SIGNOS, TEXTOS Y SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS

LUIS PUIG
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

En Filloy, E., ed.
México, D. F.: , en prensa

SIGNOS, TEXTOS Y SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS

Luis Puig

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

Resumen

La Matemática Educativa trata con fenómenos que pueden verse como procesos de significación y comunicación y, por tanto, es pertinente usar conceptos semióticos como signo, texto y sistema (matemático) de signos para hablar de ellos. En este texto usamos el concepto de signo de Peirce y su tipología de los signos para explorar algunas características de signos matemáticos, y desarrollamos unas nociones de texto y sistema matemático de signos suficientemente amplias como para dar cuenta de los que efectivamente se usan en situaciones de enseñanza. Así, podemos describir los Modelos de Enseñanza en términos de secuencias de textos y procesos de abstracción en Sistemas Matemáticos de Signos.

Abstract

Educational Mathematics deals with phenomena that may be seen as signification and communication processes. Therefore it is relevant to use semiotic concepts such as sign, text and (mathematical) system of signs to speak about them. In this text we use Peirce's concept and typology of sign to explore some charachteristics of mathematical signs, and we develop notions of text and mathematical sign system wide enough to account for the actual ones used in teaching situations. Hence we can describe Teaching Models in terms of sequences of texts and abstraction processes on Mathematical Sign Systems.

1. SIGNO

Escribo este texto para celebrar la larga relación que nos une a los Departamentos de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México y el de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia de España, institucionalmente, y, personalmente, a Eugenio Filloy y a mí.

Conocí a Eugenio Filloy en Santiago de Compostela hace ya veintidós años en un encuentro de la CIEAEM, en el que tanto él como yo presentábamos desarrollos curriculares que queríamos innovadores. Nunca olvidaré el momento en que, cada uno inspeccionando el libro del otro, me dijo que algo que había en el mío no era muy afortunado y me preguntó a renglón seguido cuál era la tirada. Como le contesté con una cifra con muy pocos ceros, digamos que "me tranquilizó" diciendo que, si esa era la tirada, no era demasiado grave y, agarrando su libro de mis manos, me mostró algo que según él no estaba demasiado bien y me dijo que eso sí que era grave porque de su libro se había impreso un número de ejemplares que ahora no recuerdo, pero que era realmente enorme. Aprendí en aquel momento que, más allá de nuestras declaraciones de intención de renovación de la enseñanza y nuestra creencia en estar en la línea justa, nuestro trabajo tenía que tomar en consideración el conjunto de los sistemas escolares y medirse por sus efectos sobre ellos. Dos años después estuve por primera vez en México, también en un encuentro de la CIEAEM, y allí pude ver en directo la fuerza de un equipo y una red, los creados en torno a la entonces 'Sección' de Matemática Educativa y el Programa Nacional de Formación y Actualización del Profesorado de Matemáticas.

No volví a ver a Eugenio Filloy hasta 1985, esta vez en Holanda en un encuentro de PME. Cuando nos encontramos, llevaba yo a cuestas el primer número de una revista de semiótica, en el sentido en que ésta se dedica al estudio de la cultura, titulada *Eutopías* . Allí inició Eugenio conmigo una conversación sobre semiótica (de la matemática educativa) que aún continúa. Este texto trata de esa conversación. Lo que voy a exponer es, por tanto, algunas de las reflexiones que vengo haciendo desde entonces a partir de ideas que son de Eugenio Filloy, que él ha introducido en nuestra manera de pensar la matemática educativa y que ha usado extensamente en textos y trabajos. Vaya por delante pues que lo acertado que haya en lo que voy a decir se lo debo y que lo desafortunado es de mi exclusiva responsabilidad.

El asunto del que se trata es el de hablar de los fenómenos que se producen en lo que es el campo de interés de la matemática educativa con una jerga semiótica y hacer esto no para vestir nuestras observaciones con un lenguaje críptico sino porque concebimos estos fenómenos como procesos de significación y de comunicación y es de este tipo de procesos de los que precisamente trata la semiótica.

