

**EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA FRONTERA
MEDIA-VARIANZA Y SU RELACIÓN CON
LA ECONOMÍA REAL**

Ana María Rivera Serrano

Trabajo de investigación 012/006

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director: Dr. Martín Lozano

Manchester Business School

Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

www.finanzascuantitativas.es

EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA FRONTERA MEDIA-VARIANZA Y SU RELACIÓN CON LA ECONOMÍA REAL.

Ana María Rivera Serrano¹.

Resumen

En este estudio se analiza la frontera eficiente y la cartera de mínima varianza a lo largo del tiempo para la economía americana y cómo se puede relacionar la economía real, como por ejemplo el desempleo. El trabajo está estructurado en una serie de hipótesis a partir de las cuales se intentará extraer conclusiones. Entre estas hipótesis, se encuentra la relación entre la volatilidad de la cartera de mínima varianza y la diferencia de valores máximos de la correlación de los activos (primera hipótesis). Otra hipótesis relaciona la "amplitud" de la frontera eficiente con los niveles de desempleo y con los rendimientos de la cartera de mínima varianza (segunda hipótesis). También se ha analizado la importancia de la diversificación relacionando los rendimientos esperados entre dos carteras de mínima varianza y la diferencia de amplitud (tercera hipótesis). Por último se ha separado los dos efectos de la diversificación: reducción del riesgo e incremento del rendimiento y su relación con el ciclo económico y el desempleo, analizando cuándo es más importante para el inversor diversificar. Las conclusiones obtenidas en esta cuarta hipótesis se han ratificado con los test de spanning.

Palabras clave: Modelo media-varianza, Markowitz, desempleo, ciclos económicos, frontera eficiente, economía real, diversificación, rendimiento, riesgo, test de spanning, media móvil.

Abstract

In this study, we examine the efficient frontier and the minimum variance portfolio over time for the U.S. economy and how it can be related with the real economy, such as unemployment. The work is structured in a series of hypotheses from which we will attempt to draw conclusions. One of these hypotheses is the relationship between the volatility of the minimum variance portfolio and the difference of maximum correlation values of the assets (first hypothesis). Another hypothesis relates the "breadth" of the efficient frontier with unemployment levels and the returns of the minimum variance portfolio (second hypothesis). We also analyzed the importance of diversification linking the expected returns between two minimum variance portfolios and the difference in amplitude (third hypothesis). Finally, we have separated the two effects of diversification: risk reduction and increased returns and its relationship to the economic cycle and the unemployment, and when it is more important for investors to diversify. The conclusions drawn in this fourth hypothesis have been ratified with spanning tests.

Keywords: mean-variance model, Markowitz, unemployment, business cycles, efficient frontier, real economy, diversification, returns, risk, spanning test, moving average.

¹ Este trabajo fue expuesto públicamente en el X Workshop celebrado en Bilbao, del 4 al 6 de Julio de 2012. Agradezco al Tribunal del Workshop sus comentarios y recomendaciones, en especial a la comentarista la Dra. Belén Nieto Domenech por su inestimable información y ayuda sobre los Spanning Test, sin los cuales no habría sido posible la ampliación de la cuarta hipótesis. También me gustaría agradecer su ayuda al coordinador del máster en EHU/UPV el D. Miguel Ángel Martínez Sedano y la Dra. M^a Victoria Esteban González. Por último agradezco al Dr. Martín Lozano y a la Manchester Business School por brindarme la oportunidad de desarrollar la tesina allí, así como cederme el uso de sus recursos e instalaciones.

ÍNDICE

Introducción y revisión literaria.	4
Repaso de la formulación del enfoque-media varianza.	10
Datos	12
Diseño empírico.	26
Hipótesis 1.....	28
Hipótesis 1.1.....	36
Hipótesis 2.....	40
Hipótesis 3.....	49
Hipótesis 4:.....	64
Ampliación Hipótesis 4: Los Tests de Spanning Media-Varianza y el ciclo económico.	73
Conclusiones y posibles ampliaciones.	79
Anexo	81

Introducción y revisión literaria.

En 1952, H. Markowitz publicó su estudio: Portfolio Selection, que posteriormente amplió, con ligeros cambios, en la monografía de 1959: Portfolio Selection: efficient diversification of investments, mostrando la importancia de lograr un equilibrio del binomio rentabilidad-riesgo así como las preferencias del inversor en la selección de carteras. Desde entonces se han publicado numerosos artículos alrededor del modelo media-varianza y dado que el objetivo de este estudio es analizar el modelo media-varianza y su relación con la economía real, nos enfocaremos en la determinación de la cartera de mínima varianza así como su frontera eficiente, sin entrar en las preferencias del inversor y la función de utilidad.

Uno de los supuestos básicos es que un marco de análisis media-varianza, implica funciones de utilidad Gaussianas o utilidades cuadráticas, supuesto que desarrolla Tobin en 1958, recoge Markowitz en 1959 y amplía a funciones elípticas Chamberlain en 1983. En este sentido hay numerosa bibliografía que se ha centrado en si este supuesto es apropiado o si por el contrario se deberían analizar otras distribuciones. Un ejemplo de este tipo de análisis es Hu y Kercheval (2010) los cuales han estudiado algunas distribuciones multivariantes hiperbólicas y la frontera eficiente bajo dichas distribuciones, mediante un algoritmo EM de dos etapas (expectation-maximization: primero se calcula la función logarítmica de probabilidad esperada usando unos parámetros (E) y posteriormente se maximiza la función para actualizar dichos parámetros (M)) llegándose a la conclusión de la conveniencia de usar distribuciones t-Student dada la mejoría del ajuste con los datos de rendimientos diarios frente al coste de únicamente tener que estimar un parámetro extra, capturando mejor el verdadero rendimiento de una cartera, dado un nivel de riesgo. En la misma línea se encuentra el estudio de Joro y Na (2006) el cual analiza el enfoque media-varianza-asimetría frente a únicamente media-varianza midiendo la eficiencia mediante la técnica no paramétrica DEA, considerando la eficiencia como la distancia de la volatilidad de cada activo a la superficie eficiente (3D al considerar también asimetría) y comparando con una cartera que tenga el mismo rendimiento y asimetría. Utilizando una muestra de 54 fondos concluyen que la eficiencia en el caso media-varianza-asimetría es igual al enfoque media-varianza, y en algunos casos, fondos con asimetría positiva, los mejoran. Estos estudios no implican que el supuesto de la normalidad sea inadecuado para todas las muestras, según Fama (1976) los rendimientos mensuales se puede aproximar mediante una normal, enfoque que se adoptará en este estudio al estar interesados en un estudio del modelo media-varianza y en su evolución con la economía real.

Otro aspecto fundamental es la estimación de los inputs básicos del modelo: los rendimientos esperados y la matriz de varianzas y covarianzas. Este aspecto ha sido tratado por numerosos artículos, entre ellos se encuentra el estudio de Frahm y Memmel (2010) que se centra en la necesidad de estimar los rendimientos y la matriz de varianzas-covarianzas desarrollando teóricamente dos estimadores, un estimador shrinkage y un estimador shrinkage modificado, que dominan al estimador tradicional media-varianza fuera de muestra tanto en muestras pequeñas como en grandes. El contraste empírico lo han realizado bajo la hipótesis de si es mejor invertir en una cartera basada en los estimadores de mínima varianza, entre los cuales se encuentran los dos propuestos, o en una cartera basada en la diversificación ingenua. Para ello han tomado el rendimiento en exceso de siete índices bursátiles del MSCI, encontrando que para su muestra concreta sus dos estimadores son superiores a la diversificación ingenua y bajo algunas excepciones al tradicional media-varianza.

El artículo de Hlouskova, Schmidheiny y Wagner (2009) enfoca la predicción de los rendimientos y la matriz de varianzas-covarianzas mediante modelos ARCH-GARCH. El contraste empírico se realiza con una muestra de seis índices del MSCI, y la cartera óptima se realiza mediante la utilización de cuarenta y ocho diferentes GARCH para calcular los rendimientos y las covarianzas y una cartera ingenua definida como la media trimestral de los rendimientos y covarianzas de la muestra. Las conclusiones muestran que las carteras basadas en un modelo GARCH tienen de media mayor rendimiento, menor riesgo y mayor índice de Sharpe que la cartera ingenua. Panteleo, Tumminello, Lillo y Mantegna (2010) se centran en la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas mediante nueve estimadores que se pueden clasificar en cuatro clases: estimadores de covarianza muestral, estimadores espectrales, estimadores basados en la acumulación jerárquica de clusters y estimadores shrinkage. Los resultados son diversos y el grado de mejora depende del método escogido, el cociente horizonte temporal- número de activos, T/N , y la ausencia o no de restricciones a corto, coincidiendo la mayoría en riesgo y diversificación cuando $T/N > 1$, mientras que cuando $T/N < 1$, el peor resultado lo obtienen los estimadores de covarianza muestral y los shrinkage.

Otro enfoque para calcular los rendimientos esperados son los algoritmos genéticos (GA), como el propuesto en el artículo de Yang (2006) cuya ventaja radica en que resuelve el modelo usando tanto inducción hacia atrás como mirando hacia el futuro, lo que permite utilizar tanto información pasada como estimaciones futuras de los rendimientos de los activos. Las conclusiones de este autor es que para una muestra de rendimientos diarios de ocho índices del MSCI las carteras resultantes con este método, son más equilibradas y fluctúan menos a lo largo del tiempo que el método media-varianza y el enfoque bayesiano. Además, el modelo GA multiperiodo mejora los resultados que el

modelo estático uniperiodal, con una varianza más pequeña. En este estudio la predicción de los rendimientos se va a hacer mediante una media, en concreto una media de las sesenta observaciones anteriores. El motivo es que se quieren estudiar relaciones entre los mercados reales y financieros, para lo cual se considera que los datos históricos son los más apropiados al contener información de dichas relaciones. Además, una media permite dotar de generalidad al estudio al ser fácilmente aplicable a otros tipos de muestra.

Otro de los supuestos fundamentales del modelo media-varianza es que es un modelo estático cerrado, el número de activos arriesgados está dado y se analiza un único periodo². La variación de este criterio permite dos tipos de estudios. El primero sería considerar qué ocurre con la frontera eficiente si se añade un activo, en este enfoque se centra Ukhov (2006) que mediante el teorema de tres fondos muestra que la adición de un nuevo activo correlacionado con los anteriores no permite expandir la nueva frontera eficiente utilizando únicamente los dos fondos de los antiguos activos (teorema de separación en dos fondos) y el nuevo activo, si no que se necesitaría un tercer fondo que comprendiera todos (n+1).

La otra es centrarse en el horizonte temporal y analizar variaciones en el mismo. Una forma de hacerlo es la implementada por Martellini y Urošević (2006) quienes mantienen un único horizonte temporal, si bien este es desconocido y en el cual el inversor está sujeto a dos riesgos: el riesgo del precio del activo y el riesgo de salida (deshacer la inversión). Si el riesgo de salida es independiente del comportamiento de la cartera, se mantendrían las carteras de mínima varianza del caso uniperiodal estándar, mientras que si no hay independencia el enfoque tradicional resultaría en carteras subóptimas y para alcanzar la eficiencia habría que implementar el método desarrollado por los autores. El otro enfoque dentro del marco temporal uniperiodal es pasar a un modelo de optimización multiperiodal. En este sentido se encuentra el artículo de Çelikurt y Özekici (2007) los cuales implementan un modelo con una utilidad cuadrática en el que el vector de medias y la matriz de covarianzas dependen de las condiciones económicas del mercado, el cual es descrito mediante una cadena de Markov con estados perfectamente observables. Entre otras conclusiones analizan las fronteras eficientes para distintos valores de T, concluyendo que es más ventajoso para los inversores tener un horizonte de planificación lo más lejos posible al incrementarse el rendimiento esperado para la misma desviación típica, si bien no se llega a converger a una frontera común conforme se incrementa el horizonte temporal T.

Un enfoque intermedio para el tratamiento multiperiodo del modelo es el que se va a analizar en este artículo mediante la utilización de una ventana

² En realidad ni Markowitz 1952a, ni 1959 hablan de un horizonte único, ambos consideran un periodo en un mundo multiperiodal.

móvil de 60 periodos. Entre los últimos artículos que han utilizado este enfoque se encuentran Mayer, Durand y Gould (2005) que utilizan una media móvil de 30 días, y teniendo en cuenta los costes de transacción examinan siete diferentes carteras: Markowitz aumentada (formulación estándar), Markowitz combinada (cuando la prima de riesgo es negativa permite la venta completa del portfolio y su inversión en activo libre de riesgo), una cartera basada en una media de los últimos cinco días, una cartera que pondera tanto la media histórica como los datos presentes, una cartera basada en Lithner Scaled, una cartera basada en la diversificación ingenua, y una cartera mundial. Los resultados muestran que su procedimiento de Markowitz combinado genera la mayor ganancia para su muestra y el segundo mayor ratio de Sharpe, mientras que el procedimiento de Markowitz simple presenta una gran variabilidad.

Este estudio, además de analizar la evolución de la frontera eficiente y la cartera de mínima varianza, intenta ver su relación con la economía real estadounidense. Entre los estudios que relacionan la media-varianza y la economía real se encuentra el estudio de Jang y Chen (2007) los cuales enfocan la demanda del turismo internacional a Taiwán mediante un enfoque media-varianza en el cual minimizar la inestabilidad de dicha demanda sería similar a encontrar la cartera óptima que minimiza la volatilidad de los rendimientos, creando una frontera eficiente cuyos pesos de las mismas serían las procedencias turísticas, encontrando por ejemplo que la combinación de menor riesgo implicaría una reducción del turismo procedente de Japón y un incremento del procedente de Estados Unidos. Otro ejemplo es el estudio del Energy Research Centre of the Netherlands, por Jansen, Beurskens y van Tilburg (2005) los cuales utilizando una frontera eficiente basada en el coste y carteras basadas en el uso de la energía, realizan una proyección para el 2030 de las tecnologías generadoras de energía para dos escenarios, encontrando entre otras conclusiones que promocionar las energías renovables puede reducir el riesgo de la cartera. O el estudio de Barry y Kearney (2006) que utilizan el enfoque media-varianza, separando entre compañías autóctonas y multinacionales extranjeras para calcular una frontera eficiente basada en el crecimiento esperado del trabajo y la desviación típica del mismo, encontrando que multinacionales extranjeras del sector de la alta tecnología pueden mejorar los beneficios de la diversificación. Un último ejemplo de este tipo de análisis sería el artículo de Bisias, Lo y Watkins (2012) que utilizan el enfoque media-varianza en la inversión en investigación biomédica, estimando una frontera eficiente en la cual la variable rendimiento esperado se encuentra estimada mediante YLL (years of life lost) y utilizando el concepto de ROI, si bien los autores reconocen la dificultad de la variable YLL y su estudio como un comienzo para utilizar métodos cuantitativos para determinar la inversión biomédica. La diferencia entre estos estudios y el nuestro, es que estos estudios hacen una “adaptación” de las variables del modelo media-varianza, no

utilizando datos financieros estrictamente. Este estudio lo que hace es analizar por un lado el modelo media-varianza y por otro lado la economía real, y ver si tienen alguna relación.

La relación entre los mercados financieros y la economía real ha sido ampliamente analizada. Por ejemplo se encuentra el estudio de Estrella y Mishkin (1997) en cuyas conclusiones se comenta que tanto el spread de tipos de interés como los índices bursátiles (DJIA, NYSE, SP500) son dos de los indicadores más simples y útiles, ya sea por separado o en combinación en un modelo probit para predecir las recesiones. Invirtiendo la causalidad, una variable macroeconómica que pueda predecir los rendimientos bursátiles, se encontraría el estudio de Cooper y Priestley (2012) el cual propone una variable llamada world's capital to output ratio que es contracíclica bajo los supuestos de inversión irreversible y mediante un ajuste de costes para prevenir la desinversión. En presencia de aversión al riesgo en recesiones dicha variable puede predecir la variación en los rendimientos esperados. Otro artículo que estudia la relación entre los mercados financieros y el ciclo económico es el de Hamilton y Gang (1996). En este caso, aproximando el ciclo económico mediante el índice de producción industrial llegan a la conclusión que las recesiones económicas son el principal factor, 60%, de la varianza de los rendimientos de las acciones. Mediante un modelo de serie temporal encuentran que pueden predecir la volatilidad de las acciones e identificar y predecir los cambios de ciclo de la economía.

Enfocándose en la asignación de activos se encuentran los artículos de Brocato y Steed (1998) y el trabajo aún en curso de Nawrocki y Carter. El primer artículo encuentra que la matriz de varianzas y covarianzas para su cartera de nueve activos, (entre los que se encuentran acciones, bonos del tesoro y corporativos, metales preciosos así como bienes inmuebles), varía considerablemente según el ciclo. En este estudio confrontan una estrategia de comprar y mantener frente a una reasignación según Markowitz considerando el ciclo económico y encontrando esta estrategia superior para su muestra. Los resultados preliminares del segundo trabajo, muestran que basándose en la relación entre el ciclo económico y los mercados monetarios y de capitales que la diversificación internacional puede mitigar los riesgos asociados al ciclo económico de EE.UU.

Si bien los artículos mencionados anteriormente son una pequeña muestra de toda la literatura relacionada con los mercados financieros y la economía real, sí que parece claro que existe algún tipo de relación. El objetivo del artículo es doble, por un lado analizar la evolución temporal de la frontera eficiente y la cartera de mínima varianza y por otro focalizar aún más la relación entre los activos financieros y la economía real centrándonos en cómo se relaciona el desempleo, los ciclos económicos y la frontera eficiente. Además, tras el paso por el X Workshop se ha introducido una ampliación a esta relación entre la

frontera eficiente y los ciclos y desempleo mediante la introducción de los test de spanning, tanto el test general como el step-down siguiendo la metodología de en R. Kan and G. Zhou (2012), si bien estos autores se centran en la diversificación internacional de una manera estática mediante un único periodo, mientras que en esta tesina se ha considerado un enfoque dinámico, calculándolos dentro de la ventana móvil y desagregándolos por ciclos económicos.

Repaso de la formulación del enfoque-media varianza.

En el análisis tradicional de media-varianza, el rendimiento esperado de un activo viene dado por su media, y el riesgo por su desviación estándar, volatilidad. En los problemas de asignación de activos uniperiodales el inversor decide únicamente al principio del periodo y dicha selección no cambia hasta el fin del mismo, asignación miope.

Formalizando esta idea, se tiene un vector de rendimientos de los activos entre t y $t+1$, $R_{t+1} \in \mathbb{R}^N$, cuya predicción de los dos primeros momentos de la distribución de dichos rendimientos futuros es: el rendimiento esperado, $\mu_{t+1|t} = E_t[R_{t+1}]$ y la matriz de varianzas-covarianzas, $\Sigma_{t+1|t} = \text{Cov}_t[R_{t+1}]$ de la variable aleatoria condicionada a la información en el momento t .

Estas dos variables son las que van a permitir al inversor distribuir su capital entre N activos, formando una cartera $w \in \mathbb{R}^N$, donde cada peso w_i representa la fracción de capital sobre el total que se invierte en ese activo i . Estos pesos, o ponderaciones, de los activos tienen un papel fundamental al ser el rendimiento esperado de la cartera una media ponderada de los rendimientos de los activos que la componen $\mu_p = w'\mu$. El riesgo de la cartera va a depender tanto del vector de ponderaciones como de la matriz de varianzas y covarianzas $\sigma_p^2 = w'\Sigma w$.

Los supuestos sobre los activos son que no existen activos redundantes y que todos los activos son arriesgados, lo que junto con la no redundancia permite que la matriz de varianzas-covarianzas sea no singular.

Esta cartera w será eficiente si proporciona la menor varianza para un nivel dado de rendimiento esperado. Por tanto el problema del inversor es encontrar dicha cartera de mínima varianza. Este se puede formular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w^* &= \arg \min \frac{1}{2} w' \Sigma w \\ \text{s. a. } w' \mu &= r \\ w' \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

Siendo r el nivel de rendimiento esperado dado.

Este problema se puede resolver mediante los multiplicadores de Lagrange, obteniendo fórmulas cerradas que indican que las ponderaciones óptimas de la cartera son una combinación lineal del rendimiento deseado r :

$$w^* = g + hr$$

$$\text{siendo } g = \frac{\Sigma^{-1}(cI - b\mu)}{d} \text{ y } h = \frac{\Sigma^{-1}(a\mu - bI)}{d} \text{ con}$$

$$a = I'\Sigma^{-1}I, b = I'\Sigma^{-1}\mu, c = \mu'\Sigma^{-1}\mu \text{ y } d = ac - b^2.$$

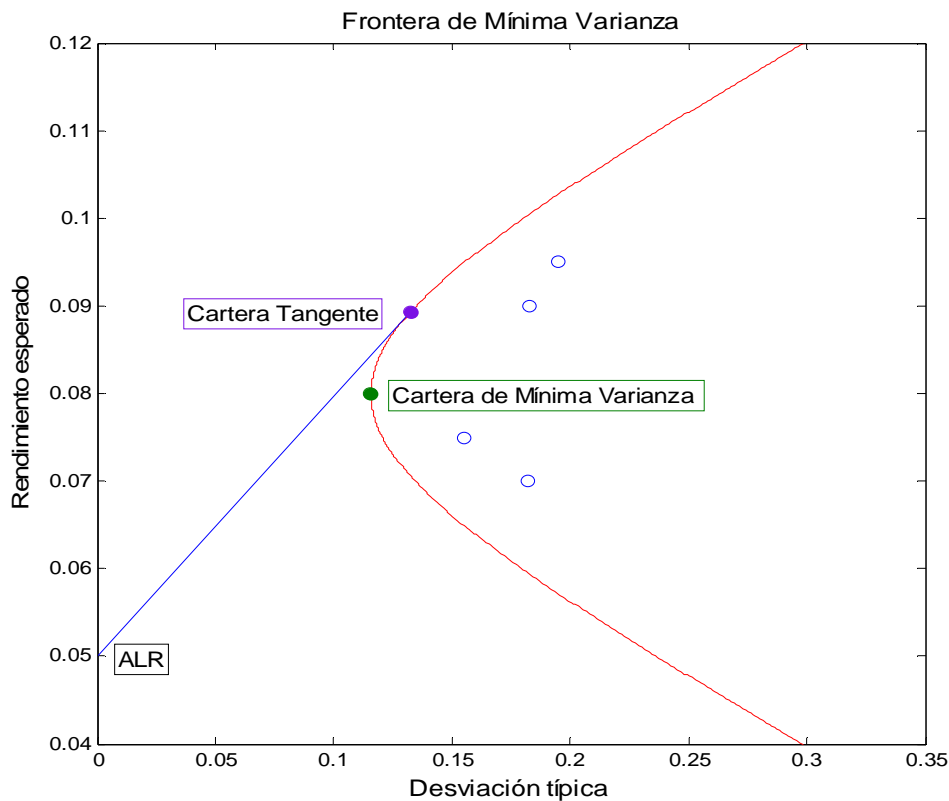
Asimismo la ponderación de la cartera de mínima varianza y su varianza vienen dadas por las siguientes fórmulas: $w_{MV}^* = \frac{\Sigma^{-1}1}{a}$ y $\sigma_{MV}^2 = \frac{1}{a}$.

Para ver más claramente la utilidad de dichas fórmulas se replicará el ejemplo de Chapados (2011) de una cartera con el siguiente rendimiento esperado:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.070 \\ 0.090 \\ 0.075 \end{bmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0380 & 0.0085 & 0.0089 & 0.0066 \\ 0.0085 & 0.0331 & 0.0156 & 0.0039 \\ 0.0089 & 0.0156 & 0.0334 & 0.0070 \\ 0.0066 & 0.0039 & 0.0070 & 0.0240 \end{bmatrix}$$

Los puntos interiores en la Figura X corresponden a la combinación rendimiento esperado y desviación típica de cada activo. La cartera de mínima varianza señala el comienzo de la frontera eficiente. Además en el gráfico también está señalada la cartera tangente, que se forma con el activo libre de riesgo.

GRÁFICO 1: Frontera de Mínima Varianza con cartera de mínima varianza y cartera tangente.



	Rendimiento	Desv. Típica	w ₁	w ₂	w ₃	w ₄
Cartera MVG	0,080	0,116	0,191	0,234	0,152	0,423
Cartera Tangente	0,089	0,133	0,405	-0,051	0,400	0,246

Datos

Las muestras que se van a utilizar son las carteras industriales disponibles en la página web de Kenneth French³. Estas carteras de acciones se construyen de acuerdo a la industria a la que pertenece la empresa, según el número de carteras considerado la definición de industria será más o menos desagregada. Se van a utilizar fundamentalmente las carteras de cinco y diez industrias, si bien en alguna hipótesis para dar robustez se añadirán las carteras de diecisiete y treinta industrias. Todas estas carteras están formadas con datos mensuales que comprenden desde julio de 1927 a diciembre de 2011.

La muestra de cinco industrias incluye: consumo (duradero y no duradero, al por mayor y al por menor y algunos servicios como lavanderías y tiendas de reparación), manufacturas (manufacturas, energía y servicios públicos), alta tecnología (equipamiento para los negocios), salud (sanidad, equipamiento médico y fármacos), otros (minas, construcción, transporte, hoteles, servicios de autobús, entretenimiento).

La muestra de diez industrias incluye: consumo no duradero (comida, tabaco, textil, ropa, piel, juguetes), consumo duradero (coches, televisiones, mobiliario, electrodomésticos para el hogar), manufacturas (maquinaria, camiones, aviones, químicas, papeleras, imprentas), energía (petróleo, gas, carbón y derivados), alta tecnología (ordenadores, software, equipamiento electrónico), telecomunicaciones (teléfono y televisión), comercios (al por mayor y por menor, lavanderías y tiendas de reparación), salud (sanidad, equipamiento médico y fármacos), servicios públicos, otros (minas, construcción, materiales de construcción, transporte, hoteles, servicios de autobús, entretenimiento, finanzas).

La muestra de diecisiete industrias incluye: alimentación, minería (minería y metales), petróleo (petróleo y derivados), textil (textil, ropa y calzado), bienes duraderos, productos químicos, consumo (medicinas, jabones, perfumes y tabaco), construcción (construcción y materiales de construcción), acero, manufacturas, maquinaria, automóviles, transporte, servicios públicos, ventas al por menor, financieras (bancos, aseguradoras, y otras empresas financieras) y otros.

La muestra de treinta industrias incluye: alimentación, cerveza (cerveza y licores), tabaco, juegos (recreativos), libros (impresión y publicación), productos para el hogar, ropa, salud (salud, equipamiento médico y productos farmacéuticos), química, textil, construcción (construcción y materiales de construcción), acero, manufacturas (productos fabricados y maquinaria), equipamiento electrónico, automóvil (automóviles y camiones, aeronáutica (aeronáutica, embarcaciones y ferrocarril), minería (metales preciosos, no

³ http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

preciosos e industria del metal), carbón, petróleo (petróleo y gas natural), servicios públicos, telecomunicaciones, servicios (servicios personales y a empresas), equipamiento de negocios, papel (abastecimiento de negocios y portacontenedores), transporte, ventas al por mayor, ventas al por menor, restauración (restaurantes, hoteles y moteles), financieras (bancos, aseguradoras, inmobiliarias y trading) y otros.

Los estadísticos descriptivos utilizados son mínimo, máximo, media, varianza, desviación típica, asimetría y curtosis de cada cartera ordenada por industria. Para analizar la normalidad de la muestra se calcula el test de Jarque-Bera, que contrasta la hipótesis nula de distribución normal de los rendimientos, mediante el estadístico JB que asintóticamente sigue una distribución chi-cuadrado con $\alpha = 0.05$.

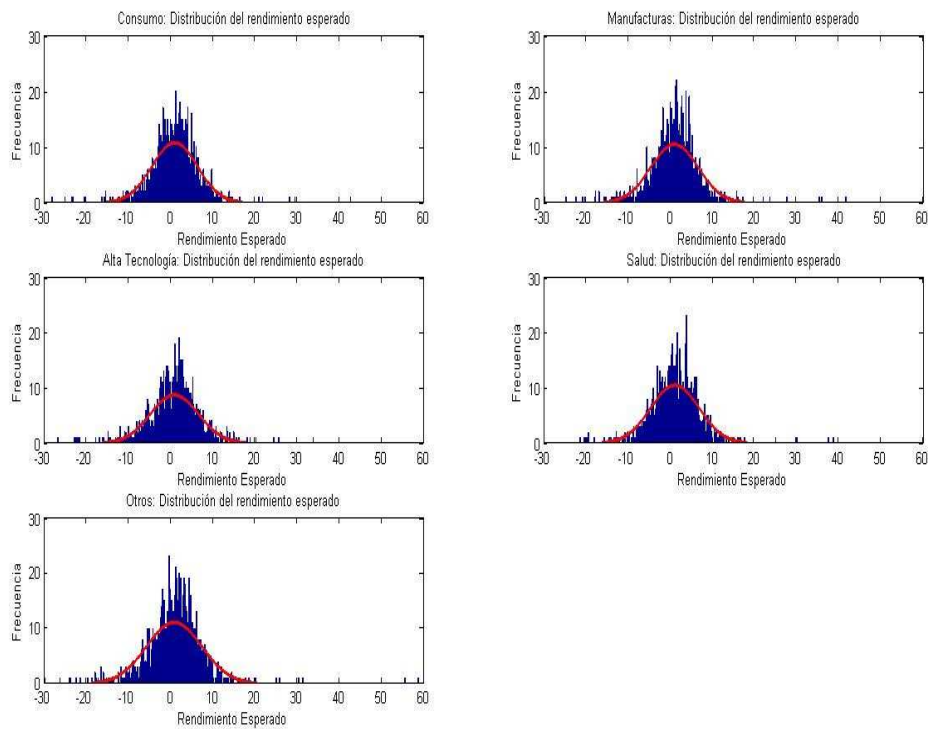
TABLA 1: Análisis descriptivo de la muestra de cinco industrias.

Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Muestra de cinco industrias				
	Consumo	Manufacturas	Alta Tecnología	Salud	Otros
Mínimo	-28,17	-29,81	-26,74	-34,74	-29,99
Máximo	42,69	41,63	33,83	38,66	58,74
Media	0,99	0,98	0,92	1,07	0,88
Varianza	28,91	31,20	32,28	32,86	42,94
Des. Típica	5,38	5,59	5,68	5,73	6,55
Asimetría	0,09	0,32	-0,18	0,16	0,86
Curtosis	10,14	11,03	6,50	10,09	15,73
JB Test	2.182,088	2.770,980	529,006	2.154,434	7.055,667
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,18	0,17	0,16	0,19	0,13

La industria con mayor mínimo es la de salud, mientras que el mayor máximo es el de otros. La media se sitúa en todas las industrias alrededor del 1%, un valor bastante bajo si se compara con las desviaciones típicas respecto a las medias, que son superiores al 5%. La muestra no presenta una elevada asimetría, la industria con mayor asimetría es la que corresponde al conglomerado de otros, con un 0.855. Lo que sí se observa es una elevada curtosis, superando con creces todas las industrias el valor tres que corresponde a una distribución normal. El Test Jarque-Bera confirma que la muestra no es normal.

Los siguientes histogramas de los rendimientos de dichas industrias muestran la no normalidad de los rendimientos mostrando un excesivo apuntalamiento y unas colas más pesadas que las de una normal.

GRÁFICO 2: Histogramas de los rendimientos de las cinco industrias.



A continuación se aplican los mismos descriptivos a la muestra de diez industrias.

TABLA 2: Análisis descriptivo de la muestra de diez industrias.

