TEMA IV. FRACTALS I CAOS

MANEL PERUCHO

1. Introducció

Al llarg del curs hem estudiat fractals estrictament auto-semblants i alguns d'altres, corresponents a funcions matemàtiques o a estructures naturals que es poden estudiar i mesurar com fractals a travès de la dimensió per recompte de caixes o la dimensió del compàs (veure Tema 1 i Pràctica 1). Posteriorment, hem generalitzat la definició fractal com qualsevol conjunt compacte no buit (Tema 2, definicióde M. Barnsley). En estudiar els conjunts de Julia i Mandelbrot, hem vist que una funció no lineal molt senzilla pot ser la llavor d'estructures molt complexes, amb graus notables d'auto-semblança a moltes escales.

En aquest tema estudiarem com l'evolució de sistemes dinàmics produeixen estructures fractals en ser dibuixades al diagrama de fases, que és l'espai format per les variables del sistema, com la velocitat i la posició, o altres com els gradients de temperatura, depenent del sistema dinàmic que estudiem.

La dinàmica no lineal o caòtica de sistemes deterministes no-lineals es caracteriza per una alta sensibilitat a les condicions inicials, per òrbites de periode infinit a l'espai de fases, i per atractors estranys amb dimensió fractal. En aquest tema, estudiarem diversos casos clàssics de transició al caos en sistemes deterministes (que responen a certes equacions d'evolució) no-lineals i el paper que hi juguen els fractals en el seu estudi.

2. Exemples de sistemes no-lineals. Transició al caos.

2.1. **El mapa logístic.** Comencem amb l'estudi de l'evolució de la població d'una espècie. Suposem que computem el valor de la població estudiada de manera periòdica discreta, per exemple, cada any. En un any determinat n, la població estimada és P_n. L'any següent, la població podria ser estimada amb la següent equació:

$$P_{n+1} = P_n + r' P_n = (1 + r')\, P_n = r\, P_n, \tag{1}$$

amb r' el ritme de creixement i r el factor de creixement, ambdós constants. Es tracta d'una expressió molt simplificada, perquè, evidentment, aquest ritme no és constant i depén de molts factors ambientals que poden perjudicar o beneficiar el creixement d'aquesta població: malalties, abundància o no d'aliment, existència de predadors,...

El factor de creixement, r, es pot expressar, a partir de l'equació anterior, com:

$$r = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \frac{\Delta P}{P_n}. \tag{2}$$

Per tant, per a una població inicial P_0 a temps $t = 0$ u.a. (unitats arbitràries), després de n u.a.: $P_n = r^n P_0$. Açò no té sentit, perquè implica un creixement il·limitat. I no pot ser perquè qualsevol creixement està limitat per diferents factors, com per exemple les malalties, la manca d'aliments o recursos, la manca d'espai, etc. Per tant, ha d'existir una població màxima, P_{max}. Per tenir en compte aquest fet, fem servir un ritme de creixement, r', modificat, proporcional a la diferència entre la població a un temps n i la població màxima: $r' = a(P_{max} - P_n)$, amb a constant.

Amb aquesta modificació, quan $P_n = P_{max}$, $r' = 0$ i no hi ha creixement, i si $P_n > P_{max}$, $r' < 0$ i la població disminueix. Així doncs, ens queda:

$$P_{n+1} \,=\, P_n \,+\, a\,(P_{max} - P_n)\,P_n \,=\, P_n \,+ a\,P_{max}P_n \,-\, a\,P_n^2. \tag{3}$$

Normalitzant l'equació 3 a la població màxima, ens queda $p_{n+1} = p_n + a\,p_n\,(1 - p_n)$, amb $p_n = P_n/P_{max}$. Aquesta equació representa el model de Verhulst de creixement. Aquest és un model no-lineal, on la no linealitat del model ve donada pel darrer terme de l'expressió.

L'equació del **mapa logístic** és una versió senzilla de l'equació de Verhulst:

$$x_{n+1} \,=\, a\,x_n\,(1 - x_n). \tag{4}$$

Aquest senzill exemple ens serà útil per introduir el desenvolupament del caos en sistemes no lineals. Com a primera característica destacable, es tracta d'un mapa no invertible, perquè podem iterar cap avant, amb un únic x_n donant un x_{n+1}, però l'invers no és cert, perquè cada x_{n+1} ens dóna dos x_n. Iterant el mapa logístic per diferents valors inicials x_0 i constants a, obtenim comportaments diferents. La seqüència de solucions iterades per a un valor de a i un x_0 inicial, s'anomena **òrbita**. La funció logística és la corba parabòlica (veure les fotocòpies adjuntes) que conté totes les solucions per x_n en l'equació $f(x_n) = a\,x_n\,(1 - x_n)$. A les iteracions de les fotocòpies (primeres pàgines del document adjunt, corresponents a pp. 89-92 de *Fractals and Chaos: An illustrated course* de P. S. Addison), podem veure les òrbites per a diferents valors de a i de x_0.

