suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 93-102

Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones

Demostración ingenua (con figuras), demostración geométrica (euclídea)

En la entrega anterior de estas historias, "El cálculo con la cosa", acabé examinando cómo al-Khwārizmī demuestra unos cálculos con radicales utilizando para ello la representación de las magnitudes con las que hay que calcular mediante segmentos, y cómo otros cálculos hechos con especies dice que no puede demostrarlos de la misma manera, porque a un cálculo de ese estilo "no le conviene ninguna figura", y los demuestra "por la expresión" o "en palabras". Además, dije que las demostraciones que al-Khwārizmī hace con figuras son demostraciones cuya garantía de verdad se sustenta en lo que se ve, y que no son, por tanto, demostraciones cuya garantía de verdad sea del estilo que los griegos establecieron y que puede encontrarse en práctica en los *Elementos* de Euclides.

En aras de la concisión, hemos llamado "ingenuas" a las demostraciones que al-Khwārizmī hace con figuras (Puig, 2008; Infante y Puig, 2011a, 2011b), queriendo indicar con ese calificativo de ingenuas precisamente que la garantía de verdad está en lo que se ve, y que, por tanto, ni quien presenta una demostración hecha de esta manera ni quien la lee o la escucha pone en duda lo que se ve, lo que se muestra. Y hemos llamado "geométricas" a las demostraciones euclídeas, en las que la garantía de verdad ya no está en lo que se ve, en lo que se muestra, sino en el entramado de nociones comunes, postulados y definiciones, y en los razonamientos que se hacen sobre las figuras. Por otro lado, la demostración que al-Khwārizmī hace con palabras, aunque sea porque en ese caso no puede hacer una figura que es lo que probablemente le hubiera gustado hacer para poder mostrar en la figura la verdad de lo que va sólo a decir con palabras, podemos calificarla de demostración "algebraica", al menos en germen. En el libro de álgebra de al-Khwārizmī podemos encontrar pues, en este sentido, demostraciones ingenuas (hechas usando figuras geométricas) y demostraciones algebraicas en germen (hechas únicamente con palabras, "por la expresión"), pero no demostraciones geométricas (hechas a la manera euclídea, que usa también figuras geométricas).

El hecho de que en al-Khwārizmī no hay demostraciones euclídeas ya lo señaló hace casi setenta y cinco años el historiador austríaco Solomon Gandz al comparar las demostraciones de al-Khwārizmī de las formas canónicas compuestas,

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

con las proposiciones del libro segundo de Euclides que han querido verse como álgebra tratada en términos geométricos. Gandz rebate la idea de que lo que Euclides está haciendo en el libro segundo de los *Elementos* sea álgebra en el mismo sentido que adquiere el álgebra en el libro de al-Khwārizmī, y califica lo que hace Euclides en ese libro, de forma contundente, como muy antiguo, si se mira como álgebra. Pero es igual de contundente a la hora de calificar el carácter de las demostraciones de al-Khwārizmī:

> Algebraicamente, al-Khwārizmī está 1000 años por delante de Euclides; geométricamente, está 1000 años detrás. Sus demostraciones se basan completamente en la intuición. No tiene ninguna otra cosa en que basarlas. En su geometría, los axiomas, definiciones, teoremas y proposiciones de Euclides se ignoran por completo (Gandz, 1937, p. 519).

Pero no hace falta recurrir a un historiador de las matemáticas nacido en el siglo XIX: el que las demostraciones de al-Khwārizmī no siguen el patrón euclídeo ya lo constataron sus inmediatos seguidores. La mejor prueba de que el asunto se veía así la tenemos en un opúsculo publicado por Thābit Ibn Qurra (836-901), que había nacido en Harran (Turquía) y se instaló a trabajar en Bagdad como ya había hecho años atrás el propio al-Khwārizmī. El opúsculo de Thābit Ibn Qurra es muy breve, dos páginas y media en la edición de Luckey (1941), y lleva un título que no puede ser más explícito: *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas*.

Las demostraciones que ha presentado al-Khwārizmī en su libro no las ve pues Thābit Ibn Qurra como demostraciones geométricas, y lo que hace en este opúsculo es establecer de nuevo los algoritmos que resuelven las formas canónicas compuestas demostrándolos a partir de las proposiciones 5 y 6 del libro segundo de los *Elementos* de Euclides[1]. Thābit Ibn Qurra ya no acepta como garantía de verdad lo que se ve en las figuras que al-Khwārizmī muestra, sino que precisa una garantía de verdad de otro tipo: la que da el entramado euclídeo. En esta entrega de las historias de al-Khwārizmī examinaremos el aspecto que tienen esas demostraciones no euclideas que hace al-Khwārizmī y qué hace al-Khwārizmī con las figuras que usa en ellas, y veremos un ejemplo de cómo es la rectificación de Thābit Ibn Qurra y qué nuevo papel desempeñan las figuras en ella. Pero antes diré un par de cosas sobre la demostración euclídea.

Mostrar, demostrar

La demostración matemática se constituye por primera vez en la Grecia clásica, y se constituye precisamente separándose de una manera previa de demostrar cuyo fundamento estaba en mostrar que se ve que lo que se quiere demostrar es así. En Puig (1994) señalé que Árpád Szabó argumenta en su libro *Les débuts des mathématiques grecques* (Szabó, 1977) que la geometría griega era primitivamente una especie de *historía*, una indagación empírica sobre las propiedades de las figuras geométricas, basada en la vista, e indiqué que, "por eso, cuando, como hace Euclides, los objetos de la geometría se definen desprendiéndose de las propiedades sensibles de las figuras geométricas trazadas en la tierra, como medios de organización de éstas ("Un punto es lo que no tiene partes." "Una línea es una longitud sin anchura."), esas definiciones han de acompañarse del postulado de las condiciones mismas del discurso en el que ha de dialogar el lector" (Puig, 1994a, p. 6).