El que lo que estudia la semiótica es esos procesos más que los signos está especialmente claro en la semiótica tal como la desarrolló Charles Sanders Peirce. En la semiótica de Peirce ese énfasis en los procesos está presente desde la propia idea de signo. Peirce dio un sinnúmero de definiciones de 'signo' a lo largo de su extensa obra, en las que perfilaba una y otra vez su concepto, pero todas ellas tienen tres características que me interesa subrayar en especial. La primera es que el signo no se caracteriza por una relación diádica como la de la pareja significante/significado de Saussure; la relación en la que está todo signo es una relación triádica, en la que uno de sus elementos, que Peirce llama el 'interpretante', es la *cognición* producida en una mente. La segunda es que el signo no es una entidad estática sino que está abierto en una serie, ya que toda cognición es a su vez un signo, que por tanto está en una relación triádica con otro interpretante (que es otra cognición), y así sucesivamente. La tercera, que el signo no es arbitrario o, mejor, que la relación triádica en que está el signo no es arbitraria.

En un manuscrito de 1873, Peirce da su definición más breve y compacta de signo:

> Un signo es un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente[1].

[1] Vale la pena citar por una vez cito el texto original inglés: "A sign is an object which stands for another to some mind." (Hoopes, ed. 1991, pág. 141).

La relación está establecida entre el signo (S), su objeto (O) y una mente para la cual el signo está relacionado de tal manera con su objeto que, para ciertos fines, puede ser tratado como si fuera ese otro[2]. Veamos cómo define Peirce el interpretante:

> Un signo [...] se dirige a alguien; es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. A ese signo que crea yo lo llamo el Interpretante del primer signo. Ese signo ocupa el lugar de algo: de su Objeto. (Peirce, 1987, pág. 33.)

La relación triádica (S, O, I) es, por tanto, una relación en la que tanto S como I son signos, por tanto, I es un nuevo signo, S', que entrará en otra relación triádica, es decir, creará en una mente otro signo como interpretante, I', del objeto O, una nueva cognición I', de modo que el objeto O enlaza las dos relaciones triádicas (S, O, I) y (S', O, I'). De aquí deriva la apertura del signo en un proceso de semiosis que no tiene fin. Peirce lo expresa así en otra definición, posterior a la que acabo de citar:

> *Signo*: Cualquier cosa que determina alguna otra (su *interpretante*) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se refiere (su *objeto*); de la misma manera el interpretante se convierte en un signo, y así *ad infinitum*. (Peirce, 1987, pág. 274.)

En esta definición está también presente la tercera característica que he señalado: el hecho de que la relación no es arbitraria. El signo fuerza al interpretante a referirse al mismo objeto al que él se refiere. En una definición más prolija que cito a continuación Peirce aún es más exigente y añade que el signo fuerza al interpretante a referirse al mismo objeto y además *de la misma manera* que él se refiere. Más aún, también ha de haber un interpretante, I_1, del interpretante I, que tenga como objeto, O_1, la *relación* entre el signo y su objeto.

> Un signo o representamen es un Primero que está en una relación triádica genuina tal con un Segundo, llamado su Objeto, que es capaz de determinar un Tercero, llamado su Interpretante, para que asuma la misma relación triádica con su Objeto que aquella en la que se encuentra él mismo respecto del mismo Objeto. La relación triádica es *genuina*, es decir, sus tres miembros están ligados por ella de manera tal que no consiste en ningún complejo de relaciones diádicas. [...] El Tercero tiene que estar en una relación tal, y consiguientemente tiene que ser capaz de determinar un Tercero propio. Pero además de ello tiene que tener una segunda relación triádica, en la cual el representamen, o más bien la relación de éste con su Objeto, será su propio (del Tercero) Objeto, y tiene que ser capaz de determinar un Tercero para esa relación. Todo esto tiene que ser verdad de los Terceros del Tercero, y así indefinidamente. (Peirce, 1987, págs. 261-262.)

[2] Así es como Peirce explica lo que quiere decir "representar" o "estar en el lugar de" en Peirce (1987), pág. 261.

2. ICONOS, ÍNDICES Y SÍMBOLOS.

Para Peirce, los signos pueden ser de tres tipos: iconos, índices y símbolos[3]. Los iconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera. Los iconos se diferencian de los índices, ya que los índices no se parecen a los objetos correspondientes, sino que lo señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen. Como consecuencia de ello, si el objeto no existiera el índice dejaría de significar, pero seguiría haciéndolo aunque el interpretante no estuviera presente. Los símbolos, por su parte, dejan de significar sin interpretante.

