ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Qüestions Tema 2. *Operadors lineals*

1. En l'espai pre-hilbertià $\mathbf{C}^2$ es defineix l'operador lineal $\mathcal{A}$ mitjançant la imatge d'un vector arbitrari, (x^1, x^2), segons l'expressió:

$$\mathcal{A}(x^1, x^2) = (2x^1 - x^2, -x^1 + 2x^2).$$

La matriu de l'operador en la base de vectors $\{(1,1),(1,-1)\}$ és:

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$.

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☒ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^3$ es defineix l'operador lineal $\mathcal{A}$ mitjançant la imatge d'un vector arbitrari, (x^1, x^2, x^3), segons l'expressió:

$$\mathcal{A}(x^1, x^2, x^3) = (x^1 + x^2 + x^3, x^2 + x^3, x^2 - x3).$$

Indica la matriu de l'operador en la base ortonormal de $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}.$$

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

☒ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 1 \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

3. En un espai pre-hilbertià de dimensió infinita, el conjunt de vectors $\{e_n\}_{n=1}$ forma una base ortonormal. L'operador lineal $\mathcal{A}$ es defineix mitjançant les imatges dels vectors d'aqueixa base:

$$\mathcal{A}e_n = \frac{1}{n}e_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

La matriu d'$\mathcal{A}$ en aqueixa base és:

- ☐ $\mathbf{A}_{n,m} = \delta_{n,m}$.
- ☐ $\mathbf{A}_{n,m} = \frac{1}{n}\delta_{n,m+1}$.
- ☒ $\mathbf{A}_{n,m} = \frac{1}{m}\delta_{n,m+1}$.
- ☐ $\mathbf{A}_{1,m} = \frac{1}{m}$, $\mathbf{A}_{n,m} = \frac{1}{n}\delta_{n,m+1}$ per a $n \neq 1$.

4. En l'espai pre-hilbertià $\mathbf{C}^3$ es defineix l'operador lineal $\mathcal{A}$ mitjançant la imatge d'un vector arbitrari, (x^1, x^2, x^3), segons l'expressió:

$$\mathcal{A}(x^1, x^2, x^3) = (2x^1 - i\,x^2, x^2 + x^3, x^3 - i\,x^1)$$

L'operador adjunt d'$\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^\dagger$) és:

- ☒ $\mathcal{A}^\dagger(x^1, x^2, x^3) = (2x^1 + ix^3,\ ix^1 + x^2,\ x^2 + x^3)$.
- ☐ $\mathcal{A}^\dagger(x^1, x^2, x^3) = (2x^1 - ix^3,\ -ix^1 + x^2,\ x^2 + x^3)$.
- ☐ $\mathcal{A}^\dagger(x^1, x^2, x^3) = (-2x^1 + ix^3,\ ix^1 - x^2 - x^3,\ -x^2 - x^3)$.
- ☐ $\mathcal{A}^\dagger(x^1, x^2, x^3) = (2(x^1)^* + i(x^3)^*,\ i(x^1)^* + (x^2)^* + (x^3)^*,\ (x^2)^* + (x^3)^*)$.

5. La representació matricial d'un operador en una base ortonormal és: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. L'operador és autoadjunt si:

- ☒ a és un nombre real i b és imaginari pur.
- ☐ a i b són nombres reals.
- ☐ a és un nombre real i b un nombre complex arbitrari.
- ☐ a i b són nombres imaginaris purs.

6. En un espai pre-hilbertià de dimensió finita n, el conjunt de vectors $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ formen una base ortonormal. L'operador $\mathcal{A}$ es defineix per

$$\mathcal{A}v_i = v_{i-1}, \quad i = 2, \dots n.$$

Indica la resposta **correcta**:

- [x] Si $\mathcal{A}v_1 = v_n$ l'operador és unitari.
- [ ] Si $\mathcal{A}v_1 = v_1$ l'operador és unitari.
- [ ] Si $\mathcal{A}v_1 = v_1$ l'operador és autoadjunt.
- [ ] Si $\mathcal{A}v_1 = v_n$ l'operador és autoadjunt.

