Tema III.– ESPAIS VECTORIALS

1.- Definició i teoremes immediats.

(a) Definició d'espai vectorial

Un espai vectorial és una terna $((E,+),(K,+,\cdot),\cdot)$, on

1. $(E,+)$ és un grup abelià.
   - Els elements $a,b,c,... \in E$ els anomenem *vectors*.
   - La l.c.i $+$ és la *suma de vectors*, $a+b$.
   - El neutre del grup és *el vector* $0 \in E$.
   - El simètric (*oposat*) del vector $a \in E$ el denotem per $-a \in E$.
2. $(K,+,\cdot)$ és un cos.
   - Els elements $\alpha,\beta,\gamma,... \in K$ els anomenem *escalars*.
   - La l.c.i $+$ és la *suma d'escalars*, $\alpha+\beta$.
   - La l.c.i $\cdot$ és el *producte d'escalars*, $\alpha\cdot\beta \equiv \alpha\,\beta$.
   - El neutre de $+$ és *l'escalar* $0 \in K$, i el simètric de $\alpha \in K$ és *l'oposat* $-\alpha \in K$.
   - El neutre de $\cdot$ és *l'escalar* $1 \in K$, i el simètric de $\alpha \in K$ és *l'invers* $\alpha^{-1} \in K$.
3. El *producte d'un escalar per un vector*, $\cdot\ : K \times E \longrightarrow E\ ;\ (\alpha,a) \longrightarrow \alpha\cdot a$, és una llei de composició externa que satisfà:

   (i) *Distributiva respecte de la suma en E*: $\forall\alpha \in K,\ \forall a,b \in E$,
   $$\alpha\cdot(a+b) = \alpha\cdot a + \alpha\cdot b$$

   (ii) *Distributiva respecte de la suma en K*: $\forall\alpha,\beta \in K,\ \forall a \in E$,
   $$(\alpha+\beta)\cdot a = \alpha\cdot a + \beta\cdot a$$

   (iii) *Associativa amb el producte d'escalars*: $\forall\alpha,\beta \in K,\ \forall a \in E$,
   $$\alpha\cdot(\beta\cdot a) = (\alpha\cdot\beta)\cdot a$$

   (iv) *Element unitat*: el neutre $1 \in K$ del producte del cos és també neutre per a la llei externa, és a dir, $\forall a \in E$,
   $$1\cdot a = a$$

Comentaris sobre notació i nomenclatura

(i) Representem la suma de vectors i la suma d'escalars amb el mateix símbol $+$, però no hi ha confusió perquè sumem objectes de conjunts diferents.

(ii) Representem el producte d'un escalar per un vector i el producte (intern) d'escalars amb el mateix símbol $\cdot$, però no hi ha confusió perquè un dels factors pertany a conjunts diferents. Per als dos productes podem no escriure el símbol de multiplicació: $\alpha,\beta \in K,\ a \in E,\ \alpha\cdot a \equiv \alpha\,a \in E\ ,\ \alpha\cdot\beta \equiv \alpha\,\beta \in K$

(iii) Per a referir-nos a l'espai vectorial $((E,+),(K,+,\cdot),\cdot)$ parlarem de *l'espai vectorial E sobre el cos K* o de l'espai vectorial $(E,K,\cdot)$.
Normalment el cos K serà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Aleshores parlarem de *l'espai vectorial real E*, o de *l'espai vectorial complex E*.

Exemples:

(i) *L'espai vectorial* $\mathbb{R}^n$: $((\mathbb{R}^n,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\cdot)$.
Els vectors són les n-ples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,...,x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \ i=1...n\}$$

Suma de vectors: $(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$.

Producte per un escalar: $\alpha\,(x_1,x_2,...,x_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)$.

(ii) *L'espai vectorial complex* $\mathbb{C}^n$: $((\mathbb{C}^n,+),(\mathbb{C},+,\cdot),\cdot)$.

(iii) *L'espai vectorial* K^n: $((K^n,+),(K,+,\cdot),\cdot)$.

(iv) *L'espai vectorial real* $\mathbb{C}^n$: $((\mathbb{C}^n,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\cdot)$.

(v) *L'espai vectorial de les aplicacions entre dos espais vectorials.* Siguen E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos K. El conjunt de les aplicacions entre E i F, $\mathbf{A} = \{f : E \to F\}$, és un espai vectorial sobre el cos K amb les operacions:
Suma d'aplicacions: $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$.
Producte per un escalar: $(\alpha\cdot f)(a) = \alpha f(a)$.