La transformación de la demostración basada en la vista en la demostración euclídea tiene ese componente ontológico (los objetos de los que trata la geometría no son las figuras trazadas en la tierra, sino los conceptos que organizan los fenómenos del contorno), y, como consecuencia de ello, tiene también un componente pragmático: como la demostración depende de un marco discursivo, los nuevos objetos exigen un marco discursivo nuevo, ya no basta como garantía de verdad mostrar que algo se ve que es así.

Más aún, como subraya el mismo Szabó en su libro *L'aube des mathématiques grecques* (Szabó, 2000), en el que repasa y amplía años después sus tesis expuestas en (Szabó, 1977), en una demostración por reducción al absurdo, el gran invento griego, "lo esencial del razonamiento no se puede presentar a la vista, no hay que prestar atención a los segmentos que se dibujan, sino sólo a las definiciones" (Szabó, 2000, p. 254). Las figuras dibujadas pueden ser un apoyo para los razonamientos, los razonamientos pueden desarrollarse haciendo referencia a figuras que están dibujadas, pero lo que se ve en éstas ya no puede ser la garantía de la verdad de lo que se afirma. Esa garantía hay que buscarla en otro sitio.

El verbo griego *deíkmyni*, del que deriva la expresión con la que Euclides termina las demostraciones de todos los teoremas, que traducimos corrientemente por "como queríamos demostrar", significaba en la lengua clásica griega, nos cuenta Szabó (1997, p. 202) tanto "hacer ver, mostrar, indicar" como "hacer conocer mediante la palabra, explicar" o "demostrar". El significado más primitivo parece ser el de "mostrar", y, así, arguye Szabó, se puede ver en acción en el famoso pasaje del diálogo *Menón* de Platón en el que Sócrates le enseña al esclavo cómo construir un cuadrado de área doble de un cuadrado dado. Sócrates le muestra al esclavo la figura y le hace ver que si dobla el lado, el cuadrado obtenido no es el doble sino el cuádruple. Todo el peso de la demostración se soporta en la vista, en lo que Sócrates hace ver al esclavo en las figuras dibujadas en la tierra. Sin embargo, las cosas ya no son así en los *Elementos* de Euclides, y cuando en éstos se dice que algo se ha demostrado, lo que se ha hecho no ha sido mostrar la figura construida para que se vea que es así.

En el Menón, Sócrates sólo le pregunta al dueño del esclavo "¿Es griego y habla griego?". Ése es todo el marco discursivo que Sócrates necesita compartir con el esclavo para poder enseñarle, para poder mostrarle la verdad de una proposición matemática. El esclavo aceptará lo que se le muestra como prueba, porque mostrar es demostrar en ese marco discursivo. La demostración que hace Sócrates es, como las que hace al-Khwārizmī, una demostración de las que hemos llamado "ingenuas".

Luis Vega, en su libro *La trama de la demostración*, que subtituló "Los griegos y la razón tejedora de pruebas" (Vega, 1990), señala como acepciones del verbo griego *deíkmyni* tanto mostrar algo, como probar que algo es el caso; y éste probar que algo es el caso puede ser según él "probar de modo vago o genérico", significado que le atribuye a la aparición de ese verbo en la indicación que Sócrates le da al esclavo cuando le dice "Y si no quieres hacer cálculos, muéstrala en un dibujo", refiriéndose a la diagonal del cuadrado que resuelve el problema de encontrar el cuadrado de área doble (Vega, 1990, p. 20). Los cálculos no serían según esto una "prueba vaga o genérica", sino una demostración concluyente, un argumento con poder de convicción en el marco discursivo euclídeo, el significado que *deíkmyni* acaba teniendo.

Al subrayar, como lo estoy haciendo, el papel del marco discursivo en la caracterización de a qué se considera una demostración, lo que estoy queriendo decir, como lo dice Vega (1990) es que un argumento es una demostración por razones pragmáticas. Es decir, una demostración se caracteriza por ser una argumentación que en un determinado marco discursivo se reconoce por quien la realiza y quien la escucha como demostración. Pero no estoy diciendo que se trate de un acuerdo que se establece entre dos personas en el curso de un diálogo, el marco discursivo es un conjunto de reglas pragmáticas socialmente establecidas, en un momento histórico concreto, por una comunidad, en el caso que nos ocupa, por una comunidad matemática.

Cuando se abandona el mostrar con el dedo como forma de presentar una prueba, y la vista como garantía de verdad, es decir, cuando este marco discursivo que sustenta las demostraciones que hemos llamado "ingenuas" deja de regir, y la argumentación, la manera de dar cuenta y razón, toma la forma de una deducción lógica, resulta preciso establecer un nuevo marco discursivo en el que se acuerde qué cosas son las que no va a ser preciso deducir de otras. Esos primeros principios adoptan en el texto euclídeo dos formas: las nociones comunes y los postulados. En el marco discursivo que constituye los *Elementos* el diálogo es posible, la realización de demostraciones es posible, porque aceptamos que hay cosas que no hay que demostrar, y esto por dos motivos: el primero, porque estamos de acuerdo en que son verdaderas, ésas son las nociones comunes; y el segundo, porque aceptamos que son verdaderas para que el diálogo pueda comenzar, ésos son los postulados. Szabó (1977) afirma que la palabra que usa Euclides y que traducimos por postulado, *aitēmata*, designa en la dialéctica una petición a la que el interlocutor no asiente de inmediato, sino ante la que tiene reservas. Por eso Euclides escribe en los postulados en imperativo: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera". Y de ahí la historia en particular del quinto postulado, que, puesto en duda reiteradamente, acabó abriendo otros marcos discursivos para la geometría.

Las demostraciones euclídeas, las que hemos llamado "geométricas", son las que se desarrollan en ese marco discursivo compuesto por definiciones, nociones comunes, postulados y deducciones lógicas. Nada de esto está presente en las demostraciones de al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas compuestas.

