Tema II.– OPERADORS LINEALS

1.- Operador lineal.

Definició: Donat un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ (en general, $\mathbb{C}$), E_n, un operador lineal és una aplicació lineal definida en ell (un endomorfisme):

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} \;:\; E_n & \longrightarrow & E_n \\ v & \longrightarrow & \mathcal{A}(v), \end{array}$$

que té per tant la següent propietat: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in E_n,\ \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2)$.

2.- Representació matricial d'operadors.

(i) **Matriu de canvi de base en un espai vectorial i transformació de les components d'un vector.**
Siguen $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ i $\tilde{B} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ bases d'E_n.

Els vectors de $\tilde{B}$ es podran escriure com combinació lineal dels de la base B: $\tilde{e_j} = b^k{}_j\, e_k$.

Aquesta darrera expressió és equivalent a la següent relació formal:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} & \cdots & \tilde{e_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1{}_1 & b^1{}_2 & \cdots & b^1{}_n \\ b^2{}_1 & b^2{}_2 & \cdots & b^2{}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n{}_1 & b^n{}_2 & \cdots & b^n{}_n \end{pmatrix}.$$

La matriu de coeficients $B = \left[b^i{}_j\right]$ és la matriu de canvi de base entre B i $\tilde{B}$. En canviar de base, les components dels vectors també canvien. Siga $v \in E_n$, en la base B: $v = v^i\, e_i$. Si fem un canvi de base de B a $\tilde{B}$, tenim: $v = \tilde{v}^j\, \tilde{e_j} = \tilde{v}^j\, b^i{}_j\, e_i = (b^i{}_j\, \tilde{v}^j)\, e_i\, (= v^i\, e_i)$. De manera que tenim que $v^i = b^i{}_j\, \tilde{v}^j$ i, en forma matricial:

$$v = (v^i) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ . \\ . \\ . \\ v^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix} = B\, (\tilde{v}^i),$$

o la relació inversa:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ . \\ . \\ . \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Exemples: Siguen les bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{e_1 = (1,0),\, e_2 = (0,1)\}$, i $\tilde{B} = \{\tilde{e_1} = (1,1),\, \tilde{e_2} = (1,-1)\}$. Aleshores, tenim la següent expressió per al canvi de base:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e_1} & \tilde{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Amb $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriu de canvi de base.

Siga el vector v amb components (3, 2) en la base B. Les seues components en la base nova $\tilde{B}$ són:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Representació matricial d'una aplicació lineal.**
Considerem l'aplicació lineal $\mathcal{A} : E_n \longrightarrow E_m$ i les bases $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ i $B' = \{e'_i\}_{i=1}^m$ d'E_n i E_m, respectivament. Siguen $v \in E_n$ i $v' \in E_m$ tals que: $\mathcal{A}(v) = v'$. En les bases B i B', tenim que $v = v^j\, e_j$, i $v' = (v')^i\, e'_i$. Aplicant el caràcter lineal de l'aplicació $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(v^j\, e_j) = v^j \mathcal{A}(e_j).$$

Per altra banda, l'actuació d'$\mathcal{A}$ sobre els vectors de la base B són vectors d'E_m, que admeten per tant una representació en la base B' d'E_m.

$$\mathcal{A}(e_j) = a^i{}_j e'_i,$$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(e_1) & \mathcal{A}(e_2) & \cdots & \mathcal{A}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} \;\mathrm{A},$$

amb $A = \left[a^i{}_j\right]$. Tenim aleshores que:

$$\mathcal{A}(v) = v^j \mathcal{A}(e_j) = v^j a^i{}_j e'_i = a^i{}_j v^j e'_i.$$

Comparant aquesta expressió amb $v' = (v')^i\, e'_i$, tenim $(v')^i = a^i{}_j v^j$, o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \cdots & a^m{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v')^1 \\ (v')^2 \\ \cdots \\ (v')^n \end{pmatrix},$$

o, en notació compacta: $a^i{}_j\, v^j \;=\; v'^{,i}$, on la primera matriu és la representació matricial d'$\mathcal{A}$ en les bases B i B', que multiplica la matriu columna amb les components de v en la base B, i dóna com resultat la matriu columna de les components de v' a la base B'.