Notació. A vegades s'usen notacions que permeten distingir més clarament els vectors dels escalars. Per exemple, als vectors dels espais vectorials reals $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se'ls denota $\vec{a}$. És la notació que usem per als vectors de l'espai físic (vectors de posició, velocitat, acceleració, força, moment,....). En mecànica quàntica els vectors (estats quàntics) es denoten $\mid a >$.

(b) Conseqüències de la definició

(i) *Productes nuls*: $\alpha \in K, \ a \in E$,

$$\alpha\cdot a = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \alpha = 0 \quad \text{o} \quad a = 0$$

(ii) *Regla dels signes*: $\alpha,\beta \in K, \ a,b \in E$,

$$(-\alpha)\cdot a = \alpha\cdot(-a) = -\alpha\cdot a\,, \qquad (-\alpha)\cdot(-a) = \alpha\cdot a$$

(iii) *Regles de simplificació*: $\alpha \in K, \ a \in E$,

$$\begin{array}{llcl} a \neq 0\,, & \alpha\cdot a = \beta\cdot a & \longleftrightarrow & \alpha = \beta \\ \alpha \neq 0\,, & \alpha\cdot a = \alpha\cdot b & \longleftrightarrow & a = b \end{array}$$

2.- Subespais vectorials

(a) Definició i teorema de caracterització

Definició: Donat un espai vectorial $((E,+),(K,+,\cdot),\cdot)$, diem que $F\subset E$ és un subespai vectorial de E si $((F,+),(K,+,\cdot),\cdot)$ és un espai vectorial.

És a dir, $F\subset E$ és un subespai vectorial de $(E,K,\cdot)$ si:

- F és subgrup de $(E,+)$.
- La llei externa és estable en F: $\alpha\in K,\ a\in F \quad\rightarrow\quad \alpha\cdot a\in F$.

Teorema (caracterització de subespais): la condició necessària i suficient perquè $F\subset E$ siga subespai vectorial de $(E,K,\cdot)$ és que

$$\forall\alpha,\beta\in K,\ \forall a,b\in F \quad\longrightarrow\quad \alpha\cdot a+\beta\cdot b\in F$$

Exemples:

(i) $\{0\}$ i E són els subespais vectorials trivials d'un espai vectorial $(E,K,\cdot)$.

(ii) Siga $(E,K,\cdot)$ un espai vectorial i $v\in E$. El conjunt $F=\{\lambda v,\ \forall\,\lambda\in K\}\subset E$, és un subespai vectorial.

(iii) Considerem l'espai vectorial $(K^3,K,\cdot)$. El conjunt $F=\{(z,z,z),\ \forall\,z\in K\}\subset K^3$, és un subespai vectorial.

(b) Intersecció de subespais vectorials

Teorema (intersecció de subespais): Si $F_1,F_2\subset E$ són subespais vectorials de $(E,K,\cdot)$, aleshores la seua intersecció $F_1\cap F_2$ és un subespai vectorial de $(E,K,\cdot)$.

Nota: La unió $F_1\cup F_2$ de dos subespais vectorials $F_1,F_2\subset E$ no és subespai vectorial. Ho és sii $F_1\subset F_2$ o $F_2\subset F_1$.

Exemples:

(i) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els subconjunts:

$$F_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ 2x_1+2x_2-x_3=0\,,\ 2x_1-x_2=0\}$$

$$F_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ x_3-3x_2=0\,,\ x_4-x_3=0\}$$

$$F_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ 10x_1+x_2-3x_3=0\,,\ x_4=0\}$$

$$F_4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ /\ x_1+x_2=0\,,\ x_4=1\}$$

F_1,F_2,F_3 són subespais vectorials. F_4 no ho és. A més:

$$F_1\cap F_2=\{(x,2x,6x,6x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F_1\cap F_3=\{(x,2x,6x,0)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$$

$$F_2\cap F_3=\{(0,0,0,0)\}$$

(ii) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ considerem els subconjunts:

$$F_1 = \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}, \qquad F_2 = \{(0,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$$

F_1, F_2 són subespais vectorials, i $F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$.
És evident que $F_1 \cup F_2$ no és subespai vectorial.

3.- Combinació lineal

(a) Definició. Subespai generat

Definició. Siga E un espai vectorial (sobre K). Direm que un vector $v \in E$ és combinació lineal d'un conjunt finit de vectors $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ si existeixen p escalars $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, tals que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$$

Exemples:

(i) El vector $(3,4,0) \in \mathbb{R}^3$ és combinació lineal dels vectors $\{(1,1,1),(1,2,-2)\}$.