7. Un operador lineal $\mathcal{A}$ definit en l'espai euclidià $\mathbf{R}^n$, té com a representació matricial la matriu no singular $\mathbf{A}$ en la base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ .Si realitzem el canvi a una nova base $\{e_i'\}_{i=1}^n$ donada per:

$$e_i' = -e_i, \; i = 1, \cdots, n,$$

la traça i el determinant de la nova matriu de l'operador $(\mathbf{A}')$ acompleix les següents relacions respecte de les corresponents de la matriu $\mathbf{A}$:

- [x] $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}'$ i $\det\,\mathbf{A} = \det\,\mathbf{A}'$.
- [ ] $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}'$ i $\det\,\mathbf{A} = (-1)^n\,\det\,\mathbf{A}'$.
- [ ] $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}'$ i $\det\,\mathbf{A} = (-1)^n\,\det\,\mathbf{A}'$.
- [ ] $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}'$ i $\det\,\mathbf{A} = \det\,\mathbf{A}'$.

8. La representació matricial d'un operador en una base ortonormal és: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, sent $a,\ b$ i c nombres complexos qualssevol. Indica la resposta **correcta**.

- [ ] Si a, b i c són nombres reals arbitraris tals que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ l'operador és autoadjunt.
- [ ] Si $a^2 = bc$ l'operador té invers.
- [x] Si a, b i c són nombres reals arbitraris tals que $c = -b$ i $|a|^2 + |b|^2 = 1$, l'operador és unitari.
- [ ] Si $a = b = c = 1$ l'operador és un projector.

9. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^3$, les matrius de dos operadors $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ en la base canònica són:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_2 = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ a \neq 0.$$

$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ és un projector si:

- [x] $b = c = 1, a = 2.$
- [ ] $b = 1, c = -1, a = 2.$
- [ ] $b = c = a = 1.$
- [ ] $b = 0, c = 1, a = \sqrt{2}.$

10. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^2$ i en la base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^2$ el subespai $\mathbf{S}$ està definit pels vectors tals que les seues components sumen zero. El projector en aquest subespai té per representació matricial en la base ortonormal la matriu:

- [x] $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^3$ el conjunt de vectors ortonormals $\{e_i\}_{i=1}^3$ formen una base. L'operador $\mathcal{P}_1$ és un projector en la direcció (expressada en aqueixa base) $(0, 0, 1)$ mentre que $\mathcal{P}_2$ ho és en la direcció $(1, -1, 0)$. Indica la resposta **correcta**.

- [ ] $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}$, sent $\mathcal{I}$ l'operador identitat en $\mathbf{R^3}$.
- [ ] $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$ sent $\mathcal{O}$ l'operador nul en $\mathbf{R^3}$.
- [ ] $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ és un projector no nul.
- [x] $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$ sent $\mathcal{O}$ l'operador nul en $\mathbf{R^3}$.

12. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^3$, les matrius dels projectors en els subespais $\mathbf{L}_1$ i $\mathbf{L}_2$, $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$, referides a la base canònica, són respectivament:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indica la resposta **incorrecta**.

- [ ] $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{|\mathbf{0}\rangle\}$.
- [ ] $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ és un projector.
- [ ] $\mathbf{L}_1 \perp \mathbf{L}_2$.
- [x] $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 = \mathbf{R}^3$.

13. En l'espai euclidià $\mathbf{R}^3$ el conjunt de vectors $\{u_i\}_{i=1}^3$ és una base ortonormal. Donat el vector arbitrari de $\mathbf{R}^3$, $x = \sum_{i=1}^3 x^i\, u_i$, es defineixen els projectors $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de manera que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 x &= \frac{x^1 - x^3}{2}\,(u_1 - u_3)\,, \\ \mathcal{P}_2 x &= x^2\, u_2. \end{aligned}$$

Indica la resposta **incorrecta**.

- [ ] $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ és el projector en el subespai $\langle\, u_1 - u_3, u_2 \,\rangle$.
- [x] $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ és el projector en la direcció u_2.
- [ ] $\mathcal{P}_1$ és el projector en la direcció $u = u_1 - u_3$.
- [ ] $\mathcal{P}_2$ és el projector en la direcció u_2.

14. Siguen $\mathbf{L_1}$ i $\mathbf{L_2}$ subespais ortogonals d'un espai pre-hilbertià de dimensió 4, tals que $\dim \mathbf{L_1} = 1$ i $\dim \mathbf{L_2} = 2$. Si $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ són els projectors en dits subespais, indica la resposta **incorrecta**:

- [x] $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}$ (operador identitat).
- [ ] $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$ (operador nul).
- [ ] $\mathrm{Tr}\, \mathcal{P}_2 = 2$ (on Tr és la traça de l'operador).
- [ ] $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^\dagger$.