Exemple: Siga $\mathcal{A}$ l'aplicació:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\;:\;\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\,y,\,z) & \longrightarrow & (3x-2y+z,\;x+3z+y). \end{array}$$

Siguen B i B' les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, respectivament. La matriu de representació d'$\mathcal{A}$ és:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partint d'aquest resultat, podem calcular la imatge per $\mathcal{A}$ del vector $v = (5,\,3,\,0)$:

$$\begin{pmatrix} (v')^1 \\ (v')^2 \end{pmatrix} \;=\; A \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Propietat: La matriu associada a una composició d'operadors (e.g., $\mathcal{S}\circ\mathcal{T}$) és el producte de les matrius $(S\,T)$.

(iii) **Canvi de base de la matriu d'una aplicació.**
Del que acabem d'estudiar, deduïm que $\mathcal{A}$ és l'ens amb significat algebraic, mentre que la matriu A que utilitzem per representar l'aplicació depén de la (les) base (bases) escollides per representar els vectors.

Estudiem com es relacionen les diferents representacions matricials d'$\mathcal{A}$ en diferents bases. Considerem l'aplicació

$$\mathcal{A}\;:\;E_n \;\longrightarrow\; E_m\,,$$

i les bases $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ i $B' = \{e'_i\}_{i=1}^m$ d'E_n i E_m, respectivament. Segons hem vist a l'apartat anterior, la representació matricial d'$\mathcal{A}$ en aquestes bases, A, s'obté a partir de les relacions:

$$\mathcal{A}(e_j) \;=a^i{}_j e'_i, \;\;\text{amb } j \;=\; 1,\,2,\,...,\,n,$$

amb $A \;=\; a^i{}_j$.

Considerem ara sengles canvis de base als espais E_n i E_m:

- E_n: $B = \{e_i\}_{i=1}^n \longrightarrow \tilde{B} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ amb matriu de canvi de base $C\,/\,\tilde{e}_j \;=\; c^k{}_j\, e_k$.
- E_m: $B' = \{e'_i\}_{i=1}^m \longrightarrow \tilde{B}' = \{\tilde{e}'_i\}_{i=1}^m$ amb matriu de canvi de base $C'\,/\,\tilde{e}'_j \;=\; (c')^k{}_j\, e'_k$.

En les noves bases, la representació matricial d'$\mathcal{A}$, $\tilde{A}$, serà: $\mathcal{A}(\tilde{e}_j) = \tilde{a}^l{}_j \tilde{e}'_l$, amb $j = 1, 2, ..., n$.

Obtinguem ara la relació entre les matrius A i $\tilde{A}$:

$\mathcal{A}(\tilde{e}_j) = \mathcal{A}(c^k{}_j e_k) = c^k{}_j \, \mathcal{A}(e_k) = c^k{}_j a^i{}_k e'_i = c^k{}_j a^i{}_k \left[(c')^{-1}\right]^l{}_i \, \tilde{e}\prime_l = \left(\left[(c')^{-1}\right]^l{}_i \, a^i{}_k c^k{}_j\right) \tilde{e}'_l = \left((C')^{-1} A C\right)^l{}_j \, \tilde{e}'_l$, on hem utilitzat que $e'_i = \left[(c')^{-1}\right]^l{}_i \, \tilde{e}\prime_l$.

Comparant aquest resultat amb $\mathcal{A}(\tilde{e}_j) = a^l{}_j \tilde{e}'_l$,, tenim que:

$$\tilde{A} = (C')^{-1} A C.$$

Teorema: Siga $\mathcal{A} : \; E_n \longrightarrow E_m$ una aplicació lineal. Tenim aleshores que $dim(Im(\mathcal{A})) = rg(A)$, amb A la matriu associada a l'aplicació lineal.

Amb aquest teorema, i recordant que $dim(E_n) = dim(Im(\mathcal{A})) + dim(\mathcal{N}(\mathcal{A}))$, tenim que $dim(E_n) = dim(\mathcal{N}(\mathcal{A})) + rg(\mathcal{A})$.

Exemple: Considerem l'aplicació anterior:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} \, : \, \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, \, y, \, z) & \longrightarrow & (3x - 2y + z, \, x + 3z + y). \end{array}$$

i la seua representació en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, B i B', respectivament, A. Si efectuem un canvi a les bases $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\tilde{B}\prime$ de $\mathbb{R}^2$: $\tilde{B} = \{\tilde{e}_1 = (1,1,0), \, \tilde{e}_2 = (1,-1,0), \, \tilde{e}_3 = (0,0,1)\}$, i $\tilde{B}' = \{\tilde{e}'_1 = (1,1), \, \tilde{e}'_2 = (1,-1)\}$, mitjançant les matrius de canvi de base:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Amb aquestes matrius es pot obtenir la representació matricial d'$\mathcal{A}$ en les bases $\tilde{B}$ i $\tilde{B}'$, $\tilde{A}$, calculant:

$$\tilde{A} = (C')^{-1} A C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercici: Obtingueu aquesta matriu de manera directa a partir de la definició en termes de les bases $\tilde{B}$ i $\tilde{B}'$: $\mathcal{A}(\tilde{e}_j) = \tilde{a}^l{}_j \tilde{e}'_l$.