Iteració gràfica del mapa logístic. Començant amb un valor x_0 de les abcisses, el projectem verticalment sobre la corba logística. El següent pas és projectar el valor de la corba logística obtingut horitzontalment fins la recta $x = y$, que ens dóna el proper valor de la iteració. Finalment, projectem verticalment a l'eix de les abcisses i tornem a començar el procediment. Les figures 5.3a i 5.3b del llibre *Fractals and Chaos: An illustrated course* de P. S. Addison, a la fotocòpia adjunta a aquest text, mostren el procés que acabem de descriure.

En les primeres seqüències estudiades, que estan representades gràficament a les figures 5.3c-5.3l observem una fase inicial transitòria, fins arribar a l'estabilització dels valors. La seqüència de solucions iterades produïda per les iteracions inicials s'anomena *òrbita transitòria* i la seqüència final *òrbita post-transitòria*, la longitud i caràcter de les quals depén del paràmetre a i de x_0. S'anomena **atractor** al conjunt de punts als que s'aproxima l'òrbita quan les iteracions tendeixen a l'infinit. Existeixen dos tipus bàsics d'atractors:

- Atractor periòdic (amb periode P). Açò ocorre per valors petits del paràmetre a en l'equació 4.
- Atractor caòtic (o atractor estrany). Açò ocorre per valors grans del paràmetre a en l'equació 4.

Dels resultats obtinguts podem destacar els següents aspectes:

- Per totes les seqüències amb $a \in [0, 1]$, $x_n \to 0$.
- Per totes les seqüències amb $a \in [1, 2]$, obtenim atractors de periode 1 (convergència a un punt), a l'esquerra del valor màxim de la funció.
- Per totes les seqüències amb $a \in [2, 3]$, obtenim atractors de periode 1 (convergència a un punt), a la dreta del valor màxim de la funció.

En aquestos casos, l'atractor és al lloc d'intersecció entre la corba logística i la recta $y = x$. Fent $x_{n+1} = x_n$, podem obtenir el valor fixe de la iteració. Amb això, tenim $x_n\ [(a - 1)\ -\ a\, x_n] = 0$, amb solució $x_n = (a - 1)/a$. S'observa que l'òrbita transitòria s'allarga a mesura que creix a, és a dir, la convergència és més lenta.

- Per $a \in [3, 3.449490...]$, l'atractor és de periode 2. Prenent $x_0 \neq (a - 1)/a$, encara que siga molt proper, les solucions s'allunyen del punt fix estable fins arribar a l'atractor. L'interval de valors de x_0 que acaben en un atractor determinat s'anomena *conca d'atracció* d'aquest atractor. Així, $x_0 = 0$ i $x_0 = 1$ porten al punt fix $x_n = 0$ i $x_0 = (a - 1)/a$ és punt fix d'ell mateix.
- Per $a \in [3.449490..., 3.544090...]$, l'atractor és de periode 4.
- Per $a \in [3.544090..., 3.564407...]$, l'atractor és de periode 8.
- Per $a = 3.569945...$ s'arriba a periode infinit. Comportament caòtic i atractor estrany.

En definitiva, veiem com per sistemes amb unes característiques determinades donades per un paràmetre de control, encara que estiguen definitis per una llei nolineal senzilla, amaguen una transició a òrbites de periode infinit, és a dir, atractors estranys (figura 5.4).

2.2. **Bifurcació, estabilitat i constant de Feigenbaum.** La seqüència d'augment de periode que acabem de veure s'anomena recta de desdoblament de periode cap al caos (veure la figura 5.4). A l'interval $a \in [3.564407..., 4.0]$ hi ha una gran varietat d'atractors, periodics i caòtics. Hi ha fins i tot atractors periòdics amb periodes baixos que no són potències de 2 (3, 5, 7, 9 i 11). Per $a = 3.828435...$ hi ha un atractor de periode 3 amb la seua pròpia ruta de desdoblament. Un aspecte interessant de les òrbites de periode 3 és que solen aparéixer en sistemes caòtics, fins al punt que en són un símptoma.

Als punts de bifurcació de periode, els punts fixes es fan inestables, és a dir, rebutgen les solucions iterades de les seues rodalies, i apareixen punts estables nous. Els *punts estables* són les solucions, els *punts inestables* rebutgen les solucions i els *neutralment estables o indiferents* no són ni una cosa ni l'altra. L'estabilitat del punt depèn del valor absolut de la pendent de la funció en un punt fixe.

