# Tema IV.– ESPAIS PREHILBERTIANS

## 1.- Definicions i propietats bàsiques.

### (a) Introducció

Generalització dels espais euclidians (espai i temps de la física clàssica).

Espais pre-hilbertians i de Hilbert (Mecànica quàntica).

Espais vectorials mètrics: euclidians, lorentians (Relativitat restringida).

### (b) Producte escalar: definició i propietats immediates

**Definició**. Un producte escalar definit sobre un espai vectorial complex (o real) $E$ és una llei de composició externa $g \; : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}\,(\mathbb{R})\;;\; (a,b) \longrightarrow g(a,b) \equiv \langle a \,|\, b\rangle$ , que satisfà:

(i) *Simetria hermítica*: $\forall\, a, b \in E$,

$$\langle a \,|\, b\rangle = \langle b \,|\, a\rangle^*$$

(ii) *Linealitat a la dreta*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\; \forall a, b, c \in E$,

$$\langle c \,|\, \alpha\, a + \beta\, b\rangle = \alpha\,\langle c \,|\, a\rangle + \beta\,\langle c \,|\, b\rangle$$

(iii) *És definida positiva no degenerada*: $\forall a \in E$,

$$a^2 \equiv \langle a \,|\, a\rangle \geq 0\;; \qquad \langle a \,|\, a\rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad a = 0$$

**Propietats immediates**:

(i) *Semi-linealitat a l'esquerra*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\; \forall a, b, c \in E$,

$$\langle \alpha\, a + \beta\, b \,|\, c\rangle = \alpha^*\,\langle a \,|\, c\rangle + \beta^*\,\langle b \,|\, c\rangle$$

(ii) *Regularitat*: $\langle a \,|\, b\rangle = 0\,,\; \forall b \in E \quad \longleftrightarrow \quad a = 0.$

(iii) Si $\langle a \,|\, b\rangle = \langle a \,|\, c\rangle\,,\; \forall a \in E \quad \longrightarrow \quad b = c.$

(iv) $\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,|\, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i^* \beta_j \langle v_i \,|\, w_j\rangle.$

**(c) Espai pre-Hilbert: definició i exemples**

**Definició**. Un espai pre-hilbertià és una parella $(E, g)$, on $E$ és un espai vectorial complex i $g \equiv \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ és un producte escalar definit en ell.

**Comentaris**:

(i) Quan l'espai vectorial $E$ és real tenim un espai pre-hilbertià real. Aleshores la simetria hermítica del producte escalar passaria a ser simetria (commutativitat), i la semi-linealitat a l'esquerra passaria a ser linealitat. Per tant seria lineal a dreta i esquerra (bilineal).

(ii) Un espai pre-hilbertià (real o complex) pot ser de dimensió finita o infinita.

(iii) Els espais pre-hilbertians reals de dimensió finita s'anomenen *espais vectorials euclidians*. Aleshores el producte escalar de dos vectors es denota $\langle a \,|\, b \rangle \equiv a \cdot b$.

**Exemples**:

(i) L'espai vectorial complex $\mathbb{C}^n$, amb el producte:

$$\langle a \,|\, b \rangle = \sum_{1=1}^{n} a_i^* b_i \,, \qquad a = (a_1, ..., a_n), \quad b = (b_1, ..., b_n) \; \in \; \mathbb{C}^n$$

(ii) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_n \equiv (\mathbb{R}^n, \cdot)$, amb el producte:

$$a \cdot b = \sum_{1=1}^{n} a_i b_i \,, \qquad a = (a_1, ..., a_n), \quad b = (b_1, ..., b_n) \; \in \; \mathbb{R}^n$$

(iii) L'espai vectorial complex $L^2(a, b)$ de les funcions complexes de quadrat integrable definides a l'interval (real) $[a, b]$, amb el producte:

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

**(d) Espai vectorial mètric euclidià i pseudo-euclidià.**

**Definició**. Una mètrica definida sobre un espai vectorial real de dimensió finita $E$ és una llei de composició externa $g \; : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; (a, b) \longrightarrow g(a, b) \equiv a \cdot b$, que és:

(i) *Simètrica*: $\forall \, a, b \in E$,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(ii) *Bilineal*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; \forall a, b, c \in E$,

$$c \cdot (\alpha \, a + \beta \, b) = \alpha \, c \cdot a + \beta \, c \cdot b$$

(iii) *No degenerada*:

$$a \cdot b = 0 \,, \; \forall b \in E \quad \longleftrightarrow \quad a = 0$$

**Definició**. Un espai vectorial mètric és una parella $(E, g)$, on $E$ és un espai vectorial real de dimensió finita i $g$ és una mètrica definida en ell.