(ii) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, tot vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ és combinació lineal dels vectors $\{(1,0),(0,1)\}$.

Definició. Siga E un espai vectorial i $W \subset E$ un conjunt (finit o infinit) de vectors. Anomenem combinació lineal de W a cadascun dels vectors $v \in E$ que és de la forma $v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$, amb $\{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset W$.

Notació. Siga E un espai vectorial i $W \subset E$. Denotem per $\langle W \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals (finites) de W:

$$\langle W \rangle = \{v \in E \ / \ v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p\,, \ v_i \in W, \ \alpha_i \in K\}$$

Teorema. Siga E un espai vectorial i $W \subset E$. Aleshores $\langle W \rangle$ és el menor subespai vectorial que conté W.

Definició. Siga E un espai vectorial i $W \in E$. Al subespai vectorial $\langle W \rangle$ l'anomenem *subespai generat per* W. Si $\langle W \rangle = E$, direm que W és un *sistema generador* de E.

Exemples:

(i) $\{(1,0),(0,1)\}$ és un sistema generador de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$.

(ii) Si $W = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $\langle W \rangle = \{(x_1, x_2, 0), \, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^3$, $\langle W \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

(iii) Si $v \in E$, aleshores $\langle \{v\} \rangle = \{\lambda v, \ \forall \, \lambda \in K\}$: *recta vectorial generada pel vector* v.

(b) Dependència i independència lineal

Definició. Siga E un espai vectorial. Direm que un vector $a \in E$ *depèn linealment* dels vectors $W = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ si $a \in \langle W \rangle$, és a dir, si a és combinació lineal de W, $a = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$.

Definició. Direm que un conjunt (finit) de vectors $W = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ és *linealment independent* (o *sistema lliure*) si cap $v_i \in W$ pot escriure's com combinació lineal de la resta de vectors de W.

Direm que un conjunt d'infinits vectors és linealment independent si qualsevol subconjunt finit ho és.

Direm que un conjunt de vectors W és *linealment dependent* (o *sistema lligat*) si no és un sistema lliure. En un sistema lligat, almenys un dels vectors pot escriure's com combinació lineal de la resta.

Teorema (caracterització de la independència lineal). El conjunt de vectors $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ és linealment independent si, i sols si, l'única solució de l'equació vectorial

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_p v_p = 0$$

és la solució trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$.

Exemples:

(i) $\{(1,0),(0,1)\}$ és un sistema lliure de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$.

(ii) Si $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,2,0)\}$, és un sistema lligat de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.

(iii) Si $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$, és un sistema lliure de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.

Propietats:

(i) Qualsevol conjunt de vectors que conté el $0 \in E$ és lligat.

(ii) Considerem dos sistemes de vectors $V, W \subset E$ / $V \subset W$. Si V és lligat, aleshores W és lligat; si W és lliure, aleshores V és lliure.

(iii) Si W és lliure i $v \notin \langle W \rangle$, aleshores $W \cup \{v\}$ és lliure.

4.- Base i dimensió d'un espai vectorial

(a) Base d'un espai vectorial

Definició. Anomenem base d'un espai vectorial E a un conjunt de vectors $B = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ que satisfà:

(i) B és un sistema de vectors linealment independent.

(ii) $\langle B \rangle = E$, és a dir, B és un sistema generador de E.

Propietat: un conjunt de vectors $B = \{e_i\}_{i=1}^{n} \subset E$ és base si, i sols si, qualsevol vector $v \in E$ pot escriure's de *manera única* com combinació lineal de B.

Exemples: $B = \{(1,0),(0,1)\}$, $\bar{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ són dues bases de $\mathbb{R}^2$.

Definició. Anomenem components d'un vector $a \in E$ en la base $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ als escalars α_i de la combinació lineal única:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

Les components d'un vector depenen de la base considerada. Escriure'm:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)_B$$

Exemples: en les bases $B = \{(1,0),(0,1)\}$ i $\bar{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, les components del vector $(2,4)$ són, respectivament,

$$(2,4) = (2,4)_B\,, \qquad (2,4) = (3,-1)_{\bar{B}}$$

Base canònica. Considerem l'espai vectorial $(K^n, K, \cdot)$. Anomenem base canònica a la base $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ formada pels vectors:

$$e_1 = (1,0,...0)\,, \quad e_2 = (0,1,...0)\,, \quad ... \quad , \quad e_n = (0,...,0,1)$$

En la base canònica, $(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, x_2, ..., x_n)_B$.

