

Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal.

Luis Puig
Universitat de València

El legado de Hans Freudenthal¹ es tan voluminoso y tiene tantas facetas que esta introducción a mi traducción de tres capítulos del que para mí es su libro mayor² no puede pretender dar cuenta de él, ni tan siquiera situar con precisión lo que aquí se presenta en el conjunto de los textos que Freudenthal produjo y de las actividades públicas que desarrolló durante su vida. Ya la propia presentación de sólo una parte del libro es, sin remedio, una parca muestra de su contenido. No obstante, la selección que he realizado, aunque no sea extensa en el número de los temas de las matemáticas escolares tratados, sí que permite tener ejemplos de varios de los aspectos fundamentales de los análisis que Freudenthal realiza y de la teoría desde la que se hacen los análisis y que los análisis producen.

El capítulo titulado *El método* era inexcusable que apareciera en cualquier selección del libro; sin embargo, al ser el primero de los que se presentan, por seguir el orden relativo con los otros que he seleccionado —*Fracciones*, capítulo 5; *El lenguaje algebraico*, capítulo 16— no he podido evitar contravenir la decisión de Freudenthal, que a propósito no lo puso el primero sino el segundo, después de un capítulo en que ya podía verse su método en funcionamiento. Con ello, Freudenthal quiso reflejar su convicción de la secundariedad de la teoría tras los datos empíricos y, además, ser fiel en la presentación del libro a la crítica que había hecho reiteradamente al movimiento de la “matemática moderna” por practicar lo que él llamaba la “inversión antididáctica” —comenzar por los conceptos en vez de por las aplicaciones, por el concepto de grupo en vez de por las situaciones que tienen esa estructura.

El lector de esta selección ya está pues advertido y puede recurrir a comenzar por el capítulo *Fracciones* o bien hacer una lectura inicial del capítulo sobre el método con la intención de volver a él una vez recorrido el resto de capítulos o tan pronto como piense que ya dispone de los suficientes ejemplos concretos de uso del método como para dar sentido a lo que aparece en él.

En cualquier caso, en ese capítulo encontrará al menos dos ideas cuya combinación es para mí esencial para utilizar el legado de Hans Freudenthal: una de índole filosófica y otra, didáctica.

La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática. Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica

¹Éste es el título del número monográfico de *Educational Studies in Mathematics*, la revista que Freudenthal fundó, dedicado a homenajearlo póstumamente. Ese número [Vol. 25, pgs. 1-164, 1993], editado por Leen Streefland, también ha sido publicado en forma de libro por Kluwer en la colección *Mathematics Education Library* y ofrece una panorámica sucinta de su obra.

²Freudenthal, Hans. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel, 1983.

matemática como *medios de organización* de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones³. A mi entender, Freudenthal no se sitúa pues en ninguna de las filosofías de las matemáticas que se han dado en llamar “realistas” o “platónicas”, que conciben los objetos matemáticos con una existencia anterior a la actividad matemática y ésta como el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos. Además, Freudenthal no se limita — porque obviamente no podría dar cuenta de las matemáticas producidas a lo largo de la historia— a dar esta descripción que constituiría, digamos, el primer nivel de la práctica matemática, ya que para él el “mundo” que los objetos matemáticos organizan crece, se amplía al incorporarse a él los propios objetos matemáticos, que ya no son vistos como medios de organización sino como objetos, cuyas propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones están pidiendo nuevos medios de organización que den cuenta de todo ello. Entendiendo pues “mundo” en este sentido, es decir, entendiendo que contiene también el producto de la actividad humana, cualquier objeto matemático —triángulo o grupo de Lie— puede verse como medio de organización de objetos del mundo, propiedades, acciones o propiedades de las acciones. Para Freudenthal, describir un concepto u objeto matemático en su relación con aquello para lo que es un medio de organización es hacer el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático. El término “fenomenológico” aparece como adjetivo que caracteriza ese tipo de análisis —y en el título del libro en sustantivo— porque Freudenthal no habla como yo lo he estado haciendo de objetos, propiedades, acciones y propiedades de las acciones, sino de “fenómenos” y de que los conceptos matemáticos son medios de organización de tales fenómenos. Ahora bien, yo no he usado ese término porque creo que esta terminología importada de algunos sistemas filosóficos —sobre todo, la pareja “noumeno” del término “fenómeno”— no queda nunca claramente delineada en la obra de Freudenthal, ya que explícitamente niega tomarla con el significado que tiene en los sistemas filosóficos de los que procede, pero ni la define con claridad, ni la usa apenas más allá de su aparición en este capítulo sobre el método. A mi entender, conviene no adherir a esa terminología —que puede acarrear significados poco coherentes con la posición filosófica que yo estoy interpretando a partir del texto de Freudenthal— y, o bien eludirla, o usar en todo caso “fenómeno” como una manera de hablar al relatar los análisis freudenthalianos.