**Definició**. Un espai vectorial euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que és definida positiva (producte escalar euclidià).

Un espai vectorial pseudo-euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que no és definida positiva (mètrica pseudo-euclidiana).

**Exemples**:

(i) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_n \equiv (\mathbb{R}^n, \cdot)$.

(ii) L'espai vectorial pseudo-euclidià $\mathbb{M}_2 \equiv (\mathbb{R}^2, \cdot)$, amb el producte:

$$a \cdot b = -a_0 b_0 + a_1 b_1 \,, \qquad a = (a_0, a_1), \quad b = (b_0, b_1)$$

(iii) L'*espai-temps de Minkowski* és l'espai vectorial pseudo-euclidià $\mathbb{M}_4 \equiv (\mathbb{R}^4, \eta)$, amb la mètrica de Minkowski:

$$\eta(a, b) = a \cdot b = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \,, \quad a = (a_0, a_1, a_2, a_3), \;\; b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

## 2.-Norma d'un vector

### (a) Definició de norma. Propietats

**Definició**. Siga $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ un espai vectorial prehilbertià. Anomenem norma d'un vector $v \in E$ al nombre real no negatiu:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle} = \sqrt{v^2}$$

**Exemple**: a l'espai vectorial físic $\mathbb{E}_3$ la norma d'un vector és el mòdul del vector, $\|\vec{v}\| = |\vec{v}|$.

**Propietats**:

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in E \,; \qquad \|v\| = 0 \quad \leftrightarrow \quad v = 0.$

(ii) $\|\alpha v\| = \alpha \|v\| \quad \forall v \in E \,, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

### (b) Desigualtats de Cauchy-Schwarz i de Minkowski

**Propietat** (desigualtat de Cauchy-Schswarz): Per a tota parella de vectors $a, b \in E$,

$$|\langle a \,|\, b \rangle| \;\leq\; \|a\| \|b\|$$

La igualtat se satisfà sii els vectors són col·lineals, $|\langle a \,|\, b \rangle| \;=\; \|a\| \|b\| \quad \leftrightarrow \quad a = \lambda b.$

**Propietat** (desigualtat triangular o de Minkowski): Per a tota parella de vectors $a, b \in E$,

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

A més, $\|a + b\| = \|a\| + \|b\| \quad \leftrightarrow \quad a = \lambda b, \; \lambda \in \mathbb{R}^+.$

**Definició**: Si $E$ és un espai prehilbertià real, l'angle entre dos vectors $a, b \in E$ és el real $\theta \equiv \angle(a, b) \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle a \,|\, b\rangle}{\|a\|\|b\|}$$

**Comentari**: una norma és un aplicació que associa a cada vector d'un espai vectorial $E$ un nombre real, i que satisfà les dues propietats de l'apartat (a) i la desigualtat triangular. Hem vist que tot producte escalar defineix una norma, és a dir, tot espai prehilbertià és un *espai vectorial normat*.

La norma defineix una *topologia*, estructura matemàtica que permet parlar d'entorns, successions i límits de successions.

## 3.- Ortogonalitat i sistemes ortonormals

### (a) Ortogonalitat de vectors i de subespais

**Definició**. Direm que dos vectors $a, b$ d'un espai prehilbertià $E$ són ortogonals si el seu producte escalar és nul:

$$a \perp b \qquad \leftrightarrow \qquad \langle a \,|\, b\rangle = 0$$

**Comentari**. A un espai pre-Hilbert real dos vectors són ortogonals si, i sols si, l'angle que formen els vectors és $\theta = \frac{\pi}{2}$. En aquest cas el concepte d'ortogonalitat coincideix amb el de perpendicularitat.