- Per a un punt estable $|f'(x_n)| < 1$.
- Per a un punt indiferent $|f'(x_n)| = 1$.
- Per a un punt inestable $|f'(x_n)| > 1$.

A la figura 5.5 es mostra un estudi de la pendent de la funció logística amb la recta $y = x$ (amb pendent $f'(x) = 1$). Destaca l'existència de dos tipus d'òrbita per als casos en què $f'(x_n) > 0$, on aquesta evoluciona en graons (com una escala, figures 5.5a i 5.5e), i $f'(x_n) < 0$, en què l'òrbita és espiral (figures 5.5b i 5.5f). A les figures 5.5c i 5.5d es mostren punts neutralment estables. En el primer cas (figura 5.5c), la derivada és positiva i la solució roman al punt, sense apropar-se ni allunyar-se del punt fix de la seua esquerra. En el segon (figura 5.5d), la solució oscil·la al voltant del punt fix. Estudiem la derivada de la funció al punt x_n, amb més detall:

$$f'(x_n) \,=\, a\,(1 \,-\, 2\,x_n). \tag{5}$$

Si $a < 1$, només té un punt fixe a l'origen $x_n = 0$, perquè només es creua amb $x_{n+1} = x_n$ per aquest valor ($f'(0) = a$, amb $a < 1$). Si, pel contrari, $a > 1$, $x_n = 0$ es fa inestable (segons la classificació que acabem de veure) i apareix un nou punt $x_n = (a-1)/a$. Substituint aquesta expressió a $f'(x_n)$, tenim

$$f'(x_n) \,=\, a\,(1 \,-\, 2\,\frac{a-1}{a}) \,=\, 2 \,-\, a. \tag{6}$$

El punt fix serà estable fins $a = 3$, ja que per l'interval $a \in]1,3[$, tenim $|f'| < 1$. Per $a = 1$ i $a = 3$, el punt fix és neutral. Per valors majors que 3, el punt fix es fa inestable i apareix una òrbita de periode 2, on les iteracions alternen al voltant del punt fix anterior, que ara és inestable. Els valors es poden obtindre resolent l'equació $x_{n+2} = x_n$:

$$\begin{aligned} x_{n+2} \,&=\, a\,x_{n+1}\,(1 - x_{n+1}) \,=\, a^2 x_n\,(1 - x_n)\,(1 - (a\,x_n\,(1 - x_n))) \,=\, x_n \\ x_n \,&=\, a^2 x_n\,(1 - x_n)\,(1 - (a\,x_n\,(1 - x_n))). \end{aligned} \tag{7}$$

Aquesta equació té dues solucions conegudes $x_n = 0$ i $x_n = (a-1)/a$, que són punts fixos inestables. Hi apareixen dues solucions més, que són:

$$x_n \,=\, \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \tag{8}$$

Aquestos són els punts fixos estables, que només estan definits per valors de $a \geq 3$, on ocorre la bifurcació. En resum, per $a = 3$, el punt fixe $(a-1)/a$ perd estabilitat i es transforma en inestable. Els dos punts fixos nous són els punts estables. Per trobar les solucions de les següents bifurcacions, caldria resoldre les equacions $x_{n+4} = x_n$, $x_{n+8} = x_n$, ... Com es podreu imaginar, açò resulta cada vegada més complicat.

Si ens parem a estudiar la situació dels punts de bifurcació, hi trobarem un resultat molt interessant. Si anomenem a_k al valor de a a la bifurcació k-èssima, tenim $a_1 = 3.0$, $a_2 = 3.449490...$, $a_3 = 3.544090...$, $a_4 = 3.564407...$, $a_5 = 3.568759...$, $a_6 = 3.569692...$, $a_7 = 3.569891...$, etc. Les proporcions entre les separacions successives dels punts de bifurcació es poden definir com:

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k}, \quad k = 2, 3, 4... \tag{9}$$

Aquesta proporció tendeix a una constant quan k tendeix a infinit:

$$lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \delta = 4.669201... \tag{10}$$

Aquest valor es coneix com constant de Feigenbaum. Va ser descobert per al mapa logístic, però s'ha demostrat que és una constant universal, que apareix en tots els sistemes que presenten transició al caos.

Aquesta constant ens dóna també, per exemple, la raó entre els diàmetres dels cercles successius per al conjunt de Mandelbrot a l'eix real, construint una aplicació entre la relació de Verhulst i l'aplicació que defineix el conjunt de Mandelbrot. Efectivament, per a la relació de Verhulst:

$$v_a : x \to a\,x\,(1 - x), \tag{11}$$

mentre que per a la iteració de Mandelbrot:

$$f_c : z \to z^2 + c. \tag{12}$$

Entre elles es pot donar la següent aplicació:

$$\Phi : x \to \frac{1}{2} - \frac{1}{a}x, \tag{13}$$

de manera que: $f_c = \Phi^{-1} \cdot v_a \cdot \Phi$ i $1 - 4\,c = (a - 1)^2$. Amb això obtenim la relació que es mostra a la figura de la pàgina 7 del document adjunt.

