Determina també el projector $\mathcal{P}_2$ sobre $\mathbf{E}_2$ amb nucli $\mathbf{E}_1$.

[Sol.: $\mathcal{P}_1(x, y, z) = (0,\ y - x,\ z - x)$, $\mathcal{P}_2(x, y, z) = (x, x, x)$.]