**Definició**. Direm que dos subespais vectorials $F_1, F_2$ d'un espai prehilbertià $E$ són ortogonals, $F_1 \perp F_2$, si cada vector de $F_1$ és ortogonal a qualsevol vector de $F_2$, és a dir,

$$\forall a \in F_1,\ \forall v \in F_2, \qquad \langle a \,|\, v\rangle = 0$$

**Propietat**: $F_1 \perp F_2 \quad \to \quad F_1 \oplus F_2$.

**Definició**. A un espai pre-Hilbert $E$, un conjunt de vectors $\{v_1, ..., v_p\}$ direm que és un sistema ortogonal si els vectors són ortogonals entre si dos a dos, és a dir,

$$\langle v_i \,|\, v_j\rangle = 0\,, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, ...p$$

**Teorema**: Un conjunt ortogonal de vectors no nuls és un sistema lliure.

**Corol·lari**: Siga un $E$ espai pre-Hilbert de dimensió finita $n$ i $B = \{v_1, ..., v_n\}$ un conjunt de $n$ vectors no nuls. Si el sistema $B$ és ortogonal, aleshores és una base.

**Exemple**: En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ és una base.

### (b) Bases ortonormals

**Definició**. Direm que un vector $v \in E$ és unitari si té norma unitat, és a dir, $\|v\| = 1$.

**Comentari**. Per a cada vector $v \in E$, $v \neq 0$, sempre és possible trobar un vector unitari $u$ proporcional a ell, $u = \dfrac{v}{\|v\|}$.

**Definició**. A un espai pre-Hilbert $E$, un conjunt de vectors $\{v_1, ..., v_p\}$ direm que és un sistema ortonormal si és ortogonal i els vectors són unitaris, és a dir,

$$\langle v_i \,|\, v_j \rangle = \delta_{ij}\,, \qquad i,j = 1, ..., p$$

**Corol·lari**. En un espai prehilbertià $E$ de dimensió finita $n$, un sistema ortonormal de $n$ vectors és base.

**Base ortonormal**. Si $\dim E = n$,

$$\{e_1, ..., e_n\} = \{e_i\}_{i=1}^{n} \qquad / \qquad \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

**Propietat**. Si $B = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ és una base ortonormal d'un espai prehilbertià $E$, aleshores les components d'un vector $v \in E$ en la base $B$ són les projeccions ortogonals $\alpha_i = \langle e_i \,|\, v \rangle$, és a dir,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, v \rangle e_i$$

**Exemples**:

(i) A l'espai prehilbertià $\mathbb{C}^n$, la base canònica és una base ortonormal.

(ii) A l'espai euclidià $\mathbb{E}_n$, la base canònica és una base ortonormal.

(iii) A l'espai euclidià $\mathbb{E}_2$, siga $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canònica. Aleshores:

$$\vec{v} = v_1\, \vec{e}_1 + v_2\, \vec{e}_2 = |\vec{v}|(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, v_2)\,, \qquad \theta \equiv \angle(\vec{e}_1, \vec{v})$$

(iv) A l'espai euclidià $\mathbb{E}_3$, siga $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canònica. Aleshores:

$$\vec{v} = |\vec{v}|(\cos\theta_1\, \vec{e}_1 + \cos\theta_2\, \vec{e}_2 + \cos\theta_3\, \vec{e}_3)\,, \qquad \theta_i \equiv \angle(\vec{e}_i, \vec{v})$$

**Definició**: si $B = \{v_1, ..., v_n\}$ és una base d'un espai prehilbertià $(E, g)$, anomenem components del producte escalar $g$ en el base $B$ (o matriu de Gram) a

$$g_{ij} = g(v_i, v_j) \equiv \langle e_i \,|\, e_j \rangle\,, \qquad i,j = 1, ..., n$$

**Propietat**: la matriu de Gram determina el producte de dos vectors arbitraris. Si $a, b \in E$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\,,\ b = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\,, \qquad \langle a \,|\, b \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i \,|\, e_j \rangle \alpha_i^* \beta_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} \alpha_i^* \beta_j$$

Si la base $B = \{e_1, ..., e_n\}$ és ortonormal, la matriu de Gram és la matriu identitat:

$$g_{ij} = \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}\,, \qquad \langle a \,|\, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i$$

**Exemples**:

(i) A l'espai euclidià $\mathbb{E}_n$, en base ortonormal: $a \cdot b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$.

(ii) A l'espai físic vectorial $\mathbb{R}^3$, en base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + zz'\,, \qquad |\vec{v}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

## (c) Subespai ortogonal i projectors ortogonals

**Definició**. Siga $F$ un subespai vectorial d'un espai prehilbertià $E$. El conjunt de vectors ortogonals a $F$ és un subespai vectorial i el denotem $F^\perp$,

$$F^\perp = \{a \in E \;/\; \langle a \,|\, v \rangle = 0\,, \quad \forall v \in F\}$$

**Propietats**:

(i) $F \oplus F^\perp$.

