ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Qüestions Tema 3. *Teoria Espectral*

1. Indica quina afirmació relativa als valors i vectors propis d'un operador lineal és **incorrecta**.

   ☐ Els possibles valors propis d'un operador hermític són reals.

   ☐ Els vectors propis d'un operador lineal associats a valors propis diferents són linealment independents.

   ☒ Els possibles valors propis d'un operador unitari són $+1$ i -1.

   ☐ Els possibles valors propis d'un projector són 1 i 0.

2. Indica quina afirmació, relativa als operadors lineals de dimensió finita sobre el cos dels nombres complexos, és **incorrecta**:

   ☐ Els subespais propis associats a valors propis diferents d'un operador normal són ortogonals.

   ☐ Els subespais propis associats a valors propis diferents d'un operador unitari són ortogonals.

   ☐ Els operadors hermítics són sempre diagonalitzables.

   ☒ Els operadors hermítics no són, en general, ortogonalment diagonalitzables.

3. $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són dos operadors que acompleixen la relació $\mathcal{A} = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{B} \mathcal{U}$, sent $\mathcal{U}$ un operador unitari arbitrari. Si λ i v són un valor i un vector propi del operador $\mathcal{A}$, assenyala la resposta **correcta**:

   ☐ λ^* i $\mathcal{U}\, v$ són valor i vector propi del operador $\mathcal{B}$.

   ☐ λ^* i v són valor i vector propi del operador $\mathcal{B}$.

   ☐ λ i $\mathcal{U}^\dagger v$ són valor i vector propi del operador $\mathcal{B}$.

   ☒ λ i $\mathcal{U}\, v$ són valor i vector propi del operador $\mathcal{B}$.

4. Considera un operador autoadjunt definit en un espai pre-hilbertià sobre el cos dels complexos. Llavors els seus valors propis

   ☐ són únicament 0 i 1.

   ☒ són sempre reals.

   ☐ poden ser qualsevol nombre complex.

   ☐ tenen mòdul unitat necessàriament.

5. Considera l' operador lineal (endomorfisme) de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{A}$, definit segons:

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (-2x + ay + 3z, -2y, bz).$$

L'operador és diagonalitzable

- [ ] per qualsevol valor de b.
- [x] per $a = 0$, $b \neq -2$.
- [ ] per $a = 0$, $b = -2$.
- [ ] per $a \neq 0$, $b \neq -2$.

6. L'operador normal $\mathcal{A}$, definit en un espai pre-hilbertià de dimensió finita n, té per autovalors $+1, -1, 0$. Indica quina afirmació és **incorrecta**:

- [ ] $\det \mathcal{A} = 0$.
- [x] $\mathcal{A}$ és un projector.
- [ ] $\mathcal{A}$ és autoadjunt.
- [ ] $\operatorname{Tr} \mathcal{A} = 0$.

7. L'equació característica d'un operador normal definit en un espai pre-hilbertià de dimensió finita és:

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1) = 0.$$

Llavors

- [ ] l'operador és un projector.
- [x] l'operador és unitari.
- [ ] l'operador és autoadjunt.
- [ ] l'operador no té invers.

8. Un operador normal, $\mathcal{A}$, definit en l'espai pre-hilbertià $\mathbf{C}^3$ té com a valors propis $\lambda = 1, -1, 0$. Donat el polinomi $p(x) = -x^3 + 4x$,

- [ ] $p(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$, sent $\mathcal{I}$ l'operador identitat.
- [ ] $p(\mathcal{A}) = 3\mathcal{I}$, sent $\mathcal{I}$ l'operador identitat.
- [ ] $p(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
- [x] $p(\mathcal{A}) = 3\mathcal{A}$.

9. L'operador normal $\mathcal{A}$, definit en un espai de dimensió 2, té per autovalors $\lambda_1 = \pi$ i $\lambda_2 = 0$. En la base canònica, les matrius dels projectors en els seus subespais propis són respectivament:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu de l'operador $\cos \mathcal{A}$ en la mateixa base és:

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. L'operador $\mathcal{A}$, definit en un espai de dimensió 2, té per autovalors $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$, amb subespais propis associats, respectivament:

$$\mathbf{L_1} = \langle\, (1, -1)\,\rangle \ \text{ i } \ \mathbf{L_2} = \langle\, (1, 1)\,\rangle.$$

La representació matricial de l'operador $\cos \frac{\pi}{3}\mathcal{A}$ en la base canònica és:

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

☒ $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. L'operador $\mathcal{A}$, definit en un espai de dimensió 3, té per autovalors $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$, amb subespais propis associats, respectivament:

$$\mathbf{L_1} = \langle\, (1,1,0)\,,\,(1,1,1) \rangle \;\text{ i }\; \mathbf{L_2} = \langle\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\,\rangle.$$

La representació matricial de l'operador en la base canònica és:

- ☐ $i\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $i\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☒ $i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

12. L'operador $\mathcal{A}$, definit en un espai de dimensió 3, té per autovalors $+1,\,-1,\,0.$ La representació matricial de l'operador $e^{i\pi\mathcal{A}}$ en la base de vectors propis de $\mathcal{A}$ és:

- ☒ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$