Un esquema para describir las demostraciones ingenuas de al-Khwārizmī

En varias ocasiones he mostrado en detalle cómo hace al-Khwārizmī la demostración del algoritmo de solución de la quinta forma canónica (segunda forma canónica compuesta) "tesoro y números igual a raíces". Lo esbocé por primera ver en las *7as JAEM*, que se celebraron en Madrid en 1995 (Puig, 1995), una explicación más minuciosa apareció en México como capítulo de un libro (Puig, 1998) y puede descargarse de mi web en una versión ligeramente retocada en 2003 (http://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf), y, finalmente, una versión inglesa en la que además hablo de los procedimientos de cortar y pegar en el álgebra babilónica tal y como la reinterpreta Høyrup (2002) y de mi uso de ese tipo de procedimientos para entender algunas proposiciones del *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore, ha aparecido como un capítulo del libro *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, publicado por la Mathematical Association of America (Puig 2011). Aquí voy a mostrar un esquema de lo que hace al-Khwārizmī en este caso.

La quinta forma canónica es el caso más difícil, lo que ha hecho que en álgebras posteriores se presentara en último lugar, en vez de en el quinto. Lo que lo hace más difícil es el hecho de que cabe que la ecuación tenga una solución, dos soluciones o ninguna solución, cosa que no sucede en las otras dos formas canónicas compuestas, y que, por tanto, haya que discutir la existencia de esas posibilidades. Al-Khwārizmī enuncia el algoritmo de solución de esta forma canónica usando como caso genérico "un tesoro y veintiún dirhams igual a diez raíces", es decir, el equivalente a nuestra la ecuación $x^2 + 21 = 10x$. Si escribimos esa ecuación genérica en general $x^2 + c = 10b$, las instrucciones del algoritmo las podemos representar por la siguiente secuencia de operaciones:

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \to \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

En la secuencia hemos señalado conjuntamente las dos opciones finales, que al-Khwārizmī enuncia por separado.

Figura1. Página del manuscrito del libro de álgebra de la biblioteca Bodleyan de Oxford en que aparece la demostración de la quinta forma canónica

En la figura 1, está reproducida la página del manuscrito del libro de al-Khwārizmī conservado en la biblioteca Bodleyan de Oxford[2] en la que al-Khwārizmī presenta la demostración de este algoritmo. En ella puede verse que hay una figura. De hecho, la figura está colocada al final de la demostración, precedida de la expresión "ésta es la figura". Todo el texto que precede a la frase que muestra, indica, la figura lo que hace es construir progresivamente la figura y manipularla mostrando que determinadas partes de ella son iguales a otras, sin más argumento que el hecho de que así se ve en la construcción.
En el anexo 2 presento el texto de la demostración en detalle, acompañado de unas figuras explicativas, que no están en el texto de al-Khwārizmī, y que van siguiendo la construcción de la figura que presenta al-Khwārizmī y las manipulaciones que hace con ella (de hecho, mi figura es la de al-Khwārizmī girada 180º). Indico también la relación entre el texto de al-Khwārizmī y los pasos del algoritmo. Aquí presentaré el esquema de la demostración y sus rasgos fundamentales.

El esquema de la demostración puede describirse así:

1. Justificación de la representación de las especies de números, es decir, de los objetos del álgebra, mediante figuras, y representación de la ecuación.
   1.1. Un tesoro se representa con un cuadrado
   1.2. Representación diferenciada de la raíz del tesoro y de la raíz de la superficie, que permite expresar la ecuación como una adición de áreas.
2. Justificación paso a paso del algoritmo.
   2.1. Primeros pasos que preparan el uso del método akadio.
   2.2. Operaciones de cortar, mover y pegar en las que se busca un gnomon equivalente a un rectángulo (el método akadio).
   2.3. Pasos finales de recorrido del algoritmo en la figura.

Me parece importante señalar que, en la primera parte, al-Khwārizmī justifica cómo está representando las especies de números mediante figuras. Un tesoro no es un cuadrado, sino que se representa mediante un cuadrado. En la entrega anterior de estas historias vimos que al-Khwārizmī no podía representar un trinomio mediante una figura y que decía que a un trinomio

> no le conviene ninguna figura porque está compuesta por tres especies diferentes, tesoros, raíces y números, y no hay con ellas lo que les sea igual, para que pueda ser representado en una figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, pp. 246-247).

Es decir, al-Khwārizmī dice que para poder hacer una figura necesita que haya una ecuación. Esto es así porque el modo que tiene al-Khwārizmī de representar las tres especies de números permite combinar las tres especies en las dos dimensiones de las figuras planas que utiliza para representarlas. Para que las tres especies se puedan representar en las dos dimensiones, lo que al-Khwārizmī hace es lo siguiente. El tesoro, que siempre es uno porque las formas canónicas están enunciadas para un tesoro[3], se representa mediante un cuadrado. Las raíces, en plural, se representan mediante un rectángulo. Para ello, al-Khwārizmī recurre a un artificio que explica minuciosamente en la parte 1.2 de nuestro esquema. La raíz del tesoro es lineal y se representa mediante un segmento, en concreto, el lado del cuadrado que representa al tesoro, pero la raíz de la superficie, la raíz del rectángulo, es un rectángulo de largo la raíz del tesoro (el lado del cuadrado) y de ancho una unidad. Es una línea "ancha", como las llama Høyrup (1995), que traza su uso desde el álgebra babilónica. Así, las raíces, en plural, puede ser un rectángulo que se obtiene reiterando la raíz de la superficie tantas veces como sea necesario (como diga el número de raíces que haya). Finalmente, los simples números se representan también como un rectángulo, cuya área mide ese número: esto es lo que permite que se construya la ecuación, el hecho de que finalmente todas las especies aparecen representadas como superficies rectangulares.

En la segunda parte de la demostración, la parte crucial es la aplicación del método akadio, un método propio del álgebra babilónica que cortando, moviendo y pegando partes de un rectángulo, lo convierten en un gnomon de igual área, lo que permite “completar un cuadrado”. Eso es lo que está mostrado en la parte 2.2 de nuestro esquema. El resto de la demostración, antes y después de 2.2, recorre los pasos del algoritmo en la figura.