(ii) $F \subset F^{\perp\perp}$.

(iii) $F_1 \subset F_2 \quad \to \quad F_2^\perp \subset F_1^\perp$.

(iv) $F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$

**Propietat**. Si $F$ és de dimensió finita i $B = \{v_1, ..., v_p\}$ és una base de $F$,

$$F^\perp = \{a \in E \;/\; \langle a \,|\, v_i \rangle = 0\,, \quad \forall v_i \in B\}$$

**Exemples**:

(i) En $\mathbb{E}_3$, si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ és una base ortonormal, aleshores $\langle\{\vec{k}\}\rangle^\perp = \langle\{\vec{i}, \vec{j}\}\rangle$.

(ii) En $\mathbb{E}_3$, si $F = \{(x, y, z) \;/\; x+y = 0\}$, aleshores $F^\perp = \{(x, y, z) \;/\; x-y = 0, z = 0\}$.

(iii) A l'espai pre-Hilbert $\mathbb{C}^3$, si $F = \langle\{(1, i, 1), (i, 0, -i))\}\rangle$, aleshores $F^\perp = \langle\{(1, -2i, 1)\}\rangle$.

**Propietat**. Si $S = \{e_1, ..., e_p\}$ és un sistema ortonormal i $F = \langle S \rangle$, aleshores $F$ i $F^\perp$ són complementaris i el projector sobre $F$ és

$$\mathcal{P}(v) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i \,|\, v \rangle e_i$$

**Definició**. Si $E = F \oplus F^\perp$, al projector sobre $F$ ($F^\perp$) l'anomenem projector ortogonal sobre $F$ ($F^\perp$).

**Lema**. Si $S = \{e_1, ..., e_p\}$ és un sistema ortonormal i $v \notin \langle S \rangle$, aleshores existeix un sistema ortonormal $\bar{S} = \{e_1, ..., e_{p+1}\}$ tal que $\langle \bar{S} \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle$. El vector $e_{p+1}$ està donat per

$$e_{p+1} = \frac{w}{\|w\|}\,, \qquad w = v - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i \,|\, v \rangle e_i$$

**Teorema**. Si $W = \{v_1, ..., v_p\}$ és un sistema lliure, aleshores existeix un sistema ortonormal $S = \{e_1, ..., e_p\}$ tal que $\langle S\rangle = \langle W\rangle$.

**Corol·lari**. Si $F$ és un subespai vectorial de dimensió finita $p$, aleshores:

(i) $F$ admet una base ortonormal $B = \{e_1, ..., e_p\}$.

(ii) $E = F \oplus F^\perp$.

(iii) El projector ortogonal sobre $F$ és $\mathcal{P}(v) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i \,|\, v\rangle e_i$.

**Exemple**: A *l'espai físic* vectorial $\mathbb{E}_3$ és a vegades convenient descompondre un vector $\vec{v}$ en suma d'un vector en la direcció d'un vector unitari donat $\vec{e}$ i d'un altre perperdicular (és el que fem amb l'acceleració en considerar les acceleracions tangencial i normal). Siga $\|\vec{e}\| = 1$, aleshores $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp\,, \quad \vec{v}_\parallel = (\vec{e}\cdot\vec{v})\vec{e}, \quad \vec{v}_\perp = \vec{v} - (\vec{e}\cdot\vec{v})\vec{e}, \quad \vec{v}_\parallel \in \langle\{\vec{e}\}\rangle\,, \quad \vec{v}_\perp \in \langle\{\vec{e}\}\rangle^\perp$$

**Corol·lari**. En tot espai prehilbertià $E$ de dimensió finita $n$ existeixen bases ortonormals.

## (d) Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Basat en el lema i teorema anteriors tenim el *mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt*:

Siga $\{v_1, ..., v_p\}$ un sistema lliure. A partir d'ell obtenim el sistema ortonormal $\{e_1, ..., e_p\}$,

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|}\,, && w_1 = v_1 \\
e_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|}\,, && w_2 = v_2 - \langle e_1 \,|\, v_2\rangle e_1 = v_2 - \frac{\langle w_1 \,|\, v_2\rangle}{w_1^2} w_1 \\
e_k &= \frac{w_k}{\|w_k\|}\,, && w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i \,|\, v_k\rangle e_i = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle w_i \,|\, v_k\rangle}{w_i^2} w_i
\end{aligned}$$