2.3. **L'oscil·lador de Duffing.** L'esquema del sistema que anem a estudiar es mostra a la figura6.1a. Es tracta d'un bloc oscil·lant de massa m, enganxat a la paret amb un moll amb constant de recuperació s, sobre una superfície amb coeficient de fregament r, i una força F actuant sobre la massa.

Si considerem $r = 0$ i $F = 0$, en moure la massa de la posició d'equilibri, tindrem una força cansada pel moll estirat (o comprimit). Aquesta força de recuperació és igual al coeficient de recuperació multiplicat per l'extensió del moll, $F_s = -s\,x$, on el signe negatiu indica la direcció en què actua la força. Si estirem el bloc fins una distància A de la seua posició de repós, aquest oscil·larà avant i arrere entre $+A$

and $-A$, respecte a la posició $x = 0$. La sèrie temporal resultant és un moviment harmònic simple (fig. 6.1b) i el periode d'oscil·lació és

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{s}}. \tag{14}$$

Si incloem la fricció amb la superfície, el bloc oscil·larà avant i arrere amb amplitud minvant, fins aturar-se. La força de fricció actua contra el moviment i en aquesta discussió la considerem proporcional a la velocitat del bloc.

L'amplitud de les oscil·lacions s'esmorteix exponencialment (fig. 6.1c). Si ara apliquem una força al sistema, podem fer que les oscil·lacions continuen de manera indefinida. Una força amb amplitud sinusoidal amb el temps és la manera més senzilla d'aconseguir aquesta situació. L'evolució temporal consistirà d'una oscil·lació transitòria que porta el sistema de la pertorbació inicial fins una segona fase d'oscil·lació post-transitòria o atractor. Una vegada el sistema arriba a aquest atractor, no s'hi mou mentre no hi haja una pertorbació externa. La solució post-transitòria és periòdica. Si volem arribar al caos, hem d'afegir l'ingredient bàsic al nostre sistema dinàmic: la no linealitat. Una manera senzilla és fer un moll amb una força de recuperació proporcional al cub del desplaçament: $F_s = -s\,x^3$. Aquest moll és conegut com oscil·lador de Duffing i té la següent equació de moviment:

$$m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + s\,x^3 = A_f\,cos(w\,t), \tag{15}$$

on x és el desplaçament, t el temps, $\dot{x}$ és la velocitat (dx/dt), $\ddot{x}$ és l'acceleració (d^2x/dt^2), A_f l'amplitud de la força i w la freqüència de la força. Aquest sistema pot mostrar comportaments periòdics o caòtics, depenent dels paràmetres escollits. En general, l'equació s'ha de resoldre numèricament, per exemple, integrant-la amb el mètode Runge-Kutta, com les solucions mostrades a la figura adjunta. Per simplificar l'equació i sense pèrdua de generalitat, podem considerar $m = 1$, $s = 1$ i $w = 1$ i ens queda:

$$\ddot{x} + r\,\dot{x} + x^3 = A_f\,cos(t), \tag{16}$$

de manera que les sistema queda controlat per dos paràmeres: l'amplitud de la força, A_f, i el coeficient de fricció, r. Variant aquestos paràmetres podem estudiar els règims d'oscil·acions periòdiques i caòtiques. Com expliquem al paràgraf següent, a la figura 6.2 s'hi presenten diverses solucions que mostren la transició d'un cas a l'altre.

A sovint, més s'una solució periòdica post-transitòria és possible, cadascuna representant el moviment de llarg termini de l'oscil·lador. La solució post-transitòria a la que cau l'oscil·lador depén de les condicions inicials, x_0 i $\dot{x}_0$. El conjunt de condicions inicials que porta a una solució post-transitòria s'anomenta domini o conca d'atracció, com hem definit en el cas de l'equació logística. De fet, per a l'equació 16 amb paràmetres $r = 0.08$ i $A_f = 0.2$, l'oscil·lador de Duffing pot caure en molts estats post-transitoris diferents. Dos d'ells es mostren a les figures 6.2a i

6.2b, amb les sèries transitòries i post-transitòries. Amb $x_0 = 3.0$ i $\dot{x}_0 = 3.0$ s'arriba a una oscil·lació d'amplitud gran amb periode $T = 2\pi$, que és el periode de la funció de forçament. Les oscil·lacions iniciades a $x_0 = 0.0$ i $\dot{x}_0 = 0.0$ (figura 6.2b), acaben en un cicle que conté pics a intervals de 2π, però s'hi poden observar 3 pics diferents i l'oscil·lació es repeteix cada 3 periodes de la funció de forçament, és dir, a intervals de 6π. Una oscil·lació caòtica per a l'oscil·lador de Duffing es mostra a la figura 6.2c. Aquesta correspon a $r = 0.05$ i $A_f = 7.5$, amb condicions inicials $x_0 = 8.0$ i $\dot{x}_0 = 0.0$. Una vegada desapareix la freqüència transitòria, l'oscil·lació cau en un règim caòtic, que no es repeteix i és irregular i impossible de predir.