Figuras que perduran: al-Khwārizmī, Euclides, Babilonia

He dicho que la parte crucial de la demostración de al-Khwārizmī es la aplicación del método akadio, un método que maneja las figuras de forma concreta cortándolas, moviéndolas y pegándolas, sin tener duda alguna sobre que, al hacer esas manipulaciones, las figuras que se obtienen son las que aparecen a la vista. Se ve que lo que resulta es un cuadrado, o que es un rectángulo, y se muestra: “ésta es la figura”, como dice al-Khwārizmī.

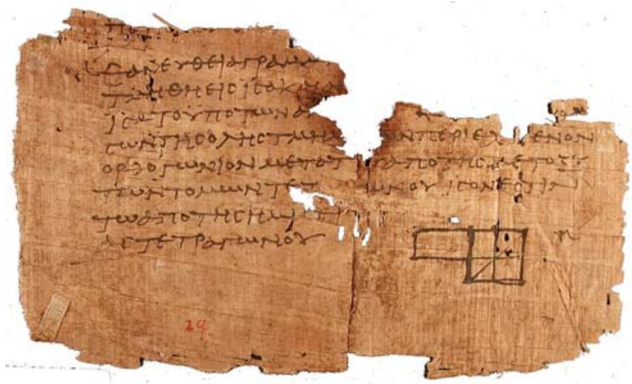


Figura 2. El fragmento más antiguo de los Elementos de Euclides que se conserva

Como señala Høyrup (2002), el libro segundo de los *Elementos* de Euclides se puede interpretar como la crítica de esos procedimientos de cortar y pegar babilónicos. Interpretado así, Euclides está rectificando la ingenuidad de esos procedimientos, el hecho de que su garantía de verdad sea lo que se ve. Euclides usa una figura, pero lo esencial de la demostración ya no está en ella sino en el hecho de que todas las afirmaciones que se hacen sobre ella están fundadas en nociones comunes, postulados y definiciones, y con los argumentos propios del nuevo marco discursivo. Las cosas no son así porque se ven en la figura, sino que lo que se ve se pone en duda hasta que se demuestra que es así.

Euclides y al-Khwārizmī están usando de forma distinta un mismo sustrato babilónico. Uno incorpora el método akadio al nuevo marco discursivo en que la garantía de verdad no está en lo visible, sometiéndolo a crítica, para lo que demuestra las propiedades geométricas que son pertinentes para establecer que lo que se ve es efectivamente el caso, con lo que no hace álgebra, sino geometría. El otro, incorpora el método akadio sin crítica alguna en el marco discursivo del álgebra que él ha constituido. Parafraseando a Gandz (1937), su forma de demostrar está (más de) mil años atrás de Euclides, aunque su álgebra esté mil años por delante de Euclides. Pero como el sustrato es el mismo, las figuras que usan al-Khwārizmī y Euclides pueden verse como ligeras variantes de una figura primaria: la que explica el método akadio.

El fragmento más antiguo que se conserva de los Elementos de Euclides es un papiro que los historiadores dataron inicialmente alrededor del año 300 de nuestra era, y que más recientemente ha sido datado por Eric Turner aún más atrás, entre el 75 y el 125 de nuestra era. En ese fragmento, reproducido en la figura 2, aparece precisamente la figura que acompaña la proposición 5 del libro segundo, una de las proposiciones en que Euclides más explícitamente está rectificando el método akadio.

La figura 3 muestra la reconstrucción de Høyrup (2002) del método akadio aplicado al problema de encontrar el largo y el ancho de un rectángulo cuando se conocen el área y la suma del largo y el ancho.

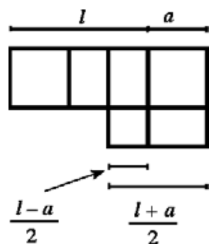


Figura 3

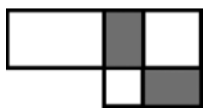


Figura 4

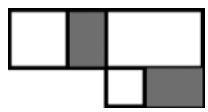


Figura 5

La proposición II.5 de Euclides dice en la traducción de María Luisa Puertas:

> Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de la sección, es igual al cuadrado de la mitad (Euclides, 1991, p. 272).

En la demostración de Euclides el momento crucial es cuando establece que los rectángulos sombreados en la figura 4 son iguales. En la demostración de al-Khwārizmī de la quinta forma canónica, el momento crucial, como ya hemos señalado es cuando establece la igualdad de los rectángulos sombreados en la figura 5. Euclides y al-Khwārizmī no hacen lo mismo, ni en los detalles ni en la intención, ni en el marco discursivo de referencia de sus demostraciones, pero todo está preparado para rectificar la demostración ingenua de al-Khwārizmī con la demostración geométrica de Euclides.

Thābit ibn Qurra rectifica a al-Khwārizmī

Lo que hace Thābit ibn Qurra para rectificar las demostraciones de al-Khwārizmī sigue un esquema muy distinto del que organiza las demostraciones de éste, y, además, las figuras que aparecen desempeñan un papel bien diferente. El momento crucial de la demostración no va a ser ninguna operación realizada con la figura, sino la identificación del problema que se quiere resolver (la solución de la forma canónica) con un problema que ya está resuelto en los *Elementos* de Euclides. Y la figura por tanto no va a ser objeto de transformaciones de cortar, mover y pegar, sino que, una vez construida de manera que represente la ecuación que se trata de resolver, ya no es más que una referencia para el discurso demostrativo, que se fundamenta en el edificio euclídeo y no en lo que se ve.

En su opúsculo *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas*, Thābit Ibn Qurra resuelve las tres formas canónicas compuestas. Aquí examinaremos cómo lo hace utilizando como ejemplo la primera de ellas, es decir, la cuarta forma canónica. Para que sirva de referencia, en el anexo 1, presento el algoritmo de solución tal y como lo plantea al-Khwārizmī en su libro de álgebra, y una explicación de su demostración. Como en el caso de mi análisis de la quinta forma canónica que hemos examinado antes, la figura que al-Khwārizmī sólo presenta al final de la demostración tras la frase "ésta es la figura", la construyo yo siguiendo los pasos de la demostración.

