Tema III.– TEORIA ESPECTRAL

1.- Valors i vectors propis d'un endomorfisme.

a) Valors i vectors propis.
Siga A un operador lineal, $\mathcal{A} \,:\, E_n \longrightarrow E_n$, endomorfisme de l'espai prehilbertià E_n de dimensió finita n sobre el cos $\mathbb{K}$. Si existeix un vector $v \in E_n$, $v \neq 0$, i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tals que $\mathcal{A}v \,=\, \lambda v$, o $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})v \,=\, 0$, çò és, tal que la imatge del vector és un múltiple del propi vector, aleshores v és un vector propi (autovector) de l'operador lineal $\mathcal{A}$ amb valor propi (autovalor) λ.

L'espectre de l'operador $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, és el subconjunt del cos $\mathbb{K}$ que inclou tots els valors propis d'$\mathcal{A}$:

$$\sigma \,=\, \{\lambda \in \mathbb{K} \,/\, \exists v \in E_n \, (v \neq 0) : \mathcal{A}v \,=\, \lambda \, v\}.$$

Teorema: Subespai propi. Siga A un endomorfisme de l'espai prehilbertià E_n. Aleshores, el conjunt $V_\lambda = \{v \in E_n / \mathcal{A}v = \lambda v\}$, que inclou tots els vectors propis d'$\mathcal{A}$ amb valor propi λ i el vector 0, és un subespai vectorial d'E_n.

b) Caracterització dels valors propis.
Per trobar els valors i vectors propis d'un operador $\mathcal{A}$, escollim una base d'E_n i convertim l'expressió anterior en un conjunt d'equacions lineals: $(A - \lambda I)\, v \,=\, 0$, amb A la matriu $n \times n$ que representa l'operador $\mathcal{A}$ a la base escollida, I és la matriu identitat i v i 0 representen ara matrius columna amb les components de v i 0, respectivament, en la base corresponent.

Per tant, per tal que existisca un vector $v \neq 0$ amb components que certifiquen l'equació anterior, és necessari i suficient que la matriu $(A - \lambda I)$ siga singular (i.e., no tinga inversa). Efectivament, el sistema $(A - \lambda I)\, v \,=\, 0$ és un sistema homogeni, que té solució diferent de la trivial, $v \neq 0$, si i sols si $det(A - \lambda I) \,=\, 0$, o, el que és equivalent, si la matriu del sistema no té inversa.

c) Polinomi característic.
La condició $det(A - \lambda I) \,=\, 0$ dóna una equació de grau n en λ, que anomenem polinomi característic, que tindrà entre 1 i n solucions distintes, λ_i, que seran els autovalors de l'operador $\mathcal{A}$. Un cop trobats els autovalors, cercarem els autovectors (en realitat, les seues components en la base de representació) fent ús de l'equació: $A\, v \,=\, \lambda_i \, v$ associats al valor propi λ_i.

d) Notes.

- 1) Les n solucions del polinomi característic no tenen per què estar en $\mathbb{K}$, però sí en $\mathbb{C}$ (teorema fonamental de l'Àlgebra, tema I, AiG I).

- 2) Els valors propis, solucions del polinomi característic, no depenen de la base escollida per representar l'operador (demostració: el determinant no canvia sota canvis de base i d'això en podem derivar que el polinomi característic és invariant).

- 3) Els vectors propis associats al valor propi λ són les solucions del sistema homogeni $(A - \lambda_i I)v = 0$ i formen un subespai vectorial (V_{λ_i}). $dim\,(\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda I)) + dim(Im(\mathcal{A} - \lambda I)) = n$. Per tant, com que $V_{\lambda_i} = \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda I)$ i $dim(Im(\mathcal{A} - \lambda I)) = rg(A - \lambda I)$, $dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda I)$. [1]

e) Exemples.

- Exemple (1) Operador lineal amb valors propis reals i simples. Siga $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y + 3z,\ x + y - 3z,\ 3x - 3y - 3z)$:
  - Té tres autovalors reals diferents.
  - Els subespais propis que són ortogonals entre ells.
  - Els vectors propis formen una base de $\mathbb{R}^3$.

- Exemple (2) Operador lineal amb valors propis reals i degenerats. Siga $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{B}(x, y, z) = (x - 3z,\ -2y,\ 3x + z)$:
  - Té dos autovalors reals diferents. Un d'ells té multiplicitat dos (és solució doble del polinomi). Per tant, la suma de les multiplicitats dóna com resultat la dimensió de l'espai.
  - Els subespais propis que són ortogonals entre ells.
  - Els vectors propis formen una base de $\mathbb{R}^3$.

- Exemple (3) Operador lineal amb valors propis reals i degenerats. Siga $\mathcal{C} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $\mathcal{C}(x, y, z, t) = (2x + 3y - 4z - 4t,\ x,\ y,\ z)$:
  - Té dos autovalors reals diferents. Els dos tenen multiplicitat dos (són solució doble del polinomi). Per tant, la suma de les multiplicitats dóna com resultat la dimensió de l'espai, que és 4 en aquest cas.
  - Cada subespai propi té dimensió 1, per tant, no hi ha suficients vectors propis independents per formar una base de $\mathbb{R}^4$.

