Tema VI.– TENSORS. TEORIA ALGEBRAICA

1.- Espai dual

(a) Formes lineals i espai vectorial dual E^*

Definició: Una forma lineal α sobre l'espai vectorial E és una aplicació lineal de E en $\mathbb{R}$,

$$\alpha \ : E \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ ; \qquad v \ \longrightarrow \ \alpha(v) \in \mathbb{R}$$

Una forma lineal α queda determinada per la seua actuació sobre una base $\{e_i\}$. Si $v = v^i e_i$, aleshores $\alpha(v) = v^i \alpha(e_i)$.

Exemples:

- *Forma lineal sobre* $\mathbb{R}^3$: $\alpha(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2 - 2x^3$.
- *La forma lineal sobre* $\mathbb{R}^3$ *més general*: $\alpha(x^1, x^2, x^3) = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. Aquest resultat és el producte matricial de la matriu fila $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ per la matriu columna $(x^1\, x^2\, x^3)^T$. Així, si els vectors els representem amb matrius columna, les formes lineals les podem representar com matrius fila.

Espai dual E^*: és el conjunt de les formes lineals sobre l'espai vectorial E.

Propietat. El conjunt E^* de les formes lineals té estructura d'espai vectorial real amb les operacions:

- *Suma*: si $\alpha, \beta \in E^*$, $\alpha + \beta \in E^*$; $(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$.
- *Producte per un escalar*: si $\alpha \in E^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \alpha \in E^*$; $(\lambda \cdot \alpha)(v) = \lambda \alpha(v)$.

(b) Base dual algebraica

Propietat. Donada una base $\{e_j\}$ de l'espai vectorial n-dimensional E, definim les formes lineals θ^i:

$$\theta^i(e_j) = \delta^i_j$$

Aleshores el conjunt de les n formes lineals $\{\theta^i\}$ és una base de E^* que s'anomena *base dual algebraica* de la base $\{e_j\}$.

Conseqüència: l'espai vectorial dual és de dimensió n, $\dim E^* = \dim E$.

Exemples:

- *Base dual de la base canònica*: en $\mathbb{R}^2$, la base dual de la base canònica $u_1 = (1,0)^T, u_2 = (0,1)^T$ està formada per les formes lineals que representades com a matrius fila són $\omega^1 = (1,0),\ \omega^2 = (0,1)$.
  Aquest resultat és generalitzable per a $\mathbb{R}^n$: la base dual de la base canònica és la base canònica.
- *Un exemple amb una base no canònica*: en $\mathbb{R}^2$, la base dual de la base $e_1 = (1,0)^T,\ e_2 = (1,1)^T$ està formada per les matrius fila $\theta^1 = (1,-1),\ \theta^2 = (0,1)$.

Propietat. Donada una base $\{e_j\}$, siga $\{\theta^i\}$ la base dual algebraica. Si $v \in E$, $v = v^i e_i$, aleshores $v^i = \theta^i(v)$.

(c) Els vectors com formes lineals sobre E^*

Donat un vector $v \in E$, podem definir la següent forma lineal sobre E^*,

$$v \,:\, E^* \longrightarrow \mathbb{R} \;; \qquad \alpha \longrightarrow v(\alpha) = \alpha(v) \in \mathbb{R}$$

Propietat. Existeix un isomorfisme canònic entre E^{**} i E,

$$J \,:\, E \longrightarrow E^{**} \;; \qquad v \longrightarrow J(v) = f \;/\; \forall \alpha \in E^*,\; f(\alpha) = \alpha(v)$$

2.- Aplicacions multilineals. Tensors covariants i contravariants

(a) Definició d'aplicació multilineal. Tensors covariants

Una aplicació T de E^p en $\mathbb{R}$ s'anomena multilineal (p-lineal) si és lineal en cada component, és a dir,

$$T \,:\, E^p \longrightarrow \mathbb{R} \;; \qquad (v_1, ..., v_p) \longrightarrow T(v_1, ..., v_p) \in \mathbb{R}$$

$$T(v_1, ..., \mu u + \nu w, ..., v_p) = \mu\, T(v_1, ..., u, ..., v_p) + \nu\, T(v_1, ..., w, ..., v_p)$$

Definició: una aplicació p-lineal sobre E l'anomenem *tensor covariant d'ordre p*.