Lo primero que distingue a Thābit ibn Qurra de al-Khwārizmī es que lo que hace es resolver la forma canónica tomada como un problema enunciado en términos generales. Thābit ibn Qurra no enuncia un caso concreto numérico, para usarlo como caso genérico, a la manera de al-Khwārizmī, sino que se plantea resolver el problema en la expresión general que es la forma canónica, en el caso de la cuarta, tesoro más raíces igual a números.

La demostración recorre esquemáticamente los siguientes pasos:

1. Anuncio.
2. Justificación de la representación de las especies de números (los objetos del álgebra) mediante figuras, y representación de la ecuación, en términos generales.
3. Reducción a un problema conocido.
4. Recurso a una proposición de los *Elementos*, en este caso la proposición II, 6.
5. Paralelismo con el algoritmo.

Obsérvese que Thābit ibn Qurra no parte del algoritmo, sino que se plantea resolver el problema, no demostrar el algoritmo. Sólo al final, verá que la solución que él ha encontrado se corresponde con "el procedimiento de los algebristas", es decir, con el algoritmo.

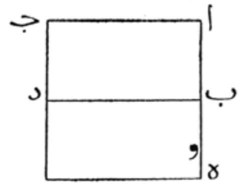
Veamos en parte cómo transcurre la demostración[4].

1. Anuncio.

Thābit ibn Qurra comienza anunciando explícitamente que "la manera de resolver esto" se basa en Euclides II, 6.

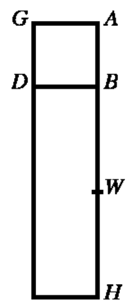
2. Justificación de la representación de las especies de números (los objetos del álgebra) mediante figuras, y representación de la ecuación, en términos generales.

> Pongamos el tesoro como un cuadrado ABGD y pongamos en BH tantas veces la unidad con la que se miden las líneas como la cantidad dada de raíces, y completemos la superficie DH.



> Así la raíz es AB, porque el tesoro es el cuadrado ABGD, y esto es en el campo de los números y el cálculo como el producto de AB por la unidad con la que se miden las líneas.
> Pero en BH hay tantas veces la unidad como la cantidad dada de raíces, así que el producto de AB por BH es también igual a las raíces del problema, en el campo de número y cálculo.
> Y el producto de AB por BH es la superficie DH, porque AB es igual a BD. Entonces la superficie DH también es igual a las raíces del problema.
> Por tanto, la superficie total GH es igual al tesoro con las raíces añadidas.

3. Reducción a un problema conocido.



> Pero el tesoro con las raíces es igual a un número conocido. Así que la superficie GH es conocida, y es igual al producto AH por AB, porque AB es igual a AG. Por tanto, el producto HA por AB es conocido y la línea BH es conocida, porque el número de sus unidades es conocido.
>
> Y así el asunto resulta ser un problema geométrico conocido:
> La línea BH es conocida, y AB se le añade, y el producto de HA por AB es conocido.

4. Recurso a una proposición de los *Elementos*, en este caso la proposición II, 6.

> Ahora bien, se ha demostrado en la proposición sexta del segundo libro de Euclides que, cuando la línea BH se corta en dos mitades en el punto W, el producto de HA por AB con el cuadrado en BW es igual al cuadrado en AW.
> Pero el producto HA por AB es conocido y el cuadrado en BW es conocido.
> Así que el cuadrado en AW es conocido y AW también es

> conocido, y substrayendo de él BW, que es conocido, resulta AB conocido, que es la raíz.
> Y multiplicado por sí mismo, el cuadrado ABGD es conocido, es decir, el tesoro. Y esto es lo que queríamos demostrar.

5. Paralelismo con el algoritmo.

> Este procedimiento se corresponde con el procedimiento de los algebristas para resolver estos problemas.
> Cuando ellos dividen por dos el número de raíces, es como cuando nosotros dividimos en dos la línea BH [...] y cuando la multiplican [la raíz] por sí misma y conocen así el tesoro, es como cuando nosotros hemos conocido a partir de AB su cuadrado, que es el tesoro. (Luckey, 1941, pp. 105-106 y 110-111; Rashed, 2007, 33-34)

Thābit ibn Qurra obtiene pues el procedimiento para resolver la cuarta forma canónica, que él ve como un problema, de manera independiente del algoritmo de al-Khwārizmī, y luego muestra que su procedimiento de solución, que está demostrado a la manera euclídea, se corresponde con el procedimiento "de los algebristas", que no está demostrado a la manera euclídea. No busca la garantía de la verdad del algoritmo de los algebristas en el marco discursivo de éstos, sino en un marco discursivo distinto: el de la demostración geométrica en práctica en los *Elementos* de Euclides.

Para ello, Thābit ibn Qurra se plantea la solución de la cuarta forma canónica como un problema. Y, a diferencia de al-Khwārizmī, lo plantea en términos generales: se trata de demostrar que si "el tesoro con las raíces es igual a un número conocido", entonces tanto la raíz como el tesoro también son conocidos. Es decir, Thābit ibn Qurra se plantea un teorema, un problema de demostrar, del mismo estilo que los que Euclides se plantea en su libro *Data*, y del mismo estilo de los problemas, en ese caso aritmético-algebraicos, que Jordanus de Nemore de planteó en el siglo XIII en su libro *De Numeris Datis*, que analicé en Puig (1994b). De hecho, usa la proposición II, 6 de los *Elementos*, porque el problema geométrico al que traduce el problema algebraico de resolver la cuarta forma canónica es *Data*, 59, o, por permanecer en los *Elementos*, una generalización de la proposición VI, 29.

Como expliqué en Puig (1994b), un enunciado como el problema de demostrar, el teorema, que se plantea Thābit ibn Qurra, es un teorema sobre la posibilidad de resolver una clase de problemas, en este caso, todos los que se reducen a la cuarta forma canónica. Lo que Thābit ibn Qurra hace es traducir ese problema, que está enunciado en los términos del álgebra, y, por tanto, es un problema algebraico, a un problema geométrico que está en la caja de herramientas para el análisis que son las proposiciones ya demostradas de los libros de Euclides. Eso es lo que hace en la parte 3 en que he dividido su demostración, que es analítica, es decir, sigue el método de análisis y síntesis, al ir de lo que se quiere demostrar a algo conocido. En la parte 4, el argumento sigue también el método de análisis y síntesis desarrollando una argumentación que busca ahora derivar conocido de conocido, gracias a la proposición II, 5 de los *Elementos*. La palabra "conocido" se repite una y otra vez a lo largo de la demostración.