(b) Dimensió d'un espai vectorial. Dimensió finita i infinita

Definició: un espai vectorial E és de dimensió finita n, $\dim E = n$, si existeix un sistema lliure de n vectors i qualsevol sistema de més de n vectors és lligat.

Definició: un espai vectorial E és de dimensió infinita si existeix un subconjunt $W \subset E$ que conté n vectors linealment independents per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (existència de base en espais de dimensió finita): tot espai vectorial E de dimensió finita n té, almenys, una base de n vectors.

Lema (màxim nombre de vectors d'un sistema lliure). Si $\dim E = n$, un sistema de més de n vectors és lligat.

Lema (mínim nombre de vectors d'un sistema generador). Si $\dim E = n$, un sistema generador té, almenys, n vectors.

Teorema. Siga E un espai vectorial de dimensió n. Aleshores totes les bases tenen n vectors.

Exemples:

(i) $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \cdot)$ és de dimensió finita 2. La base canònica està formada per dos vectors.

(ii) $(K^n, K, \cdot)$ és de dimensió finita n. La base canònica està formada per n vectors.

Comentari. Als espais vectorials de dimensió infinita les bases tindran infinits vectors, però qualsevol vector s'escriurà com combinació lineal (finita) de vectors de la base.

Exemple: el conjunt dels polinomis és un espai vectorial de dimensió infinita. Una base és:

$$B = \{1, x, x^2, ..., x^p, ...\}$$

(c) Altres propietats sobre dimensions

A partir dels teoremes anteriors es poden deduir els següents corol·laris:

Corol·lari (base incompleta). Si $\dim E = n$ i $\{v_1, ..., v_m\}$, $m \leq n$, és un sistema lliure, aleshores sempre podem trobar $n - m$ vectors $v_{m+1}, ..., v_n$ tals que el conjunt de vectors $B = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ és una base de E.

Corol·lari (condició de base d'un sistema de n vectors). Si $\dim E = n$ i $B = \{v_1, ..., v_n\}$ és un sistema de n vectors, aleshores són equivalents: (i) B és base, (ii) B és lliure, (iii) B és generador.

Corol·lari (dimensió d'un subespai vectorial). Si $\dim E = n$ i $U \subset E$ és un subespai vectorial, aleshores $\dim U \leq \dim E$. A més, $\dim U = \dim E$ si, i sols si, $U = E$.

5.- Aplicacions lineals

(a) Definicions i propietats immediates

Definició. Siguen E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos K. Un aplicació $f : E \longrightarrow F$ direm que és una aplicació lineal si manté les operacions, és a dir,

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b), \ \forall \ a, b \in E$.

(ii) $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a), \ \forall \ \alpha \in K, \ \forall \ a \in E$.

Propietat: $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal si, i sols si, $\forall \ \alpha, \beta \in K, \ \forall \ a, b \in E$,

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

Propietat: si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, aleshores $f(0) = 0$ i $f(-a) = -f(a)$.

Exemples:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (3x - 2y + z, \ x + y + 3z)$, és un aplicació lineal.

(ii) *Aplicació nul·la*: $\mathcal{O}(a) = 0, \ \forall \ a \in E$, és lineal.

(iii) *Aplicació identitat*: $\mathcal{I}(a) = a, \ \forall \ a \in E$, és lineal.

(iv) Les aplicacions lineals $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són de la forma $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definició (imatge d'una aplicació lineal): si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, la imatge de f és el conjunt $Im(f) = f(E)$ d'elements de F que tenen anti-imatge,

$$Im(f) = \{v \in F \ / \ \exists \ a \in E, \ f(a) = v\} \subset F \, .$$

Teorema: si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, aleshores la imatge $Im(f)$ de f és un subespai vectorial de F.

Teorema. Siga $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal. Si $\{v_i\}_{i=i}^p$ és un sistema generador de E, aleshores $\{f(v_i)\}_{i=i}^p$ és un sistema generador de $Im(f)$.

Definició (nucli d'una aplicació lineal): si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, anomenem nucli de f al conjunt $N(f)$ d'elements de E que tenen per imatge el neutre de F.

$$N(f) = \{a \in F \ / \ f(a) = 0\} \subset E\,.$$

Teorema: si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, aleshores el nucli $N(f)$ de f és un subespai vectorial de E.