Peirce explica el motivo por el cual hay tres clases de signos de la siguiente manera:

> […] existe una triple conexión del *signo*, la *cosa significada* y la *cognición producida por la mente*. Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en ese caso, el signo es un *icono*. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un *índice*. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un *nombre* (o *símbolo*). (Peirce, 1987, pág. 175.)

Y habla también de una cierta progresión a lo largo de los tipos:

> En los tres órdenes de signos –Iconos, Índices, Símbolos– puede observarse una progresión regular de 1, 2, 3. El Icono no tiene conexión dinámica con el objeto que representa; sucede simplemente que sus cualidades se asemejan a las del objeto y excita sensaciones análogas en la mente para la cual es una semejanza. Pero en realidad no está conectado con aquél. El índice está conectado físicamente con su objeto; forman un par orgánico, pero la mente interpretante no tiene nada que ver con esa conexión, salvo advertirla una vez establecida. El símbolo está conectado con su objeto en virtud de la idea de la mente utilizadora de signos, sin la cual no podría existir la conexión. (Peirce, 1987, pág. 273.)

LOS PRIMEROS SIGNOS ARITMÉTICOS

Parece que los primeros signos escritos fueron signos aritméticos. Veamos en juego en esos signos primitivos, algunas de las características de los signos que acabamos de exponer.

Se ha determinado efectivamente que los primeros signos escritos fueron signos aritméticos al poder reconstruir paso a paso el desarrollo de dos sistemas de escritura que tuvieron su inicio alrededor del 3500 antes de nuestra era y que fueron creados por un pueblo sumerio en el sur de Mesopotamia y por otro pueblo elamita en Susa (que se encuentra en lo que actualmente es Irán)[4].

---

[3] La descripción que sigue de los tres tipos de signos está parafraseada de Peirce, 1987, pág. 274.

[4] Esa reconstrucción está narrada con todo detalle en Ifrah (1994), tomo I, págs. 233-263.

Esos primeros signos estaban marcados con un estilete en el exterior de bolas huecas de barro blando y se correspondían siempre con unos guijarros de distintas formas contenidos en las bolas, tanto en la forma como en el número. Esas marcas eran pues iconos que representaban los guijarros ocultos, y bastaba con romper la bola si se quería verificar que efectivamente estaban en el lugar de los objetos que representaban. Las marcas sobre las bolas son iconos ya que se parecen en forma y número a los objetos en cuyo lugar están, de modo que significan aunque las bolas estén vacías. Estos signos tienen un funcionamiento digamos que primitivo porque el código que quien cierra las bolas y los graba en ellas ha de compartir con aquel a cuyas manos lleguen está poco establecido socialmente o, en todo caso, sometido a duda.

Si estas primeras marcas escritas resultan tan interesantes al tener dos caracteres propios de los signos de forma tan perspicua, aún son más interesantes cuando sabemos que tienen los antecedentes y consecuentes que explicaré ahora.

En las excavaciones realizadas, se han encontrado estas bolas marcadas en el segundo momento de una serie temporal. Antes de ese momento, los restos encontrados corresponden a bolas huecas que encierran guijarros y que no llevan ninguna marca sobre ellas. Después se ese momento, los guijarros desaparecen, sólo están las marcas y, como ya no hay que encerrar nada, las bolas huecas se transforman en tablillas planas.

Primero hay pues unos objetos ocultos en una bola hueca, luego los primeros signos escritos, con los objetos que representan presentes aunque ocultos, y, finalmente, sólo los signos escritos sin los objetos que representan.

Pero esos objetos, a su vez, son signos —aunque no signos de una escritura—, ya que, en cualquiera de los tres momentos de la historia, las bolas o las tablillas son registros de transacciones mercantiles, son cuentas. Los objetos representados por las marcas escritas son también signos aritméticos porque representan, según sea su forma y su cantidad, un número determinado de objetos. Lo que los arqueólogos han reconstruido nos cuenta que esos guijarros han sido manipulados para hacer una cuenta en el transcurso de una transacción comercial y, una vez zanjada, han sido encerrados en una bola hueca para dejar constancia del acuerdo entre las partes que comercian sobre cuál es la cantidad que ha intervenido en la transacción. Estos primeros signos aritméticos escritos están en el lugar de otros signos aritméticos cuya materia de la expresión es diferente y acaban substituyéndolos en los registros. Pero sólo en los registros, porque carecen de capacidad operatoria —los comerciantes seguirían probablemente manipulando los guijarros para hacer las cuentas.