Exemples:

- Les formes lineals són els tensors covariants d'ordre 1. Per això els elements de E^* s'anomenen també vectors covariants o *co-vectors*.
- Les aplicacions bilineals són els tensors covariants d'ordre 2. Una *mètrica* g és un tensor covariant d'ordre 2 que defineix un producte escalar,

$$g(u, v) = \langle u | v \rangle$$

(b) Tensors contravariants i tensors d'ordre (p, q)

Definició: un *tensor contravariant d'ordre p* és una aplicació p-lineal sobre E^*.

Exemple: els vectors $v \in E$ són els tensors contravariants d'ordre 1. Per això els vectors de E s'anomenen també vectors contravariants o *contra-vectors*.

Definició: Un tensor d'ordre (p, q) (p vegades covariant i q vegades contravariant) és una aplicació multilineal de $E^p \times (E^*)^q$ en $\mathbb{R}$.

Els tensors covariants són els d'ordre $(p, 0)$ i el contravariants són els d'ordre $(0, q)$. Si $pq \neq 0$, aleshores es diu que és un *tensor mixt*.

Definició: Els nombres reals $\mathbb{R}$ es consideren tensors d'ordre $(0, 0)$ i s'anomenen *escalars*.

Exemple: un endomorfisme A de l'espai vectorial E pot interpretar-se com un tensor mixt d'ordre $(1, 1)$, amb el primer factor contravariant i el segon covariant. Si $v \in E$, $\alpha \in E^*$, $A(\alpha, v) = \alpha[A(v)]$.

Nota: un tensor mixt pot tindre els factors co- i contra- barrejats i, aleshores, el tensor és diferent. Per exemple, un tensor $(1,1)$ pot ser co-contra o contra-co. Per simplicitat, quan escrivim les propietats tensorials, considerarem que tots els factors co- estan davant.

(c) L'espai vectorial $T_p^q E$ dels tensors d'ordre (p,q)

Notació. Denotem per $T_p^q E$ el conjunt de tots els tensors d'ordre (p,q).

Propietat. El conjunt dels tensors $T_p^q E$ té estructura d'espai vectorial amb les operacions:

- *Suma*: si $T, S \in T_p^q E$, $T + S \in T_p^q E$; $(T+S)(\bar{v},\bar{\alpha}) = T(\bar{v},\bar{\alpha}) + S(\bar{v},\bar{\alpha})$.
- *Producte per un escalar*: si $T \in T_p^q E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot T \in T_p^q E$; $(\lambda \cdot T)(\bar{v},\bar{\alpha}) = \lambda T(\bar{v},\bar{\alpha})$.

on $\bar{v} \in E^p$, $\bar{\alpha} \in (E^*)^q$.

(d) Producte tensorial. Àlgebra tensorial

Definició: el *producte tensorial* de dos tensors covariants $P \in T_p E$, $Q \in T_q E$, és el tensor $P \otimes Q \in T_{p+q} E$ definit per:

$$(P \otimes Q)(\bar{u},\bar{v}) = P(\bar{u})\, Q(\bar{v})\,, \qquad \bar{u} \in E^p\,,\ \bar{v} \in E^q\,.$$

Definició: De manera semblant es defineix el producte tensorial de dos tensors contravariants i de dos tensors mixtes.

Exemples:

- El producte tensorial de dos co-vectors α i β és el tensor 2-covariant $\alpha \otimes \beta$, definit:

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v)\,, \qquad u, v \in E\,.$$

- El producte tensorial de dos contra-vectors u i v és el tensor 2-contravariant $u \otimes v$, definit:

$$(u \otimes v)(\alpha,\beta) = \alpha(u)\beta(v)\,, \qquad \alpha, \beta \in E^*\,.$$

- El producte tensorial d'un covector α i un contra-vector v és el tensor mixt $(1,1)$ $\alpha \otimes v$, definit:

$$(\alpha \otimes v)(u,\beta) = \alpha(u)\beta(v)\,, \qquad u \in E,\ \beta \in E^*\,.$$

Propietats del producte tensorial:

- *Associativa*: $(P \otimes Q) \otimes R = P \otimes (Q \otimes R)$.
- *Neutre*: és l'escalar unitat, $P \otimes 1 = 1 \otimes P = P$.

Definició: El conjunt de tots els tensors (de qualsevol ordre) amb l'operació producte tensorial s'anomena *àlgebra tensorial*.