Por otro lado, la figura que Thābit ibn Qurra construye en la parte 2 de la demostración, no se manipula una vez construida, lo que se ha hecho para representar la cuarta forma canónica y poder realizar la traducción a un problema geométrico. La argumentación analítica la usa sólo como referencia para desplegar lo que es importante, que no es lo que se ve en la figura, sino lo que dicen las proposiciones de la caja de herramientas para el análisis que son las proposiciones de los libros de Euclides.

Coda. Nuevas figuras

Algunos siglos después de esta parte de la historia del álgebra que he presentado, en el Occidente árabe medieval, es decir, en al-Andalus y el Magreb, se desarrolla una forma de representar las especies de números mediante abreviaturas que usan la primera letra de las palabras árabes "número", "raíz", "tesoro", "cubo", y combinaciones de esas letras, colocadas encima de los números escritos con las cifras hindúes que al-Khwārizmī introdujo en el mundo árabe, así como la última letra de la palabra árabe "igual", y con ello se escriben de forma abreviada polinomios y ecuaciones. En la figura 8, tomada de Requena (2008) pueden verse en rojo abreviaturas de ese estilo de dos ecuaciones en un texto del matemático al-Qalasadī, nacido en Baza en 1412, en el reino nazarí de Granada, y muerto en Béja (actualmente en Túnez) en 1486, a donde emigró por la inestabilidad que imperaba en los últimos años del reino de Granada.

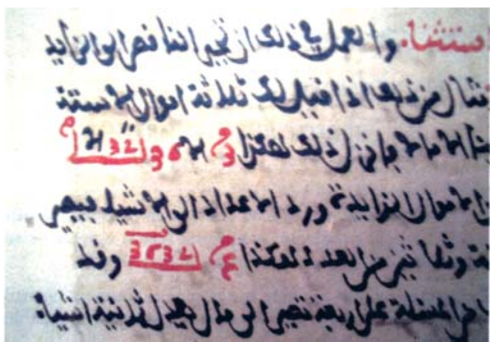


Figura 8

En textos como el de al-Qalasadī, las demostraciones ya no se hacen mediante figuras a la manera "ingenua" de al-Khwārizmī, ni tampoco usando figuras en una demostración geométrica euclídea como Thābit ibn Qurra. No hay recurso de ningún tipo a figuras geométricas, pero, en esos textos, esas abreviaturas también se llaman "figuras", el discurso argumentativo se refiere a ellas, y esas nuevas figuras se manipulan: las demostraciones son algebraicas. Pero ésa es otra historia.

HISTORIAS ■

Anexo 1. La cuarta forma canónica

Pero tesoro y raíces iguales a un número es como si dices: tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Cuyo significado es: ¿qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces, el total que se agrega es treinta y nueve?

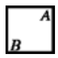
Cuya regla es que divides por dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco. Luego multiplícalo por sí mismo, y resulta veinticinco. Añádele treinta y nueve, y son sesenta y cuatro. Cuya raíz extraes, que es ocho. Entonces réstale la mitad de las raíces, que es cinco. Queda pues tres, que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve. (Hughes, 1986, p. 234; Rashed, 2007, pp. 100-101.)

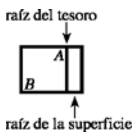
La ecuación usada como caso genérico es $x^2 + 10x = 39$, o, en general, $x^2 + bx = c$, y el algoritmo de solución lo podemos representar con la secuencia de acciones siguiente:

$$\frac{b}{2} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

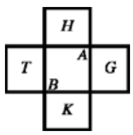
La demostración transcurre como sigue:

La causa es la siguiente. Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Haz pues para ello una superficie cuadrada de lados desconocidos, que es el tesoro que queremos conocer, así como su raíz. Sea la superficie AB.

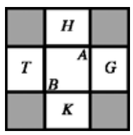




Pero cada uno de sus lados es su raíz, y cada uno de sus lados, si se multiplica por un número cualquiera, entonces el número que se añade por ello es el número de raíces, cada una de las cuales es como la raíz de esta superficie.



Así, ya que se había dicho que había diez raíces con el tesoro, tomemos un cuarto de diez, que es dos y medio, y hagamos con cada cuarto una superficie con uno de los lados de la superficie. Se hacen así con la primera superficie, que es la superficie AB, cuatro superficies iguales cuyas longitudes son iguales cada una a la raíz de AB y cuya anchura es dos y medio, que son las superficies G, H, T, K.



Se engendra pues una superficie de lados iguales y desconocidos a la que le falta lo que se le ha quitado en los cuatro ángulos, a saber, en cada uno de los ángulos falta el producto de dos y medios por dos y medio. Lo que es necesario pues en números para completar la cuadratura de la superficie es cuatro veces el producto de dos y medio por dos y medio. Y la suma de todo ello es veinticinco.

Ahora bien, sabemos que la primera superficie es el tesoro, y las cuatro superficies que la rodean, que son diez raíces, son treinta y nueve en números. Entonces, si les añadimos veinticinco, que son los cuatro cuadrados que están en los ángulos de la superficie AB, completamos la cuadratura de la superficie mayor que es la superficie DE. Pero sabemos que todo esto es sesenta y cuatro. Uno pues de sus lados es su raíz, que es ocho. Restemos por tanto lo que es igual a dos veces un cuarto de diez de los dos extremos de la superficie mayor, que es la superficie DE, y queda de su lado tres, que es el lado de la primera superficie, que es AB, y es la raíz de ese tesoro.