A partir de esos signos matemáticos en tablillas de arcilla se desarrolla la escritura cuneiforme elamita. Cerca se desarrolla una historia similar en sumerio de la que no hay una secuencia de restos tan explícita. Sabemos además que más adelante, en la época paleobabilónica (2000 a 1600 a.c.), se escriben ya verdaderos textos matemáticos en tablillas como esas primitivas (y que esto se hace ya no en sumerio sino en acadio, una lengua semítica),pero ésa es otra historia que no voy a seguir aquí[5]

LOS SIGNOS DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO

Si los signos aritméticos que están en el origen de la escritura cuneiforme cayeron en desuso hace ya milenios, los pastores etruscos, lejos de las transacciones comerciales y las escuelas de los escribas del creciente fértil, haciendo muescas en un palo, una por cada cabeza contada, crearon un sistema de numeración que, aunque marginalmente, aún usamos: el que se conoce como sistema de numeración romano.

Los signos que hemos heredado de ellos para la representación de los números parecen en efecto haberse desarrollado como consecuencia de su inscripción material en un registro lineal. Así, la primitiva reiteración de las muescas, | | | | | | | | |…, pasó a estar estructurada mediante marcas especiales cada cinco muescas, con el fin de facilitar la cuenta en la expresión: una marca inclinada en el quinto lugar, una marca con forma de aspa en el décimo, etc., dando origen, para registrar un rebaño de veintitrés cabezas, a marcas como | | | | / | | | |X| | | | / | | | |X| | |. Muescas primarias y marcas estructurantes acabaron convirtiéndose en las letras del alfabeto I, V, X, al integrarse con la escritura e identificarse con las letras a las que más se parecían.

Siendo lugares en una serie, ni la V ni la X significaban los cardinales ‘cinco’ o ‘diez’, sino los lugares quinto y décimo en la serie. De hecho, las primeras escrituras para ‘cinco’ y ‘diez’ no fueron V y X, sino IIIIV y IIIIVIIIIX, que, éstas sí, representan cardinales y en las que tanto I como V representan una unidad. Sólo en un segundo momento un criterio de economía hizo que V representara IIIIV y por tanto cinco unidades. Los signos V y X funcionaron inicialmente como puntos de referencia en la serie también en otro sentido: IV llegó a significar ‘cuatro’ no por una regla substractiva entre los cardinales designados por I y V, sino porque la presencia del signo V permitía saber que se estaba designando la marca inmediatamente anterior a V en la serie. De la misma manera, VI no llegó a significar ‘seis’ por ninguna regla aditiva, sino por designar la marca inmediatamente posterior a V. Sólo cuando los signos V y X adquirieron el significado cardinal —al estar en el lugar de IIIIV y IIIIVIIIIX—, las reglas anteriores, que trataban sobre posiciones en una serie, es decir, sobre

…IV…

…VI…

se reinterpretaron como reglas aditivas y substractivas entre cardinales. En la his-toria así narrada, las transformaciones en la expresión producidas por procesos de

5 Aunque valdría la pena. En los textos de los problemas que aparecen en las tablillas escritas en acadio, las palabras ‘largo’ y ‘ancho’ estaban en sumerio y se usaban para designar las cantidades desconocidas. Por este hecho, aun cuando las palabras tienen un significado geométrico en sumerio, como un lector acadio no usa esas palabras corrientemente para hablar de ‘largo’ y ‘ancho’ y, por tanto, no les va a dar ese sentido geométrico al leerlas, las va a usar dándoles el sentido de dos cantidades susceptibles de entrar en un cálculo —es decir, esas palabras son precursores de los objetos del álgebra.

abreviación dotaron de sentidos nuevos tanto a los signos elementales como a las reglas de formación de signos compuestos, sentidos que son los significados con que ahora se enseñan en las escuelas.