3.- BASES DE T^q_pE. COMPONENTS D'UN TENSOR

(a) Bases i dimensió de T^q_pE

Base dels tensors covariants: siga $\{e_j\}$ una base de E i $\{\theta^i\}$ la base dual. Aleshores el conjunt de tensors d'ordre p,

$$\mathbf{B}_p \equiv \{\theta^{i_1} \otimes ... \otimes \theta^{i_p}\}^n_{i_k=1}$$

és una base dels tensors p vegades covariants.

Base dels tensors contravariants: siga $\{e_j\}$ una base de E. Aleshores el conjunt de tensors d'ordre p,

$$\mathbf{B}^p \equiv \{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}\}^n_{i_k=1}$$

és una base dels tensors p vegades contravariants.

Base dels tensors mixtes: siga $\{e_j\}$ una base de E i $\{\theta^i\}$ la base dual. Aleshores el conjunt de tensors d'ordre (p,q),

$$\mathbf{B}^q_p \equiv \{\theta^{i_1} \otimes ... \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}\}^n_{i_k,j_l=1}$$

és una base dels tensors mixtes d'ordre (p,q).

Propietat: L'espai vectorial T^q_pE dels tensors d'ordre (p,q) és de dimensió n^{p+q}.

Exemples. Si E és de dimensió 3 i $\{e_j\}$ i $\{\theta^i\}$ bases (duals):

– *Base dels tensors 2-covariants* ($\dim T_2E = 9$):

$$\{\theta^1 \otimes \theta^1,\ \theta^1 \otimes \theta^2,\ \theta^1 \otimes \theta^3,\ \theta^2 \otimes \theta^1,\ \theta^2 \otimes \theta^2,\ \theta^2 \otimes \theta^3,\ \theta^3 \otimes \theta^1,\ \theta^3 \otimes \theta^2,\ \theta^3 \otimes \theta^3\}$$

– *Base dels tensors 2-contravariants* ($\dim T^2E = 9$):

$$\{e_1 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_2,\ e_1 \otimes e_3,\ e_2 \otimes e_1,\ e_2 \otimes e_2,\ e_2 \otimes e_3,\ e_3 \otimes e_1,\ e_3 \otimes e_2,\ e_3 \otimes e_3\}$$

– *Base dels tensors mixtes* $(1,1)$ ($\dim T^1_1E = 9$):

$$\{\theta^1 \otimes e_1,\ \theta^1 \otimes e_2,\ \theta^1 \otimes e_3,\ \theta^2 \otimes e_1,\ \theta^2 \otimes e_2,\ \theta^2 \otimes e_3,\ \theta^3 \otimes e_1,\ \theta^3 \otimes e_2,\ \theta^3 \otimes e_3\}$$

(b) Components d'un tensor en una base

Definició: a les components d'un tensor covariant S en la base $\mathbf{B}_p$ les anomenarem components del tensor en la base $\{e_j\}$. Si $S_{i_1,...,i_p}$ són les components del tensor p-covariant S en la base $\{e_j\}$,

$$S = S_{i_1,...,i_p}\, \theta^{i_1} \otimes ... \otimes \theta^{i_p}$$

Definició: de la mateixa manera anomenarem components d'un tensor contravariant T o mixt Q en la base $\{e_j\}$ a les components del tensor en la base $\mathbf{B}^p$ o $\mathbf{B}^q_p$,

$$T = T^{i_1,...,i_p}\, e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}\,, \qquad Q = Q^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p}\, \theta^{i_1} \otimes ... \otimes \theta^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$$

Propietat:

$$S_{i_1,...,i_p} = S(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) \,, \quad T^{i_1,...,i_p} = T(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_p}) \,, \quad Q^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} = Q(e_{i_1}, ..., e_{i_p}, \theta^{j_1}, ..., \theta^{j_q})$$

Exemples:

- *Components d'una forma lineal*: $\alpha = \alpha_i \theta^i$, $\alpha_i = \alpha(e_i)$.
- *Components d'un vector*: $v = v^i e_i$, $v^i = v(\theta^i) = \theta^i(v)$.
- *Components d'un endomorfisme de* E: $A = A^i{}_j \, e_i \otimes \theta^j$,

$$A^i{}_j = A(\theta^i, e_j) = \theta^i[A(e_j)] = [A(e_j)]^i; \qquad A(e_j) = A^i{}_j e_i \,.$$

  Les components d'un endomorfisme com a tensor coincideixen amb la matriu de l'endomorfisme.
- *Components de l'endomorfisme identitat*: $I^i{}_j = [I(e_j)]^i = [e_j]^i = \delta^i_j$.
- *Components d'un 2-cotensor*: $g = g_{ij} \, \theta^i \otimes \theta^j$, $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.
  Si g és una mètrica, la matriu (g_{ij}) s'anomena *matriu de Gram*.