Este análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos lo he descrito aquí en su aspecto filosófico; ahora bien, aunque sea pertinente mostrar este aspecto e incluso desarrollarlo, para Freudenthal tal análisis está hecho con intención didáctica o al servicio de la didáctica, en la medida en que es el análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular. Por ello, el análisis freudenthaliano puede ser una fenomenología histórica —así lo denomina el propio Freudenthal— cuando los fenómenos que se toman en consideración en el análisis son aquéllos para los que el concepto en cuestión

³Freudenthal no habla de acciones —como tampoco habla en realidad de objetos ni propiedades— sino de “fenómenos”. Más adelante discuto brevemente las precauciones que creo que hay que tener con ese término: aquí sólo quiero añadir que cuando hablo de las “acciones que hacemos sobre ellos” no sólo estoy refiriéndome a las acciones que efectivamente realizamos o podemos realizar, sino las acciones que estipulamos que son realizables al establecer el marco discursivo en que se van a usar los sistemas matemáticos de signos con los que describimos y producimos los objetos matemáticos.

fue un medio de organización en la historia —y entonces tal análisis sería una tarea propia de la historia de las ideas matemáticas, aunque sus resultados puedan usarse con provecho en diversos ámbitos de la didáctica. Pero será fenomenología didáctica —es decir, será lo que el libro anuncia desde su título— cuando los fenómenos que se toman en consideración son los que están presentes en el mundo en que viven los alumnos a los que se pretende enseñar en los sistemas escolares.

La segunda idea que Freudenthal enuncia en este capítulo, y es fundamental desde mi punto de vista, es una toma de partido didáctica: lo que él llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Si el análisis fenomenológico es una tarea previa a todo desarrollo curricular para conocer cuál es el conjunto de fenómenos que hay que tomar en consideración para presentarlos en el desarrollo curricular, esa oposición y la toma de partido de Freudenthal por la constitución de objetos mentales marca la *intención* del currículo. En el capítulo de fracciones está el mejor ejemplo que hay en el libro de cómo la combinación de estas dos ideas conforma un desarrollo curricular, ya que en él, tras el análisis fenomenológico, también presenta el esbozo de un desarrollo curricular en forma de secuencia didáctica.

Lo que la idea de constitución de objetos mentales frente a adquisición de conceptos conlleva puede describirse, en vez de en los términos que utiliza Freudenthal, en términos semióticos. Veámoslo, aunque sea someramente, a propósito de un concepto complejo y múltiple como es el de número.

En el mundo, el número o, mejor, los números se usan en contextos de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, código, guarismo escrito, mágico, cálculo⁴. Los usos de los números en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas: así, por ejemplo, cuando se dice “mi número de teléfono es tres, ochenta y seis, cuarenta y cuatro, ochenta y seis”, el número se refiere a un objeto y no describe ninguna propiedad suya ni de su relación con otros sino que sirve para identificarlo —ése es el contexto de código—; en un contexto ordinal, el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa; en un contexto cardinal, el número se refiere a un conjunto de objetos (sin orden o cuyo orden no se toma en consideración) y describe la numerosidad del conjunto; etc.

La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de “número”, el significado enciclopédico de “número”. La identificación del contexto en que el número se está usando permite a quien lee el texto

⁴Esta lista de contextos está desarrollada a partir de la que estableció Karen Fuson en su libro *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer Verlag, 1988. Yo he adaptado algunos nombres de contextos e introducido algunos nuevos, en particular, el contexto que he llamado “mágico” para dar cuenta de esos usos de los números, que en versiones inocuas están presentes en el mundo de los niños y pueden explicar comportamientos como los que ocurren usualmente ante el famoso problema de “la edad del capitán” (ver mi libro con Fernando Cerdán, *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, 1988).

o recibe el mensaje atenerse a la *restricción semántica* que establece el contexto y le permite así poder interpretarlo de forma afortunada. Ahora bien, el sujeto que lee un texto o ha de interpretar un mensaje no opera en el conjunto de la enciclopedia —es decir, la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme— sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido⁵ en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para “número” o los números. Lo que Freudenthal llamaría “objeto mental número” estaría descrito en cierta manera por este campo semántico personal, y la intención de los sistemas educativos tendría que ser, expresado en estos términos, que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico —abarque suficientemente la enciclopedia— como para permitirle interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar “número” o los números.

La adquisición del concepto es, para Freudenthal, un objetivo educativo secundario, que —al menos en la enseñanza obligatoria— puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y, en todo caso, es posterior a ésta. En efecto, desde la descripción semiótica que estoy haciendo, cualquier concepto matemático de número que quiera examinarse aparece como un *recorte del campo semántico*: así, por ejemplo, el número natural de Peano —sobre todo en sus versiones más modernas— se construye con el significado propio del contexto de secuencia; y el número natural de Cantor —aunque él tratara en realidad de cardinales y no de números naturales— se construye con el del contexto cardinal.