- Exemple (4) Operador lineal amb valors propis complexos. Siga $\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{D}(x, y) = (x\ \cos(\theta) + y\ \sin(\theta),\ -x\ \sin(\theta) + y\ \cos(\theta))$:
  - Els valors propis són complexos.
  - Els subespais propis no són, en general, subespais de $\mathbb{R}^2$.

- Exemple (5) Operador lineal en espais de dimensió infinita. Siga $\mathcal{A}e_1 = 0$, $\mathcal{A}e_i = e_{i-1}$, $i = 2, ..., \infty$:

[1] També: Si r és el $rg(A - \lambda I)$, sols r equacions del sistema són linealment independents i, en conseqüència, $n - r$ serà el nombre de components independents de v_i. Per tant, obtenim el mateix resultat.

- Els valors propis s'obtenen a partir de la definició de l'operador (no del polinomi característic).
- L'espectre de l'operador és continu.
- El subespai propi és de dimensió finita.

Conclusions dels exemples:

- En espais de dimensió finita, l'espectre és sempre discret, mentre que en el cas d'espais de dimensió infinita, l'espectre pot ser continu.
- En tots els exemples, dos subespais propis corresponents a valors propis diferents, sols tenen en comú el vector 0.
- En alguns casos (exemples 1, 2 i 4), els vectors propis corresponents a valors propis diferents són ortogonals.
- En alguns casos (exemples 1,2 i 3), els valors propis són reals. En l'exemple 4, els valors propis són complexos, amb mòdul unitat.

Teorema: Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme de l'espai prehilbertià E_n. Si λ_1 i λ_2 són valors propis diferents d'$\mathcal{A}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, aleshores els subespais propis corresponents sols tenen en comú el vector 0: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = 0$. Dit d'una altra manera, el subespai suma és suma directa.

2.- Valors i vectors propis d'operadors normals.

a) Valors i vectors propis d'un operador normal.

Un operador normal és aquell que verifica $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$. Per aquest tipus d'operadors, hi ha una sèrie de resultats interessants pel que fa a la seua descomposició espectral.

Teorema: Siga A un endomorfisme normal de l'espai prehilbertià E_n. Si v és un vector propi d'$\mathcal{A}$ amb valor propi λ, aleshores v és un vector propi d'$\mathcal{A}^\dagger$ amb valor propi λ^*.

Teorema: Vectors propis ortogonals. Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme normal en l'espai prehilbertià E_n. Si v_1 i v_2 són vectors propis d'$\mathcal{A}$ amb autovalors $\lambda_1 \neq \lambda_2$, aleshores $\langle v_1|v_2\rangle = 0$, és a dir, els subespais propis de valors propis diferents són ortogonals.

b) Valors i vectors propis d'un operador unitari.

Teorema: Siga $\mathcal{U}$ un endomorfisme unitari en l'espai prehilbertià E_n. Aleshores els seus valors propis tenen mòdul unitat.

c) Valors i vectors propis d'un operador hermític.

Teorema: Siga $\mathcal{A}$ un operador hermític en l'espai prehilbertià E_n. Aleshores, els seus valors propis són reals.

3.- Base de vectors propis.

Una propietat notable d'alguns operadors és que en ells podem trobar una base de l'espai prehilbertià formada per vectors propis dels operadors. Aquesta propietat s'enuncia amb dos teoremes:

Teorema: Multiplicitat i dimensió del subespai propi. Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme de l'espai prehilbertià E_n, de dimensió n. Siga λ un valor propi de l'operador, amb multiplicitat m i d la dimensió del seu subespai propi, V_λ. Aleshores se satisfà: $1 \leq d \leq m$.

Teorema: Condició d'existència d'una base de vectors propis. Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme de l'espai prehilbertià E_n, de dimensió n. Aleshores, existeix una base d'E_n formada per vectors propis d'$\mathcal{A}$ si i sols si s'acompleixen les dues condicions següents:

- 1) $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$, amb m_i la multiplicitat del valor propi λ_i.
- 2) $d_i = m_i$, $\forall i = 1, ..., p$ amb $d_i = dim(V_{\lambda_i})$.

A més, en la base de vectors propis d'$\mathcal{A}$, la matriu que el representa, D, és diagonal amb els seus elements sent els diferents autovalors repetits tantes vegades com corresponga a la seua multiplicitat.

Direm aleshores que l'endomorfisme és diagonalitzable. Per tant, la forma diagonal s'obté a partir d'un canvi de base (des de la base de representació inicial a la base dels vectors propis): $D = C^{-1}\, A\, C$, ó $D = C^{\dagger}\, A\, C$ en el cas de bases ortonormals, on A és la matriu de representació de l'operador en una certa base (per exemple, la canònica), i C és la matriu de canvi de base que conté, en columnes, les components dels vectors de la base dels vectors propis expressats en la base original.