(c) Expressió en components de l'actuació d'un tensor com aplicació multilineal

Tensor p-covariant: $T(v_1, ..., v_p) = T_{i_1,...,i_p} v_1^{i_1} ... v_p^{i_p}$.

Tensor q-contravariant: $T(\alpha^1, ..., \alpha^q) = T^{i_1,...,i_q} \alpha^1_{i_1} ... \alpha^q_{i_q}$.

Tensor d'ordre (p,q): $T(v_1, ..., v_p, \alpha^1, ..., \alpha^q) = T^{i_1,...,i_q}_{j_1,...,j_p} v_1^{j_1} ... v_p^{j_p} \alpha^1_{i_1} ... \alpha^q_{i_q}$.

Exemples:

- *Co-vector actuant sobre contra-vector*: $\alpha(v) = \alpha_i v^i$.
- *Endomorfisme*: $[A(v)]^i = A^i{}_j v^j$.
- *Mètrica*: $\langle u | v \rangle = g(u, v) = g_{ij} u^i v^j$.

(d) Expressió en components de les operacions amb tensors

Components de la suma: $(T + S)_{i_1,...,i_p} = T_{i_1,...,i_p} + S_{i_1,...,i_p}$.

Components del producte per un escalar: $(\mu \cdot T)_{i_1,...,i_p} = \mu \, T_{i_1,...,i_p}$.

Components del producte tensorial: $(S \otimes T)_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} = S_{i_1,...,i_p} T_{j_1,...,j_q}$.

Nota: propietats semblants se satisfan per a tensors contravariants i mixtes.

Exemples:

- *Suma de vectors*: $(u + v)^i = u^i + v^i$.
- *Suma de covectors*: $(\alpha + \beta)_i = \alpha_i + \beta_i$.
- *Producte tensorial de dos covectors*: $(\alpha \otimes \beta)_{ij} = \alpha_i \beta_j$.
- *Un exemple d'endomorfisme.* L'operador $A = u \otimes \alpha$ té per imatge la recta vectorial generada per u, $A(v) = \alpha(v) u$. La matriu de l'operador és: $A^i{}_j = u^i \alpha_j$.

4.- Fórmula de canvi de base

(a) **Canvi de base de vectors i covectors**

Matriu canvi de base: siguen $\{e_i\}$ i $\{\tilde{e}_i\}$ dues bases de E, i siga $(B^i{}_j)$ la matriu canvi de base:

$$\tilde{e}_i = B^j{}_i \, e_j \, .$$

Matriu canvi de bases duals. Les bases duals $\{\theta^i\}$ i $\{\tilde{\theta}^i\}$ estan relacionades per una matriu canvi de base $(C_k{}^i)$ que és la transposada de la inversa de la matriu $(B^i{}_j)$, és a dir,

$$\tilde{\theta}^i = C_j{}^i \, \theta^j \qquad C_k{}^i \, B^k{}_j = \delta^i_j \, .$$

Canvi de base d'un vector. Siguen v^i i $\tilde{v}^i$ les components d'un vector v en les bases $\{e_i\}$ i $\{\tilde{e}_i\}$, i siga $(B^i{}_j)$ la matriu canvi de base, aleshores:

$$v^j = B^j{}_i \, \tilde{v}^i \, , \qquad \tilde{v}^j = (B^{-1})^j{}_i \, v^i \, .$$

Canvi de base d'un covector. Siguen α_i i $\tilde{\alpha}_i$ les components d'un covector α en les bases $\{\theta^i\}$ i $\{\tilde{\theta}^i\}$, i siga $(C_j{}^i)$ la transposada de la inversa de la matriu canvi de base, aleshores:

$$\alpha_j = C_i{}^j \tilde{\alpha}_j = (B^{-1})^j{}_i \, \tilde{\alpha}_j \, , \qquad \tilde{\alpha}_j = B^i{}_j \, \alpha_i \, .$$