Las marcas son índices de la acción de contar. En Puig (1997) he indicado que los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son objetos, propiedades, acciones y propiedades de las acciones. Éste es uno de los ejemplos más claros de un concepto matemático que organiza un fenómeno que no pertenece al ámbito de los objetos ni las propiedades de los objetos, sino de las acciones y las propiedades de las acciones (lo que no quita para que en la relación triádica correspondiente la acción de contar sea el objeto del signo para una mente, es decir, para un interpretante). Esos índices, como consecuencia de las transformaciones de la expresión se convierten en símbolos.

LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es un tópico referirse a las expresiones algebraicas como "lenguaje simbólico", por ejemplo, cuando se habla de poner un problema en ecuaciones, se describe usualmente como "paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico". Sin embargo, si usamos la terminología de Peirce, las expresiones algebraicas no son símbolos, sino que son iconos, aunque parezca extraño a primera vista. Veamos como lo explica el propio Peirce:

> […] una fórmula algebraica es un icono, que ha sido convertido en tal mediante las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. Puede parecer a primera vista que es una clasificación arbitraria llamar icono a una expresión algebraica; que podría igualmente o más adecuadamente ser considerada como un signo convencional [símbolo] compuesto. Más no es así. Porque una gran propiedad distintiva de los iconos es que mediante su observación directa se pueden descubrir otras verdades concernientes a su objeto que no son las que bastan para determinar su construcción. […] Esta capacidad de revelar una verdad inesperada es precisamente aquello en que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo cual el carácter icónico es el predominante. (Peirce, 1987, pág. 263.)

Las expresiones algebraicas son iconos y esto es lo que precisamente las hace poderosas, ya que como signos tienen las propiedades que tienen sus objetos. Ahora bien, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas aisladamente no son iconos, sino índices, cada letra es índice de una cantidad, tampoco son símbolos. Si la expresión algebraica es el resultado de la traducción del enunciado verbal de un problema aritmético-algebraico, cada letra concreta está representando una cantidad concreta como resultado de la convención que ha establecido quien ha hecho la traducción, pero cada letra se refiere a una cantidad aun cuando no haya interpretante ya que un interpretante cualquiera que no esté al corriente de la convención establecida asignará las letras a las cantidades adecuadas, ya que la expresión algebraica en su conjunto va a exigir que se asigne a cada una la cantidad correspondiente. ¿No hay símbolos entonces en las expresiones algebraicas? Sí. Los signos +, =, etc. son símbolos en el sentido de Peirce.

Las expresiones algebraicas pues son un ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en las escrituras matemáticas: las letras son *índices*, los signos +, =, etc. son *símbolos* y la expresión globalmente considerada es un *icono*.

3. SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS.

Los ejemplos que he presentado nos han permitido poner en uso la concepción del signo de Peirce y su tipología, y explorar en qué sentido nos ilumina lo que queremos examinar. Además nos sirven también para poner de manifiesto otra cosa: los signos que se usan en matemáticas no son todos ellos de naturaleza lingüística, lo que hace recomendable no usar la terminología ni la concepción del signo propia de la lingüística (derivada más o menos de la obra de Saussure) y no hablar, por tanto, del par significante/significado. En lo anterior yo ya no lo he hecho, sino que he utilizado el término 'expresión' del par expresión/contenido —terminología que está introducida en la semiótica (ciencia de los signos en general y no sólo de los signos lingüísticos), y que además nos resulta muy conveniente porque ya tenemos la costumbre en las matemáticas de hablar de 'expresiones algebraicas' o de 'expresiones aritméticas' para referirnos a las escrituras correspondientes.

Ahora bien, lo que hemos visto hasta ahora, al poner el acento en signos individuales nos puede ocultar el hecho crucial de que en ningún texto (matemático u otro) hay signos aislados.

Es muy corriente que una descripción del lenguaje en que están escritos los textos matemáticos distinga dos subconjuntos de signos: uno formado por signos que se conciben como los propiamente matemáticos y otro por los signos de alguna lengua vernácula. Ahora bien, desde el punto de vista de los procesos de significación esta distinción, que siempre puede seguir haciéndose, deja de ser crucial. Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. Hay que hablar pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales, y que, por tanto, lo que nos interesa para el desarrollo de la matemática educativa es estudiar cuáles son las características de esos sistemas (matemáticos) de signos debidas no sólo a que son sistemas de signos sino a que son precisamente sistemas matemáticos.