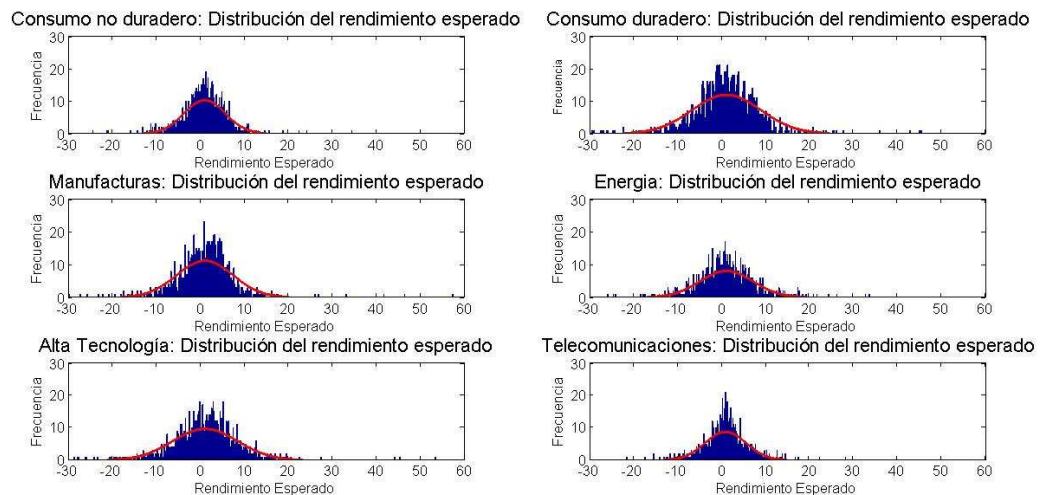
Periodo	Muestra de diez industrias				
01/06/1927 31/12/2011	Consumo no dur	Consumo duradero	Manufactur as	Energía	Alta Tecnología
Mínimo	-24,48	-34,78	-29,80	-25,98	-33,83
Máximo	34,41	79,71	57,42	33,50	53,43
Media	0,98	1,08	1,01	1,06	1,08
Varianza	21,89	61,42	40,82	36,38	54,96
Des. Típica	4,68	7,84	6,39	6,03	7,41
Asimetría	-0,05	1,13	0,87	0,19	0,27
Curtosis	8,65	16,89	14,74	5,99	8,87
JB Test	1.363,439	8.460,993	6.024,093	389,167	1.487,948
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,21	0,14	0,16	0,18	0,15

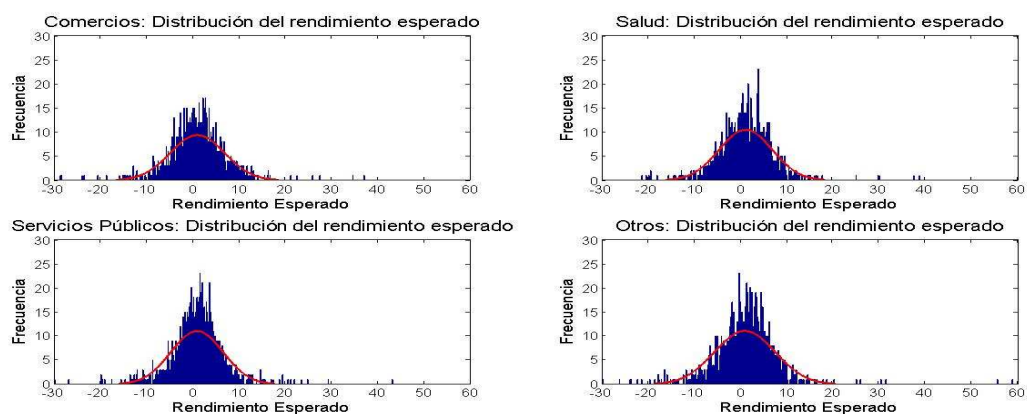
Periodo	Muestra de diez industrias				
01/06/1927 31/12/2011	Telecomuni	Comercios	Salud	Servicios	Otros
Mínimo	-21,56	-30,15	-34,74	-32,96	-29,99
Máximo	28,16	37,05	38,66	43,16	58,74
Media	0,83	0,98	1,07	0,88	0,88
Varianza	21,74	34,44	32,86	31,82	42,94
Des. Típica	4,66	5,87	5,73	5,64	6,55
Asimetría	0,00	-0,03	0,16	0,07	0,86
Curtosis	6,02	8,35	10,09	10,60	15,73
JB Test	389,074	1.225,464	2.154,434	2.467,145	7.055,667
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,18	0,17	0,19	0,16	0,13

En esta muestra, tanto el valor máximo como mínimo lo tiene una industria, consumo duradero. La media sigue alrededor del 1% como en la muestra de cinco industrias, mientras que la desviación típica tiene un mayor rango, desde el 4.6% al 7.8%. La asimetría sigue sin ser excesivamente importante, destacando nuevamente la curtosis de la muestra. Se vuelve a rechazar la hipótesis de normalidad de los rendimientos de la muestra. Y esto queda confirmado con los histogramas de los mismos.

Por otro lado, si se mide la rentabilidad por unidad de riesgo entendido esto como la media partido su desviación estándar, se observa que el sector más arriesgado es el de bienes de consumo no duraderos, mientras que el menos arriesgado es el sector de otros, el cual incluye, entre otros, construcción que suele ser típicamente un sector defensivo con betas bajas.

GRÁFICO 3: Histogramas de los rendimientos de las diez industrias.





A continuación se calculan los estadísticos descriptivos y los histogramas para la muestra de diecisiete carteras ordenadas por industria, que se utilizarán en alguna hipótesis para dar robustez a la misma.

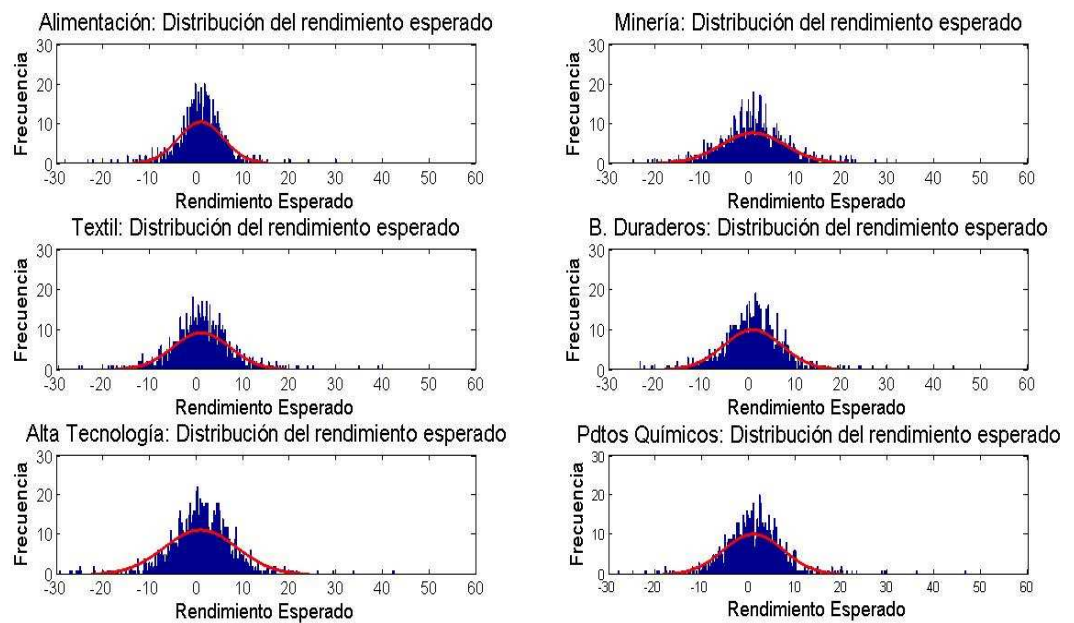
TABLA 3: Análisis descriptivo de la muestra de diecisiete industrias

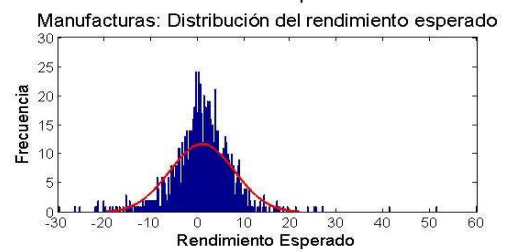
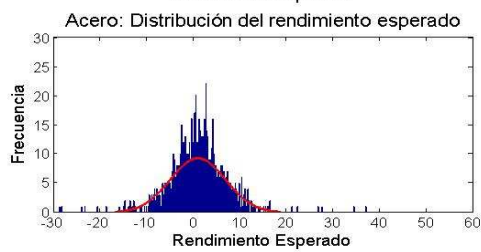
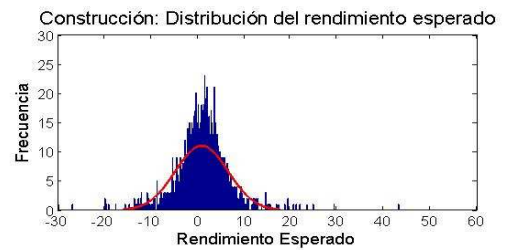
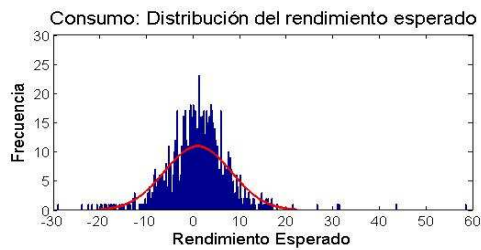
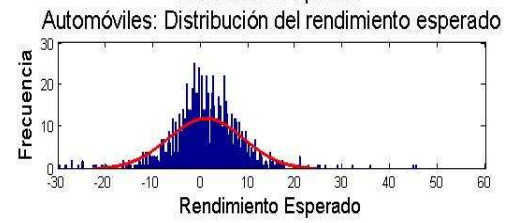
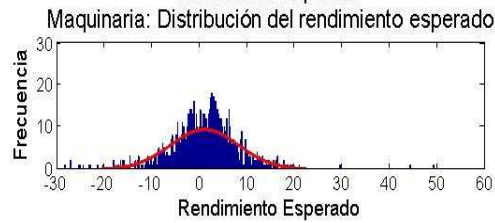
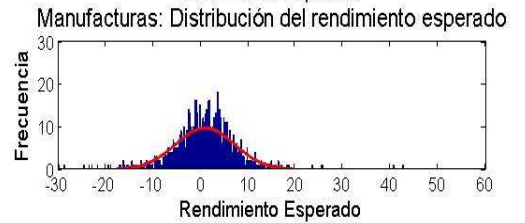
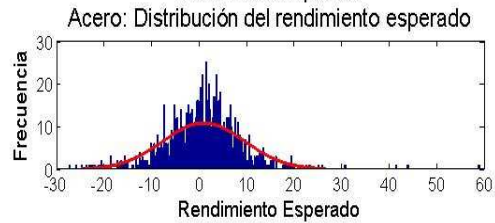
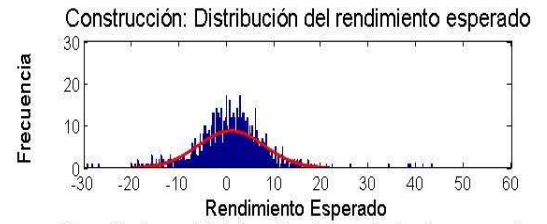
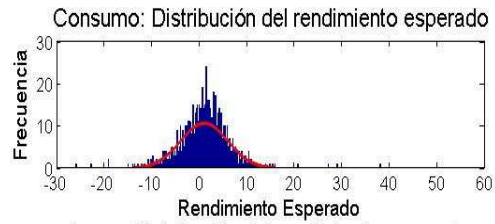
Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Muestra de diecisiete industrias					
	Alimentación	Minería	Petróleo	Textil	B. Duraderos	Pdts Químicos
Mínimo	-28,23	-32,63	-29,60	-31,47	-36,31	-33,36
Máximo	33,41	31,70	39,10	44,01	70,53	46,56
Media	0,99	0,99	1,08	0,90	0,91	1,06
Varianza	23,44	47,09	37,67	39,05	60,87	41,45
Des. Típica	4,84	6,86	6,14	6,25	7,80	6,44
Asimetría	-0,03	-0,13	0,27	0,33	1,30	0,30
Curtosis	9,47	5,32	6,86	7,95	19,42	9,23
JB Test	1.791,20	232,03	649,87	1.064,44	11.817,91	1.676,07
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,20	0,14	0,18	0,14	0,12	0,16

Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Muestra de diecisiete industrias					
	Consumo	Construcción	Acero	Manufacturas	Maquinaria	Automóviles
Mínimo	-25,94	-31,41	-32,51	-29,85	-32,68	-34,84
Máximo	38,06	43,11	80,84	42,63	49,28	80,48
Media	1,02	0,95	0,93	0,93	1,08	1,11
Varianza	24,45	47,90	73,36	37,76	51,41	62,31
Des. Típica	4,94	6,92	8,56	6,15	7,17	7,89
Asimetría	0,23	0,40	1,29	0,12	0,16	1,10
Curtosis	9,24	8,57	16,11	8,83	8,51	16,18
JB Test	1.674,11	1.351,97	7.632,24	1.457,00	1.304,25	7.630,86
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,21	0,14	0,11	0,15	0,15	0,14

Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Muestra de diecisiete industrias				
	Transporte	Serv. Públicos	Meta por menos	Financieras	Otros
Mínimo	-33,27	-32,96	-30,16	-39,47	-25,20
Máximo	62,09	43,16	37,05	59,85	33,37
Media	0,94	0,88	0,98	0,99	0,86
Varianza	50,70	31,82	35,17	48,25	26,35
Des. Típica	7,12	5,64	5,93	6,95	5,13
Asimetría	0,96	0,07	-0,02	0,51	-0,18
Curtosis	15,05	10,60	8,10	14,06	6,66
JB Test	6.370,41	2.467,15	1.114,11	5.273,05	579,78
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,13	0,16	0,17	0,14	0,17

GRÁFICO 4: Histogramas de los rendimientos de las diecisiete industrias.





Y lo mismo para la muestra de treinta carteras ordenadas por industria.

TABLA 4: Análisis descriptivo de la muestra de treinta industrias

Periodo	Muestra de treinta industrias					
01/06/1927 31/12/2011	Alimentación	Cerveza	Tabaco	J. Recreativos	Libros	Productos Hogar
Mínimo	-28,26	-29,19	-24,96	-44,44	-30,45	-35,31
Máximo	33,48	89,19	33,30	66,81	53,43	59,22
Media	0,98	1,22	1,17	1,09	0,92	0,92
Varianza	23,38	54,53	34,56	82,90	50,46	36,00
Des. Típica	4,84	7,38	5,88	9,10	7,10	6,00
Asimetría	0,04	1,82	0,05	0,59	0,49	0,35
Curtosis	9,48	25,36	6,29	12,12	9,52	15,69
JB Test	1.794,09	21.942,85	462,45	3.618,83	1.857,72	6.907,29
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,20	0,16	0,20	0,12	0,13	0,15

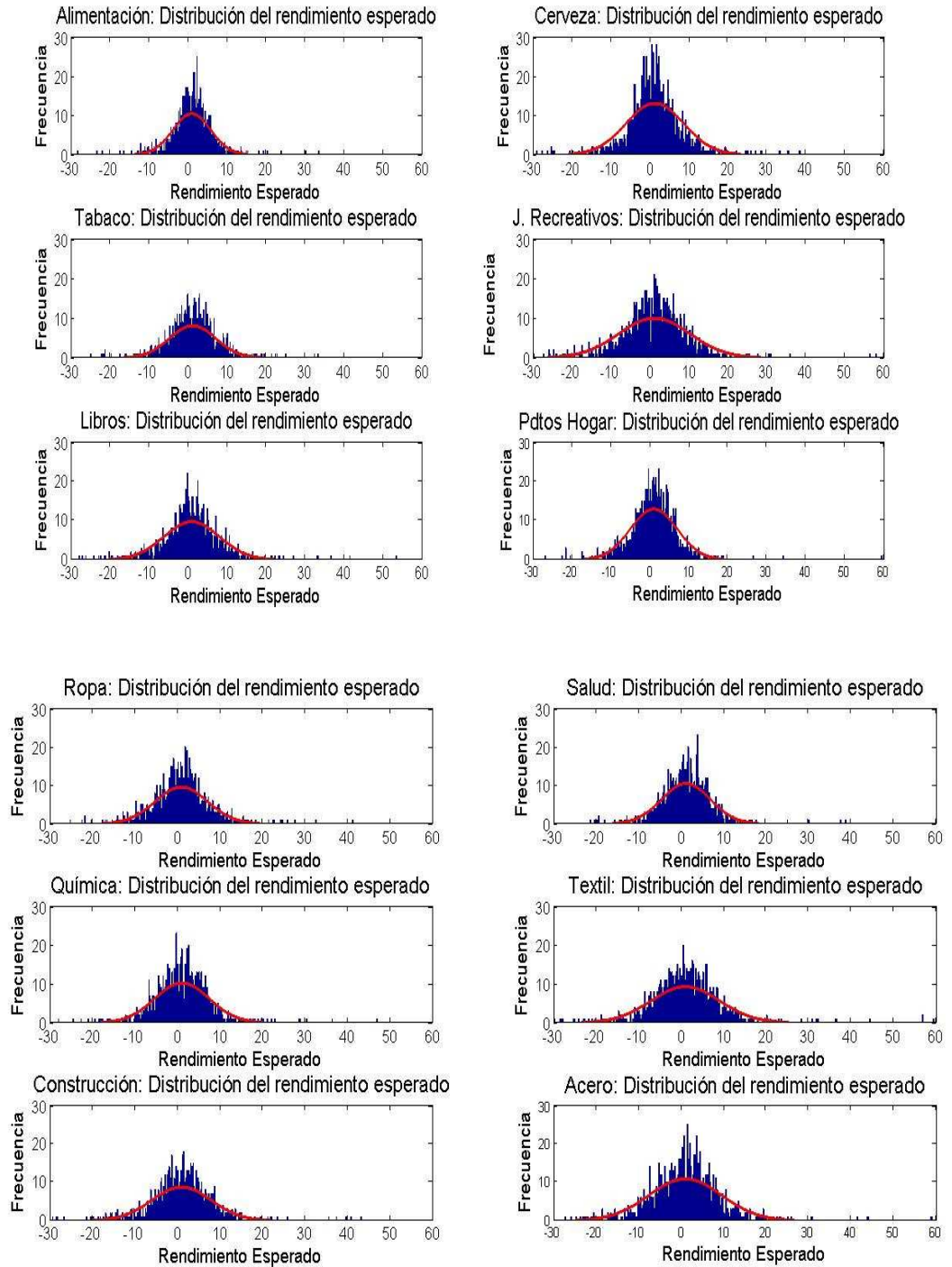
Periodo	Muestra de treinta industrias					
01/06/1927 31/12/2011	Ropa	Salud	Química	Textil	Construcción	Acero
Mínimo	-30,86	-34,74	-33,31	-32,63	-31,46	-32,51
Máximo	41,17	38,66	46,99	59,28	43,21	80,84
Media	0,90	1,07	1,05	0,94	0,92	0,93
Varianza	38,01	32,86	41,07	65,70	49,08	73,35
Des. Típica	6,16	5,73	6,41	8,11	7,01	8,56
Asimetría	0,32	0,16	0,33	0,98	0,32	1,29
Curtosis	7,59	10,09	9,42	12,23	8,65	16,11
JB Test	916,56	2.154,43	1.779,24	3.805,10	1.383,04	7.634,97
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,15	0,19	0,16	0,12	0,13	0,11

Periodo	Muestra de treinta industrias					
01/06/1927 31/12/2011	Manufacturas	Equip. Eléctrico	Automóvil	Aeronáutica	Minería	Carbón
Mínimo		-34,50	-36,42	-30,86	-34,29	-38,04
Máximo	-33,38	59,62	81,93	49,60	46,14	77,54
Media	51,94	1,18	1,07	1,11	0,96	1,25
Varianza	1,056335283	60,29	66,06	60,09	53,94	86,19
Des. Típica	54,18405504	7,76	8,13	7,75	7,34	9,28
Asimetría	7,360981935	0,57	1,16	0,46	0,10	0,81
Curtosis	0,444968479	11,23	16,78	8,38	6,63	9,40
JB Test	2.153,92	2.949,38	8.350,63	1.272,60	566,68	1.861,25
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,14	0,15	0,13	0,14	0,13	0,13

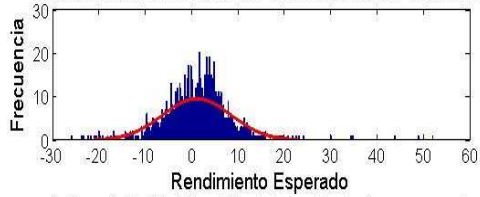
Periodo	Muestra de treinta industrias					
01/06/1927 31/12/2011	Petróleo	Serv. Públicos	Telec.	Servicios	Eq. de Negocios	Papel
Mínimo	-29,72	-32,96	-21,56	-50,85	-31,74	-29,30
Máximo	39,16	43,16	28,16	73,32	38,28	43,38
Media	1,07	0,88	0,83	1,19	1,10	1,01
Varianza	37,60	31,82	21,74	73,38	47,07	36,05
Des. Típica	6,13	5,64	4,66	8,57	6,86	6,00
Asimetría	0,27	0,07	0,00	1,08	-0,22	0,32
Curtosis	6,91	10,60	6,02	19,18	6,06	9,50
JB Test	665,12	2.467,15	389,07	11.394,44	410,01	1.821,66
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,17	0,16	0,18	0,14	0,16	0,17

Periodo	Muestra de treinta industrias					
01/06/1927 31/12/2011	Transporte	Vtas. Mayor	Vtas. Menor	Restauración	Financieras	Otros
Mínimo	-34,52	-44,47	-30,25	-31,27	-39,47	-32,63
Máximo	65,35	59,21	37,75	31,49	59,85	45,94
Media	0,90	0,81	0,99	1,06	0,99	0,79
Varianza	52,70	56,18	36,17	44,61	48,25	47,15
Des. Típica	7,26	7,50	6,01	6,68	6,95	6,87
Asimetría	1,06	0,58	0,01	-0,35	0,51	0,34
Curtosis	15,80	14,10	7,99	5,59	14,06	9,09
JB Test	7.201,56	5.326,31	1.065,56	307,59	5.273,81	1.602,95
p valor	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001	<0,001
Rechazo Ho	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Rdto / riesgo	0,12	0,11	0,16	0,16	0,14	0,11

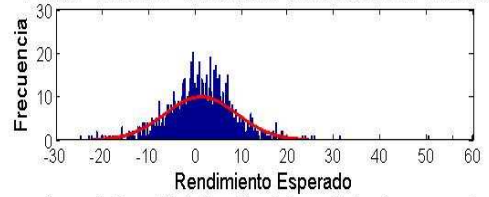
GRÁFICO 5: Histogramas de los rendimientos de las treinta industrias.



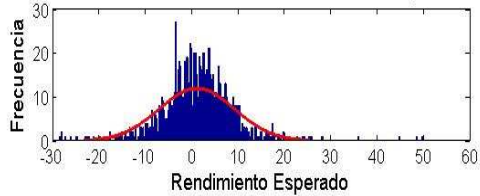
Manufacturas: Distribución del rendimiento esperado



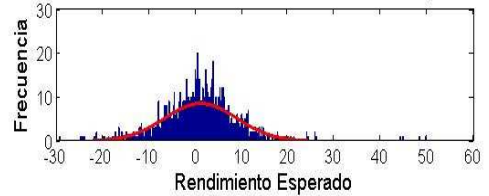
Equip. Eléctrico: Distribución del rendimiento esperado



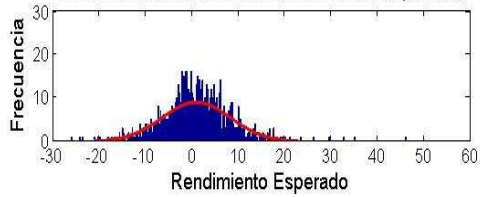
Automóvil: Distribución del rendimiento esperado



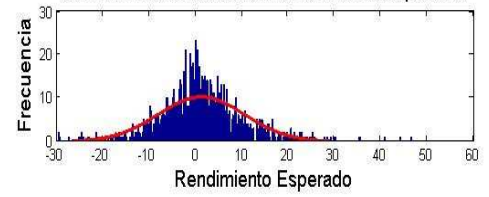
Aeronáutica: Distribución del rendimiento esperado



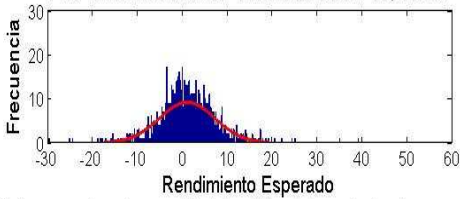
Minería: Distribución del rendimiento esperado



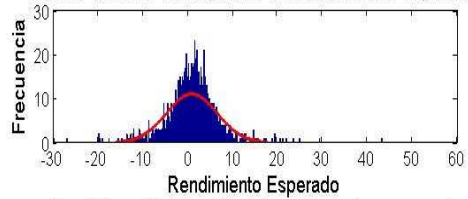
Carbón: Distribución del rendimiento esperado



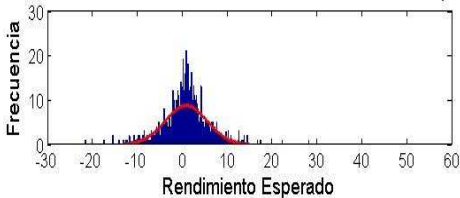
Petróleo: Distribución del rendimiento esperado



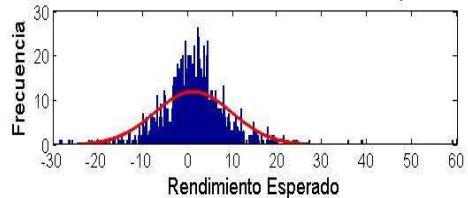
Serv. Públicos: Distribución del rendimiento esperado



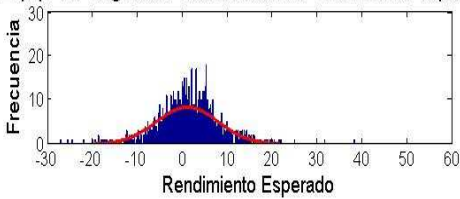
Telecomunicaciones: Distribución del rendimiento esperado



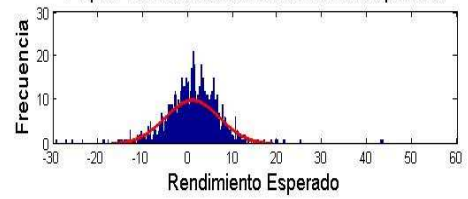
Servicios: Distribución del rendimiento esperado

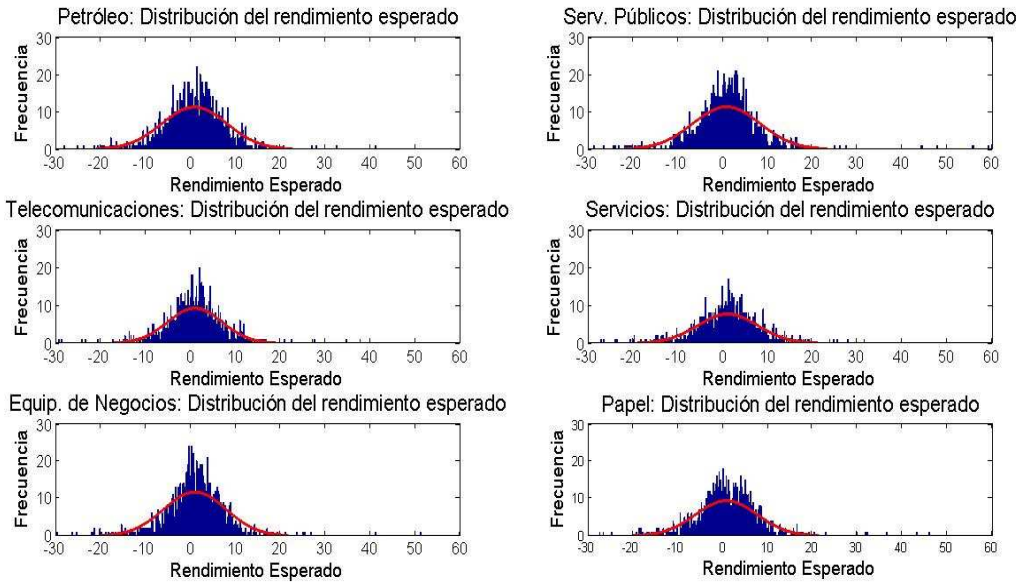


Equip. de Negocios: Distribución del rendimiento esperado



Papel: Distribución del rendimiento esperado





Por otro lado, dado que las variables que se van a utilizar en muchas hipótesis son o las carteras de mínima varianza y las desviaciones típicas o variables que son una combinación lineal de las mismas es interesante observar también los histogramas de estas variables, en concreto se han representado los correspondientes a la serie temporal de una media móvil de 60 periodos, pues es la amplitud de ventana que se usa como referencia en las hipótesis.

GRÁFICO 6: Histogramas del rendimiento esperado y la desviación típica de la cartera de mínima varianza de cinco industrias.

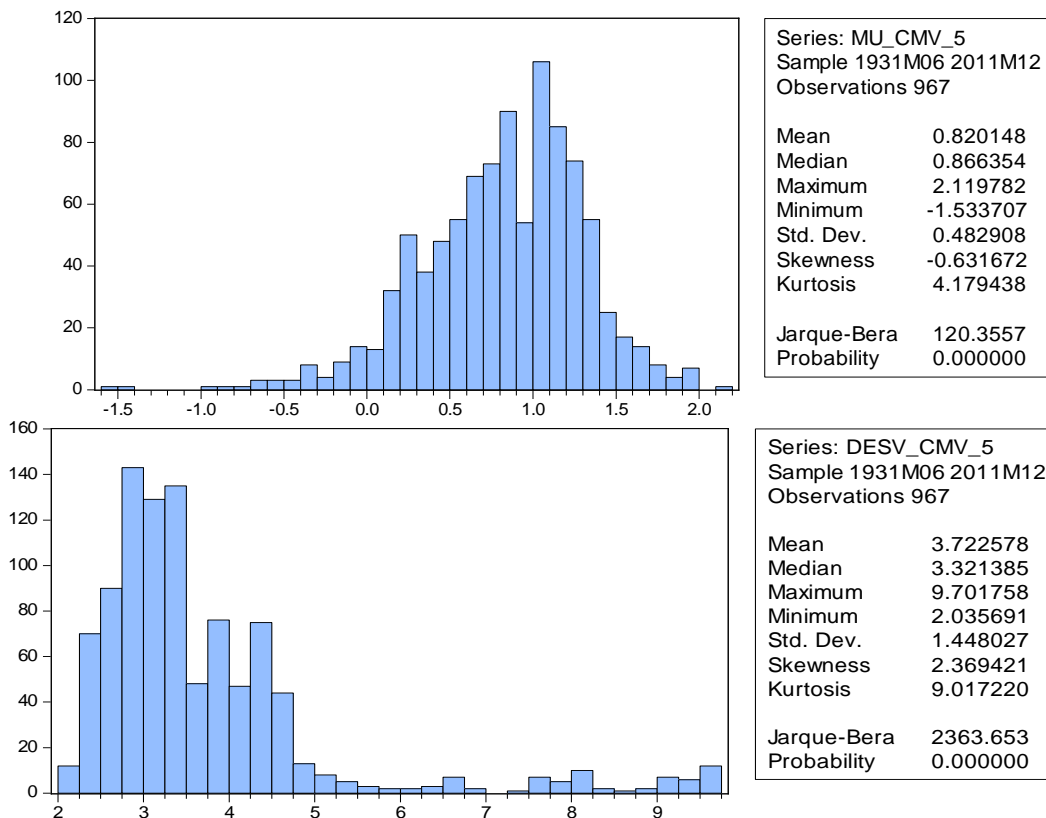


GRÁFICO 7: Histogramas del rendimiento esperado y la desviación típica de la cartera de mínima varianza de diez industrias.