**Exemples**:

(i) En $\mathbb{R}^5$, siga $W = \{(1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0), (0,0,1,0,1)\}$. Una base ortonormal del subespai $\langle W\rangle$ és

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,1,0,2) \right\}$$

(ii) A l'espai dels polinomis de coeficients reals i variable real $P[x]$, amb el producte escalar $\langle p \,|\, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$, una base ortonormal dels polinomis de grau menor o igual a 1 és $B = \{1, x - \frac{1}{2}\}$.

4.- Espais vectorials lorentzians.

## (a) Espai vectorial mètric.

**Definició**. Una mètrica definida sobre un espai vectorial real de dimensió finita $E$ és una llei de composició externa $g\ : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $(a,b) \longrightarrow g(a,b) \equiv a \cdot b$ , que és:

(i) *Simètrica*: $\forall\, a, b \in E$,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(ii) *Bilineal*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall a, b, c \in E$,

$$c \cdot (\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\, c \cdot a + \beta\, c \cdot b$$

(iii) *No degenerada*:

$$a \cdot b = 0\,,\ \forall b \in E \quad \longleftrightarrow \quad a = 0$$

**Definició**. Un espai vectorial mètric és una parella $(E, g)$, on $E$ és un espai vectorial real de dimensió finita i $g$ és una mètrica definida en ell.

**Definició**. Un espai vectorial euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que és definida positiva (producte escalar euclidià).
Un espai vectorial pseudo-euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que no és definida positiva (mètrica pseudo-euclidiana).

**Exemples**:

(i) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_n \equiv (\mathbb{R}^n, \cdot)$.
(ii) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_3 \equiv (\mathbb{R}^3, \cdot)$ és *l'espai físic* vectorial de la física clàssica.
(iii) L'espai vectorial pseudo-euclidià $\mathbb{M}_2 \equiv (\mathbb{R}^2, \cdot)$, amb el producte:

$$a \cdot b = -a_0 b_0 + a_1 b_1\,, \qquad a = (a_0, a_1), \quad b = (b_0, b_1)$$

(iv) L'*espai-temps de Minkowski* és l'espai vectorial pseudo-euclidià $\mathbb{M}_4 \equiv (\mathbb{R}^4, \eta)$, amb la mètrica de Minkowski:

$$\eta(a,b) = a \cdot b = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,, \quad a = (a_0, a_1, a_2, a_3),\ \ b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

**Definició**. Siga $(E, g)$ un espai vectorial mètric. Direm que un vector $v \in E,\ v \neq 0$:

(i) És temporal si $v^2 < 0$.
(ii) És isòtrop si $v^2 = 0$.
(iii) És espacial si $v^2 > 0$.

**Definició**. Siga $(E, g)$ un espai vectorial mètric. Anomenem *con de llum* al conjunt:

$$C \equiv \{v \in E \ / \ v^2 = g(v,v) = 0\}$$

**Propietats**:

(i) Els vectors $v$ i $\alpha v$ tenen el mateix caràcter causal (temporal, isòtrop, espacial).
(ii) El con de llum està format per unió de rectes vectorials, però no és un subespai vectorial
(iii) Si existeix un vector espacial $v \in E$, aleshores $g$ és euclidiana si, i sols si, $C = 0$.

**Exemples**:

(i) El con en $\mathbb{M}_2$. Exemples de vectors espacials i temporals.
(ii) El con en $\mathbb{M}_3$.
(iii) El con en $\mathbb{M}_4$. Exemples de vectors espacials, isòtrops i temporals.

**(b) Bases ortonormals en espais pseudo-euclidians. Espais lorentzians**

Cometaris: ortogonalitat de vectors i de subespais
F amb ortogonal no és suma directa
Mòdul no és norma
Base ortonormal
Teorema de existència
Teorema de Sylvester
Concepte de signatura i espai lorentzians

**(c) Espai vectorial de Minkowski**

propietats bàsiques: Cauchy-Schwarz i Minkowski. Angle hiperbòlic
Consequències físiques.