El capítulo de fracciones es, de nuevo, uno de los mejores ejemplos del libro, ahora para mostrar cómo la riqueza del campo semántico de “fracción”, cuando se exhibe en toda su extensión y se analiza en toda su diversidad, milita en favor de la opción tomada por Freudenthal de no dirigir el desarrollo curricular hacia la adquisición de conceptos. Los capítulos *El método* y *Fracciones* se apoyan pues el uno al otro.

El capítulo sobre el lenguaje algebraico, que también he incorporado en esta selección, tiene un carácter diferente ya que en él lo que Freudenthal hace no es, estrictamente, una fenomenología del álgebra o de los conceptos algebraicos, sino, más bien, un análisis del lenguaje del álgebra comparado con el lenguaje de la aritmética y el lenguaje natural. La noción de sistemas matemáticos de signos (SMS) que ha desarrollado Eugenio Filloy permite leer estos análisis de Freudenthal como una descripción de algunas características de algunos de los SMS —estratificados y con materias de la expresión heterogéneas— en los que se realiza la actividad matemática. Además, si se toma en cuenta lo que esta noción conlleva, la construcción de objetos matemáticos como medios de organización de otros objetos (matemáticos), acciones o propiedades de unos y otros puede describirse entonces en términos de procesos de

⁵Sentidos que se convierten en significados si la interpretación es afortunada.

abstracción⁶ entre textos de SMS estratificados, cuyas peculiaridades están relacionadas con las características de tales SMS.

Finalmente, quiero hacer algunas observaciones sobre la traducción. El papel tan importante que desempeña en los análisis de Freudenthal el análisis del lenguaje natural me ha obligado a hacer una traducción que conservara al máximo los rasgos del inglés que Freudenthal contempla en sus análisis, aun a costa de forzar en ocasiones el español. Cuando las diferencias entre uno y otro idioma eran demasiado grandes he conservado el inglés en el texto y he glosado los análisis en notas a pie de página⁷. Ahora bien, el texto que presento es una traducción del de Freudenthal y, por tanto, los análisis que pueden encontrarse en él son análisis del sistema matemático de signos cuyo estrato de lenguaje natural es el inglés: en alguna de las notas a pie de página indico que, si el estrato de lenguaje natural del SMS fuera el español, el análisis habría que volver a hacerlo para tomar en consideración las características propias del español, pero ésa es una tarea cuyo lugar para ser abordada no es esta traducción y que está por hacer.

⁶Cf. Filloy, Eugenio. 1993. Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 11, pgs. 160-166.

⁷Como el texto ya lleva notas a pie de página de Freudenthal, las mías están numeradas para distinguirlas de las suyas, que se indican con asteriscos.

En esta segunda edición hemos añadido a los textos seleccionados en la anterior el capítulo 6, que se titula “Razón y proporcionalidad” y es una continuación y un complemento necesario del capítulo 5, “Fracciones”, ya incorporado a la primera edición. Freudenthal llega incluso a decir: “Uno debe dudar de que las fracciones puedan enseñarse intuitivamente, si falta intuición de la razón —esta duda es precisamente la que influyó la composición del capítulo sobre fracciones. La influencia podía haber sido más fuerte, pero no me atreví a integrar el análisis fenomenológico de las fracciones y la razón.” Y se pregunta si no hubiera debido añadir tras estos dos capítulos otro con el título “Fracciones, Razón y Proporción” para suplir así el no haber hecho el análisis fenomenológico de forma conjunta.

Una primera versión de esta traducción la preparé en el contexto del proyecto de investigación desarrollado en la Universidad de Valencia en el curso académico 1994-95 *La configuración histórica de las nociones de fracción, razón y proporción en los textos aritméticos*, y ya hablé en México de mi versión de lo que dice Freudenthal [“Una lectura del análisis de Freudenthal de los conceptos de razón y proporción”. *Sexto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (Universidad Autónoma del Estado de Morelos y Sociedad Mexicana de Matemática Educativa). Cuernavaca, Morelos, 13 y 14 de diciembre de 1996.] Este análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad es además el fundamento teórico de otro proyecto de investigación desarrollado también en la Universidad de Valencia (*Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas y acercamientos metodológicos. Un estudio con alumnos de la Enseñanza Obligatoria*) en el que se enmarca además la tesis de Alejandro Fernández Lajusticia, *Precursores del razonamiento proporcional: un estudio con alumnos de Primaria*, que he dirigido junto con Olimpia Figueras. La traducción se ha beneficiado de su uso en estas investigaciones, ya que hemos discutido el texto traducido en sesiones de seminario, lo hemos analizado, contrastado con otros análisis de los conceptos en cuestión y desarrollado. Quede constancia aquí pues de que esta traducción no es exclusivamente mía, sino que en ella hay también trabajo —en diversa medida— de Fernando Cerdán, Alejandro Fernández Lajusticia, Olimpia Figueras, Bernardo Gómez, Juan Margarit y Onofre Monzó.

Por otro lado, las breves “Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal”, que escribí en 1994 como prologo a la primera edición, se complementan con un texto mucho más extenso que escribí tres años después (Puig, L. 1997. Análisis fenomenológico. En Rico, L., coord. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori/ICE, págs. 61-94).