Teorema: si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal, aleshores:

$$\mathrm{dim} N(f) + \mathrm{dim} Im(f) = \mathrm{dim} E$$

Exemples:

(i) La imatge i el nucli de l'aplicació lineal $f(x, y, z) = (3x - 2y + z,\, x + y + 3z)$ són: $Im(f) = \mathbb{R}^2$, $N(f) = \langle\{(7, 8, -5)\}\rangle$.

(ii) La imatge i el nucli de l'aplicació nul·la són: $Im(\mathcal{O}) = \{0\}$, $N(\mathcal{O}) = E$.

(iii) La imatge i el nucli de l'aplicació identitat són: $Im(\mathcal{I}) = E$, $N(\mathcal{I}) = \{0\}$.

(b) Classificació i propietats

Monomorfisme: aplicació lineal injectiva, és a dir, $\forall a, b \in E$, $a \neq b \ \rightarrow \ f(a) \neq f(b)$.

Epimorfisme: aplicació lineal sobrejectiva, és a dir, $\forall v \in F$, $\exists\, a \in E \ / \ f(a) = v$.

Isomorfisme: aplicació lineal bijectiva.

Endomorfisme o *operador lineal*: aplicació lineal amb $(E, K, \cdot) = (F, K, \cdot)$.

Automorfisme: endomorfisme bijectiu.

Propietats. Siga $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal, aleshores:

(i) Si U és un subespai vectorial de E, aleshores $f(U)$ és un subespai vectorial de F.

(ii) Si H és un subespai vectorial de F, aleshores $f^{-1}(H)$ és un subespai vectorial de E.

(iii) f és epimorfisme sii $Im(f) = F$ sii $\dim Im(f) = \dim F$.

(iv) f és monomorfisme sii $N(f) = \{0\}$ sii $\dim N(f) = 0$.

(v) Si f és un isomorfisme, aleshores f^{-1} existeix i també és un isomorfisme.

Teorema. Si f és una aplicació lineal entre dos espais vectorials de la mateixa dimensió n, aleshores les següents condicions són equivalents:

(i) f és un isomorfisme.

(ii) f és un monomorfisme.

(iii) $\dim N(f) = 0$.

(iv) $\dim Im(f) = n$.

(v) f és un epimorfisme.

Exemples:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (3x - 2y + z,\, x + y + 3z)$ és un epimorfisme i no és un monomorfisme.

(ii) L'aplicació nul·la no és ni epimorfisme ni monomorfisme.

(iii) L'aplicació identitat és un automorfisme.

(iv) La inclusió canònica $h_i : K \to K^n$; $h_i(\alpha) = (0, ..., 0, \alpha, 0, ..., 0)$, és un monomorfisme.

(v) La projecció canònica $p_i : K^n \to K$; $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$, és un epimorfisme.

(vi) Les aplicacions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, són automorfismes si $\alpha \neq 0$.

(c) Operacions amb aplicacions lineals

Suma d'aplicacions lineals: la suma $f + g$ de dues aplicacions lineals $f, g : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal,

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

Producte per un escalar: el producte $\alpha \cdot f$ d'un escalar $\alpha \in K$ per una aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal,

$$(\alpha \cdot f)(a) = \alpha f(a)$$

Producte (composició) d'aplicacions lineals: la composició $f \circ g$ de dues aplicacions lineals, $g : E \longrightarrow F$, $f : F \longrightarrow G$, és una aplicació lineal,

$$(f \circ g)(a) = f[g(a)]$$

Teorema. El conjunt de les aplicacions lineals $f : E \longrightarrow F$ té estructura d'espai vectorial amb la suma i el producte per un escalar. Aquest espai vectorial es denota $Hm(E, F)$.

Teorema. El conjunt dels endomorfismes d'un espai vectorial E té estructura d'anell amb la suma i el producte d'aplicacions. L'anell dels endomorfismes és unitari i no commutatiu i es denota $End(E)$.

Teorema. El conjunt dels automorfismes d'un espai vectorial E té estructura de grup amb el producte d'aplicacions. El grup dels automorfismes és no commutatiu i es denota $Gl(E)$.