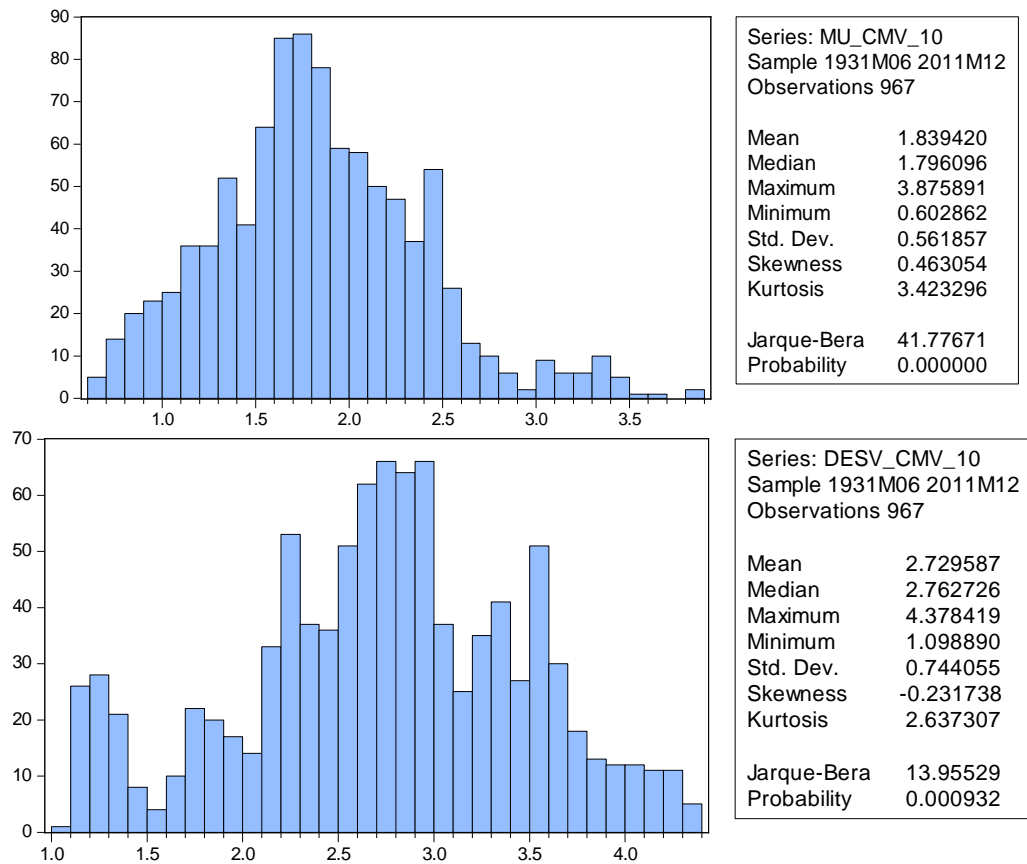


GRÁFICO 8: Histogramas del rendimiento esperado y la desviación típica de la cartera de mínima varianza de diecisiete industrias.

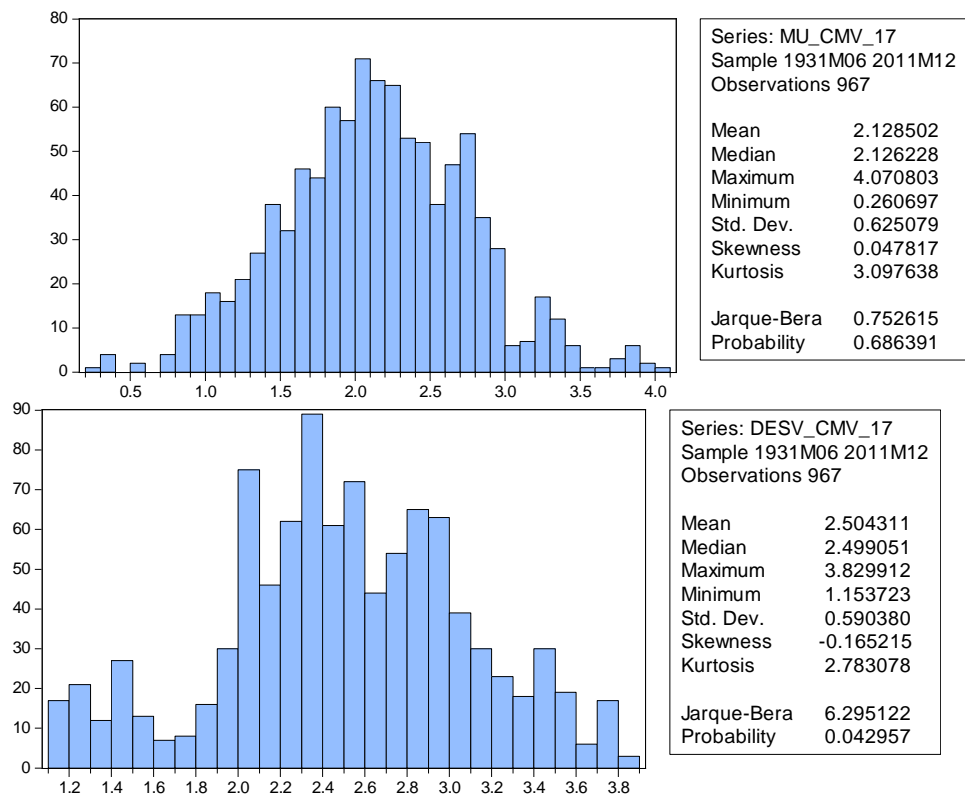
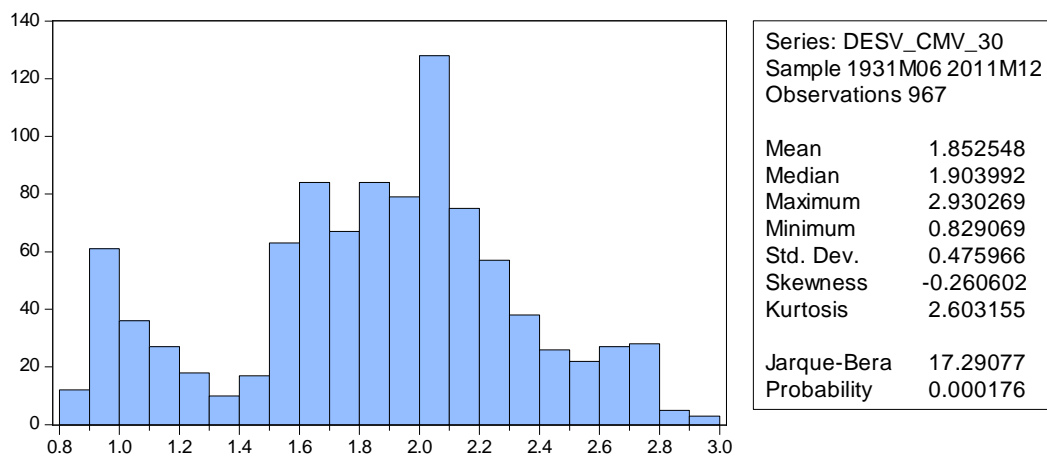
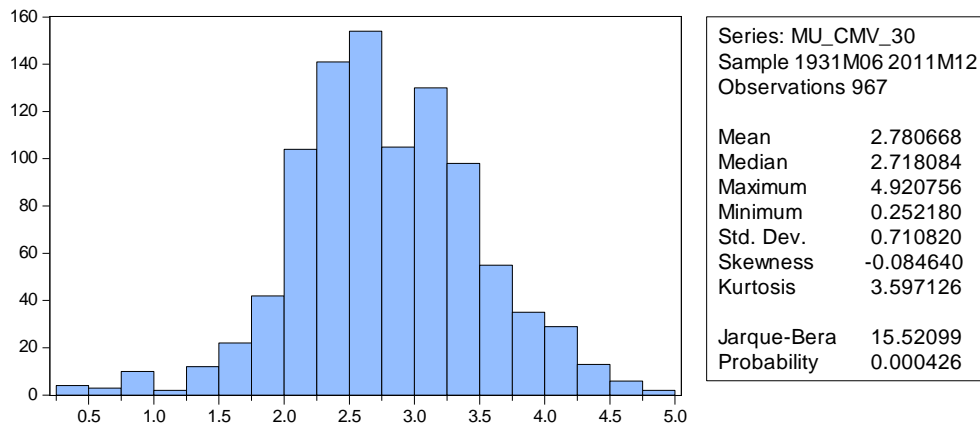


GRÁFICO 9: Histogramas del rendimiento esperado y la desviación típica de la cartera de mínima varianza de treinta industrias.



Diseño empírico.

La metodología utilizada son las fórmulas comentadas en el apartado introductorio. Sin embargo estas fórmulas están planteadas para un único periodo, mientras que este estudio se centra en la evolución temporal del análisis media-varianza. Es decir, qué información se puede extraer del análisis consecutivo de la frontera eficiente y la cartera de mínima varianza, y cómo esta información guarda relación con la economía real. Para implementar este análisis temporal se va a utilizar una ventana móvil de 60 periodos, cinco años. Una ventana de menor amplitud introduciría mucho ruido en el análisis, mientras que una amplitud mayor tardaría mucho en mostrar la información recogida. Esto dará un total de 967 ventanas tanto para la muestra de carteras ordenadas por cinco industrias como para la de diez.

Se ha graficado la evolución de esta frontera a lo largo de las 967 ventanas, dividiendo la serie temporal en cinco gráficos, tanto para la muestra de cinco como de diez carteras ordenadas por industria con el fin de ver cómo ha variado la frontera eficiente a lo largo del periodo considerado.

GRÁFICO 10: Evolución temporal de la frontera de mínima varianza con una muestra de carteras ordenadas por cinco industrias, 1927-2011.

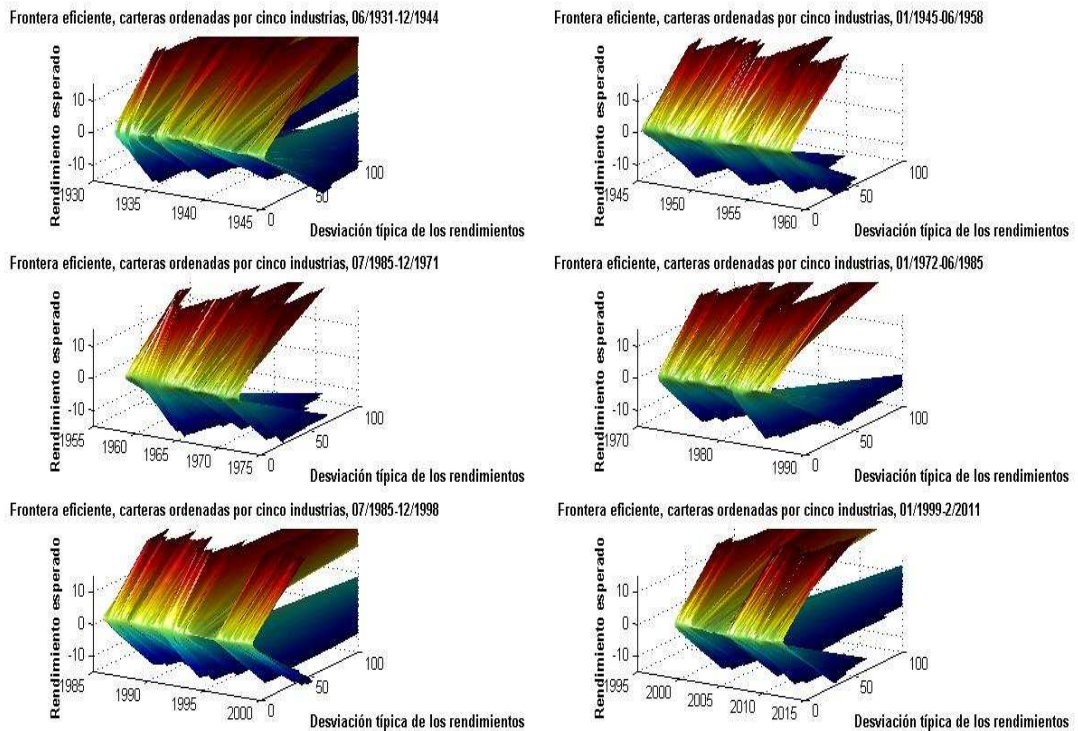
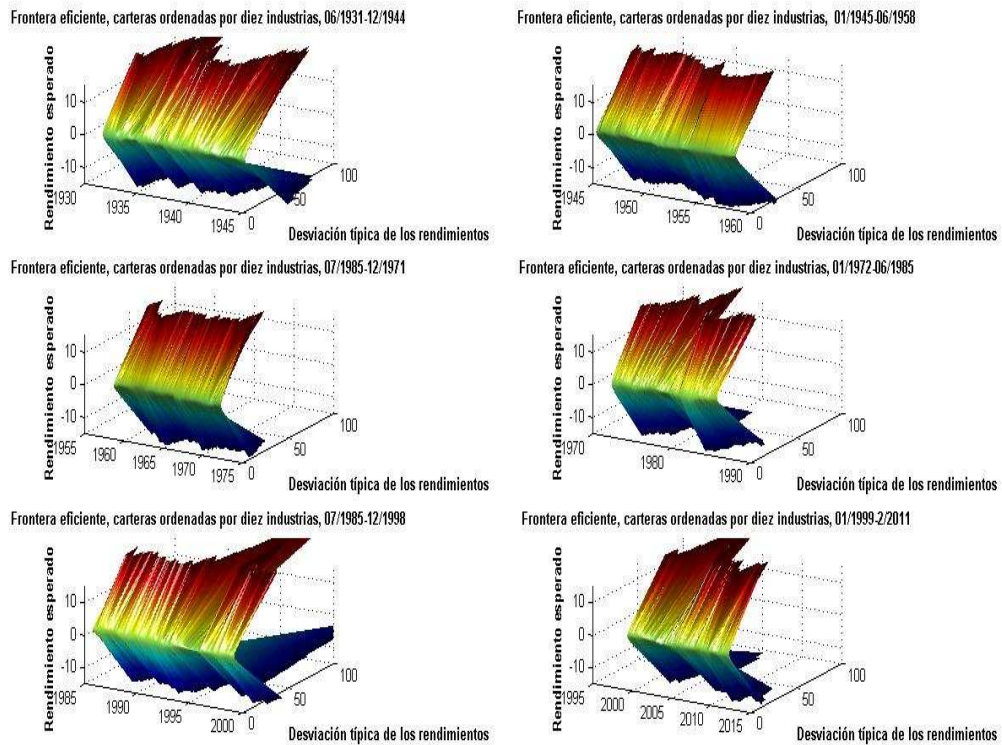


GRÁFICO 11: Evolución temporal de la frontera de mínima varianza con una muestra de carteras ordenadas por diez industrias, 1927-2011.



Se puede observar, si bien con dificultad, periodos en los que hay un estrechamiento de dicha frontera mientras que en otros la frontera parece más amplia. La posición de la cartera de mínima varianza por otro lado es mucho más complicada de observar dada la amplitud del eje ordenadas. Esto demuestra que el valor añadido en términos de información generado por utilizar una evolución temporal en vez de una única cartera y frontera para toda la muestra implica una dificultad en su tratamiento analítico. Es por ello que en este estudio se va a aproximar al modelo media-varianza con un enfoque diferente, creando dos nuevas variables: diferencial de correlación que mide la correlación máxima menos la mínima de los rendimientos de los activos y la variable amplitud que mide la diferencia de rendimientos entre la cartera de mínima varianza y una cartera con un 1% más de volatilidad.

Hipótesis 1: ¿Una mayor diferencia entre la correlación máxima y mínima del rendimiento entre industrias implica una menor volatilidad de la cartera de mínima varianza?

Una manera de medir el comportamiento de los activos es mediante el coeficiente de correlación, una medida estandarizada de la covarianza: $\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$ y cuyo rango de variación comprendido entre -1 y 1 proporciona información acerca de la intensidad del co-movimiento del rendimiento de dos activos.

De acuerdo al modelo se pueden examinar tres casos extremos, correlación perfectamente positiva, correlación perfectamente negativa e independencia. Simplificando la formulación del rendimiento esperado y riesgo para la cartera de mínima varianza para dos activos se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\bar{R}_p &= X_i\bar{R}_i + X_j\bar{R}_j = \{X_i + X_j = 1\} = X_i\bar{R}_i + (1 - X_i)\bar{R}_j \\ \sigma_p &= [X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_j^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_{i,j}]^{1/2} \\ &= [X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_j^2 + 2X_i(1 - X_i)\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j]^{1/2}\end{aligned}$$

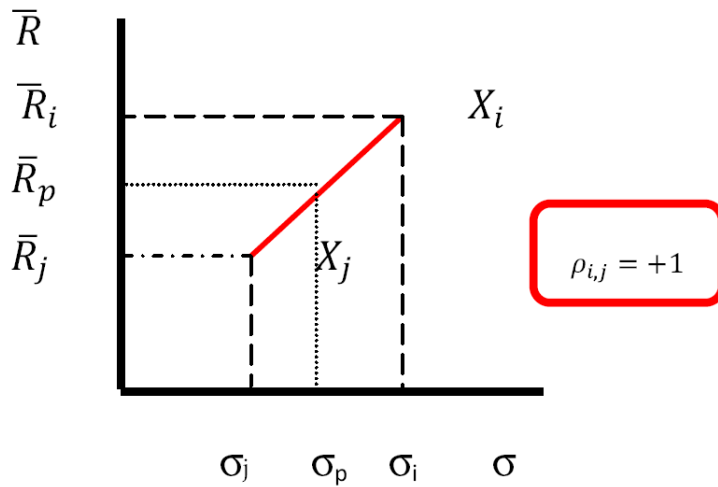
Una vez obtenido el riesgo de la cartera en términos del coeficiente de correlación se pasa a considerar analítica y gráficamente los tres casos comentados.

$$\sigma_p = [X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_j^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_i\sigma_j]^{1/2} = X_i\sigma_i + (1 - X_i)\sigma_j$$

Es decir, cuando el coeficiente de correlación es igual a +1, el riesgo y rendimiento de la cartera son en ambos casos una combinación lineal del riesgo y rendimiento de cada uno de los activos. No existe una reducción del riesgo debida a la diversificación, a no ser que se permitan las posiciones a corto.

La cartera de mínima varianza sería $X_i = \frac{\sigma_p - \sigma_j}{\sigma_i - \sigma_j}$ y $X_j = 1 - X_i$

GRÁFICO 12: Relación entre el rendimiento esperado y la desviación típica cuando $\rho_{i,j} = +1$

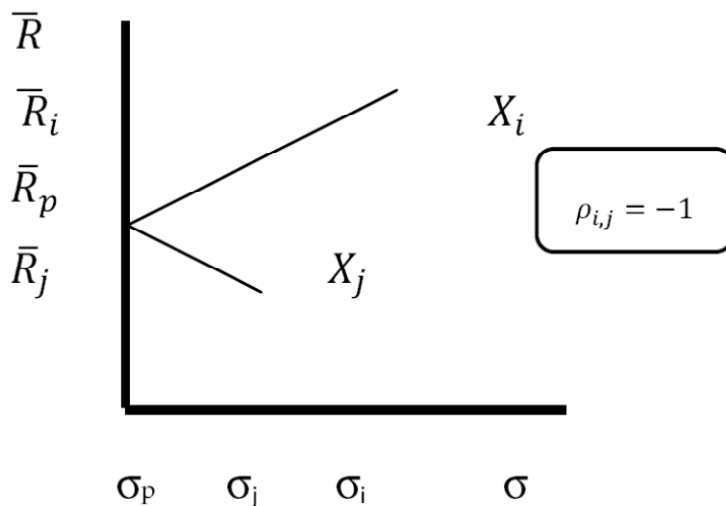


El siguiente caso extremo es correlación perfecta negativa.

$$\sigma_p = [X_i^2 \sigma_i^2 + (1 - X_i)^2 \sigma_j^2 - 2X_i(1 - X_i)\sigma_i\sigma_j]^{1/2} = X_i\sigma_i - (1 - X_i)\sigma_j$$

En este caso siempre será posible encontrar una combinación de ambos activos que tenga un riesgo nulo, siendo la cartera de mínima varianza: $X_i = \frac{\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j}$ y $X_j = 1 - X_i$

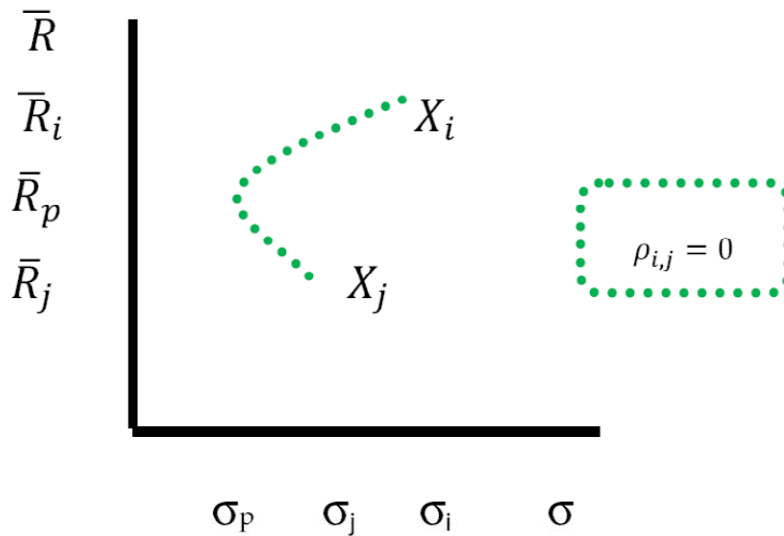
GRÁFICO 13: Relación entre el rendimiento esperado y la desviación típica cuando $\rho_{i,j} = -1$



El último caso extremo a considerar es cuando los activos son independientes. $\sigma_p = [X_i^2 \sigma_i^2 + (1 - X_i)^2 \sigma_j^2]^{1/2}$, cuyos pesos de la cartera de mínima varianza se obtienen de la condición de primer orden de la minimización de la cartera de mínima varianza, cuyos resultados son

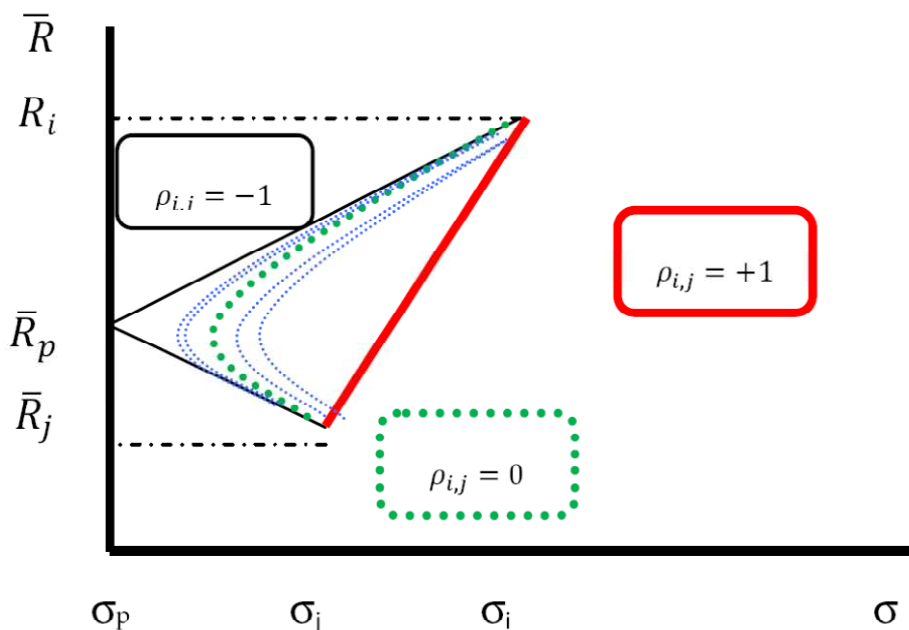
$$X_i = \frac{\sigma_i^2 - \sigma_j \sigma_i \rho_{i,j}}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \text{ y } X_j = 1 - X_i$$

GRÁFICO 14: Relación entre el rendimiento esperado y la desviación típica cuando $\rho_{i,j} = 0$



En el siguiente gráfico resume los tres casos extremos y sus posibilidades intermedias. La correlación perfectamente positiva, valor unitario, es la línea recta de pendiente positiva. Como puede observarse, la única manera de reducir el riesgo en este caso sería tomando posiciones cortas. El ángulo formado por las dos líneas más estrechas corresponde a la correlación perfectamente negativa, con la cual sí que se podría alcanzar valor cero para la desviación típica. Las líneas curvas punteadas mostrarían las combinaciones entre -1 y 1, siendo la independencia, valor cero del coeficiente de correlación, una de esas curvas intermedias. Cuanto más se aproxima el coeficiente de correlación a -1, manteniendo el resto de características constantes, mayor es el beneficio de la diversificación.

GRÁFICO 15: Resumen de los casos extremos del coeficiente de correlación.



Por supuesto, esto son valores teóricos, en la práctica es muy difícil encontrar valores con correlaciones extremas de este tipo, se suelen dar más las combinaciones intermedias.

Por otro lado, la intuición dice que con un mayor número de activos, más fácil será tener diferentes comportamientos en los rendimientos, y por tanto más fácil diversificar el riesgo. Además, mayores diferencias en el comportamiento de estos activos probablemente reduzcan el riesgo medido como la desviación estándar. Analíticamente, para una cartera equiponderada tendríamos:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^N (1/N)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1/N) (1/N) \sigma_{i,j} \\ &= (1/N) \sum_{i=1}^N (1/N) \sigma_i^2 + \frac{(N-1)}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\frac{\sigma_{j,k}}{N(N-1)} \right] \\ &= \frac{1}{N} \bar{\sigma}_j^2 + \frac{N-1}{N} \bar{\sigma}_{i,j}^2\end{aligned}$$

,donde se observa que la contribución de un activo individual a la varianza de la cartera tiende a cero conforme N tiende a infinito, es decir, el riesgo individual puede ser diversificado pero la contribución al riesgo mediante la covarianza con otros activos de la misma cartera no puede ser eliminada. Un ejemplo empírico se puede ver en la tabla 4.8: Effect of Diversification, donde aumenta el número de activos de una cartera de datos mensuales de la bolsa de Nueva York desde la unidad hasta mil activos, mostrando que al final la varianza esperada de la cartera tiende a su covarianza media.

Volviendo al análisis gráfico, mientras que en el gráfico 15 se han mostrado las líneas de combinación de dos activos, en una cartera con N activos hay $\frac{N(N-1)}{2}$ covarianzas distintas, y por tanto el mismo número de coeficientes de correlación. Esto implica, que si se quisiera evaluar el impacto del coeficiente de correlación para el ejemplo de Chapados (2011) para cuatro carteras habría seis valores distintos de correlación. Y en el caso de las muestras analizadas, carteras ordenadas por cinco y diez industrias, implicaría diez coeficientes de correlación para la muestra de cinco carteras y cuarenta y cinco coeficientes para la de diez. Este elevado número dificulta evaluar el papel de la correlación en las posibilidades de diversificación.

Una manera de concentrar este número, dado que el interés es la diferencia de comportamientos, es centrarse en el valor máximo y mínimo de dichos coeficientes. Obviamente, las correlaciones restantes se encontrarán dentro de ese rango. Si el valor máximo y mínimo se encuentran muy próximos, esto implicará que las correlaciones de las carteras ordenadas por industrias son

muy similares y por tanto los rendimientos de todas las carteras se comportarán de una manera similar, dificultando la diversificación del riesgo. Contrariamente, si el valor máximo y el mínimo se encuentran alejados, eso puede significar que se puede diversificar el riesgo más fácilmente, porque al menos, existen dos parejas de activos con comportamientos muy diferentes.

Sintetizando más esta información, se puede calcular la diferencia entre el valor máximo y mínimo de la correlación de las N industrias. El valor máximo de dicha diferencia será: $\rho_{max} - \rho_{min} = 1 - (-1) = 2$, mientras que el valor mínimo de la diferencia será cero. Tener un único valor, y por tanto una única serie temporal, facilitará el análisis.

Aplicando esta medida, que se denominará diferencial de correlación, al ejemplo de Chapados (2011) se obtiene la siguiente matriz de coeficientes de correlación:

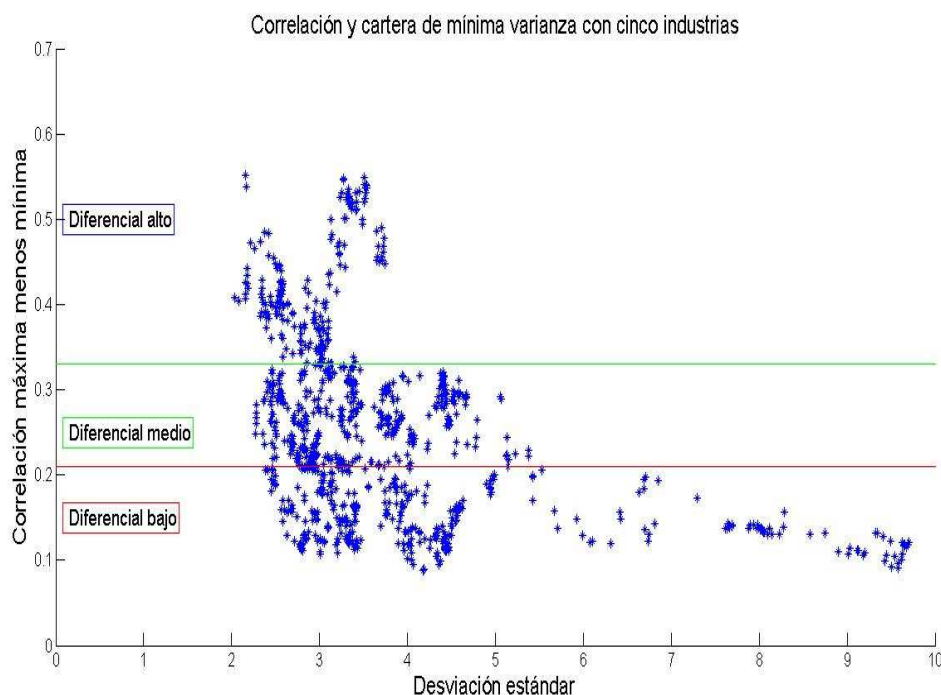
$$\rho_{i,j} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.24 & 0.25 & 0.22 \\ 0.24 & 1.00 & 0.47 & 0.14 \\ 0.25 & 0.47 & 1.00 & 0.25 \\ 0.22 & 0.14 & 0.25 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Cuyo valor máximo es $\rho_{2,3} = 0.47$ y $\rho_{2,4} = 0.14$ para el valor mínimo. El diferencial de correlación obtiene el valor de $\rho_{max} - \rho_{min} = 0.47 - (0.14) = 0.33$. Un único valor de la variable dispersión por sí mismo no aporta excesiva información más allá de afirmar que se encuentra más cerca del valor mínimo, cero, que del máximo, dos. El interés de esta medida radica en tener una serie temporal de diferenciales que permita tomar este 0.33 en referencia a los valores de dicha serie lo cual permitirá establecer unos rangos de variación y en contrastar empíricamente si esta medida guarda alguna relación con el nivel de riesgo de la cartera de mínima varianza, entendido este como su desviación típica.

Por tanto la hipótesis inicial es que un mayor diferencial de correlación, entendido como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la correlación entre los rendimientos de las N industrias, puede producir una mejor diversificación del riesgo y por tanto una menor volatilidad de la cartera de mínima varianza. Al contrario, un valor bajo de dicha correlación podría implicar una mayor volatilidad.

Para contrastar esta hipótesis se ha realizado un gráfico de dispersión cuyas variables son precisamente la volatilidad de la cartera de mínima varianza y la diferencia entre la correlación máxima y la mínima de la muestra de cinco industrias.

GRÁFICO 16: Diferencial de correlación y volatilidad de la muestra de carteras ordenadas por cinco industrias.



Puede observarse que existe algún tipo de relación inversa entre ambas variables, a menor diferencial de la correlación entre los rendimientos de las carteras ordenadas por industrias, mayor desviación estándar. Si se divide el gráfico en tres secciones horizontales se puede obtener tres rangos de diferencial y desviación estándar.

Un diferencial bajo, entre 0.1 y 0.25, tiene un amplio rango de valores de desviación estándar de la cartera de mínima varianza, desde 2.5% a 10%. Con un diferencial medio, entre 0.21 y 0.33, el rango de desviación estándar se reduce a la mitad, aproximadamente. Finalmente, el mayor diferencial, entre 0.33 y 0.6, corresponde al menor rango de desviación típica, desde 2.5% a 3.5%. Esta evidencia sugiere que la medida diferencial de correlaciones recoge información sobre las posibilidades de diversificar el riesgo de un inversor que basa su estrategia en el análisis media-varianza. Una muestra de carteras ordenadas por industria cuya diferencia entre el valor máximo y mínimo de la correlación de dichas industrias da como resultado un valor pequeño de la medida amplitud indica que las posibilidades de diversificar y por tanto reducir el riesgo al construir la cartera de mínima varianza no son elevadas. Al contrario si dicho valor de la amplitud es elevado, la desviación típica de la cartera de mínima varianza va a ser menor.