Teorema espectral: Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme normal de l'espai prehilbertià complex E_n. Aleshores $\mathcal{A}$ és ortogonalment diagonalitzable, és a dir, existeix, si més no, una base ortonormal de vectors propis d'$\mathcal{A}$ que el diagonalitza. És dir, els operadors normals (i, per tant, també els hermítics i els unitaris) són sempre (ortogonalment) diagonalitzables.

Exemple: Obtenir els valors i vectors propis de l'operador: $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $\mathcal{A}(x, y, z, t) = (\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y,\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y,\ -2z - t,\ -z - 2t)$.

4.- Funció d'un operador.

Siga $f(x)$ una funció que admet, si més no, formalment, un desenvolupament en sèrie de potències,

$$f(x) \,=\, \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \, x^m. \tag{1}$$

Siga $\mathcal{A}$ un endomorfisme en l'espai prehilbertià E_n. Definim $f(\mathcal{A})$, funció de l'operador $\mathcal{A}$, com:

$$f(\mathcal{A}) \,=\, \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \, \mathcal{A}^m. \tag{2}$$

Segons les propietats de les operacions de composició d'operadors lineals i producte per un escalar, $f(\mathcal{A})$ és també un operador lineal.

Exemple: $e^{\mathcal{A}}$. Tenint en compte $e^x \,=\, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \, x^m$, $e^{\mathcal{A}} \,=\, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \, \mathcal{A}^m$.

Si l'operador és normal i, per tant, ortogonalment diagonalitzable, el càlcul de la representació matricial de $f(\mathcal{A})$ és senzilla perquè existeix una base en què la matriu A és diagonal, A_D. D'aquesta manera, es pot demostrar que $A^m \,=\, C \, A_D^m \, C^\dagger$.

Per altra banda, si A és la representació matricial de l'operador $\mathcal{A}$ en una base determinada, $f(A)$ és la representació de $f(\mathcal{A})$ en la mateixa base. I es pot arribar a que:

$$f(A) \,=\, C \left(\sum_m \alpha_m \, A_D^m \right) C^\dagger \,=\, C \, f(A_D) \, C^\dagger, \tag{3}$$

on $f(A_D)$ és diagonal i té com elements els $f(\lambda_i)$, amb λ_i els valors propis d'$\mathcal{A}$.

Exemple: Donat l'operador $\mathcal{A} \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{A}(x, y, z) \,=\, (x + 3z,\, -2y,\, 3x + z)$, trobeu $\exp(i\,\pi/4\,\mathcal{A})$.

5.- Descomposició espectral d'un operador normal.

Considerem un operador normal $\mathcal{A}$ i una base de diagonalització ortonormal (sabem que existeix per a un operador normal), $\{\{e_j^{(i)}\}_{j=1}^{d_i}\}_{i=1}^{p}$, on $\{e_j^{(i)}\}_{j=1}^{d_i}$ formen una b.o.n. de V_{λ_i}, subespai propi associat al valor propi λ_i, que suposem té dimensió d_i, amb $i = 1,\, ...,\, p$.

Qualsevol vector de l'espai prehilbertià, $v \in E_n$, pot ser escrit com combinació lineal dels vectors de la base.

$$v \,=\, \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{d_i} \langle e_j^{(i)} | v \rangle \, e_j^{(i)}. \tag{4}$$

Per tant,

$$\mathcal{A}v \,=\, \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{d_i} \langle e_j^{(i)} | v \rangle \, \mathcal{A} e_j^{(i)} \,=\, \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{d_i} \langle e_j^{(i)} | v \rangle \, \lambda_i e_j^{(i)}, \;\; \forall\, j \,=\, 1,\, ...,\, d_i. \tag{5}$$

Fent servir la propietat distributiva del producte d'un escalar respecte de la suma de vectors i la definició d'un projector, tenim que:

$$\mathcal{A}v \,=\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \mathcal{P}_i v, \quad \forall\, v \,\in\, E_n. \tag{6}$$

En conclusió,

$$\mathcal{A} \,=\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \mathcal{P}_i, \tag{7}$$

el que es coneix com la descomposició espectral d'un operador.

Podem utilitzar la descomposició espectral d'un operador normal per obtenir una expressió senzilla per la funció d'un operador. Per això utilitzarem les següents propietats dels operadors projectors sobre subespais propis d'un operador normal:

- (i) $\mathcal{P}_i\, \mathcal{P}_j \,=\, \delta_{i\,j}\, \mathcal{P}_i$
- (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathcal{P}_i \,=\, \mathbf{I}$.

Exercici: Demostreu les propietats anteriors. Ajut: (i) $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$; (ii) $E_n \,=\, \oplus_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$.

Partint de la propietat (i), $\mathcal{A}^m \,=\, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^m\, \mathcal{P}_i$, de manera que podem trobar la funció de l'operador a partir de les funcions dels seus valors propis:

$$f(\mathcal{A}) \,=\, \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\, \mathcal{P}_i \tag{8}$$