Àlgebra i Geometria I

Grau de Física. Universitat de València

Butlletí 4. **Espais pre-Hilbert**

1.– Comprova que si u, v i w són vectors d'un espai pre–Hilbert, se satisfà que:

(i) $\|u - v\| \geq |\, \|u\| - \|v\|\, |$

(ii) $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle u \,|\, v\rangle + \langle v \,|\, w\rangle + \langle u \,|\, w\rangle)$

(iii) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

2.– Siga $\alpha \in \mathbb{R}$ i considera en $\mathbb{R}^3$ l'operació:

$$\langle (x_1, y_1, z_1) \,|\, (x_2, y_2, z_2)\rangle = (2x_1 - y_1 + z_1)(2x_2 - y_2 + z_2) + \alpha(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

(i) Determina els valors d'α per als quals l'operació defineix un producte escalar en $\mathbb{R}^3$.

(ii) Per a $\alpha = 1$ determina una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecte de l'anterior producte escalar.

[Sol.: (i) $\alpha > 0$; (ii) $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 0), \sqrt{\frac{5}{6}}(\frac{2}{5}, 1, 0), \sqrt{\frac{6}{7}}(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1)\}$.]

3.– A l'espai euclideà $\mathbb{R}^4$, considera el subespai $\mathbf{E} = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x^1 + x^4 = x^2 + x^3\}$. Determina una base ortonormal d'$\mathbf{E}$.

[Sol.: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)\}$.]

4.– Siga $\mathbf{E}$ un espai pre–Hilbert de dimensió 3 i siga $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base. Sabem que: i) $\langle v_1 \,|\, v_1\rangle = 1$, ii) $\langle v_2 \,|\, v_2\rangle = 1$, iii) $\langle v_3 \,|\, v_3\rangle = 2$, iv) $\langle v_1 \,|\, v_2\rangle = 0$, v) $v = 2v_2 - v_3$ és ortogonal a v_1 i v_3. Determina una base ortonormal d'$\mathbf{E}$.

[Sol.: $\{v_1,\, v_2,\, v_3 - v_2\}$.]

5.– Considera l'espai vectorial $\mathbf{E}$ dels polinomis de grau menor o igual que 2 i coeficients reals, sobre el que s'ha definit el producte escalar:

$$\langle u \,|\, v\rangle = \int_{-1}^{+1} u(x)v(x)dx, \qquad u(x), v(x) \in \mathbf{E}.$$

Determina una base ortonormal d'$\mathbf{E}$.

[Sol.: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\}$.]

6.– Siga $\mathbf{F}$ un subespai d'un espai vectorial $\mathbf{E}$ de dimensió finita. Comprova que $(\mathbf{F}^\perp)^\perp = \mathbf{F}$.

7.– A l'espai euclideà $\mathbb{R}^4$, considera el subespai:

$$\mathbf{F} = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; 2x^1 + x^2 + x^3 + 3x^4 = 0\,;\; 3x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4 = 0\}$$

(i) Determina $\mathbf{F}^\perp$, complement ortogonal de $\mathbf{F}$.

(ii) Descompon el vector $u = (7, -4, -1, 2)$ en una suma d'un vector de $\mathbf{F}$ i un altre vector de $\mathbf{F}^\perp$.

[Sol.: (i) $\mathbf{F}^\perp = < \{(7, 5, 5, 0), (1, 0, 0, 5)\} >$; (ii) $u = (5, -5, -2, -1) + (2, 1, 1, 3)$.]

8.– A l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ considera el subespai $\mathbf{F}$ generat pels vectors $(1,-2,0,0)$, $(0,1,2,1)$ i $(-1,0,1,1)$.

(i) Determina $\mathbf{F}^\perp$, complement ortogonal de $\mathbf{F}$.

(ii) Determina els projectors ortogonals $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}_\perp$ sobre $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}^\perp$.

(iii) Descompon el vector $u=(7,1,-6,9)$ en una suma d'un vector de $\mathbf{F}$ i un altre vector de $\mathbf{F}^\perp$.

[Sol.: (i) $\mathbf{F}^\perp = < \{(2,1,-3,5)\} >$; (ii) $\mathcal{P}=\mathcal{I}-\mathcal{P}_\perp$, $\mathcal{P}_\perp = \frac{1}{39}(2x^1+x^2-3x^3+5x^4)(2,1,-3,5)$;

(iii) $u=(3,-1,0,-1)+(4,2,-6,10)$.]

9.– Considera l'espai $\mathbf{L}^2(-\pi,+\pi)$ de les funcions de quadrat integrable a l'interval $[-\pi,+\pi]$, amb el producte escalar:

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)g(x)dx, \qquad f(x),g(x)\in \mathbf{L}^2(-\pi,+\pi).$$

Determina el desenvolupament en sèrie de Fourier de les funcions:

(i) $f(x)=x$

(ii) $f(x)=x^2$

(iii) $g(x)=\begin{cases} a(1-|x|/b) & 0\le |x|\le b \\ 0 & b\le |x|\le \pi \end{cases}$

(iv) $h(x)=\begin{cases} 0 & -\pi\le x\le 0 \\ h & 0\le x\le \pi \end{cases}$

[Sol.: (i) $x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{2}{k}\,\sin kx$; (ii) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{4}{k^2}\,\cos kx$;

(iii) $g(x)=\frac{ab}{2\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{b\pi k^2}\,(1-\cos kb)\,\cos kx$; (iv) $h(x)=\frac{h}{2}+\sum_{\substack{k=1\\(senar)}}^{\infty}\frac{2h}{\pi k}\,\sin kx$.]

10.– A l'espai vectorial de Minkowski $\mathbb{M}_4$ tota base ortonormal $\mathbf{B}=\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ està formada per un vector temporal, $e_0^2=-1$, i tres vectors espacials, $e_i^2=1$, $i=1,2,3$.

(i) Demostra que si $(x^0,x^1,x^2,x^3)_{\mathbf{B}}$ són les components d'un vector x en aquesta base, aleshores:

$$x\cdot y=-x^0y^0+x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3$$

(ii) Determina una base $\mathbf{B}'=\{k,l,m,n\}$ amb els quatre vectors isòtrops, $k^2=l^2=m^2=n^2=0$.

[Sol.: (ii) $\mathbf{B}'=\{(1,1,0,0)_{\mathbf{B}},(1,0,1,0)_{\mathbf{B}},(1,0,0,1)_{\mathbf{B}},(\sqrt{3},1,1,1)_{\mathbf{B}}\}$.]

11.– Demostra que a l'espai vectorial de Minkowski se satisfà:

(i) Tot vector ortogonal a un vector temporal és espacial, és a dir, si $a^2<0$ i $a\cdot b=0$, aleshores $b^2>0$.

(ii) Si u,v són dos vectors tals que $u^2=v^2=-1$, $\gamma\equiv -u\cdot v>0$, aleshores $\gamma>1$

(iii) Desigualtats de Cauchy-Schwarz i de Minkowski (per a vectors temporals amb la mateixa orientació): si a,b són vectors tals que $a^2<0$, $b^2<0$, $a\cdot b<0$, aleshores,

$$a\cdot b\le -|a|\,|b|\,; \qquad |a+b|\ge |a|+|b|$$