## 5.- L'espai pre-Hilbert $L^2(a, b)$

**(a) Bases ortonormals en espais pre-Hilbert de dimensió infinita**

**Comentaris**:

(i) Al tema anterior demostràrem que un espai vectorial de dimensió finita admet bases amb $n$ vectors. La existència de bases (amb infinits vectors) en espais vectorials de dimensió infinita també pot demostrar-se. Aquestes *bases lineals* o de Hamel són tals que qualsevol vector de l'espai vectorial s'escriu com a combinació lineal (finita) dels vectors de la base.
(ii) En aquest tema hem demostrat que qualsevol espai prehilbertià de dimensió finita admet bases ortonormals. En alguns espais prehilbertians de dimensió infinita existeixen les anomenades *bases (ortonormals) de Hilbert*, que són còmodes per a treballar. Les bases de Hilbert no són bases lineals ja que tot vector pot escriure's com combinació lineal infinita (numerable o no) dels vectors de la base.

**Definició**. Un *espai de Hilbert* és un espai pre-hilbertià complet, és a dir, tota successió de Cauchy és convergent,

$$x_n \in E \ / \ \|x_{n+1} - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in E$$

**Definició**. Si $E$ és un espai de Hilbert, el conjunt (infinit) de vectors $B = \{e_i\}_{i\in I}$ direm que és una base de Hilbert si

(i) $\langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}\,, \qquad \forall i, j \in I.$

(ii) $a = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i\,, \qquad \forall a \in E.$

**Definició**. Direm que un espai de Hilbert $E$ és separable si existeix una base de Hilbert numerable, és a dir, existeix $B = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

(i) $\langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}\,, \qquad \forall i, j \in I.$

(ii) $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\,, \qquad \forall a \in E.$

### (b) L'espai de les funcions complexes de variable real, de quadrat integrable

**Definició**. Una funció $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, direm que és de quadrat integrable si

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \,<\, \infty$$

El conjunt de les funcions de quadrat integrable el denotem $L^2(a,b)$.

**Propietats**:

(i) $L^2(a,b)$ és un espai vectorial de dimensió infinita amb les operacions usuals suma de funcions i producte d'un escalar per una funció.

(ii) $L^2(a,b)$ és un espai prehilbertià amb el producte escalar:

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x)\, dx$$

Notem que la propietat de ser una funció de quadrat integrable ens diu que $\|f\| < \infty$.

**Teorema**. L'espai $L^2(a,b)$ és un espai de Hilbert separable, és a dir, és un espai prehilbertià complet amb una base de Hilbert numerable: $\exists\ B = \{\Phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ /

(i) $\displaystyle\int_a^b \Phi_i^*(x)\Phi_j(x)\, dx = \delta_{ij}\,, \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}.$

(ii) $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_i(x)\,, \qquad \forall f(x) \in L^2(a,b).$

### (c) Desenvolupament de Fourier

**Propietat**. En $L^2(0,2\pi)$, el conjunt de funcions $\{1,\, \cos kx,\, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ és un sistema ortogonal.

**Teorema** (de Dirichlet). En $L^2(0,2\pi)$, el sistema ortonormal $B = \{e_0,\, e_n,\, \epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \qquad e_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\,, \qquad \epsilon_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

és una base de Hilbert, és a dir, $\forall f(x) \in L^2(0,2\pi)$,

$$f(x) = a_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e_n + b_n \epsilon_n)$$

**Definició**. L'expressió de $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ en la base de Hilbert $B = \{e_0,\ e_n,\ \epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ s'anomena *desenvolupament en serie de Fourier* de la funció $f(x)$, i a les components $(a_0, a_n, b_n)$, *components de Fourier*.

Les components de Fourier d'una funció $f(x)$ prenen l'expressió:

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle e_0 \,|\, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \langle e_n \,|\, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ b_n &= \langle \epsilon_n \,|\, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx \end{aligned}$$

### (d) Polinomis de Legendre, de Laguerre i de Hermite

De manera semblant al desenvolupament en serie de Fourier, hi ha altres desenvolupaments en serie que utilitzen bases de Hilbert formades per polinomis:

(i) *Polinomis de Legendre*: base ortogonal per al producte de $L^2(-1, 1)$

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f^*(x) g(x)\, dx$$

(ii) *Polinomis de Laguerre*: base ortogonal per al producte

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{0}^{\infty} f^*(x) g(x) e^{-x}\, dx$$

(iii) *Polinomis de Hermite*: base ortogonal per al producte

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) e^{-x^2}\, dx$$