En lloc de dibuixar l'evolució temporal del desplaçament de l'oscil·lador, x, podem dibuixar aquesta variable front a la velocitat, $\dot{x}$. Açò es coneix com diagrama de fases (o espai fàsic en dues dimensions). La figura 6.3 mostra les gràfiques $x - \dot{x}$ corresponents a les evolucions de la figura 6.2. El sistema dinàmic evoluciona seguint una corba continua a l'espai de fases amb el temps. Les trajectòries periòdiques es mostren a 6.3a i 6.3b. Els punts grossos indiquen la condició inicial. La transició a l'atractor post-transitori es veu clarament per al cas $x_0 = 3.0$ i $\dot{x}_0 = 3.0$ (6.3a). Els rulls tancats corresponents a una òrbita post-transitòria són un senyal d'atractors periòdics. La figura 6.3c mostra el cas de l'atractor caòtic o estrany. A la dreta s'hi veuen uns pocs cicles. Si en lloc de pintar tota la trajectòria, pintem un punt cada periode característic del sistema $T = 2\pi\sqrt{m/s} = 2\pi$ per $m = s = 1$, podem fer-nos una idea més clara del que ocorre. Açò es mostra a la figura 6.4. Per a una oscil·lació de periode 2π, pintarem només un punt en repetides ocasions, sempre al mateix lloc. Si hi ha tres periodes, ens eixiran tres punts. En el cas d'una òrbita caòtica, tenim infinits punts. Aquest tipus de mapa s'anomena mapa de Poincaré.

Cada vegada que iniciem una oscil·lació caòtica amb les mateixes condicions inicials (i fent servir el mateix mètode d'integració per igualar la influència de l'error de càlcul), les solucions són idèntiques. En aquest sentit, el sistema és determinista, però açò depén de l'exactitud amb què coneixem les condicions inicials. Si aquestes són modificades, per poc que siga, obtindrem una evolució totalment diferent. Açò es coneix com dependència sensible a les condicions inicials. A la figura 6.5 es veu com, per $x_0 = 3.01$ i $\dot{x}_0 = 0.0$ inicialment sembla que les solucions són idèntiques al cas $x_0 = 3.0$ i $\dot{x}_0 = 0.0$, però divergeixen a llarg termini. La divergència es pot estudiar mitjançant els exponents de Lyapunov ja que, per escales petites, la divergència de les dues solucions és exponencial.

Els exponents de Lyapunov ens ajuden a caracteritzar el caos. Considerem dos punts separats inicialment (per a $t = 0$) per una distància ε_0 al pla fàsic. Aquestos dos punts seguiran trajectòries diferents, de manera que la separació entre ells, a temps t, serà ε_t. La relació entre aquestes separacions ve donada per $\varepsilon_t = \varepsilon_0\, exp(\lambda\, t)$, amb λ l'exponent de Lyapunov. Si calculem aquest exponent diverses vegades, en podem calcular la mitjana per al sistema:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t} ln \left(\frac{\varepsilon_t(i)}{\varepsilon_0(i)} \right). \tag{17}$$

Quan $\lambda < 0$, els punts convergeixen amb el temps, mentre que si $\lambda > 0$, els punts divergeixen, el que és propi de sistemes no lineals caòtics.

El fet que no puguem mesurar les condicions inicials d'un sistema físic real amb precisió infinita fa que la predicció de l'evolució a llarg termini en aquestos sistemes siga impossible, fins i tot si coneixem les equacions del sistema amb total certesa.

2.4. **El model de Lorenz.** La dependència sensible en les condicions inicials es coneix popularment com *efecte papallona*. Aquest fenomen s'observa en sistemes com el que va estudiar Edward Lorenz, consistent en un sistema d'equacions diferencials acoblades, usats com un model simplificat de convecció tèrmica (és un moviment de circulació d'un fluid generat per diferències de temperatura entre capes diferents) en dues dimensions, conegut com sistema de Rayleigh-Benard. Aquestes equacions s'anomenen ara equacions de Lorenz.