Eugenio Filloy introdujo hace ya algún tiempo la necesidad de usar una noción de sistemas matemáticos de signos lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares —y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido—, así como de los textos matemáticos históricos —tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o de procesos de cognición propios de una episteme. Al tomar como objeto de estudio estos textos matemáticos y no unos supuestos textos ideales concebidos como manifestaciones del “lenguaje matemático”, o textos que se miden con respecto a ellos, tanto la noción de sistemas matemáticos de signos como la de texto ha de abrirse en varias direcciones.

Así, Filloy afirma que hay que hablar de sistema matemático de signos, con su código correspondiente, cuando se da la posibilidad convencionalizada socialmente de generar funciones sígnicas (mediante el uso de un functor de signos), incluso cuando las correlaciones funcionales han sido establecidas en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza, con la intención de que sean efímeras. Por otro lado, también hay que considerar los sistemas de signos o los estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dotar de sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque se rijan por un sistema de correspondencias que no ha sido socialmente establecido, sino que es idiosincrásico.

4. TEXTO / ESPACIO TEXTUAL. MODELO DE ENSEÑANZA.

Como los textos no han de concebirse como manifestaciones del lenguaje matemático, ni identificarse con los textos escritos, es pertinente utilizar la noción de texto elaborada por Jenaro Talens y Juan Miguel Company como “el resultado de un trabajo de lectura / transformación hecho sobre un espacio textual” (Talens y Company, 1984, pág. 32). En efecto, para Talens y Company, con el fin de disponer de una noción de texto que pueda usarse en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido (por ejemplo el trabajo de un alumno con un modelo de enseñanza —aunque este ejemplo estuviera lejos de las preocupaciones de Talens y Company, en su día) conviene introducir una distinción entre “espacio textual” (ET) y “texto” (T) (que se corresponde con la distinción entre “significado” y “sentido”). Un texto es el resultado de un trabajo de lectura / transformación realizado sobre un espacio textual, cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. El espacio textual tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el texto es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizada por una persona como consecuencia de un acto de lectura.

Además, la distinción entre ET y T es una distinción entre posiciones en un proceso, porque cualquier T, resultado de una lectura de un ET, está de inmediato en posición de ET para una nueva lectura —y así *ad infinitum*.

Tanto el trabajo de los matemáticos, como el de los alumnos en las clases de matemáticas puede describirse desde el punto de vista de este proceso reiterado de lectura / transformación de espacios textuales en textos. En particular, desde este punto de vista un Modelo de Enseñanza es una secuencia de textos que se toman como ET para su lectura / transformación en otros T al crear sentido los alumnos en sus lecturas.

Ahora bien, como los SMS son el producto de un proceso de abstracción progresiva (tanto en la historia de las matemáticas como en la historia personal de cualquiera), los SMS que realmente se usan están formados por estratos provenientes de distintos momentos del proceso, relacionados entre sí por las correspondencias que este proceso ha establecido. La lectura/transformación de un ET puede hacerse entonces usando distintos estratos del SMS, recurriendo a conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones, que están descritos en alguno de los estratos.

Los textos producidos por lecturas que usen estratos distintos o una combinación distinta de estratos pueden ser traducidos unos a otros y reconocidos como “equivalentes”, a condición de que en el sistema matemático de signos estén descritas también las correspondencias pertinentes entre los elementos utilizados. Cuando esto no es así, sólo la elaboración de un nuevo SMS lo permite. El proceso de elaboración de nuevos SMS con ese objetivo es precisamente un proceso de abstracción y el nuevo SMS es más abstracto que los anteriores. Dicho con más precisión, si sucede que dos espacios textuales ET y ET’ no pueden ser leídos/transformados mediante un sistema matemático de signos estratificado L, recurriendo a los mismos conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones, que están descritos en alguno de los estratos; mientras que esto sí que puede hacerse en otro sistema matemático de signos M, entonces M es “más abstracto” que L, respecto a ET y ET’. Así sucede, por ejemplo, en el libro *De Numeris Datis* con dos proposiciones que Jordanus Nemorarius transforma recurriendo a procedimientos distintos, y que, sin embargo, podrían transformarse de la misma manera usando el sistema de signos del álgebra elemental actual[6]. El SMS de ese texto del siglo XIII es menos abstracto que el SMS del álgebra elemental actual y en la historia de las matemáticas la elaboración de ese SMS fue un proceso de abstracción que tuvo como resultado entre otras cosas que textos como esos que para Jordanus Nemorarius no podían verse como equivalentes lo sean.