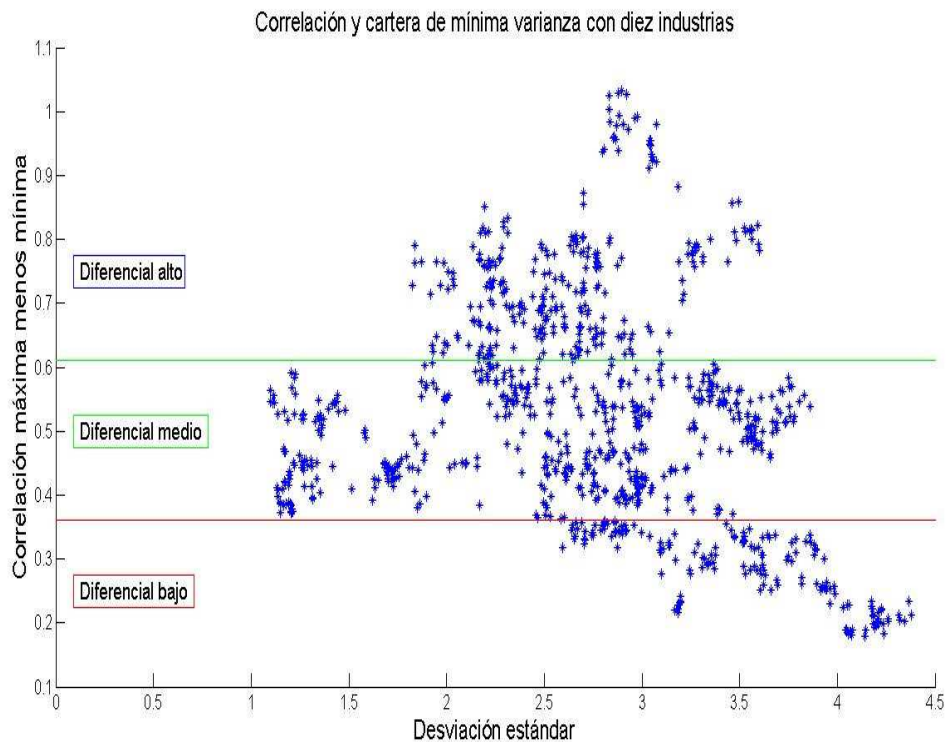
Un resultado interesante es la capacidad de estimar el rango entre el cual el inversor puede ser capaz de diversificar el riesgo, conociendo simplemente una

medida de dispersión de la matriz de varianzas y covarianzas. Si se divide el gráfico en tres secciones horizontales, se obtienen tres rangos de dispersión y desviación estándar.

Por ejemplo, si se analiza la correlación de las industrias de una muestra y se observa un diferencial medio de 0.25, eso significará no solo que no se podrá diversificar demasiado el riesgo de la cartera, sino que además, ese riesgo medido por la desviación estándar estará comprendido entre 2.5% y 5.5%. Por otro lado, si el diferencial de la correlación de dicha muestra es 0.5, situándose en la sección de mayor dispersión, la desviación estándar de la cartera se situará en un rango menor y más preciso, entre 1% y 3%.

Con el fin de ratificar las conclusiones se ha ampliado el número de industrias consideradas de cinco a diez. Intuitivamente un mayor número de industrias implica una mayor probabilidad que los rendimientos de los activos se comporten de manera diferente. Si la hipótesis se confirma, esto resultaría en mayores valores de la dispersión, spread entre la correlación máxima y mínima de los rendimientos, y menores valores de la volatilidad de la cartera de mínima varianza.

GRÁFICO 17: Dispersión y volatilidad de la muestra de diez industrias.



Lo primero a destacar son los ejes del gráfico de dispersión. El eje de abscisas, el cual mide la desviación estándar, ha disminuido su rango de variación de un 2%-10% a un 1%-4.5%. Es decir, la desviación se ha reducido

por la mitad. En el eje de ordenadas también ha ocurrido un cambio, incrementándose el diferencial máximo desde 0.6 a 1.1. Además, el área de diferencial medio, que es donde existe la mayor concentración de puntos, se ha desplazado hacia arriba al mismo tiempo que se ha reducido el rango de la desviación estándar.

Centrándose ya en la nube de puntos, se pueden observar los mismos tres rangos: baja, media y alta dispersión. La parte baja del gráfico corresponde a una baja dispersión, entre 0.1 y 0.36. Con este diferencial se pueden obtener desviaciones estándar entre 2.5% y 4.5%. La segunda sección horizontal del gráfico corresponde a una dispersión media, obteniéndose desviaciones entre un 1% y un 4%. La parte superior del gráfico comprende los mayores valores del diferencial, entre 0.61 y 1.1. Este mayor diferencial se corresponde, como en el caso de las cinco industrias, con el rango de desviación estándar más bajo, entre 2.5% y 3.5%.

Por tanto se confirma, para esta muestra y datos, la hipótesis que un mayor diferencial entre la correlación de los activos, medido como el spread entre la correlación máxima y mínima de las industrias de la muestra, implica una mayor diversificación del riesgo y por tanto una reducción de la volatilidad de la cartera de mínima varianza.

Continuando con el ejemplo anterior, pero ahora con diez industrias, se puede conocer el rango de variación del riesgo, medido por el diferencial, que tendrá la cartera de mínima varianza antes de construirla simplemente analizando la correlación entre las industrias. Si el diferencial de la correlación es de 0.25, el rango de volatilidad estará comprendido entre 2.5% y 5%. Por otro lado, si es de 0.5, este rango de volatilidad será menor, entre un 1% y 3.5%. Por tanto las conclusiones obtenidas con la muestra y el gráfico anterior se mantienen.

Concluyendo, un mayor diferencial entre la correlación máxima y mínima de los rendimientos de las industrias implica una menor volatilidad de la cartera de mínima varianza. Además, esta relación permite determinar el rango de variación del riesgo, medido como la desviación típica de la cartera, una vez se conoce el valor máximo y mínimo de la matriz de correlaciones de las industrias que componen la cartera.

Hipótesis 1.1: ¿Existe un límite empírico a las posibilidades de diversificación medido por la variable diferencial de correlación?

Al realizar los contrastes para la hipótesis 1 se ha observado que la reducción del riesgo medido por la desviación estándar era superior en la parte inferior de los gráficos 16 y 17 que en la parte superior. Así pues, el valor máximo de desviación típica en la muestra de cinco carteras en la parte del gráfico de diferencial bajo era un valor cercano al 10%, mientras que en la muestra de diez carteras era un valor cercano a 4.5%, es decir se había reducido a la mitad dicho valor máximo, una reducción del riesgo considerable.

Por otro lado, centrándonos en la parte superior del gráfico que es donde se concentran las posibilidades de diversificación, dada la definición de la variable diferencial de correlación, no se observa un cambio tan sustancial. El valor máximo de la desviación típica en el rango de diferencial alto para la muestra de cinco carteras es aproximadamente un 4%, dicho valor únicamente se reduce al 3.70% en la muestra de diez carteras. No solo eso, si se observan los rangos, el gráfico 16 en el segmento de diferencial alto tiene un rango de variación de la volatilidad entre 2.5 y 4%, es decir, 1.5%. Este mismo 1.5% se observa también en el gráfico 17 donde el rango de variación va aproximadamente entre un 2% y 3.5%. Esto lleva a preguntarse si estos valores son características intrínsecas de estas dos muestras y por tanto no extrapolables a otras carteras o si realmente existe un límite práctico a la diversificación que pueda ser medido simplemente por una resta de correlaciones.

Es por ello que se ha ampliado el número de carteras, añadiéndose al estudio las muestras de diecisiete y treinta carteras por industria, también disponibles en la página web de Kenneth French. Dicha web también tiene disponibles carteras ordenadas por treinta y ocho, cuarenta y ocho, y cuarenta y nueve industrias, si bien se han descartado pues al principio de la serie algunas de esas carteras no tenían datos de los rendimientos de manera sistemática. Con el fin de no distorsionar los resultados, se han evitado dichas carteras utilizando únicamente las de diecisiete y treinta industrias, cuyas series no tenían ese problema, o la ausencia de dichos datos era mínima.

Utilizando la misma metodología que en la hipótesis 1 pero para la muestra de diecisiete y treinta carteras ordenadas por industria se ha procedido a calcular los gráficos de dispersión obteniéndose los siguientes resultados.

GRÁFICO 18: Dispersión y volatilidad de la muestra de diecisiete industrias.

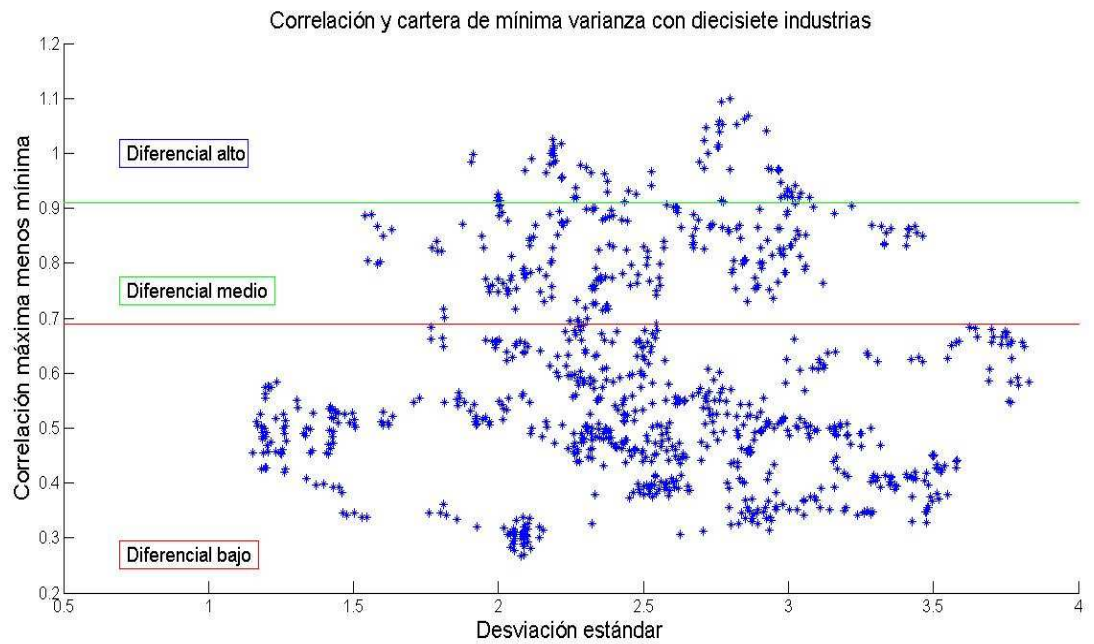
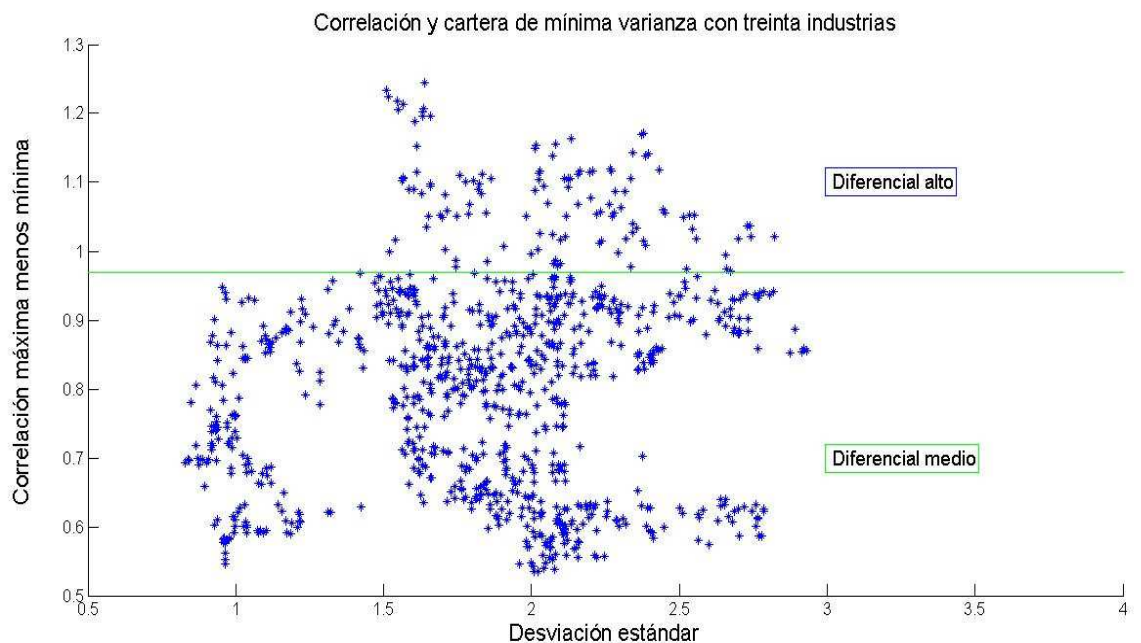


GRÁFICO 19: Dispersión y volatilidad de la muestra de treinta industrias.



Siguiendo el razonamiento de los gráficos anteriores lo primero que se observa es que el eje de abscisas se ha reducido, tal y como ocurrió con los gráficos 10 y 11. Ahora el gráfico 12 tiene un rango de variación de la desviación estándar comprendido entre el 1.1% y 3.8%. Estos rangos se reducen todavía más en el gráfico 13, pasando a tener un rango de variación entre el 0.8% y el 3% aproximadamente. Estos valores ya parecen indicar que el resultado teórico de cartera de mínima varianza con desviación estándar cero es difícil de alcanzar en la práctica.

A continuación pasamos a analizar el eje de ordenadas donde la variable diferencial, diferencia entre la correlación máxima y mínima de los rendimientos de las carteras, ha desplazado su rango de variación, al igual que los gráficos anteriores, 10 y 11. Esto es coherente con el razonamiento de la hipótesis 1, en la que un mayor número de activos, en este caso de carteras ordenadas por industria, puede dar lugar a un mayor número de comportamientos diferentes lo que se traduciría en un mayor valor de la variable dispersión. Así pues el gráfico 14 muestra un rango de variación comprendido entre el 0.3 y el 1.15, mientras que el gráfico 15 muestra valores comprendidos entre el 0.5 y el 1.2.

Centrándose en los rangos, en el gráfico 18 se observa claramente un rango de diferencial bajo, entre 0.2 y 0.7, que implicaría una volatilidad entre el 1% y el 4% aproximadamente. Un segundo rango de diferencial medio, 0.7 y 0.9, que implicaría una volatilidad entre el 1.5 y el 3.1%. Y un tercer rango con los valores máximos de la variable diferencial, entre 0.9 y 1.1, que tendría una volatilidad entre el 1.9% y el 3.1%.

En el gráfico 19 se ha eliminado el rango de diferencial bajo, dejándose únicamente un rango de diferencial medio y uno de diferencial alto. Hay que recordar que el valor máximo que puede tomar la variable diferencial es 2, por tanto un rango entre 0.5 y 0.9 que es casi la mitad del valor máximo de dicha variable difícilmente puede ser considerado como un valor bajo. Además, el valor que separa la dispersión media de la alta es el mismo que en el gráfico 18. Retomando el rango de diferencial medio, 0.5 y 0.9, se observa una desviación estándar entre 0.7% y casi 3%.

Lo primero a destacar es que estos dos gráficos dan robustez a la hipótesis 1, que efectivamente, al tener un mayor diferencial entre la correlación de los activos, medido como la diferencia entre la correlación máxima y mínima de los rendimientos, implica una mayor diversificación del riesgo lo que a su vez lleva a una menor volatilidad de la cartera de mínima varianza.

Lo segundo es que los resultados indican que sí que existe dicho límite a la diversificación y puede ser recogido por la variable diferencial de correlación. Por un lado, se puede observar que en la zona baja de diversificación, la reducción del valor mínimo de la desviación estándar no es muy significativa, si se compara con la reducción que sufre el valor máximo de dicha variable cuando se incrementa el número de carteras utilizado. Por otro, centrándonos en la parte superior de la variable amplitud, observamos que los valores alcanzados por las carteras no son muy elevados. Una cartera formada con treinta valores, en este caso carteras ordenadas por industria, ya es un número considerable, sin embargo los valores máximos de la variable diferencial no alcanzan el 1.3, cuando su valor teórico máximo es de 2. Dicho de otra manera, el paso de cinco a treinta carteras ordenadas por industria implica multiplicar

por seis, sin embargo la mejora en la variable diferencial únicamente se ha multiplicado por dos, pasando de un escaso 0.6 inicial a un valor ligeramente superior 1.2.

Concluyendo, se comprueba prácticamente que sí existe un límite a la diversificación a partir del cual el incluir un mayor número de activos no implica una mejor diversificación y por tanto reducción del riesgo. Esta conclusión es importante para fondos de pensiones que basen sus modelos en los principios básicos del modelo media-varianza, puesto que demuestra que incorporar nuevos activos no va a mejorar su nivel de riesgo.

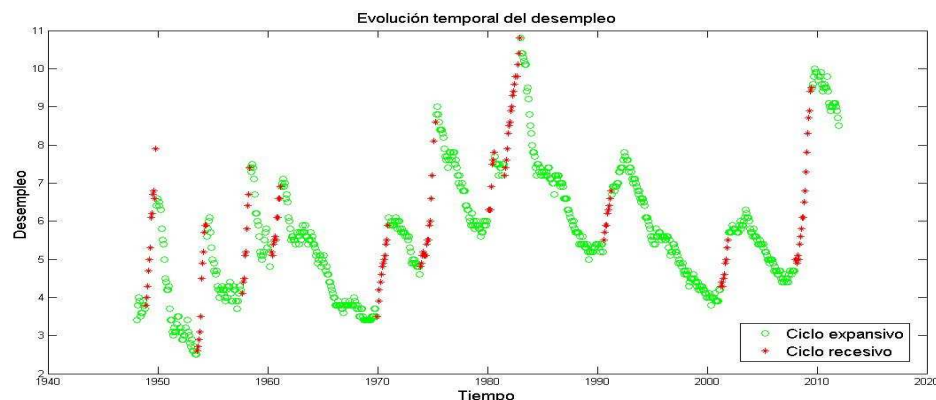
Hipótesis 2: Una evolución negativa de la economía real, medida por elevados niveles de desempleo, equivale a una situación negativa en los mercados financieros, restringiendo el conjunto de posibilidades de inversión y por tanto creando fronteras eficientes más estrechas? ¿O la relación entre economía real y mercados financieros resulta ser más compleja?

La forma de la frontera eficiente depende de los rendimientos medios y de la matriz de covarianzas de los mismos. El conjunto óptimo de posibilidades de inversión puede medirse a través de dicha frontera eficiente, la cual cambia a lo largo del tiempo conforme cambian los rendimientos medios y la estructura de covarianzas. Lo cual trasladado al conjunto de óptimo de posibilidades de inversión implica que dichas posibilidades también varían con el tiempo. En concreto, fronteras amplias sugieren más combinaciones de inversión en el marco de media y varianza. Por el contrario, fronteras angostas sugieren un marco reducido para el inversionista, al implicar menos combinaciones posibles de rendimiento-riesgo para su cartera.

La cuestión que interesa evaluar es si esta amplitud de la frontera eficiente guarda o no alguna relación con la economía real y el cambio de ciclo en dicha economía. Existen muchos indicadores de cambio de ciclo: crecimiento del PIB, índice de producción industrial, índice de desempleo, por citar unos cuantos. Se ha escogido este último, el desempleo, pues como muestra el gráfico a continuación el desempleo sigue perfectamente el cambio de ciclo, aumentando en recesión hasta llegar un máximo y disminuyendo durante el ciclo expansivo, hasta alcanzar un mínimo. Además, tiene la ventaja de ser una variable continua, no solo muestra si ha habido o no un cambio de ciclo, sino su evolución a través de los cambios de ciclo.

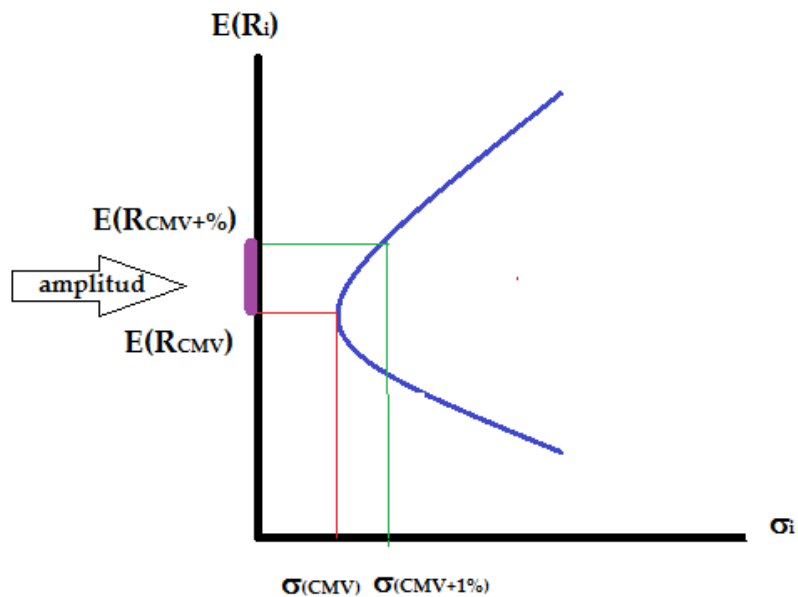
Para el desempleo se ha tomado los datos del Bureau of Labor Statistics US, desde 1948, ajustados por estacionalidad. Los cambios de ciclo así como su duración son los provistos por el National Bureau of Economic Research.

GRÁFICO 20: Evolución temporal del desempleo, entre enero de 1948 y diciembre de 2011.



Para evaluar si la variación en la frontera eficiente guarda o no alguna relación con la economía real medida por el desempleo se va a generar una variable denominada amplitud que va a intentar recoger esta variación del conjunto de posibilidades del inversor. Esta variable amplitud mide la diferencia de rendimiento entre una cartera por encima de la de mínima varianza, y el rendimiento de la misma. Si la frontera es amplia, la diferencia entre los dos rendimientos será importante, mientras que si la frontera es estrecha la diferencia entre los dos rendimientos va a ser muy pequeña y la variable amplitud tendrá un valor bajo.

GRÁFICO 21: Medida amplitud.



El procedimiento utilizado es sumar un 1% a la desviación típica de la cartera de mínima varianza. Una vez determinada la desviación típica de esta nueva cartera se procede a calcular la composición de la misma y su rendimiento. La diferencia entre el rendimiento de esta nueva cartera y el rendimiento de la cartera de mínima varianza es la variable amplitud.

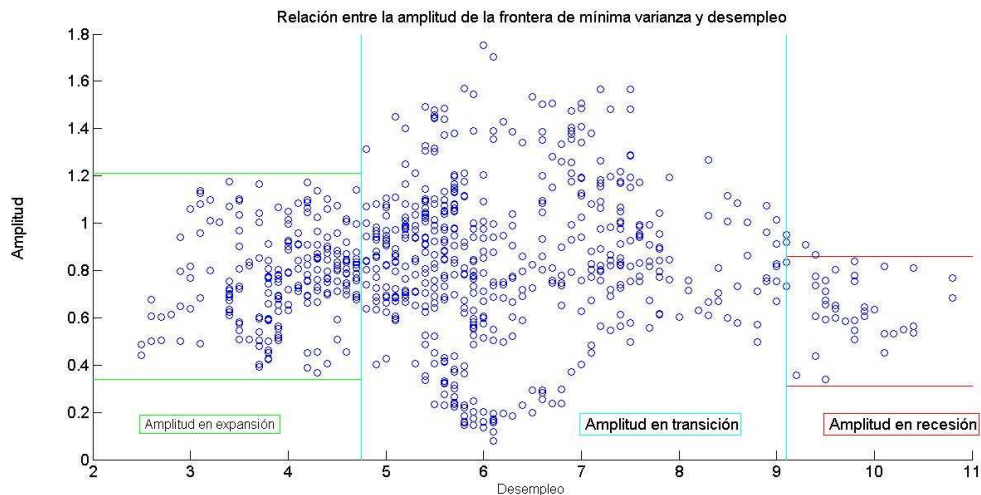
La ventaja de esta medida es que es una variable dinámica, varía su valor conforme varía la frontera eficiente a lo largo del periodo considerado, por lo que fronteras más estrechas darán menor amplitud y fronteras más amplias darán mayor amplitud.

Volviendo al ejemplo de Chapados (2011) del capítulo dos, dónde teníamos un rendimiento esperado de 0.08 y una volatilidad de 0.116 (varianza de 0.0134), la varianza de la nueva cartera está formada por $0.0134+0.01=0.0234$. Con esta varianza se puede calcular los pesos correspondientes a una cartera con dicha varianza, y por tanto su rendimiento esperado. El rendimiento esperado de la cartera amplitud es: 0.241. Para calcular la medida amplitud se restaría el

rendimiento esperado de la cartera amplitud menos el rendimiento esperado de la cartera de mínima varianza, lo cual da un resultado de $0.241-0.08=0.1611$.

El siguiente paso es con datos reales enfrentar en un diagrama de dispersión la variable amplitud frente a la variable desempleo y observar si se confirma o no la hipótesis planteada.

GRÁFICO 22: Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de sesenta periodos y cinco carteras.



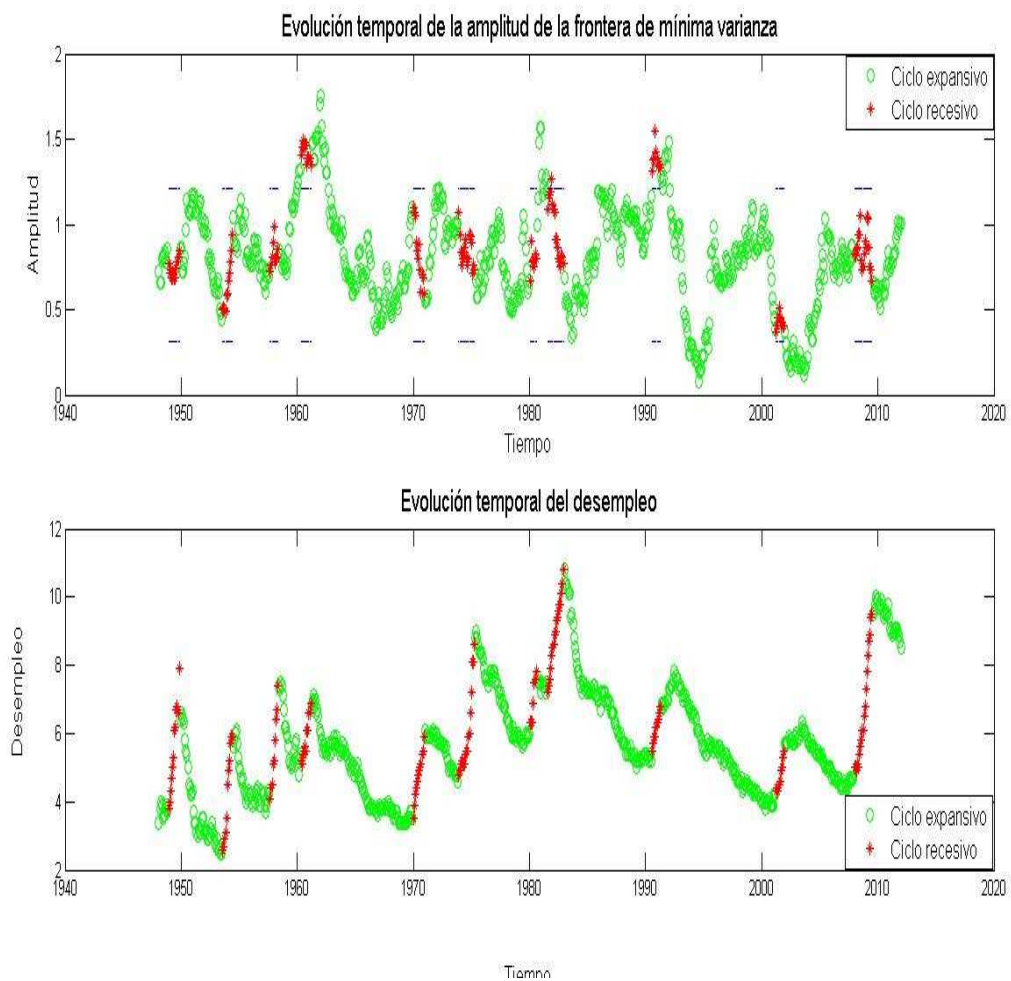
El gráfico se ha enfocado desde el punto de vista del desempleo. En economía existe un concepto denominado, tasa natural de desempleo. Dicho término fue acuñado por Milton Friedman en 1968, refiriéndose a la tasa existente en un sistema walrasiano de ecuaciones de equilibrio general. Existen varias definiciones, según el punto de vista que se puede adoptar, una definición amplia del mismo podría ser la tasa de desempleo que determina la estructura de una economía, esta tasa incluiría el desempleo friccional y el estructural. Esta tasa puede variar a lo largo del periodo analizado y según país, así como el método utilizado para estimarlo, si bien para la economía americana se podría aceptar una tasa entorno al 5-7%. El objetivo de esta hipótesis no es calcular con exactitud dicha tasa, sino centrarse en los casos claros de desequilibrio, es decir, cuando la economía está en clara expansión y muy por debajo de su tasa de desempleo a largo plazo, y cuando está en recesión y tiene una tasa de desempleo muy superior.

Desde esta perspectiva el gráfico claramente se puede dividir en tres partes. Una primera parte correspondería a la amplitud en expansión, es decir, con tasas de desempleo inferiores al 5%. Este segmento del diagrama de dispersión se concentra en un rango entre 0.34 y 1.21 de amplitud. En el extremo más alejado del gráfico se observa una zona de desempleo elevado, superior al 9%

en la cual claramente se estrecha el rango de variación de la variable amplitud, quedando comprendido entre 0.31 y 0.86.

Además de esos dos rangos extremos, existe una zona intermedia con un desempleo entre el 5 y 9% cuya amplitud muestra un rango de variación mucho más extremo, entre 0 y 1.8. Esta zona no se encuentra dentro de los límites de estudio de la hipótesis, si bien se pueden obtener algunas conclusiones sobre ella. Para ello se ha realizado un gráfico en el que se muestra la evolución temporal del desempleo y la variable amplitud ambas separadas por el ciclo económico. Con el fin de facilitar el análisis en el gráfico de esta zona intermedia se han trazado en el gráfico de la variable amplitud dos líneas horizontales que corresponden a los límites a dicha variable en expansión y cuyos valores superiores solo se encuentran en la zona de desempleo “moderado”, es decir, ni en clara recesión ni en expansión.

GRÁFICO 23: Evolución temporal de la variable amplitud y el desempleo separados por ciclo económico.



La primera conclusión es que dada la estructura de curva sinusoidal de los ciclos económicos y en concreto del desempleo, esta zona de mayor dispersión de la amplitud es una zona de transición por la que pasa el desempleo tanto al

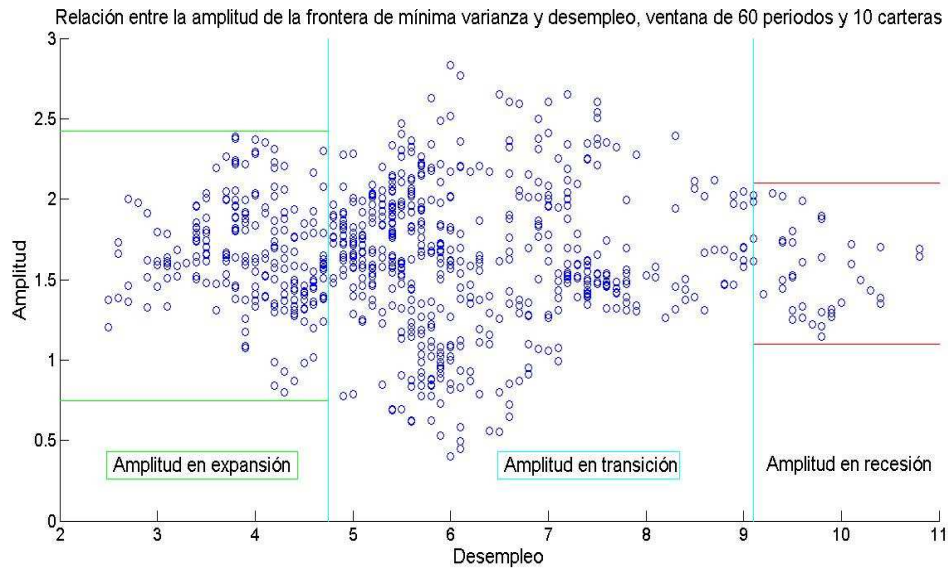
dirigirse a la zona de sobreempleo de la economía como cuando se infrutiliza la fuerza laboral de la misma.