L'experiment en qüestió consisteix a tenir dues plaques o plats a temperatures diferents (τ_d per la placa de dalt i τ_b per a la placa de baix), amb un fluid omplint l'espai entre ells. Si $\tau_d \neq \tau_b$ es condueix calor a travès del fluid que hi ha entre els plats. Si $\tau_b - \tau_d$ es fa gran, les forces de flotació al fluid superen la seua viscositat i apareix un patró de vòrtex en contra-rotació estacionària (significa que cada vórtex gira en direcció oposada als que l'envolten). Lorenz es va adonar que petites diferències en les condicions inicials aplicades al seu model matemàtic simplificat portaven a grans diferències en el comportament final. Aquest comportament, observat en un model dinàmic senzill, havia per tant d'ésser present en sistemes molt més complexos que presenten convecció, com és el cas de l'atmosfera. Aleshores, va sorgir la imatge exagerada d'una petita pertorbació causada pel moviment de les ales d'una papallona, podria generar canvis en el patró futur de l'oratge: *Pot el vol d'una papallona en Brasil provocar un tornado en Arkansas?*.

Les equacions de Lorenz són:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma\,(x - y) \\ \dot{y} &= -x\,z + r\,x - y \\ \dot{z} &= x\,y - b\,z. \end{aligned} \tag{18}$$

El sistema té dos fonts de no-linelitat: el terme $x\,z$ i el terme $x\,y$, i mostra comportament periòdic o caòtic depenent dels paràmetres *sigma*, r i b. σ és el nombre de Prandtl, que relaciona les pèrdues d'energia al fluid degudes a la viscositat amb les relacionades amb la conducció tèrmica, r és una mesura adimensional de la diferència de temperatura entre els dos plats, coneguda com nombre de Rayleigh, i b està relacionada amb la proporció de l'alçada vertical de la capa de fluid amb l'extensió horitzontal dels rolls convectius al seu sí. Noteu que x, y i z no són coordenades espacials, sinó que representen una mesura de la convecció, la variació de la temperatura horitzontal, i la variació de la temperatura vertical, respectivament.

Seguint el treball de Lorenz, fixem $\sigma = 10$ i $b = 2.67$ i fem que r siga el paràmetre de control. Variant aquest paràmetre, s'observa un valor crític per $r_c = 24.74$ al qual el comportament del sistema canvia dramàticament. Per baix de r_c el sistema decau a un estat estacionari i no oscil·latori. La figura 6.7 mostra les sèries temporals i els diagrames de fase $x - y$ i $x - z$ per $r = 16$. La condició inicial es mostra a la figura com un punt gros. Es veu com el sistema cau a un punt fix, estable.

Quan $r > r_c$, apareix el comportament oscil·latori. Amb $r = 28$, s'obté un comportament aperiòdic anomenat per Lorenz *fluxe determinista no periòdic*, que coneixem com *caos*. Les figures 6.8 contenen la informació temporal i els diagrames fàsics. Veiem que les trajectòries oscil·len al voltant de dos lòbuls que formen l'atractor del sistema. Després d'un nombre de revolucions al voltant d'un dels lòbuls del atractor, la trajectòria canvia a l'altre. Llavors gira en espiral al voltant d'aquest segon lòbul abans de tornar al primer. La quantitat de revolucions que fa la trajectòria en cada lòbul abans de canviar a l'altre és impredictible.

L'estructura d'aquest atractor és molt complexa. Sembla que està format per dues superfícies que s'uneixen, però la trajectòria de la solució mai no es pot creuar amb un punt anterior, perquè això implicaria periodicitat. Per arribar a una trajectòria sense punts de tall, necessitem un espai tridimensional per tal que les línies es creuen sense tallar-se. Per la mateixa raó, el que sembla ser dos fulls unint-se no pot ser realment així. Si ens apropem a l'atractor, veurem que els fulls estan formats per un nombre infinit de fulls separats, amb una construcció tipus Cantor. Aquesta estructura fractal és una propietat fonamental dels atractors estranys i és característica del moviment caòtic. La dimensió de l'atractor de Lorenz és 2.05.

3. Sistemes aleatoris front a sistemes caòtics. El paper dels fractals.

Un debat que s'ha generat al voltant de l'estudi de sistemes dinàmics complexos, com els relacionats amb l'economia, és a l'entorn de si es tracta de sistemes aleatoris o caòtics. Acabem d'estudiar que sistemes deterministes poden generar sèries temporals caòtiques i aperiòdiques, on la no-linealitat pròpia del sistema és la causa del comportament fluctuant. En el cas de sistemes aleatoris, el seu comportament respon exclussivament a factors externs al sistema, en l'absència dels quals aquest tornaria a l'estabilitat. Com distingir un cas de l'altre? Les trajectòries generades per un tipus de sistema o altre a l'espai de fases són diferents pel que fa a la seua dimensió fractal.