(b) **Canvi de base d'un tensor arbitrari**

Canvi de base d'un tensor d'ordre (p, q). Siguen $Q^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$ i $\tilde{Q}^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$ les components d'un tensor Q en les bases $\{e_i\}$ i $\{\tilde{e}_i\}$, i siga $(B^i{}_j)$ la matriu canvi de base, aleshores:

$$Q^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = B^{j_1}_{\ \ k_1} \ldots B^{j_q}_{\ \ k_q} \, (B^{-1})^{l_1}_{\ \ i_1} \ldots (B^{-1})^{l_p}_{\ \ i_p} \, \tilde{Q}^{k_1,\ldots,k_q}_{l_1,\ldots,l_p} \, ,$$

$$\tilde{Q}^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p} = (B^{-1})^{j_1}_{\ \ k_1} \ldots (B^{-1})^{j_q}_{\ \ k_q} \, B^{l_1}_{\ \ i_1} \ldots B^{l_p}_{\ \ i_p} \, Q^{k_1,\ldots,k_q}_{l_1,\ldots,l_p} \, .$$

Canvi de base d'un endomorfisme. Siguen $A^i{}_j$ i $\tilde{A}^i{}_j$ les components d'un operador A en les bases $\{e_i\}$ i $\{\tilde{e}_i\}$, i siga $(B^i{}_j)$ la matriu canvi de base, aleshores:

$$A^i{}_j = B^i{}_k \, \tilde{A}^k{}_l \, (B^{-1})^l{}_j \, , \qquad \tilde{A}^i{}_j = (B^{-1})^i{}_k \, A^k{}_l \, B^l{}_j \, .$$

Propietat: el determinant d'un endomorfisme és (un escalar) independent de base.

Canvi de base d'una mètrica. Siguen $g = g_{ij}$ i $g = \tilde{g}_{ij}$ les components d'una mètrica g en les bases $\{e_i\}$ i $\{\tilde{e}_i\}$, i siga $(B^i{}_j)$ la matriu canvi de base, aleshores:

$$\tilde{g}_{ij} = B^k{}_i \, B^l{}_j \, g_{kl} \, , \qquad g_{ij} = (B^{-1})^k{}_i \, (B^{-1})^l{}_j \, \tilde{g}_{kl} \, .$$

Propietat: el determinant d'una mètrica no és (un escalar) independent de base. El signe del determinant d'una mètrica és independent de base.

5.- Altres operacions amb tensors

(a) Contracció tensorial. Expressió en components

Propietat. Siguen $\{e_j\}$ i $\{\theta^i\}$ bases duals. Si Q és un tensor d'ordre (p, q), aleshores l'aplicació $c(Q)$,

$$c(Q)(v_1, ..., v_{p-1}, \alpha^1, ..., \alpha^{q-1}) = Q(v_1, ..., v_{p-1}, e_i, \alpha^1, ..., \alpha^{q-1}, \theta^i) \,,$$

és un tensor d'ordre $(p-1, q-1)$ que és independent de la base elegida.

Definició: el tensor $c(Q)$ s'anomena contracció tensorial del tensor Q.

Components de la contracció tensorial: si $Q_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ són les components del tensor Q en una base, les components de la contracció tensorial $c(Q)$ en la mateixa base són:

$$c(Q)_{i_1 \dots i_{p-1}}^{j_1 \dots j_{q-1}} = Q_{i_1 \dots i_{p-1} k}^{j_1 \dots j_{q-1} k} \,.$$

La contracció tensorial pot fer-se considerant un índex covariant i un altre contravariant arbitraris (no necessàriament els dos últims). Per exemple, per a un tensor T d'ordre $(2, 1)$ tenim dues contraccions tensorials diferents: si T_{ij}^k són les components del tensor, podem obtenir per contracció tensorial dos covectors de components T_{ik}^k i T_{kj}^k respectivament.

Exemple: la traça d'un endomorfisme A és l'escalar (independent de base) definit per la contracció tensorial:

$$\mathrm{tr}\, A \equiv c(A) = A^k{}_k \,.$$

(b) Permutació d'índex. Tensors simètrics i antisimètrics

Definició: Donat un tensor p-covariant T i una permutació $\sigma \in S_p$, definim el tensor p-covariant $\sigma(T)$,

$$\sigma(T)(v_1, ..., v_p) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \,.$$

Expressió en components: $\sigma(T)_{i_1 \dots i_p} = T_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}$.