Por otro lado, se ha analizado la fecha en la que se han dado esos valores extremos máximos y mínimos de la amplitud para ver si había algún hecho económico que justificara una mayor inestabilidad en los mercados financieros que se pudiera traducir en una mayor volatilidad de la variable dispersión. Dada la naturaleza de la variable amplitud, basada en una media móvil de cinco años de la cartera de mínima varianza, es difícil que hechos puntuales puedan afectar a dicha variable, mientras que grandes crisis o acontecimientos sí que pueden verse reflejados. En dos tablas al final del anexo se encuentran las fechas para los valores de amplitud máximos (1.21 y 2) y los valores mínimos (rango entre 0.078 y 0.34), así como su tasa desempleo en el caso que hubiera dato. Hay un total de 84 valores de amplitud máximos, de los cuales como se muestra en la tabla 5 del anexo un 60% corresponden a crisis tan importantes como son la Gran Depresión, la Guerra del Golfo, la Crisis del petróleo o la Segunda Guerra mundial. Estas épocas fueron momentos de gran inestabilidad económica y financiera, lo cual puede justificar estos valores atípicos. Respecto a la amplitud mínima todavía está más claro que dichos valores son consecuencia de dicha inestabilidad mencionada, de los 62 valores que muestra la tabla 6 del anexo, un 90% de los mismos corresponden al Efecto Tequila o Crisis de Méjico, Crisis de las Punto Com, la Gran Depresión y la Segunda Guerra Mundial.

Para dar mayor robustez a esta relación entre la economía real medida por el desempleo y el conjunto de oportunidades de inversión medido por la amplitud se ha procedido tanto a ampliar el número de carteras consideradas a diez carteras ordenadas por industria como a variar la amplitud de la ventana móvil considerándose 40, y 120 periodos también. Con esto se propone eliminar la posibilidad de que estas relaciones se vean condicionadas por el tipo de muestra o el tamaño de la ventana.

La primera prueba de robustez es calcular una ventana móvil de la misma amplitud, 60 meses, pero con una muestra de carteras más amplia, en concreto la muestra de diez carteras ordenadas por industrias. Se mantendrá constante el criterio para determinar la fase de la economía, seguirá considerándose una economía en clara expansión aquella con un desempleo inferior al 5% y en clara recesión cuando exista un desempleo superior al 9%.

GRÁFICO 24: Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de 60 periodos y diez carteras.



Se observa el mismo patrón que en el gráfico 16 con la muestra de cinco carteras, el conjunto de posibilidades de inversión medido por la variable amplitud cuando la economía está en clara fase expansiva, con un desempleo inferior al 5% es superior a la variable amplitud cuando la economía está en clara recesión. Por tanto se confirma que esta relación entre variable amplitud y desempleo no es una característica de la muestra de cinco carteras, sino que puede extenderse a diez carteras.

A continuación se va a variar la amplitud de la ventana móvil, para descartar que la relación observada en los gráficos sea efecto del procedimiento utilizado para calcular los rendimientos esperados. Primero se ampliará la ventana móvil a 120 periodos.

GRÁFICO 25: Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de 120 periodos y cinco carteras.

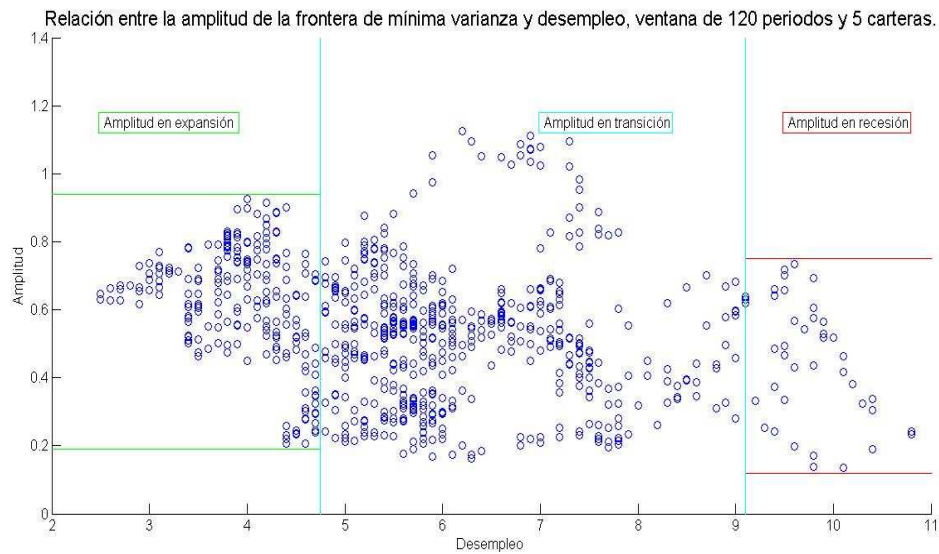
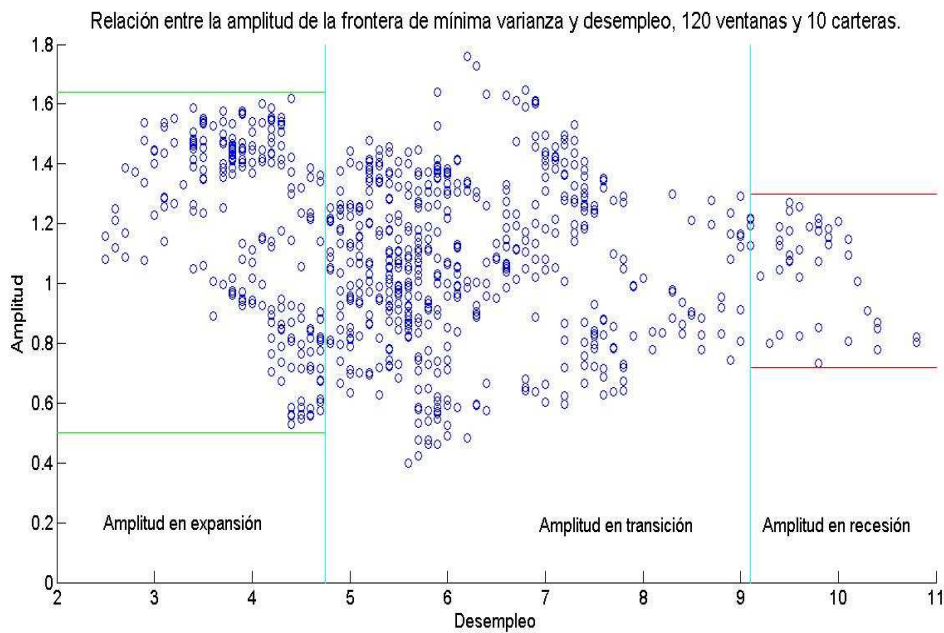


GRÁFICO 26 Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de 120 periodos y diez carteras.



Nuevamente se observa la relación entre la variable amplitud y el desempleo. En este caso la zona intermedia denominada amplitud en transición muestra una menor dispersión que en el caso de la ventana móvil de 60 periodos, esto es consistente con el método de estimación de los rendimientos, puesto que estamos tomando periodos de diez años para predecir el rendimiento del siguiente mes las inestabilidades del mercado se ven

suavizadas, sobretodo en la muestra de diez carteras donde existe una mayor diversificación.

A continuación se analizan las mismas dos muestras, cinco y diez carteras, pero con una ventana móvil de 40 periodos. El resultado esperado es que se mantenga esta relación entre la economía real y los mercados financieros, si bien se espera que la zona de amplitud en transición muestre una mayor dispersión al ser la ventana de una amplitud menor y estar introduciendo más ruido por tanto en el procedimiento. Efectivamente, como se muestra en los gráficos siguientes, se obtiene el resultado esperado: una economía en expansión, medida por un bajo desempleo, muestra un conjunto de oportunidades de inversión más favorable, una mayor amplitud, que una economía en clara recesión, con desempleo muy elevado.

GRÁFICO 27 Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de 40 periodos y cinco carteras.

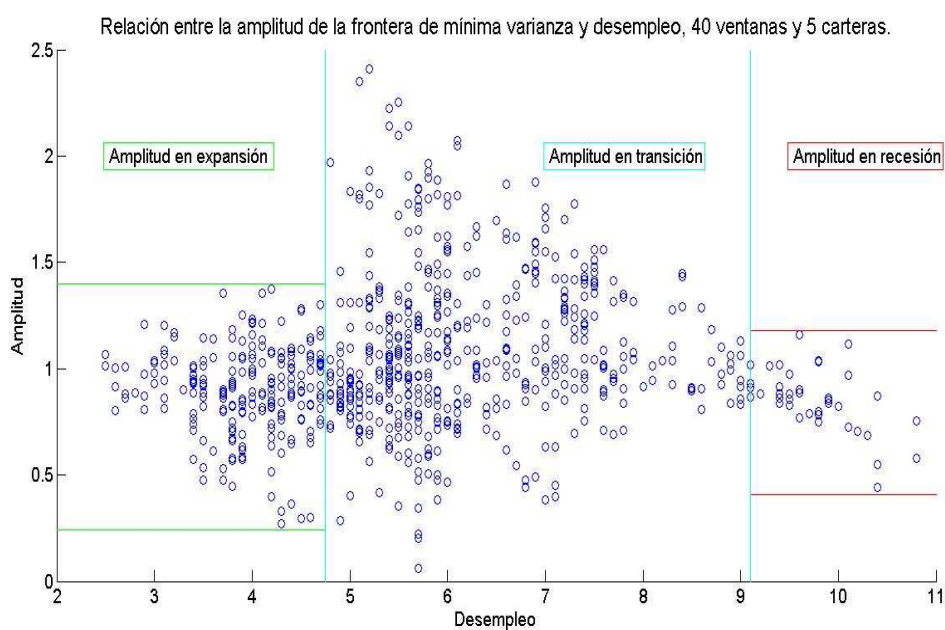
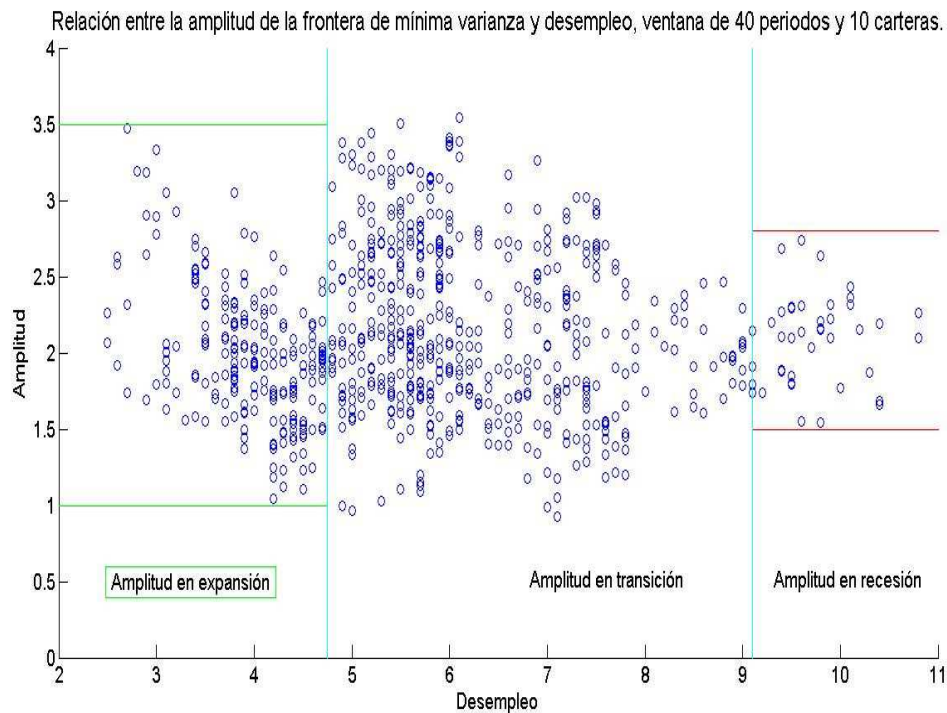


GRÁFICO 28 Relación entre la tasa de desempleo y la medida amplitud entre enero de 1948 y diciembre de 2011, ventana de 40 periodos y diez carteras.



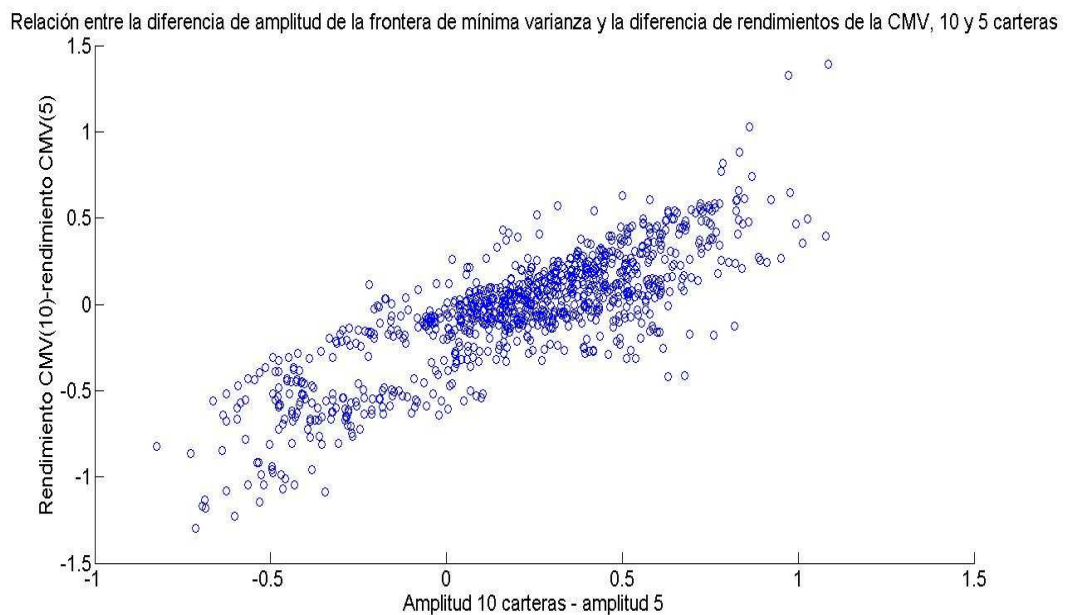
Concluyendo, para esta muestra de cinco carteras y diez carteras sí que se confirma la hipótesis de una relación entre los mercados financieros y la economía real, lo cual se traduce que en épocas de gran desempleo el conjunto de oportunidades del inversor sea menor que en épocas de poco desempleo. Por otro lado, la gran zona intermedia es una prueba de que la relación entre la economía real y los mercados financieros es más compleja de lo que se puede analizar con esta hipótesis.

Hipótesis 3: ¿Cuánto cambia el rendimiento de la cartera de mínima varianza al cambiar la amplitud debida al incremento del número de activos?

En la hipótesis 2 se ha observado que el rango de variación de la variable amplitud, la cual está recogiendo la forma de la frontera eficiente, aumenta conforme aumentan el número de carteras. Sería interesante ver si esta forma de la frontera eficiente está relacionada con el rendimiento de la cartera eficiente o no.

Una forma de ver esta relación es mediante un gráfico de dispersión que relacione la variación del rendimiento y la variación en la amplitud. Tomando como base la cartera de cinco activos, se calcula la diferencia de rendimientos de una cartera con un número de activos superior (diez y diecisiete) y la cartera de cinco activos, y lo mismo se hace con la amplitud, todo ello con una ventana de 60 periodos.

GRÁFICO 29: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras.



Se observa una relación lineal positiva, una mayor diferencia en la amplitud implica una mayor diferencia de rendimientos. Lo mismo puede observarse si se aumenta el número de carteras a diecisiete o treinta.

GRÁFICO 30: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras.

Relación entre la diferencia de amplitud de la frontera de mínima varianza y la diferencia de rendimientos de la CMV, para 17 y 5 carteras

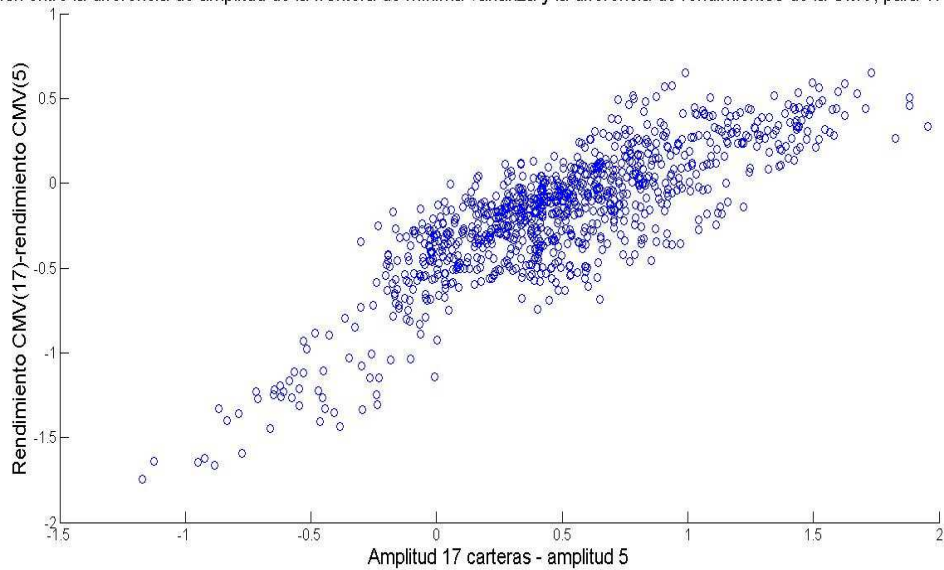
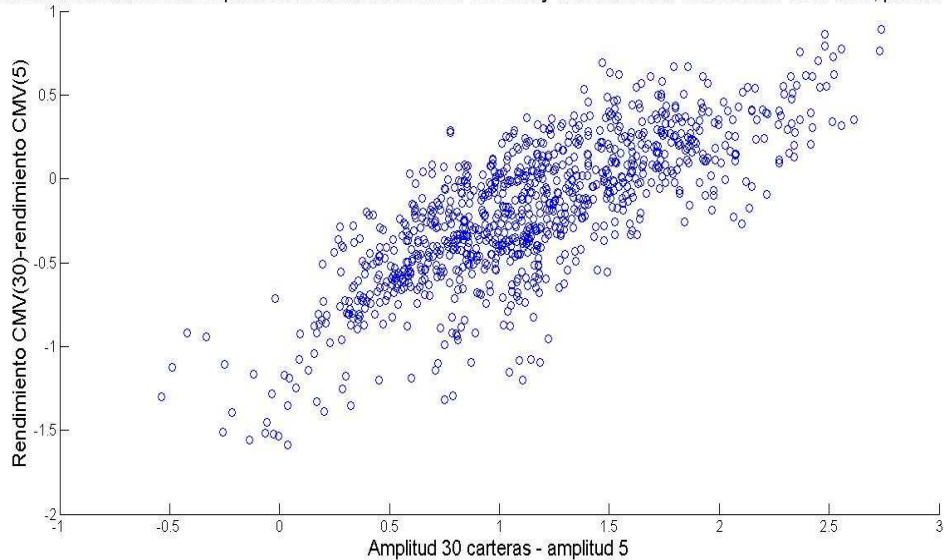


GRÁFICO 27: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras.

Relación entre la diferencia de amplitud de la frontera de mínima varianza y la diferencia de rendimientos de la CMV, para 30 y 5 carteras



El mayor rango de valores del eje de ordenadas al aumentar el número de activos es consistente con lo analizado en la hipótesis 2. Destacan los valores negativos, en la diferencia de rendimiento son debido a que en determinados momentos el rendimiento esperado de la cartera de mínima varianza de cinco carteras ordenadas por industria es superior al rendimiento esperado de la cartera con mayor número de industrias. Por otro lado, el resultado negativo de diferencia amplitud se debe a que en momentos puntuales la frontera eficiente con mayor número de industrias es más estrecha que la frontera con cinco carteras, es decir, la diferencia entre el rendimiento esperado correspondiente a

la volatilidad de la cartera de mínima varianza con mayor número de industrias más un 1% menos el rendimiento esperado de esa misma cartera de mínima varianza, amplitud de la frontera con mayor número de activos, es inferior al valor que se obtiene al calcular esa misma resta pero para la frontera de cinco carteras ordenadas por industria.

Una mejor explicación de los rangos de variación, valores máximos y mínimos así como el histograma se puede observar en los siguientes gráficos:

GRÁFICO 28: Estadísticos descriptivos para la diferencia de rendimiento de las carteras de mínima varianza de diez y cinco industrias.

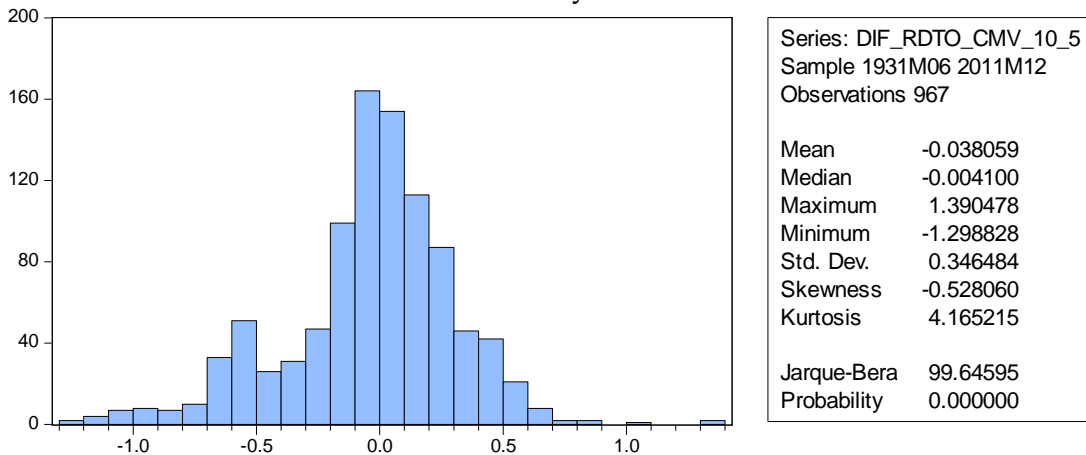


GRÁFICO 29: Estadísticos descriptivos para la diferencia de rendimiento de las carteras de mínima varianza de diecisiete y cinco industrias.

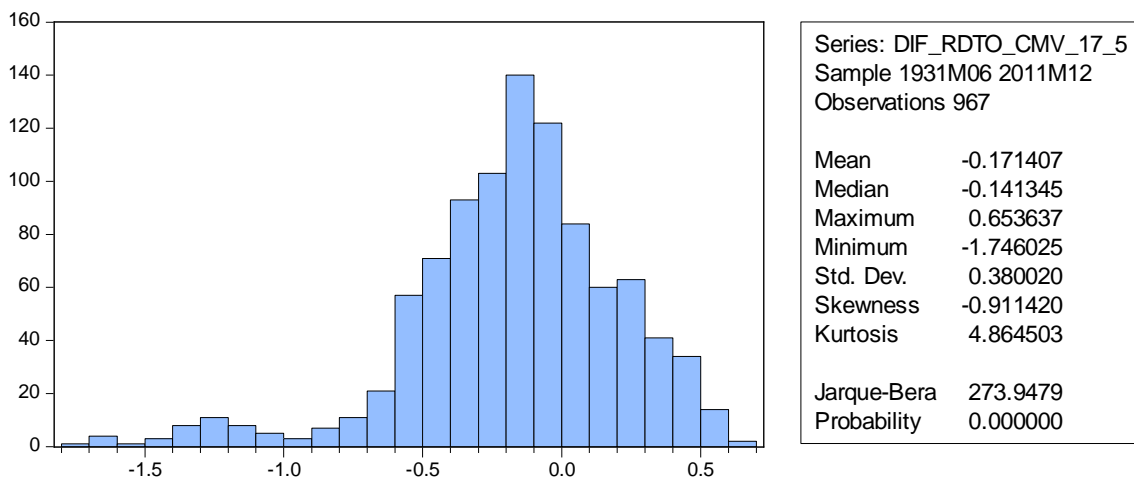


GRÁFICO 30: Estadísticos descriptivos para la diferencia de rendimiento de las carteras de mínima varianza de treinta y cinco industrias.

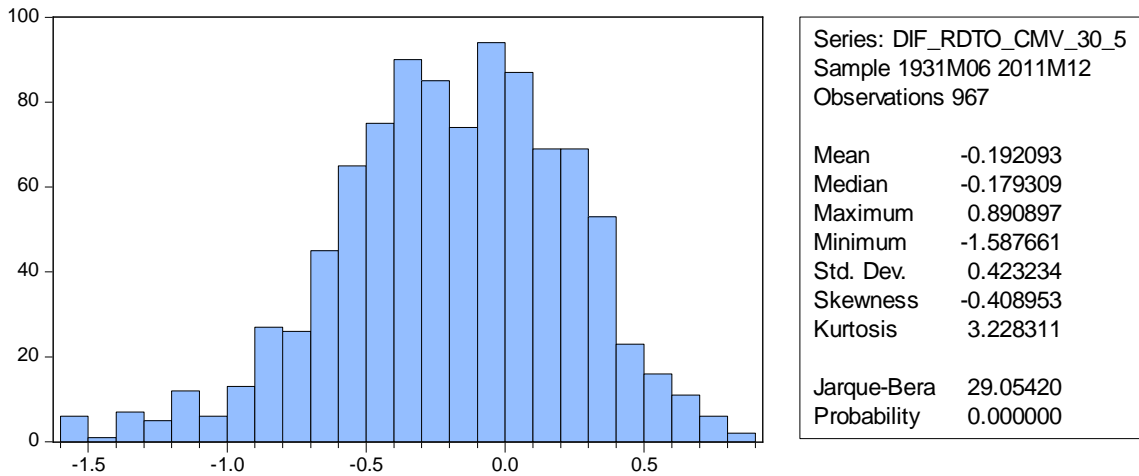


GRÁFICO 31: Estadísticos descriptivos para la diferencia de amplitud de las carteras de mínima varianza de diez y cinco industrias.

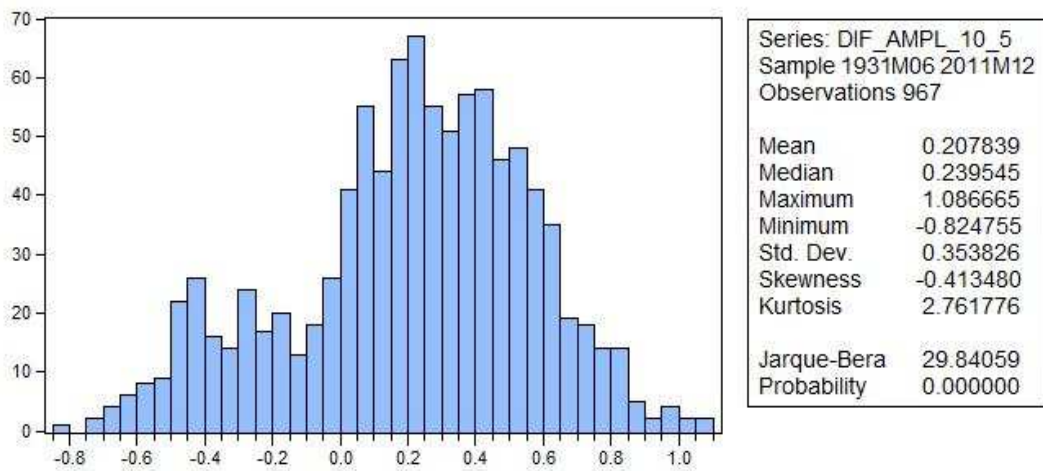


GRÁFICO 32: Estadísticos descriptivos para la diferencia de amplitud de las carteras de mínima varianza de diecisiete y cinco industrias.

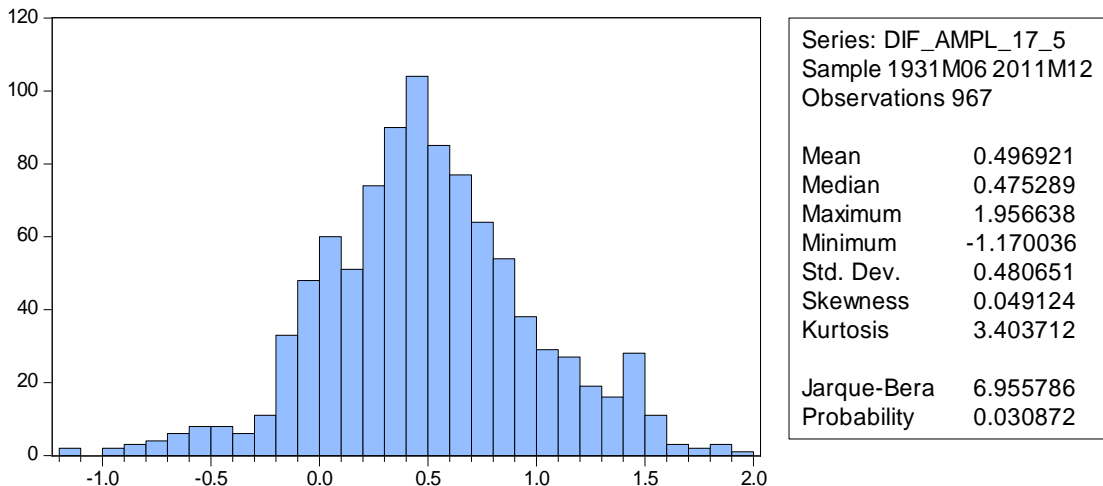
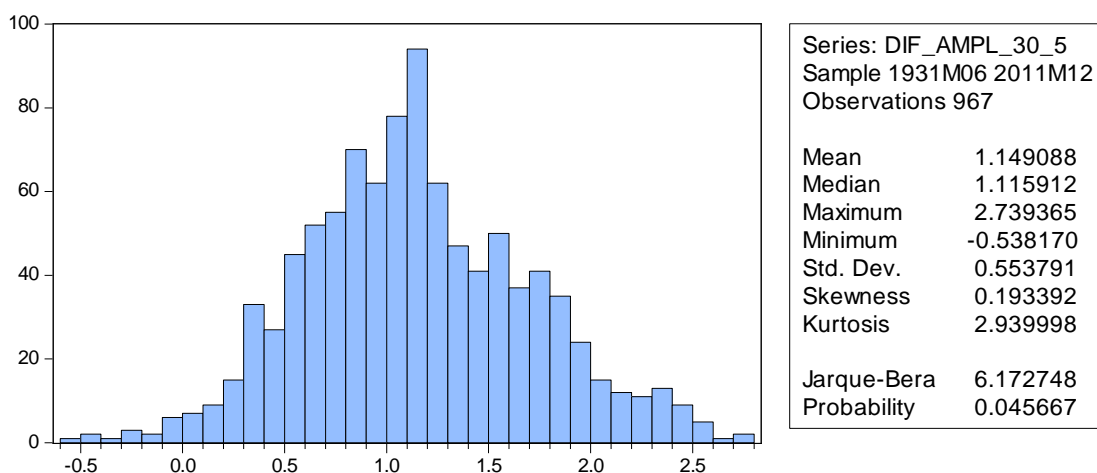


GRÁFICO 32: Estadísticos descriptivos para la diferencia de amplitud de las carteras de mínima varianza de treinta y cinco industrias.



Una vez comprobada visualmente la relación lineal entre ambas variables, diferencia de rendimientos y diferencia de amplitud, se pasa a estimar por mínimos cuadrados para obtener la pendiente de la recta y poder cuantificar la variación del rendimiento de la cartera de mínima varianza al cambiar la amplitud debida al número de activos.

$$dif_{rpto_{CMV}} = \alpha + \beta * dif_ampl$$

Los mínimos cuadrados están corregidos por Newey-West con el fin de tener un estadístico de contraste consistente y poder hacer un contraste de significatividad individual.

Como las muestras utilizadas son de gran tamaño, las propiedades asintóticas de MCO permiten utilizar normalidad asintótica para hacer inferencia.

$$t - estat = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{\beta_1}}} \approx N(0,1)$$

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Siendo la regla de decisión para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación alfa:

$$|t - estat| = \left| \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{\beta_1}}} \right| > |N(0,1)|$$

Como se observa en los gráficos a continuación el p valor de los tres estadísticos es 0.000, es decir se rechazaría la hipótesis nula para cualquier nivel de significatividad.

GRÁFICO 33: Estimación por MC de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras, ventana de 60 periodos.