Como puede observarse, la figura que al-Khwārizmī construye no sigue exactamente el algoritmo que quiere demostrar, sino el algoritmo siguiente:

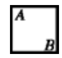
$$\frac{b}{4} \rightarrow \left(\frac{b}{4}\right)^2 \rightarrow 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 \rightarrow 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c \rightarrow \sqrt{4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} \rightarrow \sqrt{4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - 2\frac{b}{4}$$

Esta incongruencia la resuelve al-Khwārizmī estableciendo con palabras una identidad algebraica, la que muestra que lo obtenido al final es igual a lo que se quería obtener:

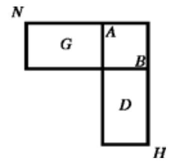
Sin embargo, nosotros dividimos por dos las diez raíces, y multiplicamos eso por sí mismo, y le añadimos el número, que es treinta y nueve, para que se nos complete la cuadratura de la figura mayor con lo que falta en los cuatro ángulos. En efecto, si se multiplica un cuarto de cualquier número por sí mismo, y luego lo que resulta, por cuatro, es igual que lo que resulta del producto de su mitad por sí misma. Nos basta pues con el producto de la mitad de la raíz por sí misma, en vez de cuatro veces el producto de la cuarta parte por sí misma. Y ésta es la figura. (Hughes, 1986, pp. 236-237; Rashed, 2007, pp. 108-111.)

Como lo que ha demostrado con la figura no ha sido el algoritmo que había presentado al principio sino otro y ha tenido que completar la demostración mediante la figura de otro algoritmo, con una demostración con palabras de que los algoritmos son equivalentes, al-Khwārizmī hace en este caso una segunda demostración que ésa sí que sigue los pasos del algoritmo de solución. Esa segunda demostración transcurre como sigue:

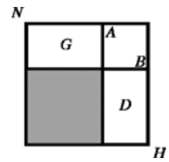
Hay otra figura que conduce a lo mismo: que es la superficie AB, que es el tesoro. Queremos añadirle diez de sus raíces.



Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco. Y hacemos de ella dos superficies en las dos partes de AB, que son las superficies G y D, cuya longitud es igual a los lados de la superficie AB, y cuya anchura es cinco, que es la mitad de diez. Nos queda por tanto sobre la superficie AB un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie.



Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve, y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande, que es la superficie NH. Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro.



Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado de la superficie AB, que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve. (Rashed, 2007, pp. 110-113; Hughes, 1986, p. 238)

Anexo 2. La quinta forma canónica

La ecuación usada como caso genérico es $x^2 + 21 = 10x$, o, en general, $x^2 + c = bx$, y el algoritmo de solución lo podemos representar con la secuencia de acciones siguiente:

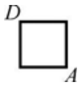
$$\frac{b}{2} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \rightarrow \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

La demostración transcurre como sigue:

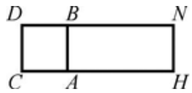
1. Justificación de la representación de las especies de números, es decir, de los objetos del álgebra, mediante figuras, y representación de la ecuación.

1.1. Un tesoro se representa con un cuadrado

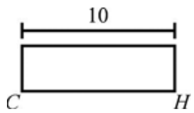
Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, representamos el tesoro por un cuadrado cuyo lado no conocemos



A éste unimos un paralelogramo, la superficie HB, cuyo ancho, el lado HN, es igual a uno de los lados de la superficie AD.

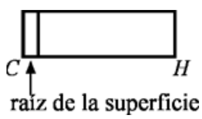


La longitud de las dos superficies juntas es igual a la línea HC. Sabemos que esta longitud es diez en números, ya que un cuadrado tiene los lados y los ángulos iguales, y,

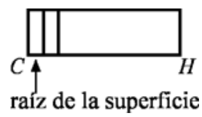


1.2. Representación diferenciada de la raíz del tesoro y de la raíz de la superficie, que permite expresar la ecuación como una adición de áreas.

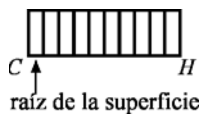
si uno de sus lados se multiplica por uno, es la raíz de la superficie,



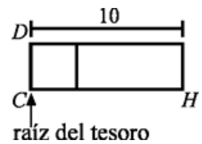
y por dos, dos de sus raíces.



Como se ha dicho que un tesoro y veintiún dirhams es igual a diez raíces, concluimos que la longitud del lado HC es igual a diez,



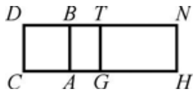
ya que el lado CD es la raíz del tesoro.



2. Justificación paso a paso del algoritmo.

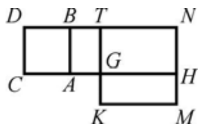
2.1. Primeros pasos que preparan el uso del método akadio.

Por tanto dividimos el lado CH en dos mitades en el punto G y levantemos sobre él la línea GT. Se ve entonces que la línea GC es igual a la línea HG. Y también es evidente para nosotros que la línea GT es igual a la línea CD.

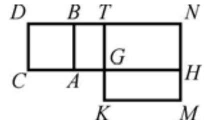


$$\frac{b}{2}$$

Ahora le añadimos a la línea GT algo igual a lo que supera la línea CG a la línea GT, para cuadrar la superficie, es decir la línea GK. Se hace así la línea TK igual a KM, ya que GH es igual a TN, resulta una superficie cuadrada, la superficie MT.



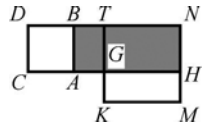
Y ésta es la que se obtiene de la multiplicación de la mitad de las raíces por sí misma, lo que es cinco por cinco, y esto es veinticinco.



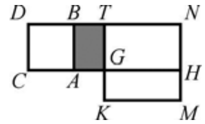
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

2.2. Operaciones de cortar, mover y pegar en las que se busca un gnomon equivalente a un rectángulo (el método akadio).

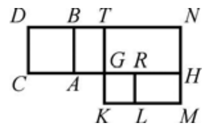
Sabemos que la superficie HB es los veintiuno que fueron añadidos al tesoro.



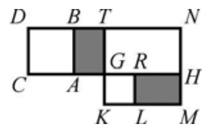
De ella separamos una parte por la línea KT, que es uno de los lados de la superficie MT, de manera que sólo queda la superficie TA.