Nota: de manera semblant podem associar tensors "permutats"a tensors contravariants o mixtes.

Tensor simètric: un tensor T és completament simètric si

$$\sigma(T) = T, \qquad \forall\, \sigma \in S_p \,.$$

Tensor antisimètric: un tensor T és completament antisimètric si

$$\sigma(T) = sign(\sigma) T, \qquad \forall\, \sigma \in S_p \,.$$

Nota: Un tensor pot ser simètric o antisimètric en un subconjunt d'índex. Per exemple, un tensor 3-covariant T és simètric (respectivament, antisimètric) en els dos primers índex si les seues components satisfan $T_{ijk} = T_{jik}$ (respectivament, $T_{ijk} = -T_{jik}$).

Exemples de tensor simètric d'ordre 2: *Mètrica* que defineix un producte escalar, $g(x,y) = \langle x|y \rangle$.

Exemple de tensor antisimètric d'ordre 3 (a l'espai físic $\mathbb{R}^3$): l'element de volum η és el tensor que associa a tres vectors el seu producte mixt,

$$\eta(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3)$$

Les components de η en una base ortonormal són $\eta_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

Propietat: tot tensor de segon ordre T es descompon de forma única en suma d'un tensor simètric S i un altre antisimètric A. Si τ és la transposició de S_2,

$$T = S + A\,, \qquad S = \frac{1}{2}(T + \tau(T)), \quad A = \frac{1}{2}(T - \tau(T))\,.$$

6.- Tensors en un espai mètric

(a) Mètrica i bases ortonormals

Definició: Anomenem *espai vectorial mètric* a una parella (E, g) on E és un espai vectorial de dimensió finita i g una mètrica definida en ell, és a dir, un tensor 2-covariant, simètric no degenerat,

(i) *Simètrica*: $\forall\, a, b \in E$,

$$g(a,b) = g(b,a)$$

(ii) *Bilineal*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall a, b, c \in E$,

$$g(c,\, \alpha a + \beta b) = \alpha\, g(c,a) + \beta\, g(c,b)$$

(iii) *No degenerada*:

$$g(a,b) = 0\,,\ \forall b \in E \quad \longleftrightarrow \quad a = 0$$

Definició. Siga (E, g) un espai vectorial mètric. Direm que un vector $v \in E,\ v \neq 0$ és temporal si $v^2 < 0$, és isòtrop si $v^2 = 0$ i és espacial si $v^2 > 0$.

Definició. Un espai vectorial euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que és definida positiva (producte escalar euclidià). Tots els vectors no nuls són espacials

Un espai vectorial pseudo-euclidià és un espai vectorial mètric amb una mètrica que no és definida positiva (mètrica pseudo-euclidiana). Existeixen vectors espacials temporals i isòtrops.

Exemples:

(i) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_n \equiv (\mathbb{R}^n, \cdot)$, $g(a,b) = a \cdot b$. Una base ortonormal $\{e_i\}$ satisfà,

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

(ii) L'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_3 \equiv (\mathbb{R}^3, \cdot)$ és *l'espai físic* vectorial de la física clàssica.

(iii) L'*espai vectorial de Minkowski* és l'espai vectorial pseudo-euclidià $\mathbb{M}_4 \equiv (\mathbb{R}^4, \eta)$, amb la mètrica de Minkowski:

$$\eta(a,b) = a \cdot b = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \,, \quad a = (a_0, a_1, a_2, a_3), \;\; b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

A l'espai de Minkowski una base ortonormal està formada per un vector temporal unitari i tres vectors espacials unitaris, $\{e_0, e_i\}$,

$$\eta(e_0, e_0) = -1 \,, \quad \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \,, \quad \eta(e_0, e_i) = 0 \,,$$

(b) Isomorfisme canònic entre E i E^*. Base dual mètrica

Propietat: el tensor mètric defineix un isomorfisme canònic entre els espais vectorials E i E^*,

$$\Phi_g \;: E \;\longrightarrow\; E^* \;; \qquad v \;\longrightarrow\; \Phi_g(v) = g(v) \;/\;\; \forall w \in E,\; g(v)(w) = g(w,v).$$

Definició: donada una base $\{e_i\}$ de E, s'anomena *base dual mètrica* a la base $\{\omega^i\}$ de E^* donada per $\omega^i = g(e_i)$.