Imaginem una sèrie temporal $\{a_t\}$ que recull els valors de la variable a en diferents instants t. Si hi ha un procés determinista que explica la sèrie, es pot descriure mitjançant una equació del tipus $x_{t+1} = f(x_t)$, amb $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Aquesta dinàmica governa l'evolució de x_t, que conté tota la informació per determinar els valors $\{a_t\}$. Per tant, els valors a_t venen donats per una funció $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de manera que $a_t = h(x_t)$. La funció h s'anomena *funció observador*.

Si hi ha un atractor caòtic F (compacte no buit, com hem vist al Tema 2) del sistema $x_{t+1} = f(x_t)$, hem d'estimar la seua dimensió fractal per conéixer una fita superior de n (per saber a quin espai correspon x_t, $\mathbb{R}^n$), que és el nombre de variables que expliquen la sèrie $\{a_t\}$ ($n = 3$ en el cas de l'experiment de Lorenz). El problema és que no disposem d'observacions directes de x_t, però hi ha una manera de determinar la dimensió de F que, a més ens dóna informació sobre el caràcter aleatori o no de la sèrie $\{a_t\}$:

Teorema de Takens: Si hi ha un atractor F per als vectors d'estat x_t, i m és un enter suficientment gran, aleshores els conjunts de punts $y_t = (a_t, a_{t+1}, ..., a_{m-1+t})$ tenen un atractor Λ i hi ha una correspondència biunívoca i diferenciable entre Λ i F (els dos atractors). Nota: Per obtenir aquest resultat es requereix que f i h siguen diferenciables i que $m > 2n + 1$, amb n la dimensió de l'espai que conté x_t.

El procés que seguim és el següent:

- Fixem el valor de m,
- formem els conjunts $\{a_t\}$, i
- estimem la dimensió del conjunt de punts y_t obtingut amb una de les tècniques de càlcul de dimensions fractals (dimensió per recompte de caixes, dimensió de correlació,...).

Si el procés que estudiem és caòtic determinista amb atractor F, en repetir aquest procés per diferents valors de m, trobarem que, a partir de cert valor de m, la dimensió fractal queda fixada en un valor. Aquesta és la dimensió de l'atractor F. Si, pel contrari, el sistema és aleatori, la dimensió mesurada per a cada m canviarà i serà $D = m$.

Un altre mètode per detectar la no-linealitat a un sistema és calcular-ne els exponents de Lyapunov que, tal i com hem esmentat, ens donen una idea de la sensibilitat a les condicions inicials. Els exponents de Lyapunov del sistema y_t de grups de punts $\{a_t\}$ són iguals als del sistema determinista x_t, si aquest existeix, per valors suficientment grans de m, segons el teorema de Takens. Valors dels exponents $\lambda > 1$ indiquen no linealitat.

Per tant, la mesura de la dimensió fractal de les trajectòries dels sistemes dinàmics estudiats és fonamental per tal d'estudiar la seua naturalesa no-lineal determinista (caòtica) o aleatòria. En el primer cas, sabem que el sistema respon a una llei física expressable en equacions, de les que en podem estudiar els paràmetres de control a partir del seguiment de l'evolució del sistema durant llargs intervals de temps. Com hem vist en els paràgrafs anteriors, la dimensió fractal ens pot donar informació al voltant del nombre de paràmetres de què depén el sistema, el que representa una informació valuosa. Per altra banda, de vegades existeixen diversos models teòrics que proven d'explicar l'evolució d'un sistema dinàmic. Prenent el model i desnvolupant la seua evolució fent ús d'ordinadors, podem estudiar l'atractor estrany generat per cadascun dels models i la seua dimensió. Comparant aquestos resultats teòrics amb les observacions del sistema, podem ser capaços de distingir quins models s'apropen més a explicar correctament l'evolució del sistema i quins són incorrectes.

4. Bibliografia

- ADDISON, P. S., Fractals and chaos. An illustrated course, IoP, London, 1997
- DEVANEY, R. L., An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1989
- GLEICK, J., Chaos: Making a New Science, Penguin, London, 2008
- HIRSCH, M. W., SMALE, S. and DEVANEY, R. L., Differential equations, dynamical systems & introduction to chaos, 2nd ed., Elsevier, San Diego, 2004
- KAPLAN, D. and GLASS, L., Understanding Nonlinear Physics, Springer, New York, 1995
- LORENZ, E. N., Deterministic Nonperiodic Flow, Journal ot the Atmospheric Sciences, 20, pp. 130-141, 1963
- MANDELBROT, B. B., The (Mis)Behaviour of Markets, Profile, London, 2004
- STROGATZ, S. H., Nonlinear dynamics and chaos, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994