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_10_5				
Method: Least Squares				
Sample: 1931M06 2011M12				
Included observations: 967				
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.206099	0.019382	-10.63345	0.0000
DIF_AMPL_10_5	0.808511	0.051022	15.84618	0.0000
R-squared	0.681688	Mean dependent var		-0.038059
Adjusted R-squared	0.681358	S.D. dependent var		0.346484
S.E. of regression	0.195584	Akaike info criterion		-0.423582
Sum squared resid	36.91443	Schwarz criterion		-0.413501
Log likelihood	206.8021	Hannan-Quinn criter.		-0.419745
F-statistic	2066.616	Durbin-Watson stat		0.088394
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 34: Estimación por MC de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras., ventana de 60 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_17_5				
Method: Least Squares				
Sample: 1931M06 2011M12				
Included observations: 967				
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.496770	0.030135	-16.48460	0.0000
DIF_AMPL_17_5	0.654759	0.042557	15.38539	0.0000
R-squared	0.685819	Mean dependent var		-0.171407
Adjusted R-squared	0.685493	S.D. dependent var		0.380020
S.E. of regression	0.213119	Akaike info criterion		-0.251868
Sum squared resid	43.82995	Schwarz criterion		-0.241787
Log likelihood	123.7780	Hannan-Quinn criter.		-0.248030
F-statistic	2106.473	Durbin-Watson stat		0.152278
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 35: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras, ventana de 60 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_30_5				
Method: Least Squares				
Sample: 1931M06 2011M12				
Included observations: 967				
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.875802	0.047481	-18.44531	0.0000
DIF_AMPL_30_5	0.595001	0.034166	17.41506	0.0000
R-squared	0.606131	Mean dependent var	-0.192093	
Adjusted R-squared	0.605723	S.D. dependent var	0.423234	
S.E. of regression	0.265755	Akaike info criterion	0.189581	
Sum squared resid	68.15373	Schwarz criterion	0.199662	
Log likelihood	-89.66243	Hannan-Quinn criter.	0.193419	
F-statistic	1485.052	Durbin-Watson stat	0.160035	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Además se ha realizado unos contrastes no formales de la significatividad de la variable explicativa, guardándose los residuos de las estimaciones por MCO mostradas arriba y de las estimaciones de la variable explicada solo con la constante, y realizando un gráfico de dispersión para los residuos.

GRÁFICO 35: Gráfico de dispersión de los residuos de las dos estimaciones para la serie de diferencias de diez y cinco carteras.

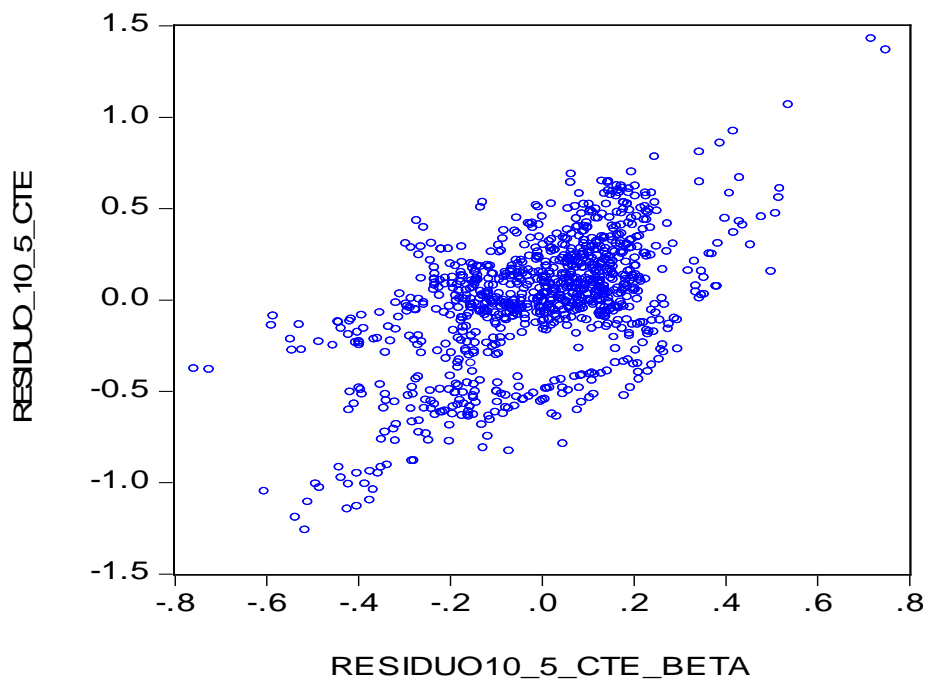


GRÁFICO 36: Gráfico de dispersión de los residuos de las dos estimaciones para la serie de diferencias de diecisiete y cinco carteras.

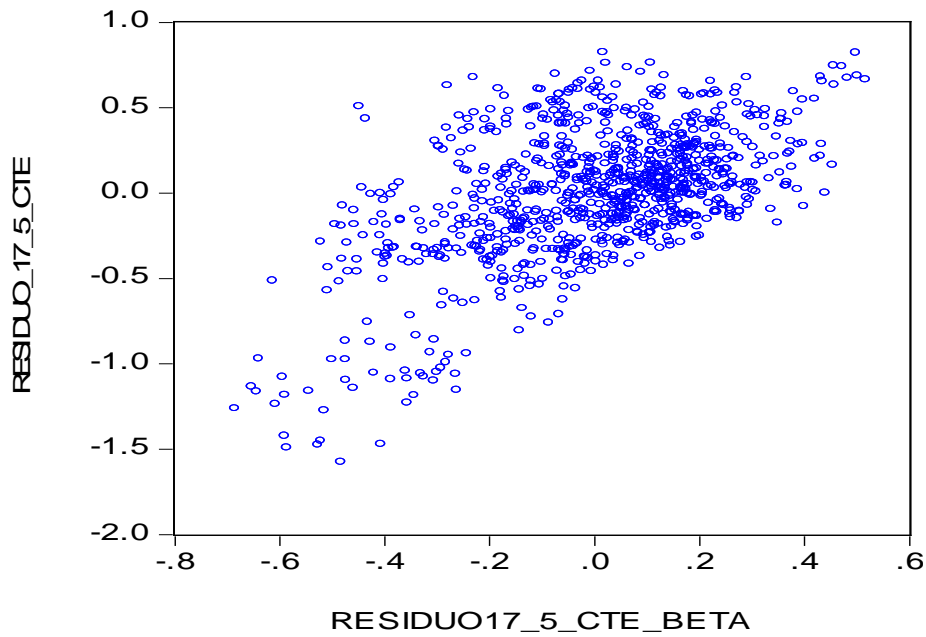
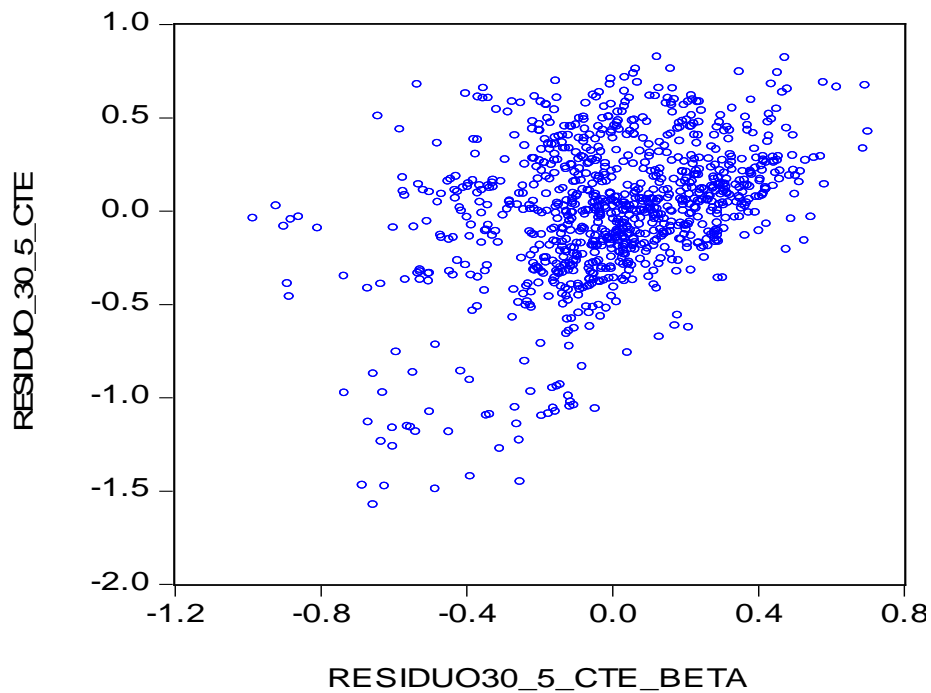


GRÁFICO 37: Gráfico de dispersión de los residuos de las dos estimaciones para la serie de diferencias de treinta y cinco carteras.



Como se puede observar en los siguientes gráficos, los residuos son muy diferentes lo que demuestra que la variable explicativa aporta información a la variable explicada. Calculando los coeficientes de correlación para los mismos se obtienen valores de 0.564, 0.560 y 0.381 para la diferencia entre diez y cinco carteras, diecisiete y cinco, y treinta y cinco respectivamente, valores muy bajos.

Una vez comprobada la significatividad de los estimadores tanto numéricamente como visualmente se pasa a analizar sus valores. El valor de la beta es el incremento en el valor esperado de la variable Y_t (diferencia de rendimiento entre las CMV) cuando incrementa en una unidad la variable X_t , manteniéndose constantes el resto de variables, en el caso de que existieran.

El gráfico 33, muestra que hay un incremento de 0.80 del valor esperado de la variable diferencia de rendimiento cuando la variable diferencia de amplitud se incrementa en una unidad. Para el caso de diecisiete y cinco carteras el incremento en el valor esperado de la variable diferencia de rendimientos de la cartera de mínima varianza de diecisiete menos la de cinco es de 0.65 cuando se incrementa en una unidad la variable diferencia de amplitud. Y por último para el caso treinta y cinco carteras, el incremento del valor esperado de la variable diferencia de rendimiento sería solo de 0.59. Es decir, se confirma la relación lineal positiva, pero además parece que existe una especie de rendimientos decrecientes, es decir, los beneficios de diversificar medidos únicamente como ganancia de rendimientos son cada vez menores por cada unidad de diferencia entre la amplitud de una frontera eficiente con mayor número de industrias frente a una con cinco carteras ordenadas por industria. Sin embargo hay que notar, que los beneficios de la diversificación no solo se miden por la diferencia de rendimientos, sino también por un menor nivel de riesgo, en la hipótesis 4 se retomará esta idea. De momento los resultados de los rendimientos decrecientes se confirman utilizando ventanas de 40 y 60 periodos.

GRÁFICO 38: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras, ventana de 40 periodos.

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_10_5
Method: Least Squares

Sample: 1929M10 2011M12
Included observations: 987
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.274307	0.025381	-10.80775	0.0000
DIF_AMPL_10_5	0.790712	0.058583	13.49727	0.0000
R-squared	0.740657	Mean dependent var		0.024731
Adjusted R-squared	0.740393	S.D. dependent var		0.558329
S.E. of regression	0.284478	Akaike info criterion		0.325700
Sum squared resid	79.71357	Schwarz criterion		0.335618
Log likelihood	-158.7327	Hannan-Quinn criter.		0.329472
F-statistic	2813.052	Durbin-Watson stat		0.111901
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 39: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras., ventana de 40 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_17_5
Method: Least Squares

Sample: 1929M10 2011M12
Included observations: 987
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.636248	0.048204	-13.19897	0.0000
DIF_AMPL_17_5	0.592957	0.048596	12.20174	0.0000
R-squared	0.554463	Mean dependent var	-0.194047	
Adjusted R-squared	0.554011	S.D. dependent var	0.532253	
S.E. of regression	0.355452	Akaike info criterion	0.771168	
Sum squared resid	124.4506	Schwarz criterion	0.781087	
Log likelihood	-378.5717	Hannan-Quinn criter.	0.774941	
F-statistic	1225.815	Durbin-Watson stat	0.164778	
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 40: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras., ventana de 40 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_30_5
Method: Least Squares

Sample: 1929M10 2011M12
Included observations: 987
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.230240	0.079505	-15.47372	0.0000
DIF_AMPL_30_5	0.496047	0.035080	14.14026	0.0000
R-squared	0.466051	Mean dependent var	-0.262061	
Adjusted R-squared	0.465508	S.D. dependent var	0.764938	
S.E. of regression	0.559238	Akaike info criterion	1.677541	
Sum squared resid	308.0559	Schwarz criterion	1.687459	
Log likelihood	-825.8665	Hannan-Quinn criter.	1.681313	
F-statistic	859.7438	Durbin-Watson stat	0.306546	
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 41: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras, ventana de 120 periodos.

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_10_5
Method: Least Squares

Sample: 1936M06 2011M12

Included observations: 907

HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.173374	0.010108	-17.15227	0.0000
DIF_AMPL_10_5	0.838678	0.039111	21.44375	0.0000
R-squared	0.780181	Mean dependent var		-0.097321
Adjusted R-squared	0.779938	S.D. dependent var		0.230931
S.E. of regression	0.108331	Akaike info criterion		-1.605040
Sum squared resid	10.62081	Schwarz criterion		-1.594434
Log likelihood	729.8858	Hannan-Quinn criter.		-1.600990
F-statistic	3212.024	Durbin-Watson stat		0.066967
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 42: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras., ventana de 120 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_17_5
Method: Least Squares

Sample: 1936M06 2011M12

Included observations: 907

HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.353850	0.017101	-20.69133	0.0000
DIF_AMPL_17_5	0.711919	0.039040	18.23545	0.0000
R-squared	0.776635	Mean dependent var		-0.161798
Adjusted R-squared	0.776389	S.D. dependent var		0.276286
S.E. of regression	0.130649	Akaike info criterion		-1.230401
Sum squared resid	15.44760	Schwarz criterion		-1.219795
Log likelihood	559.9870	Hannan-Quinn criter.		-1.226351
F-statistic	3146.673	Durbin-Watson stat		0.060843
Prob(F-statistic)	0.000000			

GRÁFICO 43: Estimación por MCO de la diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras, ventana de 120 periodos

Dependent Variable: DIF_RDTO_CMV_30_5
Method: Least Squares

Sample: 1936M06 2011M12
Included observations: 907
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 7.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.585938	0.024170	-24.24192	0.0000
DIF_AMPL_30_5	0.646452	0.030359	21.29368	0.0000
R-squared	0.748183	Mean dependent var	-0.153446	
Adjusted R-squared	0.747904	S.D. dependent var	0.260909	
S.E. of regression	0.131000	Akaike info criterion	-1.225035	
Sum squared resid	15.53073	Schwarz criterion	-1.214428	
Log likelihood	557.5532	Hannan-Quinn criter.	-1.220984	
F-statistic	2688.875	Durbin-Watson stat	0.080216	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Dado que una parte de este estudio trata de analizar la relación del modelo media-varianza con la economía real se ha probado a separar la nube de puntos según si pertenecen a un ciclo económico expansivo o recesivo, a ver si existe algún patrón de comportamiento, en especial los puntos de la parte inferior del gráfico donde la diferencia de amplitud es negativa. Sin embargo, como muestran los gráficos de dispersión a continuación, el tipo de ciclo económico no parece ser la causante de los valores negativos.

GRÁFICO 44: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras, separado por ciclos.

Relación entre la diferencia de amplitud de la frontera de mínima varianza y la diferencia de rendimientos de la CMV, para 10 y 5 carteras

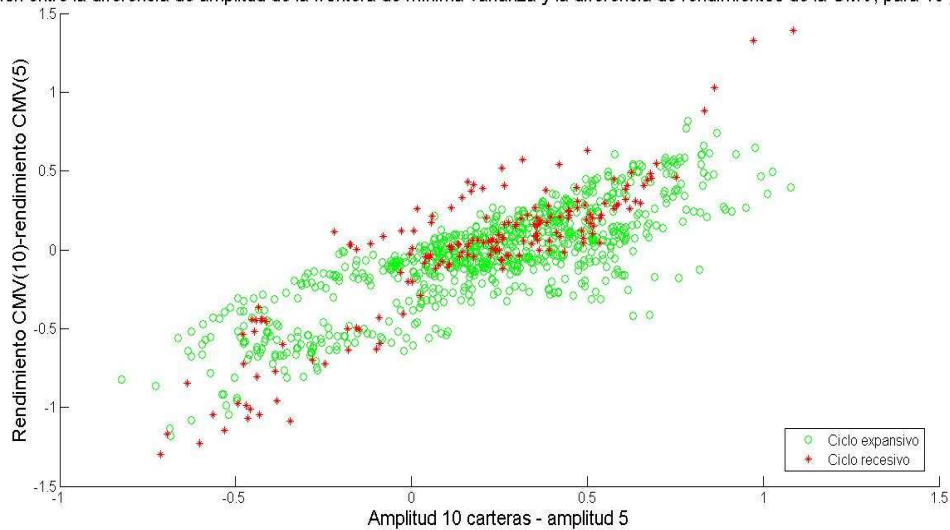


GRÁFICO 45: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras, separado por ciclos.

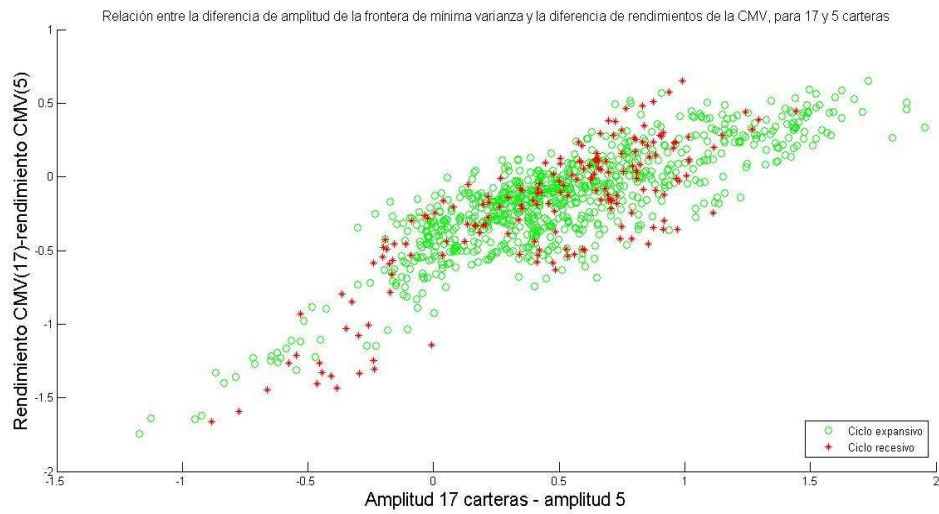
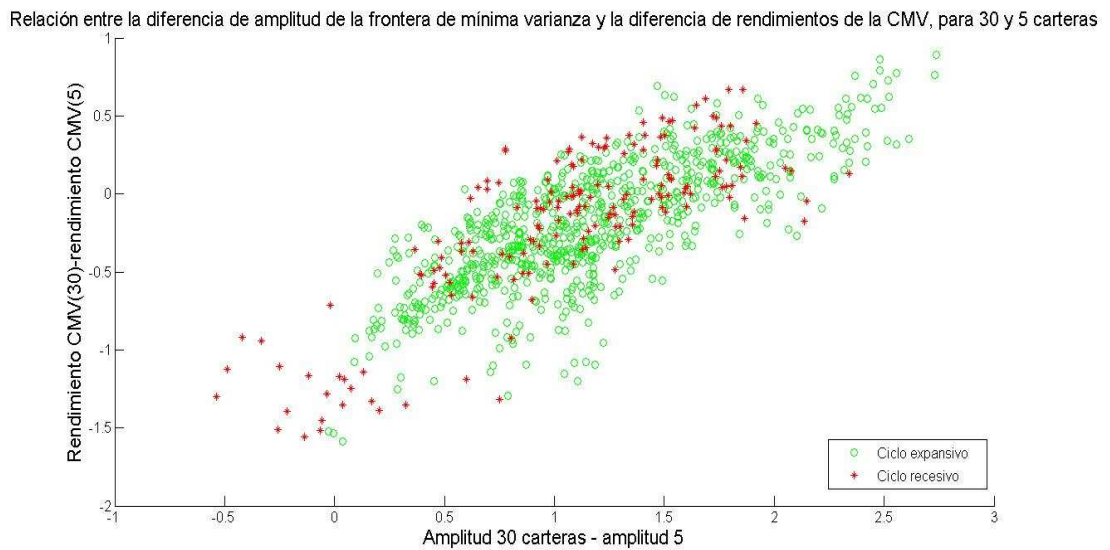


GRÁFICO 46: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras, separado por ciclos.



Y separando por desempleo tampoco se obtiene ningún patrón.

GRÁFICO 47: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diez y cinco carteras, separado por desempleo.

Relación entre la diferencia de amplitud de la frontera de mínima varianza y la diferencia de rendimientos de la CMV, para 10 y 5 carteras

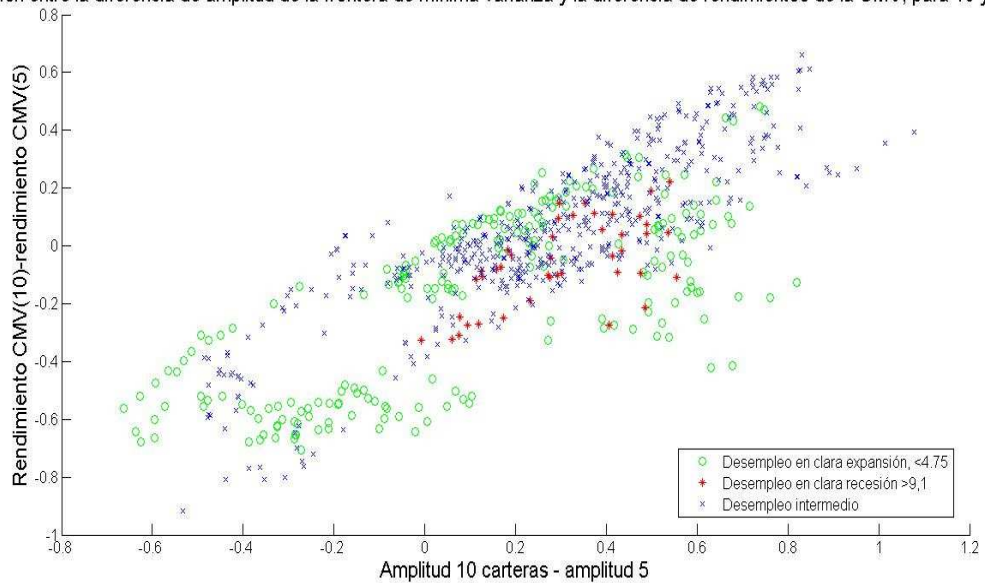


GRÁFICO 48: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para diecisiete y cinco carteras, separado por ciclos.

Relación entre la diferencia de amplitud de la frontera de mínima varianza y la diferencia de rendimientos de la CMV, para 17 y 5 carteras

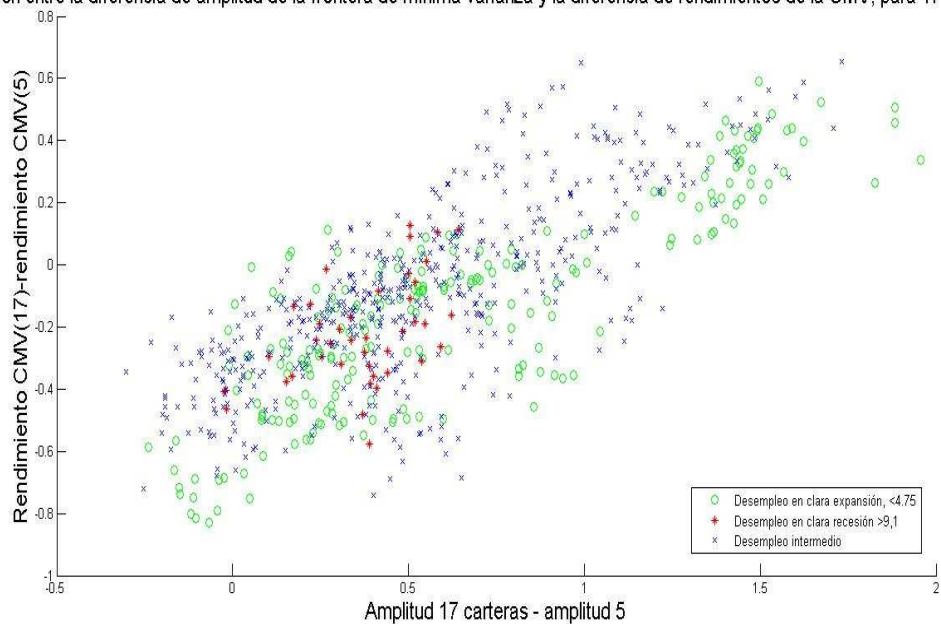
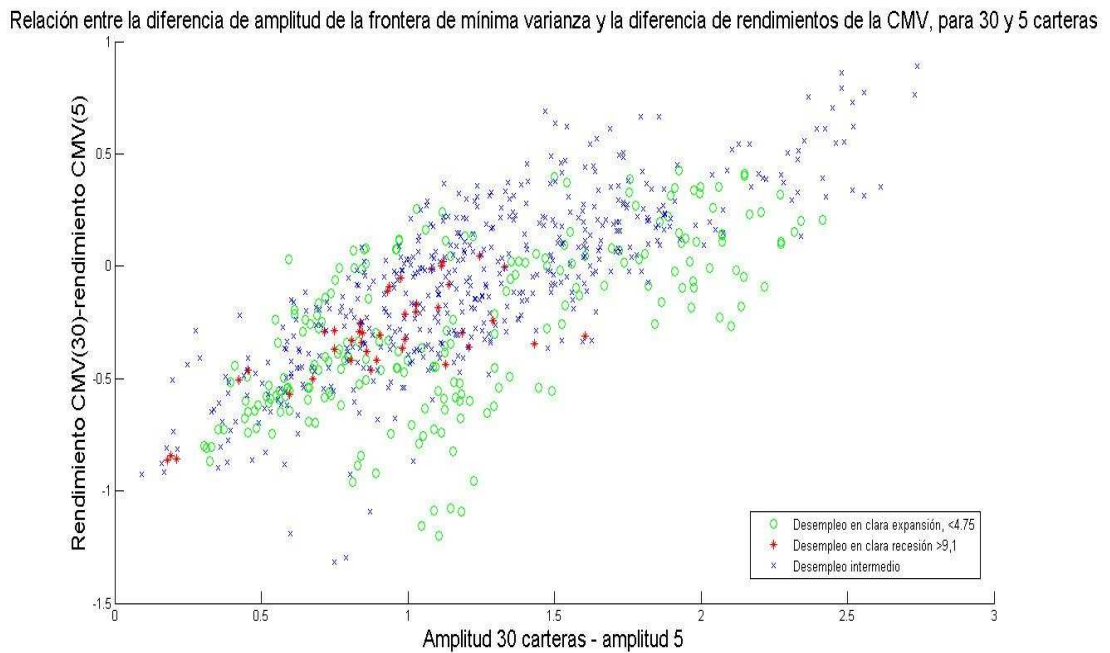


GRÁFICO 49: Diferencia de amplitud y rendimiento de la CMV, para treinta y cinco carteras, separado por ciclos.



Concluyendo, sí existe una relación entre la variación del rendimiento de la cartera de mínima varianza cuando se incrementa el número de activos y la variación en la amplitud, cuando se incrementa también el número de activos. Esta relación es positiva, lineal y significativa y el valor del coeficiente descende conforme se diversifica.

Hipótesis 4: ¿Existe diferencia en el conjunto de posibilidades del inversor según el ciclo sea expansivo o recesivo? ¿En qué caso es más importante diversificar?

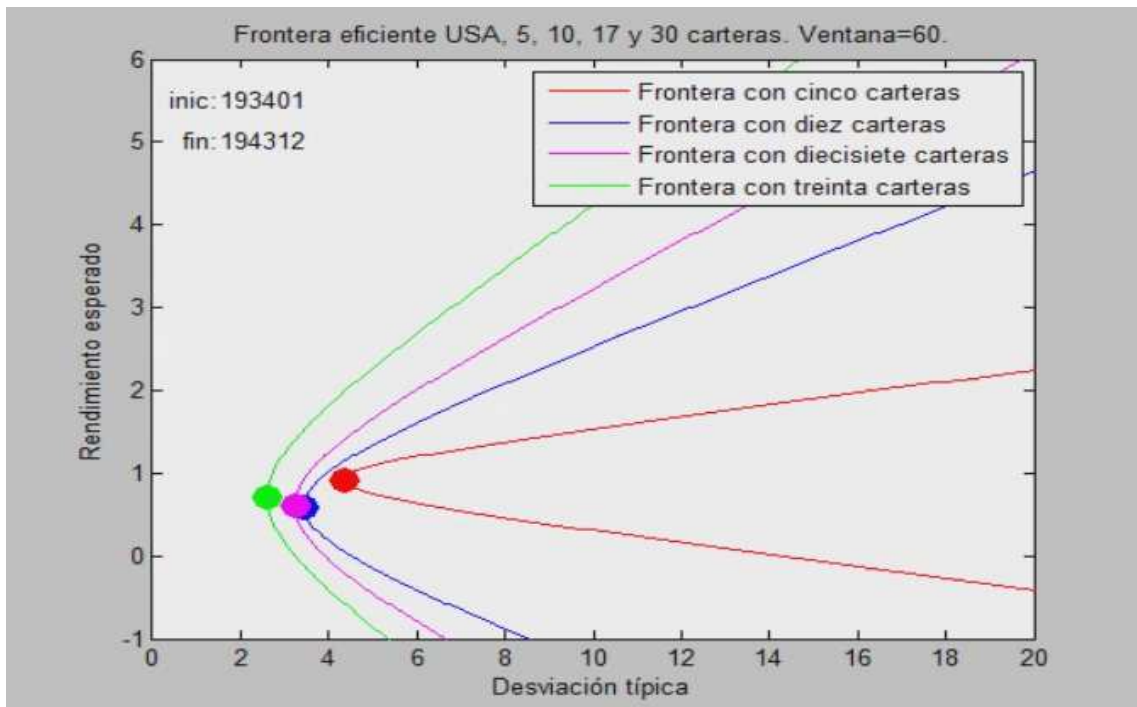
Las hipótesis uno y dos han tratado la cartera de mínima varianza así como la forma de la frontera eficiente para los distintos conjuntos de activos. Por otro lado la hipótesis tres ha analizado los beneficios de la diversificación mediante el incremento de carteras. La siguiente hipótesis pretende recoger tanto la comparativa entre carteras de la hipótesis tres como la variación de la frontera eficiente de la hipótesis dos y todo ello teniendo en cuenta el ciclo económico.

La frontera eficiente es importante porque recoge el conjunto de posibilidades del inversor, y no siempre puede ser deseable utilizar la cartera de mínima varianza, sino situarse por encima de la misma logrando un equilibrio del binomio rentabilidad-riesgo que permita una mayor rentabilidad. La forma de la frontera varía a lo largo del tiempo, obteniéndose fronteras más o menos estrechas. Además, las fronteras se pueden desplazar tanto horizontalmente, como verticalmente en el espacio rendimiento-riesgo. Desde el punto de vista del inversor, lo interesante son fronteras situadas lo más alto posible en el eje de ordenadas, lo que permitiría obtener un mayor rendimiento esperado, y lo más a la izquierda posible en el eje de abscisas, obteniendo un menor nivel de riesgo, con límite teórico el cero.

El objetivo es analizar cómo afecta la diversificación a la frontera eficiente y a la cartera de mínima varianza tomando como referencia la frontera de cinco industrias y comparándola con la frontera de diez, diecisiete y treinta industrias. El siguiente gráfico 50 es una captura de un vídeo⁴ elaborado para este trabajo, que muestra la evolución temporal para las cuatro fronteras, siendo el punto la posición de la cartera de mínima varianza. El gráfico muestra como la frontera de menor número de carteras ordenadas por industria, cinco, se encuentra comprendida por las fronteras con mayor carteras, lo cual es razonable puesto que un mayor número de activos no redundantes implica mayores posibilidades de inversión. Esto se mantiene casi a lo largo de toda la evolución temporal, si bien hay momentos puntuales que las fronteras llegan a tocarse o incluso cruzarse ligeramente. También se observa que la posición entre una cartera de mínima varianza y otra varía tanto en el rendimiento como en el nivel de riesgo. Comparar directamente entre dos carteras de mínima varianza implica que la posible ganancia por diversificación se deba a la variación tanto del riesgo como del rendimiento, es por ello que esta comparativa se va a hacer con dos medidas para mantener siempre una de las variables constantes y poder comparar.