La elaboración de SMS más abstractos que de esta manera se produce en la historia de las matemáticas, tiene su correspondencia en los sistemas escolares. En efecto, en ocasiones, durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, un alumno es incapaz de transformar un espacio textual ET’ mediante un sistema matemático de signos estratificado L, recurriendo a los mismos conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones con los que ha transformado un espacio textual ET; la ruptura de esta imposibilidad es precisamente lo que quiere el modelo de enseñanza y lo que constituye el auténtico aprendizaje y se produce cuando el alumno modifica el estrato de lenguaje en que están descritos los medios de transformación, creando un nuevo sistema matemático de signos M, en el que los espacios textuales ET y ET’ se identifican como transformables con los mismos medios[7]. La creación de ese M es un “proceso de abstracción”, que conlleva también la elaboración de conceptos o acciones “más abstractos” (los que están descritos en el estrato de lenguaje modificado).

Desarrollar nuevas competencias en matemáticas puede verse pues en ambos casos como el resultado de un trabajo con un SMS que ya se domina en alguna medida. En el sistema escolar, este trabajo consiste en un intercambio de mensajes entre profesor y alumno que se produce gracias a la lectura/transformación de esa

[6] Ésa es la interpretación que yo hago en “El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos”, *Mathesis*, México D. F.: UNAM, Vol. 10, 1994, págs. 47-92.

[7] Una descripción algo más detallada de los episodios de un proceso en el que se producen estos hechos, y el análisis que yo reproduzco aquí con ligeros cambios, puede verse en Eugenio Filloy. “Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría”, op. cit.

secuencia de textos que llamamos Modelo de Enseñanza. Como consecuencia de esa lectura / transformación se producen conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos y el establecimiento de nuevos significados para el SMS (o los SMS) en que se describe y se produce lo enseñado, que incluso conllevan la elaboración de nuevos SMS.

Wittgenstein escribió en sus *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* (parte III, 31) que “la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Produce nuevas conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que están ahí, sino que no están ahí mientras ella no las produzca.)”[8]. Esta observación de Wittgenstein sobre el efecto de la demostración en la gramática de nuestro lenguaje y en nuestros conceptos se puede parafrasear llevándola a lo que acabo de exponer con sólo substituir “la demostración” por “el trabajo con un SMS” y “nuestro lenguaje” por “un SMS que dominamos”. Con ello estoy siendo a la vez más general y menos preciso. Más general ya que la demostración es obviamente un tipo de trabajo con un SMS y quiero indicar que no es sólo ese tipo de trabajo el que cambia los conceptos matemáticos[9]. Menos preciso porque no estoy especificando qué tipo de trabajo con un SMS cambia conceptos y SMS y no quiero decir que sea cualquiera. Ahora bien, la observación de Wittgenstein es una observación sobre el trabajo de los matemáticos y no sobre el trabajo de los escolares en el interior del sistema escolar. Como nuestro punto de vista y nuestro ámbito de interés es el sistema escolar tendremos que usar una versión de la observación de Wittgenstein adecuada a que sólo estamos tratando con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los sistemas escolares en donde los conceptos matemáticos no se crean por primera vez sino que han de ser re-creados —o “re-inventados”, por usar la expresión de Freudenthal— por los alumnos gracias a la guía de la enseñanza. En este sentido, el objetivo del modelo de enseñanza, de esa secuencia de textos leídos y transformados, ha de ser que los sentidos nuevos producidos por los alumnos sean afortunados, es decir, sean conformes con los significados socialmente establecidos, y que los nuevos SMS “más abstractos” elaborados acaben siendo SMS no idiosincrásicos.