(iv) **Representació en bases ortonormals.**
Considerem la representació de l'aplicació $\mathcal{A} : \; E_n \longrightarrow E_m$ en sengles bases ortonormals $\{e_i\}_{i=1}^n$ i $\{e'_i\}_{i=1}^m$. En aquest cas tenim, per definició $\mathcal{A}(e_j) = a^k{}_j e'_k$, però per ser la base $\{e'_i\}_{i=1}^m$ ortonormal:

$$a^k{}_j = \langle e'_k \, | \, \mathcal{A}\,(e_j) \rangle.$$

3.- Aplicació adjunta (operador adjunt).

(i) **Definició.**
Donada una aplicació lineal $\mathcal{A} \;:\; E_n \longrightarrow E_m$, definim l'aplicació adjunta d'$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\dagger$, com la que verifica: $\langle v \,|\, \mathcal{A}^\dagger(w)\rangle = \langle \mathcal{A}(v) \,|\, w\rangle$, $\forall\, v \in E_n$ and $\forall\, w \in E_m$.

Propietat: L'aplicació adjunta també és lineal.

(ii) **Representació matricial de l'aplicació adjunta.**
Siga una aplicació lineal $\mathcal{A} \;:\; E_n \longrightarrow E_m$ i sengles bases ortonormals $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ i $B' = \{e'_i\}_{i=1}^m$ d'E_n i E_m, respectivament.

Siga la corresponent aplicació adjunta: $\mathcal{A}^\dagger \;:\; E_m \longrightarrow E_n$. La representació matricial d'$\mathcal{A}^\dagger$ és l'adjunta de la matriu que representa l'aplicació $\mathcal{A}$.

4.- Operadors normals.

Siga $\mathcal{A}$ un operador lineal. Diem que $\mathcal{A}$ és normal si satisfà: $\mathcal{A}^\dagger\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathcal{A}^\dagger$. Si A i $A^\dagger$ són les respectives representacions matricials d'$\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^\dagger$ en una base ortonormal de l'espai E_n, aleshores $\mathcal{A}$ és normal $\iff$ $A\,A^\dagger = A^\dagger\,A$ (és a dir, si la matriu A és normal).

És fàcil demostrar-ho tenint en compte que la representació matricial de la composició d'operadors $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^\dagger$ és $A\,A^\dagger$ i la representació de la composició $\mathcal{A}^\dagger \circ \mathcal{A}$ és $A^\dagger\,A$.

(i) **Operador autoadjunt o hermític. Operador unitari.**
Un operador és hermític si $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$. La matriu de l'operador adjunt (autoadjunt) serà per tant $A^\dagger = A$.

Un operador és unitari si satisfà $\mathcal{A}^\dagger\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{I}$, és a dir, si $A\,A^\dagger = A^\dagger\,A = I$.

(ii) **Teorema de caracterització dels operadors hermítics.** $\mathcal{A}$ és autoadjunt $\iff$ $\langle v \,|\, \mathcal{A}(v)\rangle \in \mathbb{R}\,\forall\, v \in E_n$.

(iii) **Teorema de caracterització dels operadors unitaris.** Siga $\mathcal{A}$ un operador lineal bijectiu a l'espai pre-Hilbert E_n. $\mathcal{A}$ és unitari $\iff$ $\langle \mathcal{A}(v) \,|\, \mathcal{A}(v)\rangle = \langle v \,|\, v\rangle$, $\forall v \in E_n$, és a dir, preserva el producte escalar.

5.- Canvis de base en bases ortonormals.