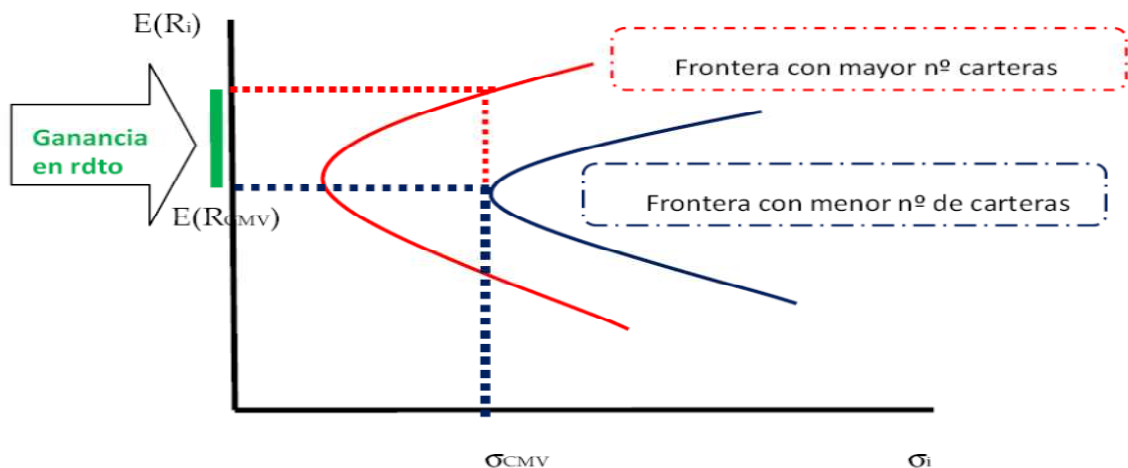
⁴ <http://youtu.be/1as7wuTjmac>

GRÁFICO 50: Comparativa de fronteras eficientes.



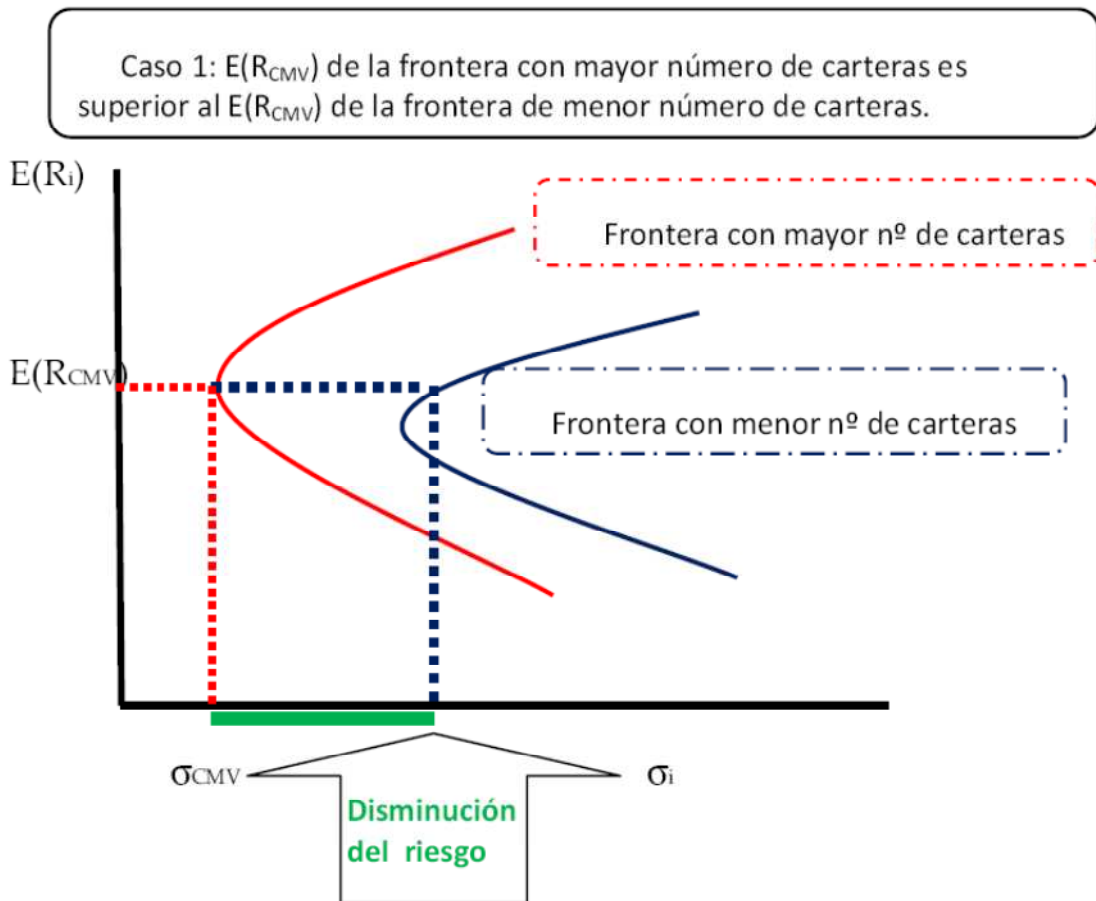
La primera medida se ha denominado ganancia en rendimiento y consiste en fijar el nivel de riesgo en la cartera de mínima varianza del menor número de activos, cartera de cinco activos, y ver que rendimiento se obtendría con ese nivel de riesgo si se invirtiera en un mayor número de activos, carteras de diez, diecisiete y treinta activos. La ventaja de esta medida es que no solo fija el nivel de riesgo lo que permite hacer comparaciones, sino que además permite medir la distancia relativa entre las dos fronteras, el desplazamiento vertical que se produce en la frontera al ampliar el conjunto de posibilidades del inversor mediante la inversión en un mayor número de activos.

GRÁFICO 51: Medida ganancia en rendimiento.



La segunda medida se ha denominado disminución en el nivel de riesgo, y recoge el desplazamiento horizontal de la frontera al ampliar el número de activos. Es decir, se intenta medir la disminución del riesgo por diversificar, teniendo en cuenta estar siempre en la parte eficiente de ambas fronteras, para garantizar esto la medida se calcula de dos maneras diferentes según el rendimiento esperado de la cartera de mínima varianza con mayor número de carteras ordenadas por industria. Cuando el rendimiento esperado de la frontera de mayor número de carteras tenga un rendimiento esperado superior a la frontera con cinco activos se tomará como referencia el nivel de rendimiento el de la cartera de mínima varianza con mayor número de activos, comparando el riesgo de dicha cartera de mínima varianza con el riesgo que se obtiene en la frontera de cinco

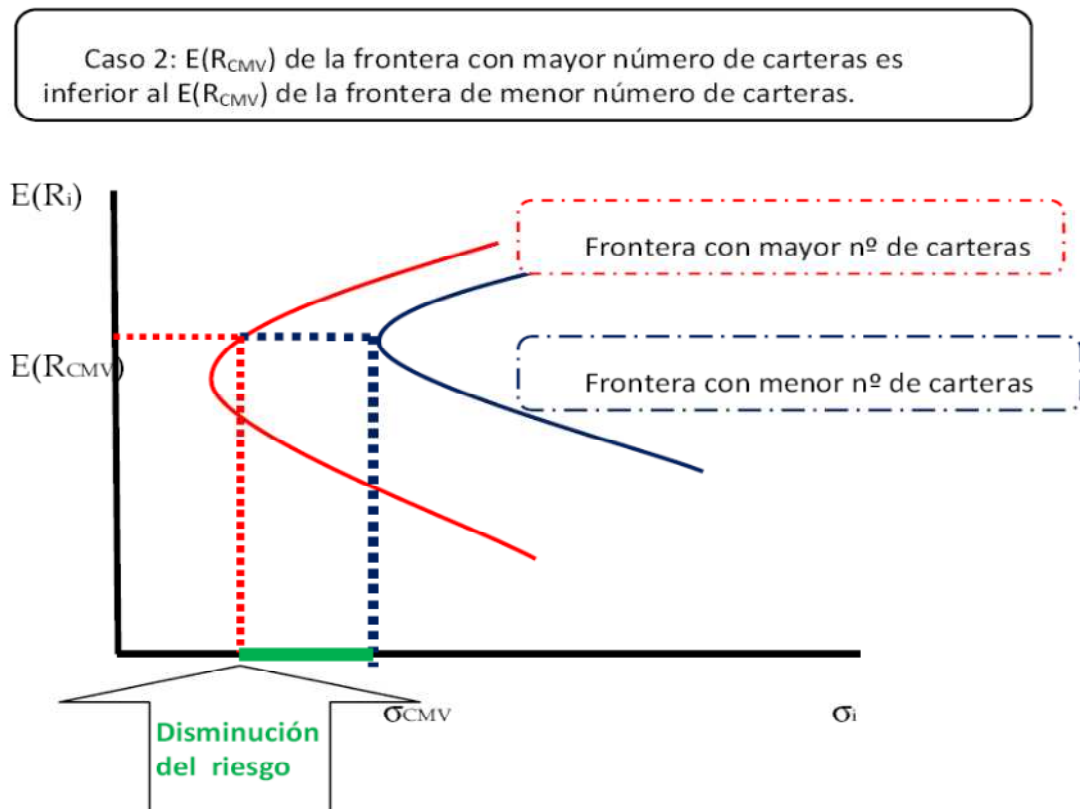
GRÁFICO 52: Disminución del riesgo, caso 1.



Cuando la rentabilidad esperada de la cartera de mínima varianza con mayor número de carteras es inferior a la rentabilidad esperada de la cartera de mínima varianza el calcular la disminución del riesgo de este modo implicaría situarse en la parte no eficiente de la frontera con cinco carteras. En ese caso el nivel de riesgo y rendimiento es fijado por la cartera de mínima varianza con cinco activos, y se calcula la disminución del riesgo que se obtendría si con ese rendimiento nos situamos en la frontera con mayor número de carteras, de este

modo ambos valores del rendimiento esperado se encuentran en la parte de la frontera eficiente.

Gráfico: Disminución del riesgo, caso 2.



Una vez definidas ambas medidas se calculan para las fronteras con cinco, diez, diecisiete y treinta carteras ordenadas por industria, siendo la referencia siempre la cartera de cinco industrias con una ventana de sesenta periodos.

TABLA: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación, ventana de 60 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=60			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=60		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
01/06/1927				01/06/1927			
31/12/2011				31/12/2011			
Min	0,0828	0,0000	0,8953	Min	0,037	-0,001	0,621
Max	5,5764	7,9849	10,0669	Max	12,522	6,833	16,264
Media	<i>0,9412</i>	<i>1,4133</i>	<i>2,9306</i>	Media	<i>0,991</i>	<i>1,185</i>	<i>1,890</i>
Desv. Estánd	0,6512	0,9189	1,3528	Desv. Estánd	1,181	1,100	1,345

Se observa que conforme aumenta el número de carteras aumenta tanto la ganancia en rendimiento como la disminución del riesgo, siendo la ganancia en riesgo la medida que más se beneficia por la diversificación un 1% más. Hay que tener en cuenta que la disminución del riesgo se ve afectada por el límite a la diversificación que se comentó anteriormente.

Esta tendencia de obtener un mayor beneficio vía ganancia en rendimiento en vez de vía disminución del riesgo se mantiene con la ventana de 40 periodos, obteniéndose mayores ganancias que en el caso de una ventana de 60 periodos. Por otro lado, la ventana de 120 periodos suaviza mucho los rendimientos esperados al tomarlos como una media de los últimos diez años, con lo que tanto el rendimiento esperado como el riesgo obtienen unos valores similares, si bien sigue demostrándose la importancia de la diversificación.

TABLA 7: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación, ventana de 40 periodos.

Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Ganancia en rendimiento, ventana=40			Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Disminución del riesgo, ventana=40		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,125	0,169	1,429	Min	0,056	0,129	0,552
Max	11,222	13,809	22,593	Max	10,649	15,108	9,848
Media	<i>1,337</i>	<i>2,106</i>	<i>5,486</i>	Media	<i>1,056</i>	<i>1,389</i>	<i>2,358</i>
Desv. Estánd	1,074	1,441	3,114	Desv. Estánd	1,141	1,291	1,349

TABLA8: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación, ventana de 120 periodos.

Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Ganancia en rendimiento, ventana=120			Periodo 01/06/1927 31/12/2011	Disminución del riesgo, ventana=120		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,085	0,076	0,469	Min	0,080	0,061	0,387
Max	1,464	1,475	3,467	Max	4,858	4,013	5,400
Media	<i>0,522</i>	<i>0,694</i>	<i>1,431</i>	Media	<i>0,840</i>	<i>0,895</i>	<i>1,434</i>
Desv. Estánd	0,283	0,283	0,530	Desv. Estánd	0,744	0,647	0,964

Una vez visto el comportamiento general de las variables lo siguiente es analizar su comportamiento separando por ciclos, pues el objetivo de esta hipótesis es ver la importancia de la diversificación en un marco media varianza según el ciclo económico. Primero se ha calculado para la ventana de 60 periodos y para dar robustez a la hipótesis se calculará para 40 y 120 periodos.

TABLA 9: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por ciclos, ventana de 60 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=60			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=60		
	Ciclo expansivo				Ciclo expansivo		
01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,0828	0,0000	0,8953	Min	0,037	-0,001	0,621
Max	3,8024	5,0186	10,0669	Max	12,522	6,833	16,264
Media	0,8657	1,3186	2,8390	Media	0,933	1,133	1,833
Desv. Estánd	0,5426	0,7303	1,3176	Desv. Estánd	1,173	1,039	1,340
	Ciclo recesivo				Ciclo recesivo		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,3490	0,6467	1,4275	Min	0,215	0,320	0,948
Max	5,5764	7,9849	8,9425	Max	5,967	6,118	6,622
Media	1,2757	1,8330	3,3367	Media	1,251	1,412	2,142
Desv. Estánd	0,9305	1,4200	1,4341	Desv. Estánd	1,187	1,318	1,338

TABLA 10: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por ciclos, ventana de 40 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=40			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=40		
	Ciclo expansivo				Ciclo expansivo		
01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,1250	0,1688	1,4295	Min	0,056	0,129	0,552
Max	5,1870	7,2412	21,6414	Max	6,070	15,108	8,052
Media	1,1802	1,9257	5,2042	Media	0,918	1,312	2,243
Desv. Estánd	0,7751	1,0906	2,8073	Desv. Estánd	0,853	1,208	1,180
	Ciclo recesivo				Ciclo recesivo		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,3751	0,7504	2,5935	Min	0,259	0,336	1,167
Max	11,2221	13,8092	22,5931	Max	10,649	7,860	9,848
Media	1,9603	2,8230	6,6095	Media	1,606	1,699	2,817
Desv. Estánd	1,6970	2,2320	3,9254	Desv. Estánd	1,795	1,545	1,811

TABLA 11: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por ciclos, ventana de 120 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=120			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=120		
01/06/1927	Ciclo expansivo			01/06/1927	Ciclo expansivo		
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,0847	0,0758	0,4768	Min	0,093	0,061	0,432
Max	1,2825	1,3248	3,4668	Max	3,903	4,013	5,062
Media	0,5200	0,6920	1,4341	Media	0,810	0,891	1,389
Desv. Estánd	0,2829	0,2831	0,5391	Desv. Estánd	0,679	0,627	0,902
	Ciclo recesivo				Ciclo recesivo		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,2022	0,1772	0,4691	Min	0,080	0,120	0,387
Max	1,4641	1,4748	2,4358	Max	4,858	3,510	5,400
Media	0,5300	0,7049	1,4170	Media	0,986	0,917	1,652
Desv. Estánd	0,2869	0,2808	0,4847	Desv. Estánd	0,990	0,741	1,198

En los tres casos, ventana de 60, ventana de 40 y 120 periodos, se observa que la ganancia debida a la diversificación es mayor durante el ciclo económico recesivo que durante las expansiones.

Por último se ha analizado las ganancias de diversificación teniendo en cuenta como variable continua el desempleo, en vez del ciclo económico que es una variable dicotómica. Se han mantenido los rangos que se analizaron en la hipótesis dos, desempleo menor que 4,75 ciclo claramente expansivo, desempleo superior al 9,1 claramente recesivo y un conjunto de datos restantes que se ha denominado desempleo en transición. Hay que recordar que al igual que en la hipótesis dos, el objetivo no es determinar el nivel de desempleo en expansión o recesión, sino analizar los casos extremos y su relación en este caso con las ganancias de debidas a la diversificación.

TABLA 12: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por niveles de desempleo, ventana de 60 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=60			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=60		
	Desempleo expansión <=4,75				Desempleo expansión <=4,75		
01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,0959	0,3318	1,1324	Min	0,051	0,211	0,688
Max	1,3455	1,9193	3,8906	Max	1,414	1,891	2,219
Media	0,6410	1,1168	2,2915	Media	0,606	0,787	1,247
Desv. Estánd	0,2675	0,3652	0,5813	Desv. Estánd	0,428	0,408	0,411
	Desempleo recesión, >=9.1				Desempleo recesión, >=9.1		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,3938	0,5974	1,2746	Min	0,374	0,566	0,952
Max	1,5593	1,7386	3,1537	Max	1,394	1,552	2,128
Media	0,8311	1,0380	2,1033	Media	0,783	0,963	1,439
Desv. Estánd	0,3860	0,3576	0,6335	Desv. Estánd	0,415	0,335	0,448
	Desempleo en transición				Desempleo en transición		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,0828	0,0000	0,8953	Min	0,037	-0,001	0,621
Max	2,2779	2,5870	5,3912	Max	1,713	2,244	3,046
Media	0,9161	1,2644	2,8153	Media	0,715	0,902	1,616
Desv. Estánd	0,4962	0,5914	0,9596	Desv. Estánd	0,391	0,437	0,510

TABLA 13: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por niveles de desempleo, ventana de 40 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=40			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=40		
	Desempleo expansión <=4,75				Desempleo expansión <=4,75		
01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,1339	0,6159	1,7517	Min	0,056	0,253	0,825
Max	1,7852	3,1805	10,5495	Max	1,581	2,193	4,213
Media	0,8665	1,5126	4,0363	Media	0,676	0,900	1,644
Desv. Estánd	0,3692	0,5074	1,4391	Desv. Estánd	0,402	0,429	0,461
	Desempleo recesión, >=9.1				Desempleo recesión, >=9.1		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,4423	0,7280	1,7089	Min	0,259	0,640	1,216
Max	2,2535	2,7782	5,3644	Max	1,530	2,191	2,964
Media	1,0517	1,6857	3,5500	Media	0,803	1,194	1,916
Desv. Estánd	0,6135	0,7433	1,1766	Desv. Estánd	0,463	0,513	0,622
	Desempleo en transición				Desempleo en transición		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,1250	0,1688	1,4295	Min	0,056	0,129	0,552
Max	3,1114	4,3724	9,8576	Max	2,366	2,858	4,564
Media	1,2676	1,9251	5,0392	Media	0,824	1,131	2,142
Desv. Estánd	0,6215	0,8087	1,7347	Desv. Estánd	0,458	0,530	0,743

TABLA 14: Ganancia en rendimiento y disminución del riesgo debido a la diversificación separado por niveles de desempleo, ventana de 120 periodos.

Periodo	Ganancia en rendimiento, ventana=120			Periodo	Disminución del riesgo, ventana=120		
	Desempleo expansión <=4,75				Desempleo expansión <=4,75		
01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	01/06/1927	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.	31/12/2011	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,1428	0,1396	0,4768	Min	0,129	0,125	0,501
Max	0,8649	1,2755	1,7846	Max	1,076	1,160	1,797
Media	0,4797	0,7216	1,2434	Media	0,536	0,631	0,963
Desv. Estánd	0,1794	0,2931	0,3160	Desv. Estánd	0,299	0,232	0,348
	Desempleo recesión, >=9.1				Desempleo recesión, >=9.1		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,2936	0,2415	0,6375	Min	0,171	0,281	0,723
Max	0,8902	1,1187	2,1419	Max	4,858	1,890	5,400
Media	0,5566	0,6343	1,3314	Media	1,062	0,823	1,786
Desv. Estánd	0,2512	0,2932	0,5751	Desv. Estánd	1,215	0,485	1,346
	Desempleo en transición				Desempleo en transición		
	10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.		10 y 5 cart.	17 y 5 cart.	30 y 5 cart.
Min	0,0847	0,0758	0,4691	Min	0,080	0,061	0,387
Max	1,4641	1,4748	2,4542	Max	2,218	2,279	3,484
Media	0,5083	0,6613	1,3860	Media	0,675	0,733	1,182
Desv. Estánd	0,3164	0,2959	0,4691	Desv. Estánd	0,409	0,392	0,469

Las tablas ratifican los resultados obtenidos con la separación por ciclos, demostrando la importancia de diversificar cuando la economía se encuentra en recesión. Por otro lado, al igual que ocurría en la hipótesis dos y la medida amplitud que se observaba un rango de valores central mucho más disperso, los valores mínimo y máximo, así como su media, muestran igualmente un valor superior para el caso denominado empleo en transición. Hay que recordar que muchas de las fechas correspondientes a dicho segmento correspondían a momentos de alta inestabilidad económico-financiera que se reflejaron en los mercados y por tanto también en la cartera de mínima varianza y la frontera eficiente.

Concluyendo, se demuestra que en condiciones adversas para el inversor, ciclos recesivos, desempleo muy elevado, es cuando es más importante diversificar eficientemente pues permite obtener unas mayores ganancias en rentabilidad y/o disminución del riesgo.

Ampliación Hipótesis 4: Los Tests de Spanning Media-Varianza y el ciclo económico.

Durante la presentación de esta tesina en el X WorkShop 2012, en Bilbao, el tribunal hizo numerosas sugerencias acerca de mejoras y futuras líneas de investigación, entre ellas los test de spanning, los cuales permitirían contrastar estadísticamente la hipótesis cuarta.

Básicamente los test de spanning media-varianza permiten comparar las fronteras generadas entre dos conjuntos de activos, un conjunto de K activos arriesgados que se utilizarán como referencia y un conjunto de K + N activos arriesgados, donde K son los activos de referencia del primer conjunto y N son los denominados “test assets”.

La metodología utilizada es la recogida en R. Kan and G. Zhou (2012), si bien los primeros autores que formalizaron dichos test fueron Huberman y Kandel (1987). En concreto se va a utilizar su HK F-Test corregido y su Test Step-Down.

$\mu = E[R_t] \equiv \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ son los rendimientos esperados de los N+K activos arriesgados y su matriz de covarianzas es : $V = \text{Var}[R_t] \equiv \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$

Si se proyecta R_{2t} sobre R_{t1} se obtiene la siguiente expresión:

$$R_{2t} = \alpha + \beta R_{t1} + \varepsilon_t \text{ que en forma matricial es: } Y = XB + E$$

La condición necesaria y suficiente en términos de restricciones α y δ para el spanning test, con $\delta = 1_N - \beta 1_K$ es: $H_0: \alpha = 0_N, \delta = 0_N$. Concretamente, $\alpha = 0_N$ implica que la cartera tangente no tiene pesos de los N activos, entendiendo esta como la cartera que surge al tomar un punto fijo cualquiera con el eje puesto que no se está considerando un activo libre de riesgo. Por otro lado, $\delta = 0_N$ se refiere a la cartera de mínima varianza, que no tenga pesos de los activos N. Si esta restricción se cumple, $H_0: \alpha = 0_N, \delta = 0_N$, los activos testeados N están dominados por los activos de referencia K, pues cada activo de N se puede replicar mediante una combinación de los K activos, con igual media pero menor varianza.

Los estimadores máxima probabilidad de B y Σ son:

$$\hat{B} \equiv [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = (X'X)^{-1}(X'Y) \text{ y } \hat{\Sigma} = \frac{1}{T}(Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

Definiendo $\Theta = [\alpha, \delta]'$ la hipótesis nula se puede reescribir como: $\Theta = AB + C = 0_{2N}$ siendo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0'_K \\ 0 & -1'_K \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0'_N \\ 1'_N \end{bmatrix}$.

Definiendo también:

$$\hat{G} = TA(X'X)^{-1}A', \hat{H} = \hat{\Theta}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Theta}' \text{ y } \frac{1}{U} = |I_2 + \hat{H}\hat{G}^{-1}|$$

El estadístico HF corregido es:

$$F = \left(\frac{1}{U^2}\right) \left(\frac{T-K-N}{N}\right)^d \rightarrow F_{2N,2(T-K-N)} \quad \text{para el caso de } N \geq 2 \quad \text{y}$$

$$F = \left(\frac{1}{U}\right) \left(\frac{T-K-1}{2}\right)^d \rightarrow F_{2,T-K-1} \quad \text{para el caso de } N = 1$$

Este test es una combinación de testear $\alpha = 0$ y $\delta = 0$, dado la estimación de la delta no requiere intervención de los rendimientos, se puede conseguir una mayor precisión que en la estimación de las alfas. Esto conlleva que los test de spanning, den mayor ponderación a los pesos de las delta y una menor ponderación a las alfas. El step-down test permite separar ambas hipótesis. Primero se prueba cuando $\alpha = 0$ y después $\delta = 0$ pero condicionado a que antes $\alpha = 0$.

Sus estadísticos respectivos son:

$$F_1 = \left(\frac{T-K-N}{N}\right) \left(\frac{|\bar{\Sigma}|}{|\widehat{\Sigma}|} - 1\right) = \left(\frac{T-K-N}{N}\right) \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}_1}{1 + \hat{a}_1}\right)^d \rightarrow F_{N,(T-K-N)}$$

$$F_2 = \left(\frac{T-K-N+1}{N}\right) \left(\frac{|\bar{\Sigma}|}{|\widehat{\Sigma}|} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{T-K-N+1}{N}\right) \left[\left(\frac{\hat{c} + \hat{d}}{\hat{c}_1 + \hat{d}_1}\right) \left(\frac{1 + \hat{a}_1}{1 + \hat{a}}\right)\right]^d \rightarrow F_{N,(T-K-N+1)}$$

Las carteras ordenadas por industria de Kenneth French no son las más apropiadas para los test de spanning, puesto que conforme se aumenta el número de industrias, varía la clasificación interna de las mismas con lo cual no se mantienen fijos los activos de referencia necesarios para los mismos. Así pues, la muestra de cinco industrias incluye consumo, manufacturas, alta tecnología, salud y otros. Sin embargo la muestra de diez industrias el consumo lo ha dividido entre duradero y no duradero, igualmente la tecnología que ahora se divide entre esta y telecomunicaciones, aparecen las manufacturas, la energía, comercios y servicios públicos, si bien salud y otros parecen mantener la clasificación. Y conforme aumenta el nivel de desagregación es más difícil encontrar equivalentes de las muestra de 5 industrias dentro de esa muestra de industrias más desagregada.

Aún así se ha hecho un intento de ratificar estadísticamente la hipótesis cuarta que comparaba los conjuntos de oportunidades entre 5y 10 industrias, 5 y 17 y 5 y 30, y si existían diferencias por ciclos y cuándo era más importante diversificar. En concreto se ha escogido la muestra ordenada por 10 industrias, de esas se ha escogido como activos de referencia: consumo duradero, manufacturas, alta tecnología, salud y otros, siendo este un conjunto lo más parecido posible al que se tomó como referencia en la hipótesis cuarta: cinco industrias. Los cinco activos restantes: consumo no duradero, energía, telecomunicaciones, comercio y servicios públicos se ha considerado los N

activos a testear. La comprobación entre 5 y 17, 5 y 30 industrias se ha descartado por los problemas comentados acerca de la desagregación.

Siguiendo la metodología inicial, los test de spanning se han implementado dentro de la ventana móvil, lo cual implica que para 60 periodos se han realizado 967 test, los cuales se han discriminado según el periodo analizado esté dentro de un ciclo recesivo o expansivo. Dado el elevado número de los mismos, únicamente nos vamos a centrar en el porcentaje de tests para los cuales no se acepta la hipótesis nula, ya que esto nos indicará una diferencia de fronteras y por tanto una ampliación del conjunto de posibilidades del inversor. Se han calculado unos estadísticos básicos relativos a los valores de la F para los que se rechaza la hipótesis nula. Si bien el step down test permite establecer diferentes niveles de significatividad, se ha considerado un 5% para todos. Los pesos de las carteras tangentes y de mínima varianza del test general se encuentran en el Anexo en las tablas 18,19 y 20, si bien aquí como se ha comentado previamente nos centraremos en la diferencia de fronteras en vez de en los pesos.

TABLA 15: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias, ventana de 60 periodos.

Periodo	Nº Total Test			Nº Total Test Expansión			Nº Total Test Recesión		
07/1927-12/2011	967			789			178		
Ventana=60	Test General		Step Down Test	Test General		Step Down Test	Test General		Step Down Test
Nivel Signif. =5%	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$
Nº test no acep. H	924	924	945	747	747	771	178	177	174
% s/ total	96%	96%	98%	95%	95%	98%	100%	99%	98%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	8,470	1,330	23,103	8,238	1,342	27,366	9,445	1,280	23,103
Desv. Est.	6,070	0,923	23,765	6,060	0,969	23,261	6,032	0,693	23,765
Mín.	1,944	0,039	2,399	1,944	0,039	2,467	1,945	0,223	2,399
Máx.	27,259	5,410	111,433	27,259	5,410	95,271	24,763	4,125	111,433
p-valor medio	0,001	0,003	0,001	0,004	0,004	0,002	0,001	0,001	0,001

Lo primero que se observa en la tabla 15 es que el porcentaje de no aceptación de la hipótesis nula en todos los casos es superior al 95%. Discriminando entre expansión y recesión se puede observar que dicho porcentaje es ligeramente superior en el caso de recesión, llegándose al 100% de no aceptación con el test general.

Para dar más robustez se ha variado el tamaño de la ventana, considerando 40 y 120 periodos, como en la hipótesis cuarta, con resultados similares. En ambos casos el porcentaje de no aceptación de la hipótesis nula es superior durante el ciclo recesivo. Por otro lado, si se compara por tamaño de ventanas

se observa que cuanto mayor es el tamaño de la ventana, mayores beneficios hay de ampliar el número de activos, puesto que no se acepta un mayor porcentaje de test y por tanto hay un mayor porcentaje de fronteras eficientes diferentes.

TABLA 16: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias, ventana de 40 periodos.

Periodo	Nº Total Test 987			Nº Total Test Expansión 789			Nº Total Test Recesión 198		
07/1927-12/2011									
Ventana=40	Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test	
Nivel Signif. =5%	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$
Nº test no acep. H	882	882	917	693	693	722	189	189	195
% s/ total	89%	89%	93%	88%	88%	92%	95%	95%	98%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	6,131	1,382	16,040	6,114	1,360	16,140	6,194	1,462	15,669
Desv. Est.	4,189	1,104	16,005	4,308	1,086	16,611	3,732	1,165	13,556
Mín.	1,985	0,141	2,532	1,986	0,141	2,532	1,985	0,217	2,637
Máx.	27,441	12,314	74,960	27,441	12,314	74,960	18,582	5,973	56,659
p-valor medio	0,003	0,003	0,001	0,004	0,004	0,002	0,003	0,003	0,001

TABLA 17: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias, ventana de 120 periodos.

Periodo	Nº Total Test 907			Nº Total Test Expansión 751			Nº Total Test Recesión 156		
07/1927-12/2011									
Ventana=120	Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test	
Nivel Signif. =5%	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$
Nº test no acep. H	907	907	907	751	751	751	156	156	156
% s/ total	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	14,306	1,396	38,271	13,990	1,387	37,048	15,826	1,441	38,271
Desv. Est.	9,420	0,922	34,435	9,043	0,888	33,047	10,967	1,074	34,435
Mín.	3,133	0,105	5,830	3,372	0,105	6,354	3,133	0,267	5,830
Máx.	43,131	4,481	156,287	43,131	4,481	156,287	40,360	4,012	156,287
p-valor medio	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

A continuación, al igual que en la hipótesis cuarta se ha analizado las diferencia entre fronteras teniendo en cuenta como variable continua el desempleo, en vez del ciclo económico que es dicotómico. Se han mantenido los rangos que se analizaron en la hipótesis dos y en la cuarta, desempleo menor que 4.75 ciclo claramente expansivo, desempleo superior al 9,1 claramente recesivo y un conjunto de datos restantes que se ha denominado desempleo en transición. Hay que recordar que al igual que en la hipótesis dos y en la

hipótesis cuatro, el objetivo no es determinar el nivel de desempleo en expansión o recesión, sino analizar los casos extremos y su relación en este caso con los conjuntos de oportunidades de inversión. Dado que los datos de desempleo son a partir de 1948, hay 200 datos que se pierden y aunque se varíe la amplitud de la ventana el total de test aplicados es el mismo.