Ahora bien, como el modelo de enseñanza es una secuencia de textos, producidos tanto por el profesor como por el alumno, y esos textos son el resultado del trabajo de ambos en situaciones de enseñanza que son de hecho situaciones problemáticas —que se toman como espacios textuales— es pertinente traer a colación también lo que hemos aprendido de nuestros estudios e indagaciones sobre resolución de problemas. En particular tenemos pruebas de que cuando se resuelve un problema, ineludiblemente, se realiza, por rápido y fugaz que sea esto, un análisis consciente o inconsciente lógico inicial —que llamaremos “esbozo lógico-semiótico” del problema o de la situación problemática— que pretende bosquejar la solución, esto es, apuntar el camino que necesita seguirse en la resolución del problema de acuerdo con algún texto matemático producido con el uso de algún SMS.

[8]Cf. pág. 136 de la trad. española.

[9] Ver lo que digo en el apartado 2.3.3. de Puig (1997).

Un usuario competente que realiza tal esbozo lógico-semiótico usa mecanismos cognitivos que le permiten anticipar las relaciones clave del problema y decidir entre varios SMS, o estratos de un SMS, cuál de ellos, más abstracto o más concreto, va a usar para esbozar los pasos del proceso de resolución. Sólo entonces desarrolla un proceso de análisis y síntesis que le permite descodificar la situación problemática.

En este sentido podemos darle sentido a la idea ya secular de las declaraciones reformistas de basar la enseñanza en la resolución de problemas. Un Modelo de Enseñanza es también una secuencia de situaciones problemáticas, una secuencia de textos matemáticos T_n, cuya elaboración y descodificación por quien aprende le permite interpretar finalmente todos los textos T_n en un SMS más abstracto. Se "cambia la gramática de nuestro lenguaje", porque este nuevo SMS más abstracto es de tal naturaleza que su código hace posible descodificar los textos T_n como mensajes con un código matemático socialmente establecido, precisamente el código planteado por las intenciones educativas que han fijado el Modelo de Competencia que persigue el Modelo de Enseñanza.

El sentido se produce en el nuevo SMS por el uso de signos nuevos en cada paso del análisis y resolución de la forma en que han de ser usados —como dice Wittgenstein: "Sí, así tiene que ser, así he de establecer el uso de mi lenguaje"[10]. Esto es posible cuando el SMS en su conjunto se ve ligado por la concatenación de las acciones desencadenadas durante los procesos de resolución de problemas de todas las situaciones problemáticas que antes se veían como diferentes e irreducibles, pero que ahora, gracias al nuevo SMS se resuelven mediante procesos que se establecen como los mismos, es decir, que se transfieren de un problema a otro, convirtiendo a la vez lo que era una diversidad de problemas en una familia de problemas.

La enseñanza organiza el paso desde un SMS que domina en cierta medida quien aprende, a través de su uso en situaciones problemáticas y la cadena de lecturas transformaciones ET / T=ET' / T'=ET" / T"…, a un nuevo SMS desde el cual el primero se ve como más concreto y con el cual lo que antes se describía como separado e inconexo se describe como lo mismo y, por tanto, se produce como nuevos conceptos y nuevos signos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E. "Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría", *Enseñanza de las ciencias*, vol. 11, núm. 2, 1993, págs. 160-166.

Hoopes, J., ed. 1991. *Peirce on Signs. Writings on Semiotic by Charles Sanders Peirce*. Chapel Hill and London: The University of North Carolina Press.

Ifrah, G. 1994. *Histoire universelle des chiffres. L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris: Robert Laffont. [Edición española de Jesús Hernández y Mariano Martínez, traducida por Juan María López de Sa y de

[10] Cf. pág. 136 de la trad. española

Madariaga et al. *Historia Universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe, 1997.]

Peirce, C. S. 1987. *Obra lógico-semiótica*. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus

Puig, L.: 1994. “El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos”, *Mathesis,* México D. F.: UNAM, Vol. 10, 1994, págs. 47-92.

Puig, L.: 1997, Análisis fenomenológico, en Rico, ed. *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE / Horsori, págs. 61-94.

Talens, J and Company, J. M. “The Textual Space: On the Notion of Text”. *The Journal of the Midwest Modern Language Association*, vol. 17, num. 2, 1984.

Wittgenstein, L.: 1956, *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Edited by G. H. von Wright, R. Rhees, and G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell. (Trad. española de Isidoro Reguera, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza, 1987.)