6.- Subespais suma i suma directa

(a) Definició de subespai suma i suma directa

Definició. Siguen F_1 i F_2 dos subespais vectorials de l'espai vectorial E. Anomenem *subespai suma*, $F_1 + F_2$, al conjunt de vectors:

$$F_1 + F_2 = \{v \in E \,/\, v = v_1 + v_2,\ v_1 \in F_1,\, v_2 \in F_2\}$$

Propietat: El subespai suma $F_1 + F_2$, és el menor subespai vectorial que conté $F_1 \cup F_2$, és a dir, $F_1 + F_2 = \langle F_1 \cup F_2 \rangle$.

Definició. Siguen F_1 i F_2 dos subespais vectorials de l'espai vectorial E. Direm que la suma $F_1 + F_2$ és *suma directa* si tot vector de $F_1 + F_2$ pot escriure's de forma única com suma d'un vector de F_1 i un altre de F_2.

Si la suma $F_1 + F_2$ és directa la representem $F_1 \oplus F_2$.

Teorema (caracterització de la suma directa). Siguen F_1 i F_2 dos subespais vectorials de l'espai vectorial E. Aleshores $F_1 \oplus F_2$ si, i sols si, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Exemples:

(i) A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els subconjunts F_1, F_2, F_3:

$$F_1 + F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_3 = 3x_2\}$$

$$F_1 + F_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_2 = 2x_3 - 10x_1\}$$

$$F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}^4$$

(ii) $\mathbb{R}^2 = \langle\{(1,0)\}\rangle \oplus \langle\{(0,1)\}\rangle$.

(iii) $\mathbb{R}^3 = \langle\{(1,0,0)\}\rangle \oplus \langle\{(0,1,0)\}\rangle \oplus \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.

(b) Subespais complementaris i projectors

Definició. Direm que els subespais F_1 i F_2 de l'espai vectorial E són complementaris si $E = F_1 \oplus F_2$.

Propietat: Tot vector $v \in E$ pot escriure's de forma única com suma d'un vector $v_1 \in F_1$ i un altre $v_2 \in F_2$, $v = v_1 + v_2$.

Definició. Si $E = F_1 \oplus F_2$, els projectors $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ sobre el subespais F_1 i F_2 (respecte dels complemntaris F_2 i F_1, respectivament) estan definits de la següent manera: si $v \in E$, $v = v_1 + v_2$, $v_i \in F_i$,

$$\mathcal{P}_1(v) = v_1\,, \qquad \mathcal{P}_2(v) = v_2$$

Propietat. Si $E = F_1 \oplus F_2$, els projectors $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ sobre el subespais F_1 i F_2 (respecte dels complemntaris F_2 i F_1, respectivament) queden caracteritzats per ser els endomorfismes que són la identitat sobre F_1 (respec. F_2) i que anul·len F_2 (respec. F_1), és a dir,

$$\forall\, v_1 \in F_1,\, v_2 \in F_2, \quad \mathcal{P}_1(v_1) = v_1\,,\ \ \mathcal{P}_1(v_2) = 0\,, \qquad \mathcal{P}_2(v_2) = v_2\,,\ \ \mathcal{P}_2(v_1) = 0$$

Comentari. Notem que en la definició de projector $\mathcal{P}_1$ sobre el subespai F_1 hem de fer referència a respecte de quin complementari projectem ja que el complementari no és únic i la projecció depèn del complementari considerat.

Exemples:

(i) A l'espai vectorial K^n, si h_i i p_i són la inclusió canònica i la projecció canònica, aleshores $\mathcal{P}_i = h_i \circ p_i$ és el projector sobre el subespai $E_i = \langle\{(0, ...0, 1, 0, ..., 0)\}\rangle$ respecte del complementari $F_i = \{(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)\}$.

(ii) $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$, $E_1 = \langle\{(1, 0)\}\rangle$, $E_2 = \langle\{(0, 1)\}\rangle$; $\mathcal{P}_1(x, y) = (x, 0)$, $\mathcal{P}_2(x, y) = (0, y)$.

(iii) $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_3$, $E_1 = \langle\{(1, 0)\}\rangle$, $E_3 = \langle\{(1, 1)\}\rangle$; $\mathcal{P}_1'(x, y) = (x - y, 0)$, $\mathcal{P}_2'(x, y) = (y, y)$.

Teorema (caracterització dels projectors). Un operador lineal $\mathcal{P}$ és un projector si, i sols si, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

(c) Fórmules de les dimensions

Siguen F_1 i F_2 dos subespais vectorials d'un espai vectorial E de dimensió finita. Aleshores:

(i) $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.

(ii) Si $F_1 \oplus F_2$, $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

(iii) Si F_1, F_2 són complementaris, $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$.