Tema I.– NOMBRES COMPLEXOS

1.- Necessitat dels nombres complexos i definició.

(a) Les solucions de les equacions polinòmiques. El nombre imaginari $i \equiv \sqrt{-1}$

Els enters $\mathbb{Z}$, els racionals $\mathbb{Q}$ i els reals $\mathbb{R}$ apareixen com una necessitat d'ampliar un conjunt numèric per tal que certes equacions algebraiques (polinòmiques) admeten solució.

A l'hora de resoldre equacions polinòmiques en els reals apareixen solucions que no són nombres reals. Per exemple, si estudiem l'equació quadràtica

$$z^2 - 4z + 5 = 0\,,$$

trobem les solucions $z_\pm = 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$.

El *nombre imaginari* $i \equiv \sqrt{-1}$.

Les expressions de la forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, les anomenem nombres complexos.

Teorema fonamental de l'àlgebra: Una equació polinòmica de grau p amb coeficients complexos admet p solucions complexes.

(b) Forma binòmica i diagrama d'Argand

El conjunts dels nombres complexos els denotarem $\mathbb{C}$.

Normalment, escriurem els nombres complexes de la *forma binòmica*:

$$z = x + iy\,, \qquad i \equiv \sqrt{-1}\,,$$

on x, y són dos nombres reals que anomenarem, respectivament, *part real* de z, $x = \mathrm{Re}(z)$, i *part imaginària* de z, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Podem veure un nombre complex com una parella ordenada de nombres reals, $z = (x, y)$. Aleshores podem representar z en el *pla complex* utilitzant l'anomenat *diagrama d'Argand*.

Més endavant introduirem les formes polar i exponencial d'un nombre complex.

(c) Igualtat entre complexos i conjugació complexa

Dos nombres complexos z_1, z_2 són iguals si ho són les seues parts real i imaginària:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \quad z_a = x_a + iy_a\,, \quad x_a, y_a \in \mathbb{R}\,; \qquad z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2\,,\ y_1 = y_2\,.$$

El *complex conjugat*, z^*, d'un complex z és el complex que té la mateixa part real i la part imaginària canviada de signe:

$$z = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,; \qquad z^* = x - iy\,.$$

Representació de z i z^* en el diagrama d'Argand.

2.- Operacions amb nombres complexos

Un nombre complex és, formalment, un binomi. Aleshores, la suma i el producte de dos nombres complexos és un altre nombre complex que es pot determinar com sumem i multipliquem dos binomis, tenint en compte que $i^2 = -1$.

(a) Suma de nombres complexos

La suma de dos nombres complexos és un altre nombre complex amb parts real i imaginària que són suma de les parts real i imaginària dels dos sumands:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \quad z_a = x_a + iy_a\,, \quad x_a, y_a \in \mathbb{R}\,; \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,.$$

Exemples:

Suma de complexos en el diagrama d'Argand.

La suma de complexos té les següents propietats:

- Associativa:
- Commutativa:
- Element neutre: $0 + i0 \equiv 0$
- Element invers: $-z \;/\; z + (-z) = 0$. Si $z = x + iy$, $-z = -x + i(-y) = -x - iy$. Diferència de complexos: $z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-z_2)$.

Totes aquestes propietats signifiquen que $(\mathbb{C}, +)$ és un grup abelià.

(b) Producte de nombres complexos

El producte de dos nombres complexos és un altre nombre complex que es pot calcular de la següent forma:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \quad z_a = x_a + iy_a\,, \quad x_a, y_a \in \mathbb{R}\,; \qquad z_1\, z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\,.$$

Exemples en el diagrama d'Argand.

El producte de complexos té les següents propietats:

- Associativa:
- Commutativa:
- Element neutre: $1 + i0 \equiv 1$
- Element invers: $z^{-1} \;/\; z\, z^{-1} = 1$. Si $z \neq 0$, $z^{-1} \equiv \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^*}{z\, z^*}$.
  Divisió de complexos: $\dfrac{z_1}{z_2} \equiv z_1\, z_2^{-1} = \dfrac{z_1\, z_2^*}{z_2\, z_2^*}$.

Totes aquestes propietats signifiquen que $(\mathbb{C} - \{0\},\ )$ és un grup commutatiu.

La suma i el producte de complexos satisfan la propietat distributiva:

$$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3\,.$$

Aleshores $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu (com veurem al tema següent "Estructures Algebraiques").

(c) Propietats de la conjugació complexa

La conjugació complexa té les següents propietats:

(i) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

(ii) $(z_1\, z_2)^* = z_1^*\, z_2^*$

(iii) $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}\,; \qquad (1/z)^* = 1/z^*$

(iv) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)\,, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)$

(v) $z\, z^* = z^*\, z = x^2 + y^2$

3.- Representació polar i manipulacions algebraiques

(a) Mòdul i argument d'un nombre complex

Donat el nombre complex $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definim:

– *Mòdul* de z: $|z| \equiv r = \sqrt{z^*\, z} = \sqrt{x^2 + y^2}$

– *Argument* de z: $\arg(z) \equiv \theta = \arctan(x/y)\ /\ \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

En el càlcul de l'argument és important el signe de les parts real i imaginària.