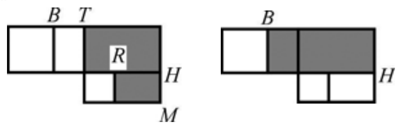
Ahora quitamos de la línea KM la línea KL, que es igual a GK.



Sabemos que la línea TG es igual a ML, y la línea LK, que ha sido separada de KM, es igual a KG. Así que la superficie MR es igual a la superficie TA.

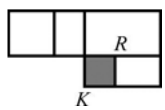


Sabemos que la superficie HT aumentada con la superficie MR es igual a la superficie HB, que es veintiuno.



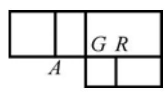
2.3. Pasos finales de recorrido del algoritmo en la figura

Ya vimos nosotros que la superficie MT es veinticinco. Por tanto, si substraemos de la superficie MT la superficie HT y la superficie MR, que son veintiuno, nos queda una superficie pequeña que es la superficie RK. Y ésta es lo que sobra entre veintiuno y veinticinco. Y esto es cuatro,



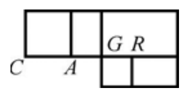
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

cuya raíz es RG, que es igual a GA, y es dos.



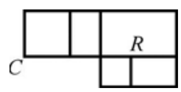
$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Pero CG es la mitad de las raíces, que es cinco. Si substraemos de ella GA, que es dos, queda tres que es la línea AC, que es la raíz del tesoro. Y el tesoro es nueve.



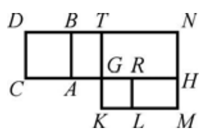
$$\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Pero si la añades a la línea GC, que es la mitad de las raíces, entonces la suma es siete, o la línea RC, que es la raíz de un tesoro más grande. Si añades veintiuno a este tesoro, entonces la suma será también igual a diez de sus raíces.



$$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Y esto es lo que queríamos demostrar. Ésta es la figura.



(Rosen, 1831, pp. 16-18 de la versión inglesa, y 11-13 del árabe; Hughes, 1998, pp. 238-239; Rashed, 2007, pp. 112-117.)

NOTAS

[1] El historiador egipcio Roshdi Rashed parece que no puede admitir que al-Khwārizmī no siguiera el estilo euclídeo. En la introducción a su reciente edición del álgebra de al-Khwārizmī (Rashed, 2007) hace equilibrios para afirmar que aunque al-Khwārizmī no parezca seguir a Euclides, en realidad lo que hace está inspirado en Euclides. Así, escribe que una identidad algebraica "sin estar formalmente enunciada por al-Khwārizmī, sin embargo fundamenta su forma de actuar", con lo que "se puede suponer que al-Khwārizmī se había inspirado en la forma de actuar de Euclides" (Rashed, 2007, p. 39). O también que "el estilo geométrico que observa al-Khwārizmī […] incluso si no casa exactamente con el de Euclides […] le está emparentado". "Se puede suponer", "inspirado", "emparentado", todo expresado de forma vaga y sin especificar cuáles son las características diferenciales de los razonamientos demostrativos de los *Elementos* de Euclides y los que presenta al-Khwārizmī en su libro. Por supuesto que entre el libro segundo de los *Elementos* de Euclides y esas demostraciones de al-Khwārizmī hay relaciones, lo que hace posible entre otras cosas que Thābit ibn Qurra use esas proposiciones de Euclides para rectificar las demostraciones de al-Khwārizmī, pero lo que tienen en común no es de ningún modo lo que tiene que ver con el estilo de la demostración y lo que constituye la garantía de verdad, sino un hecho que Rashed parece ignorar por completo: que tanto Euclides como al-Khwārizmī están trabajando, de forma distinta y con objetivos distintos, sobre un substrato común: el álgebra babilónica (véase Høyrup, 2002, para más detalles).

[2] El manuscrito Hunt. 212, fol. 1v-54r, de 1342. La ilustración la hemos tomado de la edición árabe de Masharrafa and Ahmad (1939).

[3] Esto afirmación precisaría una explicación que no voy a dar aquí en detalle. En varias ediciones del texto de al-Khwārizmī las formas canónicas aparecen enunciadas con "tesoros", en plural, y así aparece en el texto árabe del manuscrito que se conserva en la Bodleyan. Sin embargo, los algoritmos están enunciados para un tesoro, y en los problemas siempre se transforma la ecuación obtenida mediante dos operaciones específicas del cálculo cuya función es reducir o completar los tesoros o las partes de tesoro para que haya un tesoro. Además, en la traducción latina de Cremona, las formas canónicas aparecen enunciadas con *census* (la traducción latina de tesoro) en singular.

[4] He usado para presentar mi versión española del texto de Thābit ibn Qurra, la edición de Luckey (1941) del texto árabe, con traducción al alemán, y la traducción francesa prácticamente completa que Rashed (2007) presenta en la introducción de su edición del álgebra de al-Khwārizmī.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Traducción de María Luisa Puertas. Madrid: Gredos.

Gandz, S. (1937). The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra. *Osiris*, 3, pp. 405-557.

Høyrup, J. (1995). Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 15*, pp. 3-14.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Infante, F. y Puig, L. (2011a). Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 283-301). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Infante, F. y Puig, L. (2011b). Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado. *Congresso Ibero-americano de História do Ensino da Matemática*. Comunicación. Covilhã, 26 a 29 de mayo de 2011.

Luckey, P. (1941). Tābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte 93*, pp. 93-114

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968

Puig, L. (1994a). *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme.

Puig, L. (1994b). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis 10*, pp. 47-92.

Puig, L. (1995). Una restauración del álgebra árabe. *Actas de las 7as Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 42-48). Madrid: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo".

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2009). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Requena, A. (2008). *Al-Qalasadí. Se desvelan los secretos de la ciencia de las cifras de polvo*. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la FESPM

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund

Szabó, Á. (1977). *Les débuts des mathématiques grecques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Szabó, Á. (2000). *L'aube des mathématiques grecques*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Vega, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado para su publicaciónen octubre de 2011 .