5. Apèndix. Altres exemples

5.1. **Sistemes discrets: Aplicacions pràctiques de l'equació logística.** El preu i la demanda d'un producte al mercat es comporten de certa manera que pot ser aproximada amb l'equació logística. Si denominem D_t la demanda del producte a un temps determinat i el seu preu P_t, podem escriure la següent relació entre aquestes variables:

$$D_t = \alpha P_t (c - P_t). \tag{19}$$

Amb c equivalent a un valor de preu màxim a partir del qual la demanda comença a caure i α el factor de creixement de la demanda. A la part esquerra de la campana (veure la representació gràfica de la funció logístics) es produeix una circumstància curiosa: A mesura que apuja el preu, creix la demanda. Aquest procés respon a l'expectació que causa en els consumidors aquest augment de preu i al seguidisme dels mercats. En aquest joc es pot estudiar la relació entre la demanda d'un producte i la seua producció s'acaba obtenint una nova equació tipus equació logística per a l'evolució del preu del producte en funció del preu anterior i d'un paràmetre (γ) que inclou la relació entre el preu, la producció i la demanda: $P_{t+1} = \gamma\, P_t\,(1 - P_t)$. La dependència de l'evolució en γ i els factors de què depén es pot estudiar amb detall, de manera que quan $\gamma > 3$ apareixerà la inestabilitat que condueix a un comportament caòtic a l'evolució del preu.

Una aplicació diferent de l'equació logística, tot i que modificada, és l'estudi de l'evolució d'espècies que competeixen per uns mateixos recursos (com el cas de les ovelles i els conills) o el cas de la presa i el depredador. En el primer, podem escriure el següent sistema de dues equacions acoblades (equacions de Lotka-Volterra):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(3 - x - 2\,y) \\ \dot{y} &= y\,(2 - y - x), \end{aligned} \tag{20}$$

amb $x(t)$ representant la població de conills i $y(t)$ la d'ovelles. Com veiem al darrer terme de les equacions la població d'ovelles té un impacte major en la població de conills que a la inversa. Per altra banda, la població màxima de conills és major perquè aquesta espècie consumeix menys recursos.

En el cas dels depredadors i les preses, les equacions serien:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(a - b\,y - \lambda\,x) \\ \dot{y} &= y\,(-c + d\,x - \mu\,y), \end{aligned} \tag{21}$$

amb $x(t)$ representant la població de preses i $y(t)$ la de depredadors. El terme d'acoblament és negatiu en el cas de les preses perquè la seua població minva amb l'augment del nombre de depredadors, mentre que si augmenta el nombre de preses, el nombre de depredadors pot augmentar per l'augment de l'aliment i és per això que el terme d'acoblament té signe positiu en la segona equació. El valor negatiu del primer terme de la segona equació ens diu que la població de depredadors tendeix a minvar de manera natural, i només pot créixer si el terme $d\,x$ és suficientment gran.

5.2. **Sistemes continus: Fluids.** Els fluids constitueixen un sistema físic continu en l'espai que per tant s'han d'estudiar amb equacions diferencials en derivades parcials. Aquestos sistemes tenen infinites condicions inicials, ja que hem de definir el sistema a tot l'espai ocupat. El comportament dels fluids pot ser regular (fluid laminar), o caòtic (fluid turbulent). El comportament laminar és característic de fluxes lents o amb molta viscositat, on les partícules es mouen de manera ordenada, esbarant en fulls (làmines). Els fluxes turbulents són més propis de fluids ràpids o amb viscositat baixa, on petites pertorbacions en el fluxe generen moviments caòtics al seu sí. Els fluids es descriuen per les equacions de Navier-Stokes i l'equació de continuïtat. Aquestes equacions són altament no lineals, amb termes que combinen variables amb les seues derivades.

Es pot caracteritzar la transició d'un fluid laminar a un de turbulent de la mateixa manera que abans hem dit que canviant un paràmetre de control passem de comportaments periòdics a comportaments aperiòdics? Experiments amb fluids controlats demostren que sistemes amb dimensions infinites poden mostrar moviments regulars o caòtics de baixa dimensió, és a dir, amb pocs graus de llibertat. El paràmetre de control clau per als fluids és el nombre de Reynolds, que dóna la raó entre les forces inercials i les de viscositat i es defineix com:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \tag{22}$$

amb ρ la densitat del fluid, V la velocitat característica, D l'escala espacial del típica del problema i μ la viscositat dinàmica del fluid. Per baix d'un *Re* crític, la força viscosa domina l'evolució del sistema i el fluid és laminar. Pel contrari, per dalt d'aques *Re* crític, dominen les forces inercials i el fluxe és turbulent. A mesura que *Re* creix es produeix la transició d'un règim a l'altre. Aquesta transició pot ser progressiva o sobtada, depenent de la geometria del sistema i de la presència o absència de soroll.