Comparando cuando la economía se encuentra en clara situación de expansión, con valores de desempleo muy reducidos, y en clara recesión, desempleo muy elevado, la tabla vuelve a confirmar que el porcentaje de veces que no se acepta la hipótesis nula es superior en el caso de recesión, si bien en todos los casos se obtienen valores superiores al 90% de las veces. Al igual que en el caso anterior, los pesos de las alfas y las deltas para el Test General se encuentran en el Anexo.

TABLA 21: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias y niveles de desempleo, ventana de 60 periodos.

Periodo	Nº Total Test Expansión 218			Nº Total Test Recesión 42			Nº Total Test Transición 508		
Ventana=60	Test General		Step Down Test	Test General		Step Down Test	Test General		Step Down Test
Nivel Signif. =5%	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$	$\delta=0, \alpha=0$	$\alpha=0$	$\delta=0 / \alpha=0$
Nº test no acep. Ho	198	198	205	42	42	42	485	485	499
% s/ total	91%	91%	94%	100%	100%	100%	95%	95%	98%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	11,894	1,415	36,284	7,156	1,380	16,319	6,652	1,510	15,424
Desv. Est.	8,407	0,972	33,179	1,168	0,217	3,797	4,142	0,973	14,543
Mín.	1,947	0,162	2,426	5,621	0,985	11,793	1,944	0,195	2,399
Máx.	27,259	4,545	111,433	9,827	1,866	24,958	23,703	5,410	81,804
p-valor medio	0,001	0,001	0,002	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,001

Nuevamente se recalculan los tests variando la amplitud de la ventana, con 40 y 120 periodos, tal y como se muestra en las tablas 22 y 23. Se ratifica que en situación de desempleo elevado, recesión, el porcentaje de test no aceptados es superior a cuando la economía está en expansión. Además, al igual que con la variable dicotómica ciclos, es más importante ampliar el número de activos cuando se utilizan ventanas con amplitud superior, puesto que se rechaza un número superior de veces la hipótesis nula y por tanto se obtienen más fronteras diferentes tras la incorporación de los nuevos activos y por tanto un mayor conjunto de posibilidades para el inversor.

TABLA 22: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias y niveles de desempleo, ventana de 40 periodos.

Periodo	Nº Total Test Expansión 218			Nº Total Test Recesión 42			Nº Total Test Transición 508		
Ventana=40	Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test	
Nivel Signif. =5%	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$
Nº test no acep. H	196	196	196	42	42	42	434	434	434
% s/ total	90%	90%	90%	100%	100%	100%	85%	85%	85%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	8,017	1,169	25,036	4,871	1,531	10,169	5,343	1,612	12,057
Desv. Est.	5,153	0,721	20,447	0,689	0,559	2,380	3,646	1,380	11,889
Mín.	2,048	0,141	3,970	3,798	0,601	6,225	1,985	0,187	2,532
Máx.	17,593	3,904	69,798	6,447	2,344	15,305	27,441	12,314	74,960
p-valor medio	0,003	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,004	0,004	0,003

TABLA 23: Test de Spanning Media-Varianza bajo normalidad para la cartera ordenada por diez industrias y niveles desempleo, ventana de 120 periodos.

Periodo	Nº Total Test Expansión 218			Nº Total Test Recesión 42			Nº Total Test Transición 508		
Ventana=120	Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test		Test General	Step Down Test	
Nivel Signif. =5%	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$	$\delta = 0, \alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\delta = 0 / \alpha = 0$
Nº test no acep. H	218	218	218	42	42	42	508	508	508
% s/ total	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Valores de F en los que no se acepta Ho									
Media	16,595	1,267	47,912	9,747	1,572	21,381	11,925	1,667	28,461
Desv. Est.	12,267	0,651	45,079	3,657	0,382	9,478	6,733	1,018	22,847
Mín.	3,372	0,394	6,354	6,146	1,056	12,121	3,133	0,161	5,830
Máx.	43,131	2,938	156,287	14,865	2,378	35,530	40,360	4,481	136,413
p-valor medio	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Concluyendo, se ratifica estadísticamente la hipótesis cuarta, en condiciones adversas para el inversor, ciclos recesivos, desempleo muy elevado, es cuando es más importante diversificar aumentando el número de activos pues en términos medios se obtienen más fronteras eficientes diferentes de las iniciales y se accede a un mayor conjunto de oportunidades.

Conclusiones y posibles ampliaciones.

Este estudio se ha centrado en el modelo media-varianza y en su relación con la economía real a través del desempleo mediante una serie de hipótesis. La diferenciación con otros artículos viene a través de la manera de transformar un modelo claramente uniperiodal a un modelo dinámico que aporte mayor valor añadido acerca de la evolución de la cartera de mínima varianza y de la frontera eficiente en la muestra analizada. Esta transformación se hace mediante una media móvil que recoge la predicción para el siguiente periodo de los rendimientos esperados (para el siguiente mes) a lo largo de 976 carteras eficientes, en el caso de una ventana de 60 periodos. Si bien los análisis se han hecho dentro de muestra, con las limitaciones que esto conlleva, se ha intentado dotar a las conclusiones de la mayor generalidad posible mediante no solo un procedimiento fácilmente replicable para cada tipo de muestra, una ventana móvil a diferencia de por ejemplo un GARCH que tiene coeficientes estimados característicos de una muestra concreta, sino ratificando las hipótesis con diferentes muestras, 5, 10, 17 y 30 carteras ordenadas por industria, y diferentes amplitudes de la ventana móvil, 40 y 120 periodos.

Las conclusiones para las dos muestras analizadas principalmente, son que existe una clara correlación entre las posibilidades de diversificación del riesgo de la cartera de mínima varianza y la correlación de los rendimientos de las carteras ordenadas por industria, como se ha demostrado la primera hipótesis. Esto es interesante puesto que calculando únicamente las correlaciones de los activos y mediante una simple resta, se puede saber el rango de variación de la volatilidad que obtendría una cartera basada en el enfoque media-varianza. Además, esta variable dispersión que mide la diferencia de comportamiento de los rendimientos de los activos, muestra que existe un límite físico a la diversificación, un punto a partir del cual introducir nuevos activos no va a introducir diferentes comportamientos en las rentabilidades y por tanto no mejorará la diversificación.

Por otro lado, la segunda hipótesis se ha centrado en la relación entre la economía real y los mercados financieros. Como ya se ha comentado en la introducción diversos estudios previos han tratado dicho concepto, algunos con complejos modelos econométricos otros con modelos más simples. En este artículo se ha intentado buscar una relación entre el modelo media varianza, un modelo simple pero que aún sigue usándose en la actualidad, y la evolución de la economía real, usando como variable proxy el desempleo. Dado que el desempleo al que tiende una economía a largo plazo varía a lo largo del tiempo y según la muestra analizada, el estudio se ha centrado en valores de desempleo extremo, los indiquen claramente que la economía se encuentra en una fase expansiva o recesiva. La relación con los mercados se ha hecho mediante una variable amplitud que recoge el cambio de forma de la frontera eficiente y por tanto del conjunto de posibilidades del inversor. Si bien la

relación entre el desempleo y la amplitud ha resultado ser más compleja de lo que inicialmente se esperaba, sí que existe una clara equivalencia, una situación desfavorable en la economía real, medida por niveles altos de desempleo, conlleva también una situación desfavorable para el inversor en términos de un conjunto de oportunidades de inversión más reducido. La equivalencia contraria también se cumple, una situación muy favorable en la economía real, reflejada con tasas de desempleo muy bajas, lleva asociada una situación favorable también en términos de posibilidades de inversión. Una vez realizada una primera fase descriptiva de la relación economía real- modelo media-varianza, una posibilidad sería comprobar si este modelo media-varianza tiene capacidad predictiva de los giros de la economía.

Una tercera hipótesis, también centrada en el marco media-varianza al igual que la primera, ha mostrado que existe una relación positiva y lineal entre el rendimiento de la cartera eficiente cuando se incrementa el número de activos y la variable amplitud cuando igualmente se incrementa dicho número

La cuarta hipótesis al igual que la segunda ha vuelto a relacionar el modelo media-varianza con la economía real, en concreto con el ciclo económico y con el desempleo. Mediante dos medidas, ganancia en rendimiento fijando el riesgo y disminución del riesgo fijando el rendimiento se ha demostrado los beneficios de una diversificación eficiente tanto en ganancia de rendimiento como en reducción del riesgo, si bien la reducción del riesgo se ve condicionada por el límite a la diversificación. Además, se ha demostrado que en situaciones adversas para el inversor, recesión y/o elevados niveles de desempleo, dichas ganancias son más elevadas, poniendo de manifiesto la importancia de diversificar eficientemente.

Esta cuarta hipótesis se ha ampliado tras la presentación de la tesina en el X Workshop 2012 implementándose unos tests de spanning que han permitido probar estadísticamente la diferencia de fronteras al ampliar el número de activos de cinco a diez y por tanto un mayor conjunto de oportunidades para el inversor, así como que en términos medios es más importante el diversificar ampliando el número de activos en periodos de recesión, puesto que no se acepta un mayor número de veces la hipótesis nula.

Finalmente, para la primera hipótesis se ha utilizado una medida de riesgo atípica, la diferencia entre la correlación máxima y mínima de los rendimientos. Esta variable, a pesar de su simplicidad, ha resultado útil como medida del riesgo dentro del modelo media-varianza. Sería interesante ver si esta medida es igual de efectiva dentro de otros contextos y modelos más complejos, así como compararla con otras medidas reconocidas de la volatilidad como por ejemplo el VIX.

Anexo

TABLA 5: Valores máximos de la variable amplitud.

Valores máximos variable amplitud, 1932-2011			
Fecha	Amplitud	Desempleo	Acontecimiento Económico
30-Jun-1932	2,0141	--	
31-May-1932	1,9986	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Dec-1931	1,9478	--	
30-Apr-1932	1,7727	--	
31-Dec-1961	1,7511	6,0	
30-Nov-1931	1,7368	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Nov-1961	1,7036	6,1	
31-Mar-1932	1,6995	--	
31-Oct-1931	1,6532	--	Gran Depresión (1929-1939)
29-Feb-1932	1,6481	--	
30-Sep-1931	1,6252	--	
31-Jan-1962	1,5709	5,8	
31-Dec-1980	1,5677	7,2	Revolución Iraní, crisis de energía
30-Nov-1980	1,5645	7,5	1980-1982
31-Oct-1990	1,5455	5,9	
31-Oct-1961	1,5331	6,5	
31-Aug-1932	1,5248	--	
31-Jan-1932	1,5160	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Aug-1931	1,5154	--	
30-Sep-1961	1,5054	6,7	
31-Jul-1961	1,5052	7,0	
31-Aug-1961	1,5021	6,6	
30-Jun-1960	1,4911	5,4	
31-Aug-1960	1,4849	5,6	
30-Apr-1961	1,4840	7,0	
31-Dec-1991	1,4829	7,3	Crisis de la Postguerra 1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
31-Oct-1980	1,4827	7,5	Revolución Iraní, 2ª crisis del petróleo
28-Feb-1962	1,4784	5,5	
31-Mar-1961	1,4764	6,9	
30-Sep-1960	1,4583	5,5	
31-May-1960	1,4497	5,1	
31-May-1962	1,4474	5,5	
31-Jul-1960	1,4419	5,5	
31-Jul-1931	1,4408	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Mar-1962	1,4389	5,6	
31-Mar-1935	1,4375	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Nov-1990	1,4286	6,2	
30-Nov-1991	1,4080	7,0	Crisis de la Postguerra
30-Sep-1991	1,4033	6,9	1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)

30-Apr-1960	1,4022	5,2	
31-Jul-1932	1,3955	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Nov-1960	1,3910	6,1	
30-Sep-1990	1,3897	5,9	Crisis de la Postguerra
31-Aug-1991	1,3896	6,9	1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
31-Jan-1961	1,3882	6,6	
31-Dec-1960	1,3876	6,6	
31-Dec-1990	1,3876	6,3	Crisis de la Postguerra
31-Aug-1990	1,3810	5,7	1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
31-May-1961	1,3786	7,1	
30-Jun-1961	1,3767	6,9	
30-Apr-1962	1,3729	5,6	
31-Dec-1932	1,3708	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Oct-1960	1,3551	6,1	
28-Feb-1961	1,3536	6,9	
28-Feb-1991	1,3512	6,6	
31-Oct-1991	1,3420	7,0	Crisis de la Postguerra
31-Jan-1991	1,3419	6,4	1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
31-Mar-1991	1,3327	6,8	
28-Feb-1935	1,3319	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Jun-1931	1,3305	--	
31-Mar-1960	1,3263	5,4	
31-Jul-1990	1,3162	5,5	Crisis de la Postguerra 1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
31-May-1946	1,3139	--	2da Guerra Mundial (1939-1945)
29-Feb-1960	1,3127	4,8	
31-Jul-1962	1,3046	5,4	
30-Jun-1962	1,3033	5,5	
30-Apr-1935	1,2985	--	Crisis del Congo (1960 - 1966)
31-May-1981	1,2872	7,5	Revolución Iraní, 2ª crisis del petróleo
31-Jan-1981	1,2843	7,5	
30-Apr-1991	1,2821	6,7	Crisis 1ª Guerra del Golfo
28-Feb-1933	1,2694	--	
30-Nov-1981	1,2671	8,3	Revolución Iraní, 2ª crisis del petróleo
30-Apr-1981	1,2625	7,2	
31-Jul-1991	1,2618	6,8	Crisis de la Postguerra
31-May-1991	1,2561	6,9	1ª Guerra del Golfo (1990 - 1991)
30-Jun-1946	1,2558	--	2da Guerra Mundial (1939-1945)
31-Mar-1946	1,2537	--	
31-Jan-1960	1,2491	5,2	
30-Apr-1946	1,2455	--	2da Guerra Mundial (1939-1945)
30-Nov-1932	1,2423	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Mar-1981	1,2198	7,4	Revolución Iraní, 2ª crisis del petróleo
30-Jun-1991	1,2125	6,9	Crisis post- primera guerra del Golfo

TABLA 6:

Valores mínimos variable amplitud, 1932-2011			
Fecha	Amplitud	Desempleo	Acontecimiento Económico
31-Jul-1994	0,0788	6,1	Efecto Tequila (1994)
31-Aug-2003	0,1171	6,1	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Aug-1994	0,1350	6,0	Efecto Tequila (1994)
30-Sep-1994	0,1455	5,9	
30-Jun-2002	0,1471	5,8	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
28-Feb-1934	0,1527	--	Gran Depresión (1929-1939)
28-Feb-1942	0,1537	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
31-Oct-1994	0,1576	5,8	Efecto Tequila (1994)
30-Sep-2003	0,1579	6,1	
31-Oct-2003	0,1608	6,0	
30-Apr-2003	0,1610	6,0	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Jan-2003	0,1611	5,8	
31-May-2003	0,1618	6,1	
30-Jun-1994	0,1692	6,1	Efecto Tequila (1994)
31-Jan-1942	0,1704	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
30-Apr-2002	0,1723	5,9	
30-Nov-2002	0,1738	5,9	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-May-2002	0,1853	5,8	
30-Jun-2003	0,1862	6,3	
30-Apr-1942	0,1871	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
31-Jul-2003	0,1941	6,2	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Jan-1934	0,1946	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-May-1994	0,1955	6,1	Efecto Tequila (1994)
31-Mar-1994	0,1997	6,5	
28-Feb-2003	0,2029	5,9	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Dec-2002	0,2031	6,0	
31-Dec-1933	0,2171	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Nov-2003	0,2211	5,8	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Mar-2002	0,2226	5,7	
30-Nov-1994	0,2302	5,6	Efecto Tequila (1994)
30-Apr-1994	0,2307	6,4	
31-Jul-2002	0,2320	5,8	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Dec-1994	0,2325	5,5	Efecto Tequila (1994)
31-Mar-1942	0,2326	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
28-Feb-2002	0,2327	5,7	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
30-Sep-1993	0,2374	6,7	
31-Oct-1993	0,2380	6,8	
31-Oct-2002	0,2395	5,7	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Mar-2003	0,2470	5,9	
28-Feb-1994	0,2556	6,6	Efecto Tequila (1994)

31-Aug-2002	0,2672	5,7	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-May-1995	0,2765	5,6	Efecto Tequila (1994)
30-Apr-1941	0,2768	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
31-Jan-1994	0,2836	6,6	Efecto Tequila (1994)
31-Oct-1940	0,2863	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
30-Nov-1993	0,2927	6,6	
31-Dec-1993	0,2948	6,5	
31-Aug-1993	0,2954	6,8	
31-Jan-2002	0,2993	5,7	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
31-Mar-1934	0,3008	--	Gran Depresión (1929-1939)
30-Sep-2002	0,3133	5,7	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
30-Apr-2004	0,3218	5,6	
31-May-1942	0,3226	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
31-May-2004	0,3257	5,6	Crisis de las Punto Com (2000-2003)
30-Sep-1940	0,3261	--	Gran Depresión (1929-1939)
31-Jan-1995	0,3307	5,6	Efecto Tequila (1994)
31-Mar-1995	0,3364	5,4	
31-Aug-1983	0,3379	9,5	
31-Dec-1941	0,3402	--	
31-Mar-1941	0,3429	--	2nda Guerra Mundial (1939-1945)
31-Dec-1940	0,3471	--	
31-Jan-1941	0,3484	--	

TABLA 18: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 60 periodos.

Periodo	Coeficientes medios estimados del test general.									
07/1927-12/2011										
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,158	0,337	0,321	0,103	0,246	0,217	0,281	0,459	0,128	0,392
Desv. Est.	0,289	0,390	0,410	0,325	0,452	0,117	0,163	0,167	0,177	0,196
Mín.	-0,419	-0,765	-1,194	-0,961	-1,622	-0,006	-0,076	-0,382	-0,197	-0,177
Máx.	1,206	1,400	1,241	0,868	1,179	0,511	0,648	0,780	0,533	0,796
Periodo	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión.									
07/1927-12/2011										
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,169	0,327	0,320	0,120	0,248	0,210	0,283	0,451	0,121	0,398
Desv. Est.	0,295	0,379	0,426	0,307	0,435	0,113	0,162	0,162	0,172	0,194
Mín.	-0,419	-0,765	-1,194	-0,898	-1,622	-0,006	-0,076	-0,382	-0,170	-0,067
Máx.	1,206	1,400	1,241	0,868	1,021	0,482	0,648	0,780	0,533	0,796
Periodo	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de recesión.									
07/1927-12/2011										
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,113	0,380	0,324	0,033	0,239	0,246	0,274	0,493	0,159	0,368
Desv. Est.	0,256	0,433	0,334	0,383	0,516	0,128	0,167	0,185	0,192	0,205
Mín.	-0,348	-0,648	-0,445	-0,961	-1,065	0,009	-0,036	0,002	-0,197	-0,177
Máx.	0,925	1,266	1,060	0,653	1,179	0,511	0,585	0,746	0,491	0,678

TABLA 19: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 40 periodos.

Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1626	0,3344	0,3377	0,1008	0,2416	0,2231	0,2803	0,4686	0,1325	0,3900
Desv. Est.	0,3525	0,5619	0,5252	0,4426	0,6067	0,1253	0,1858	0,1817	0,1902	0,2164
Mín.	-0,6425	-1,5174	-1,7351	-1,3645	-2,1565	-0,0547	-0,1610	-0,0010	-0,2790	-0,2710
Máx.	1,3545	2,2897	1,7262	1,1865	1,6258	0,5533	0,7050	0,8206	0,5538	0,8681
Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1687	0,3303	0,3231	0,1487	0,2131	0,2141	0,2893	0,4643	0,1242	0,3984
Desv. Est.	0,3414	0,5335	0,5389	0,3657	0,6306	0,1214	0,1834	0,1731	0,1868	0,2081
Mín.	-0,6425	-1,3946	-1,7351	-1,0068	-2,1565	-0,0372	-0,1610	-0,0010	-0,2114	-0,2710
Máx.	1,3545	2,1516	1,7262	1,0160	1,6258	0,4954	0,7050	0,8206	0,5480	0,8681
Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de recesión.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1403	0,3495	0,3912	-0,0748	0,3462	0,2563	0,2472	0,4844	0,1629	0,3591
Desv. Est.	0,3906	0,6573	0,4693	0,6214	0,4970	0,1341	0,1913	0,2098	0,1997	0,2426
Mín.	-0,4932	-1,5174	-0,4832	-1,3645	-0,6737	-0,0547	-0,1568	0,0370	-0,2790	-0,2290
Máx.	1,3294	2,2897	1,3834	1,1865	1,4115	0,5533	0,6322	0,7723	0,5538	0,7278

TABLA 20: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 120 periodos.

Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1607	0,3555	0,2724	0,1067	0,2540	0,2121	0,2757	0,4516	0,1192	0,4013
Desv. Est.	0,1818	0,2206	0,3010	0,1611	0,2958	0,1017	0,1400	0,1461	0,1554	0,1674
Mín.	-0,2431	-0,2385	-0,5568	-0,3413	-0,7630	0,0674	-0,0184	0,0086	-0,1219	0,0158
Máx.	0,6640	1,1030	0,8546	0,4318	0,8582	0,4418	0,5826	0,7509	0,4532	0,7415
Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1725	0,3520	0,2807	0,1097	0,2577	0,2102	0,2818	0,4447	0,1156	0,4062
Desv. Est.	0,1819	0,2195	0,2975	0,1579	0,2964	0,0984	0,1371	0,1427	0,1540	0,1679
Mín.	-0,2431	-0,2385	-0,5568	-0,3413	-0,7630	0,0674	-0,0173	0,0086	-0,1219	0,0217
Máx.	0,6551	0,8668	0,8546	0,4318	0,8582	0,4343	0,5826	0,7509	0,4532	0,7415
Periodo 07/1927-12/201	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de recesión.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,1039	0,3726	0,2324	0,0924	0,2359	0,2211	0,2464	0,4846	0,1368	0,3774
Desv. Est.	0,1706	0,2257	0,3153	0,1755	0,2929	0,1161	0,1503	0,1581	0,1612	0,1633
Mín.	-0,1565	-0,0653	-0,4991	-0,3285	-0,3062	0,0780	-0,0184	0,1315	-0,1194	0,0158
Máx.	0,6640	1,1030	0,8085	0,4065	0,7382	0,4418	0,4669	0,7484	0,4271	0,7175

TABLA 24: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 60 periodos, según desempleo.

Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión, bajo desempleo.									
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	-0,0555	0,4538	0,1041	0,1188	0,2760	0,2605	0,2571	0,5520	0,2645	0,4782
Desv. Est.	0,1989	0,1842	0,3341	0,2327	0,3146	0,1022	0,1958	0,1949	0,1296	0,1489
Mín.	-0,4187	-0,1065	-0,9350	-0,3870	-0,3501	0,0798	-0,0761	-0,3821	-0,1153	0,1114
Máx.	0,3647	0,8320	0,8957	0,6931	1,0208	0,4852	0,5661	0,7795	0,5332	0,7879
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de recesión, elevado desempleo.									
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,3020	0,3527	0,1376	0,2286	0,0611	0,2394	0,3367	0,3769	0,1829	0,4171
Desv. Est.	0,0944	0,7315	0,2238	0,2221	0,2564	0,0457	0,0940	0,1997	0,2044	0,0997
Mín.	0,1471	-0,7645	-0,1486	-0,1534	-0,3426	0,1763	0,2293	0,1518	-0,0785	0,3053
Máx.	0,4653	1,2729	0,5940	0,5817	0,6038	0,3066	0,5208	0,6771	0,3848	0,5912
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de transición.									
Ventana=60	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,2786	0,4036	0,4366	0,1237	0,4191	0,1853	0,3263	0,4337	0,0734	0,4774
Desv. Est.	0,2989	0,3872	0,4419	0,3297	0,3212	0,1230	0,1460	0,1630	0,1862	0,1133
Mín.	-0,3686	-0,4704	-1,1937	-0,7312	-0,4260	-0,0065	-0,0357	-0,0125	-0,1972	0,0645
Máx.	1,2056	1,3998	1,2408	0,8679	1,1785	0,5108	0,6478	0,7363	0,4887	0,7963

TABLA 25: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 40 periodos, según desempleo.

Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión, bajo desempleo.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	-0,0541	0,4744	0,1790	0,1635	0,3075	0,2720	0,2855	0,5928	0,2794	0,5117
Desv. Est.	0,2205	0,3196	0,4606	0,2682	0,3841	0,1055	0,1964	0,1559	0,1489	0,1436
Mín.	-0,6425	-0,4289	-1,1018	-0,4267	-0,3401	0,0237	-0,1610	0,2831	-0,2021	0,1907
Máx.	0,4222	1,2700	1,7262	0,6368	1,6258	0,4805	0,5597	0,8206	0,5292	0,7929
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de recesión, elevado desempleo.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,4102	0,4016	0,0906	0,3254	0,0090	0,2353	0,3723	0,3626	0,1778	0,4088
Desv. Est.	0,1180	1,1062	0,4899	0,1588	0,5843	0,0364	0,1376	0,1809	0,1975	0,1051
Mín.	0,1840	-0,7448	-0,5238	-0,0521	-0,6583	0,1653	0,1748	0,1546	-0,0783	0,2896
Máx.	0,7246	2,2897	1,0955	0,5874	1,1610	0,2807	0,6442	0,6792	0,3827	0,5992
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de transición.									
Ventana=40	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,2717	0,3923	0,4320	0,0963	0,4057	0,1889	0,3223	0,4380	0,0663	0,4826
Desv. Est.	0,3882	0,5794	0,5452	0,4275	0,4467	0,1395	0,1846	0,1830	0,1962	0,1227
Mín.	-0,4932	-1,5174	-1,7351	-1,0068	-0,7905	-0,0547	-0,1167	-0,0010	-0,2790	-0,0040
Máx.	1,3545	1,5636	1,3598	1,1865	1,4115	0,5533	0,7050	0,8075	0,5538	0,8681

TABLA 26: Pesos medios de la cartera de mínima varianza y cartera tangente para una ventana de 40 periodos, según desempleo.

Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes medios estimados del test general durante periodos de expansión, bajo desempleo.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,0791	0,4020	0,2123	0,1561	0,3539	0,2306	0,2554	0,4896	0,1897	0,4250
Desv. Est.	0,1492	0,1407	0,1813	0,1554	0,2008	0,0674	0,1720	0,1595	0,0914	0,1844
Mín.	-0,2431	0,0691	-0,4130	-0,1870	-0,1024	0,1355	-0,0173	0,1904	0,0086	0,0584
Máx.	0,3566	0,6948	0,5662	0,4303	0,8582	0,4172	0,5826	0,7509	0,4252	0,7415
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de recesión, elevado desempleo.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,2686	0,4030	0,0666	0,1297	0,2662	0,2189	0,2931	0,3226	0,1764	0,3701
Desv. Est.	0,0956	0,2205	0,4814	0,1556	0,0816	0,0962	0,0329	0,2075	0,2033	0,0587
Mín.	0,1395	0,0364	-0,5568	-0,1174	0,1247	0,0926	0,2157	0,0152	-0,0630	0,2812
Máx.	0,4244	0,7777	0,6615	0,3525	0,4159	0,3140	0,3478	0,5764	0,3813	0,4458
Periodo 01/1948-12/2011	Coeficientes estimados del test general durante periodos de transición.									
Ventana=120	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	$\alpha 5$	$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$	$\delta 5$
Media	0,2256	0,4145	0,3012	0,1060	0,3396	0,1835	0,3020	0,4425	0,0818	0,4671
Desv. Est.	0,1841	0,2009	0,3467	0,1533	0,2303	0,1070	0,1274	0,1458	0,1741	0,0976
Mín.	-0,0970	-0,0497	-0,4915	-0,2399	-0,2465	0,0674	-0,0184	0,0086	-0,1219	0,0636
Máx.	0,6640	1,1030	0,8546	0,4318	0,7248	0,4418	0,4716	0,7484	0,4532	0,6900

REFERENCIAS

- Barry, F., Kearney, C., 2006. MNEs and industrial structure in host countries: A portfolio analysis of Irish manufacturing sector. *Journal of International Business Studies* 37-3, 392-407.
- Bisias, D., Lo, A.W., Watkins, J.F., 2012. Estimating the NIH Efficient Frontier. *PLoS ONE* 7-5, e34569.
- Brocato, J., Steed, S., 1998. Optimal asset allocation over the business cycle. *Financial Review* 33-3, 129-148.
- Çelikurt, U., Özekici, S., 2007. Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean–variance approach. *European Journal of Operational Research* 179-1, 186-202.
- Chapados, N., 2011. Portfolio choice problems. And introductory survey of single and multiperiod models. Springer, 1st Edition.
- Cooper, I., Priestley, R., 2012. The world business cycle and expected returns. *Review of Finance* 16-3, online.
- Elton, E.J., Gruber, M.J., Brown, S.J., Goetzmann, W.N., 2006. Modern portfolio theory and investment analysis. Wiley, 7th Edition.
- Estrella, A., Mishkin, F.S., 1998. Predicting U.S. recession: financial variables as leading indicators. *The Review of Economics and Statistics*, MIT Press 80-1, 45-61.
- Frahm, D., Memmel, C., 2010. Dominating estimators for minimum-variance portfolios. *Journal of Econometrics* 159, 289-302.
- Guerard, J.B., Jr., 2010. *Handbook of Portfolio Construction: Contemporary Applications of Markowitz Techniques*. Springer, 1st Edition.
- Hamilton, J.D., Gang, L., 1996. Stock market volatility and the business cycle. *Journal of Applied Econometrics* 11-5, 573-593.
- Hlouskova, J., Schmidheiny, K., Wagner, M., 2009. Multistep predictions for multivariate GARCH models: Closed form solution and the value for portfolio management. *Journal of Empirical Finance* 16-2, 330-336.
- Hu, W., Kercheval, A.N., 2010. Portfolio optimization for Student *t* and skewed *t* returns. *Quantitative Finance* 10-1, 91-105.
- Huberman, G., Kandel, S., 1990. Market efficiency and value line's record. *The Journal of Business*, 63-2, 187-216.
- Jang, S.C.S., Chen, M.H., 2007. Financial portfolio approach to optimal tourist market mixes. *Tourism Management* 29-4, 761-770.

Jansen, J.C., Beurskens, L.W.M., van Tilburg, X., 2005. Application of portfolio analysis to the Dutch generating mix - Reference case and two renewables cases: year 2030 - SE and GE scenario, Tech. Report ECN-C-05-100, Energy Research Center of the Netherlands.

Joro, T., Na, P., 2006. Portfolio performance evaluation in a mean-variance-skewness framework. *European Journal of Operational Research* 175-1, 446-461.

Kan, R., Zhou, G., 2012. Tests of mean-variance Spanning. *Annals of Economics and Finance* 13-1, 145-193.

Marín, J. M^a, Rubio, G., 2001. *Economía Financiera*. Antoni Bosch, 1^a Edición.

Martellini, L., Urošević, B., 2006. Static mean-variance Analysis with uncertain time horizon. *Management Science* 52-6, 955-964.

Mayer, R.A., Durand, R.B., Gould, J., 2005. A dynamic implementation of the Markowitz portfolio allocation procedure. Accounting and Finance Association of Australia and New Zealand, CD-ROM.

Nawrocki, D., Carter, W., 2012. Phase of the USA business cycle and the investment performance of internationally diversified portfolios. *Computer Handholders Investment Software Research Series*.

Nieto, B., Novales, A., Rubio, G., 2010. Why do variance swaps exist?. Working Paper. University CEU Cardenal Herrera.

Pantaleo, E., Tumminello, M., Lillo F., Mantegna, R.N., 2010. When do improved covariance matrix estimators enhance portfolio optimization? An empirical comparative study of nine estimators. *Quantitative Finance* 11-7, 1067-1080.

Ukhov, A.D., 2006. Expanding the frontier one asset at a time. *Finance Research Letters* 3-3, 194-206.

Yang, X., 2006. Improving portfolio efficiency: a genetic algorithm approach. *Computational Economics* 28-1, 1-14.