ÀLGEBRA I GEOMETRIA II

Grau de Física. Universitat de València

Qüestions Tema 4. *Espai afí*

1. En l'espai afí $\mathbf{E}_2$, considera el canvi entre els sistemes de referència cartesians $S(O; |e_1\rangle, |e_2\rangle)$ i $S'(O'; |e_1'\rangle, |e_2'\rangle)$ definit per la transformació de coordenades:

$$\begin{aligned} (x^1)' &= -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2 \\ (x^2)' &= 1 + \frac{1}{2} x^1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2. \end{aligned}$$

   Les coordenades del punt O', origen del sistema S', en el sistema de referència S són:

   - [x] $(1, \sqrt{3})$.
   - [ ] $(\sqrt{3}, -1)$.
   - [ ] $(1, -\sqrt{3})$.
   - [ ] $(-\sqrt{3}, 1)$.

2. Donat l'espai afí euclidià $\mathbf{E}_2$ i un sistema de coordenades rectangular $\{x^1, x^2\}$, considera la recta que té per equació $x^1 + 2x^2 - 1 = 0$. En el sistema de coordenades $\{(x^1)', (x^2)'\}$ relacionat amb l'anterior per:

$$\begin{aligned} (x^1)' &= \frac{1}{\sqrt{2}} x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 \\ (x^2)' &= \frac{1}{\sqrt{2}} x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x^2, \end{aligned}$$

   l'equació de la recta és:

   - [ ] $(x^1)' + 3(x^2)' - \sqrt{2} = 0$.
   - [ ] $-2(x^1)' + (x^2)' - \sqrt{2} = 0$.
   - [ ] $3(x^1)' - (x^2)' - \sqrt{2} = 0$.
   - [x] $-(x^1)' + 3(x^2)' - \sqrt{2} = 0$.

3. En l'espai euclidià $\mathbf{E}_2$, referit a un sistema de referència rectangular $S(O; |\, e_1\rangle, |\, e_2\rangle)$, els punts P i Q tenen per coordenades $(1,1)$ i $(0,0)$, respectivament. Respecte d'un nou sistema de referència rectangular $S'(O'; |\, e'_1\rangle, |\, e'_2\rangle)$, obtingut mitjançant una traslació i una rotació impròpia, les coordenades d'aquests punts són $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Llavors, les coordenades del punt O' en el sistema de referència S i la matriu del canvi de base $\mathbf{B}$ ($b_{ij} = \langle\, e_i | e'_j \rangle$) són, respectivament:

   - ☐ $(0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - ☐ $(0,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - ☒ $(1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - ☐ $(1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Donat l'espai afí euclidià $\mathbf{E}_2$, considera el canvi d'un sistema de coordenades cartesià rectangular $\{x^1, x^2\}$ a un altre sistema de coordenades similar arbitrari definit per:

$$
\begin{aligned}
(x^1)' &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^2 \\
(x^2)' &= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^2.
\end{aligned}
$$

   El nou sistema de coordenades s'obté del primitiu mitjançant

   - ☐ una rotació pròpia dels eixos.
   - ☒ una traslació, una rotació pròpia i una reflexió dels eixos.
   - ☐ una rotació i una reflexió dels eixos.
   - ☐ una traslació.

5. En l'espai afí euclidià $\mathbf{E}_3$ considera el punt P, les coordenades del qual en el sistema de referència cartesià rectangular $S(O;\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\, |e_3\rangle\})$, són $P(0,1,1)$. Si $\langle e_1|e_1\rangle = \langle e_2|e_2\rangle = \langle e_3|e_3\rangle = 1$, $\langle e_1|e_2\rangle = \langle e_1|e_3\rangle = 0$, $\langle e_2|e_3\rangle = \frac{1}{2}$, llavors la distància del punt P a l'origen i l'angle que forma el vector $\overline{OP}$ amb l'eix X_3 són, respectivament:

- ☐ $\sqrt{2}$, $\pi/4$.
- ☒ $\sqrt{3}$, $\pi/6$.
- ☐ $\sqrt{3}$, $\pi/4$.
- ☐ $\sqrt{2}$, $\pi/6$.

6. Un punt del pla euclidià $\mathbf{E}_2$ referit a un sistema de coordenades cartesianes rectangular té per coordenades $(2,2)$. En un sistema de coordenades polars en el que el pol està situat en el punt de coordenades cartesianes $(2,0)$, les seues coordenades polars (r,θ) són:

- ☐ $(2,\pi/4)$.
- ☒ $(2,\pi/2)$.
- ☐ $(\sqrt{2},-\pi/4)$.
- ☐ $(\sqrt{2},3\pi/4)$.

7. Un punt de l'espai euclidià $\mathbf{E}_3$ referit a un sistema de coordenades cartesià rectangular té per coordenades $(1,0,1/\sqrt{6})$. En un sistema de coordenades esfèriques en el que el pol està situat en el punt $(1/2,1/2,0)$, les seues coordenades esfèriques (r,θ,ϕ) són:

- ☒ $(\sqrt{2/3},\pi/3,-\pi/4)$.
- ☐ $(\sqrt{2/3},2\pi/3,-\pi/4)$.
- ☐ $(2/\sqrt{3},\pi/3,\pi/4)$.
- ☐ $(\sqrt{2/3},\pi/3,\pi/4)$.