L'argument està definit salvant un múltiple enter de 2π: $\arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Interpretar geomètricament en un diagrama d'Argand el mòdul i l'argument.

El mòdul de complexos té les següents propietats:

(i) $|-z| = |z|$

(ii) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$

(iii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$

(iv) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(b) Representació polar d'un nombre complex

Si per a un nombre complex z, $r \equiv |z|\,,\ \theta \equiv \arg(z)$, aleshores les parts real x i imaginària y venen donades per:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,.$$

Aleshores obtenim la *forma polar o trigonomètrica* d'un nombre complex z:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

(c) Representació exponencial d'un complex. Fórmula d'Euler

Recordem el desenvolupament en serie de Taylor d'una funció real de variable real,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n; \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

.

Tenint en compte el desenvolupament en serie de Taylor de la funció exponencial d'una variable real, podem estendre la funció exponencial als nombres complexos:

$$z \in \mathbb{C}\,, \qquad \exp(z) \equiv e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si particularitzem aquesta definició per a $z = i\theta$, i tenim en compte el desenvolupament en serie de Taylor del sinus i el cosinus, obtenim la *fórmula d'Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.$$

A partir de la fórmula d'Euler arribem a la *forma exponencial* d'un nombre complex:

$$z = re^{i\theta}\,.$$

Algunes propietats:

(i) $e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

(ii) $(e^z)^n = e^{nz}$

(iii) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

(d) Multiplicació i divisió en forma exponencial

Si $z_a = |\,z_a\,|\,e^{i\theta_a}$, $a = 1, 2$, aleshores:

$$z_1\,z_2 = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.$$

4.- Potències, arrels i logaritmes de nombres complexos

(a) Potències i arrels

Si $z_a = |\,z\,|\,e^{i\theta}$, aleshores la potència n-èssima ve donada per:

$$z^n = |\,z\,|^n e^{in\theta}\,.$$

A partir d'aquesta expressió i de la fórmula d'Euler obtenim la *fórmula de Moivre*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,.$$

Par al càlcul d'arrels de nombres complexos hem de tenir en compte que l'argument està definit salvant un múltiple de 2π. En forma exponencial tenim:

$$z = |\,z\,|\,e^{i\theta} = |\,z\,|\,e^{i(\theta+2k\pi)}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

L'arrel p-èssima (potència $1/p$) de z és el complex w tal que $w^p = z$.

Aleshores per al càlcul de l'arrel p-èssima hem de trobar les p solucions no equivalents:

$$\sqrt[p]{z} \equiv z^{1/p} = |\,z\,|^{1/p}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{p}}\,, \qquad k = 0, 1, ..., p-1\,.$$

Exemple: arrel p-èssima de la unitat. Representació en un diagrama d'Argand.

(b) Logaritmes

Com en el cas dels nombres reals, la funció logaritme d'un nombre complex es defineix com la inversa de la funció exponencial:

$$w = \ln z \qquad \longleftrightarrow \qquad z = e^w \, .$$

Dues propietats:

(i) $\ln(z_1 \, z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

(ii) $\ln z = \ln |\, z \,| + i(\theta + 2k\pi) \, , \; k \in \mathbb{Z}$

Notem que la funció logaritme d'un nombre complex és multivalorada ja que la part imaginària està determinada salvant $2k\pi$. En aquest curs prendrem sempre la *part principal del logaritme*, és a dir, una part imaginària a l'interval $]-\pi, \pi]$.

Exemple: $\ln(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.

A partir del logaritme podem definir l'exponencial de base arbitrària: $z^w = e^{w \ln z}$, que té les següents propietats:

(i) $a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$

(ii) $\ln a^z = z \ln a$

(iii) $(a^z)^w = a^{zw}$

(iv) $(a^z)^{-1} = a^{-z}$

5.- Funcions trigonomètriques i funcions hiperbòliques

(a) Funcions trigonomètriques

A partir de la fórmula d'Euler obtenim la representació exponencial de les funcions sinus i cosinus:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \, , \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \, .$$

Aquestes expressions permeten definir les *funcions trigonomètriques d'un nombre complex*:

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \, , \qquad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \, , \qquad \left(\tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} \right) \, .$$

Propietats:

(i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(ii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \, \cos z_2 + \sin z_2 \, \cos z_1$

(iii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \, \cos z_2 - \sin z_1 \, \sin z_2$

(b) Funcions hiperbòliques

Les funcions hiperbòliques d'un nombre real es defineixen:

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \left(\tanh x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}\right)\,.$$

De la mateixa manera podem definir les *funcions hiperbòliques d'un nombre complex*:

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,, \qquad \cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \qquad \left(\tanh z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}\right)\,.$$

Relació entre les funcions trigonomètriques i les hiperbòliques:

$$\begin{gathered}\sin iz = i \sinh z\,, \quad \cos iz = \cosh z\,, \quad \tan iz = i \tanh z\,;\\ \sinh iz = i \sin z\,, \quad \cosh iz = \cos z\,, \quad \tanh iz = i \tan z\,.\end{gathered}$$

Propietats:

(i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(ii) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \, \cosh z_2 + \sinh z_2 \, \cosh z_1$

(iii) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \, \cosh z_2 + \sinh z_1 \, \sinh z_2$