Estudiem ara les transformacions de les components dels vectors i les representacions matricials d'operadors en bases ortonormals. Considerem dues bases ortonormals $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ i $B' = \{e'_i\}_{i=1}^n$ d'E_n. Es verifica que:

$$e'_j = \langle e_i \,|\, e'_j\rangle e_i, \quad \forall\, j = 1, ..., n.$$

El que ens permet definir la matriu de canvi de base $C = [c^i{}_j]$ com $c^i{}_j = \langle e_i \,|\, e'_j\rangle$. Per a un vector $v \in E_n$ arbitrari tindrem que:

$$v = \langle e_i \,|\, v\rangle e_i = \langle e'_i \,|\, v\rangle e'_i,$$

i les components de v en les dues bases ortonormals, $\langle e_i \,|\, v\rangle$ i $\langle e'_i \,|\, v\rangle$ estan relacionades mitjançant:

$$v^i = C\,(v^i)' \quad C = [c^i{}_j], \quad c^i{}_j = \langle e_i \,|\, e'_j\rangle$$

Considerem ara $C^\dagger$: $(c^\dagger)^i{}_j = (c^j{}_i)^*$. Per a qualsevol parella de vectors $u = u^i\, e_i$ i $v = v^i\, e_i$, tenim que:

$$\langle C\,u \,|\, C\,v\rangle = (u^i)^*\, v^j \langle e'_i \,|\, e'_j\rangle = (u^i)^*\, v^j\, \delta_{i\,j} = (u^i)^*\, v^j \langle e_i \,|\, e_j\rangle = \langle u \,|\, v\rangle,$$

on hem fer servir que $C\, e_i = e'_i$. Tenint en compte la definició d'operador adjunt:

$$\langle C\,u \,|\, C\,v\rangle = \langle C^\dagger C\,u \,|\, v\rangle = \langle u \,|\, v\rangle \quad \rightarrow \quad C^\dagger\, C = I.$$

Per tant C és unitària.

Amb aquest resultat, la transformació d'un operador en bases ortonormals quedarà de la manera següent: $\tilde{A} = (C')^{-1}\, A\, C = (C')^\dagger\, A\, C$

6.- Propietats del determinant i la traça.

Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme de l'espai vectorial E_n i A i $\tilde{A}$ les matrius que el representen en les bases B i $\tilde{B}$, respectivament. Tenim aleshores que:

(i) El determinant és invariant: $det(A) = det(\tilde{A})$.

(ii) La traça és invariant: $Tr(A) = Tr(\tilde{A})$.[1]

7.- Projectors.

(i) **Teorema de caracterització.**
$\mathcal{P}$ és un projector ortogonal $\iff$ $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ i $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$, idempotent i autoadjunt.

(ii) **Projectors ortogonals.**
Teorema: Siguen $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ dos projectors sobre els subespais L_1 i L_2 de l'espai pre-Hilbert H. Aleshores:

$$\mathcal{P}_1\,\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\,\mathcal{P}_1 = 0 \iff L_1 \perp L_2$$

,

és a dir, els projectors projecten sobre subespais ortogonals (demostrat en Àlgebra i Geometria I).

[1] Aquesta propietat es pot demostrar fent servir la següent propietat de la traça del producte de matrius: $Tr(A\,B\,C) = Tr(B\,C\,A) = Tr(C\,A\,B)$

(iii) **Projector suma.**

Teorema: Si $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ són projectors ortogonals de forma que projecten sobre L_1 i L_2, amb $L_1 \perp L_2$, tenim que $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ és un projector sobre el subespai $L_1 \oplus L_2$.

(iv) **Representació matricial d'un projector.**

Siga $\mathcal{P}$ el projector sobre el subespai L. Siga $B_L = \{e_i\}_{i=1}^{dim(L)}$ una b.o.n. de L i $B_{L^\perp} = \{\varepsilon_i\}_{i=dim(L)+1}^{n}$ una b.o.n de $B_{L^\perp}$. Com que $E_n = L \oplus L^\perp$, la unió de les bases és base ortonormal d'E_n.

La matriu associada al projector $\mathcal{P}$ respecte d'aquesta base, tenint en compte que $\mathcal{P}(e_i) = e_i \; \forall\, i = 1, ..., dim(L)$ i $\mathcal{P}(\varepsilon_i) = 0 \; \forall\, i = dim(L) + 1, ..., n$, i que les components de la matriu que representa l'operador s'obtenen mitjançant l'expressió donada en l'apartat 2.(iv) d'aquest tema per al cas de bases ortonormals, serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

és a dir, una submatriu identitat quadrada de dimensió $dim(L) \times dim(L)$, i la resta d'elements iguals a zero. Noteu que $Tr(P) = dim(L)$ en qualsevol base per ser la traça invariant.

(v) Nota: El projector que projecta sobre un subespai L es calcula a partir d'una b.o.n. del subespai $\mathcal{P} = \sum_i \langle e_i \,|\, v\rangle \, e_i$, amb $i = 1, ..., dim(L)$ i e_i els vectors d'una b.o.n. de L.