Propietat:

- A l'espai vectorial euclidià $\mathbb{E}_n$, si $\{e_i\}$ és una base ortonormal, aleshores les bases dual algebraica $\{\theta^i\}$ i dual mètrica $\{\omega^i\}$ coincideixen, $\theta^i = \omega^i$.
- A l'espai vectorial Minkowskià $\mathbb{M}_n$, si $\{e_0, e_i\}$ és una base ortonormal, aleshores les bases dual algebraica $\{\theta^0, \theta^i\}$ i dual mètrica $\{\omega^0, \omega^i\}$ estan relacionades per, $\theta^0 = -\omega^0$, $\theta^i = \omega^i$.

(c) Mètrica contravariant. Components covariants i contravariants d'un vector

Definició. Si (E, g) és un espai mètric, anomenem *mètrica contravariant* al 2-tensor contravariant g^* determinat per la condició:

$$g^*(\alpha, \beta) = g(\Phi_g^{-1}(\alpha), \Phi_g^{-1}(\beta)) \,, \quad g^*(g(v), g(w)) = g(v, w).$$

Definició: Si g_{ij} són les component (covariants) de la mètrica en una base, les components de la mètrica contravariant les denotem g^{ij} i les anomenem components contravariants de la mètrica g.

Propietat: les components covariants i contravariants de la mètrica defineixen matrius inverses, $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^j$.

Definició: Si v^i són les component (contravariants) d'un vector v, les components del co-vector $g(v)$ les anomenem *components covariants del vector* v i les denotem $v_i = g_{ij} v^j$.

Si α_i són les components (covariants) d'un co-vector α, les components del vector $g^*(v)$ les anomenem *components contravariants del co-vector* α i les denotem $\alpha^i = g^{ij} \alpha_j$.

(d) Tensors mètricament equivalents. Pujar i baixar índex

Comentaris:

- L'isomorfisme entre els vectors i els co-vectors d'un espai mètric (E, g), permet identificar cada vector v amb el co-vector $g(v)$. Es diu que són dues magnituds tensorials mètricament equivalents.
- Quan el vector v representa una magnitud que apareix en una llei (tensorial) de la física, pot aparèixer com a vector o com a co-vector, és a dir, poden aparèixer les seus components contravariants o les seues components covariants.
- Al càlcul de les components covariants a partir de les contravariants (o viceversa) s'anomena baixar (o pujar) índex:

$$v_i = g_{ij} v^j \, , \qquad v^i = g^{ij} v_j \, .$$

- Notem que el procés de pujar i baixar índex és una operació tensorial composició d'un producte tensorial i una contracció tensorial:

$$g(v) = c(g \otimes v) \, , \qquad g^*(\alpha) = c(g^* \otimes \alpha) \, .$$

- De la mateixa forma podem pujar o baixar índex d'un tensor arbitrari, una o diverses vegades, amb la mètrica covariant o contravariant.

Definició: Donat un tensor arbitrari d'ordre (p, q), direm que tots els tensors construïts a partir d'ell amb contraccions tensorial amb la mètrica són mètricament equivalents.

(e) Exemples de tensors en Física

Exemples de tensors a l'espai físic $\mathbb{R}^3$:

- *Mètrica*: $g(x, y) = \langle x | y \rangle$.
- *Tensor d'inèrcia* d'un cos rígid: $\mathbb{I} = \displaystyle\int_V \rho(\vec{r}) \, (r^2 \mathbf{I} - \vec{r} \otimes \vec{r}) dV$.
  - ∗ Moment d'inèrcia del cos respecte de l'eix definit pel vector unitari $\vec{e}$: $\mathrm{I} = \mathbb{I}(\vec{e}, \vec{e})$.
  - ∗ Si el cos rígid gira amb velocitat angular $\vec{\omega}$, el moment angular està donat per: $\vec{L} = \mathbb{I}(\vec{\omega})$.
- El *tensor de pressions (o de tensions)* d'un medi continu determina la força de pressió a través d'una superfície S de normal en cada punt $\vec{n}$:

$$\vec{F} = -\int_S \tau(\vec{n}) \, dS.$$

Exemples a l'espai-temps de Minkowski M_4 (relativitat restringida):

- Quadri-vectors i escalars invariants.
- Simètrics d'ordre 2: mètrica de Minkowski, tensor energia-moment.
- Antisimètrics: element de volum en M_4 (ordre 4), camp electromagnètic (ordre 2).