

# **DINAMICA DE LA VOLATILIDAD EN PRESENCIA DE ESTACIONALIDAD**

**David Martínez Antón**

Trabajo de investigación 012/010

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director: Alfonso Novales

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

[www.finanzascuantitativas.es](http://www.finanzascuantitativas.es)

## **INTRODUCCIÓN**

En el presente estudio se analiza la dinámica de la volatilidad en el mercado de futuros ante la presencia de estacionalidad. La existencia de estacionalidad en un mercado implica la existencia de patrones que tienden a repetirse con una determinada frecuencia y que por tanto son en cierto grado predecibles. La identificación y cuantificación de patrones en la volatilidad del mercado de futuros es clave para los operados de estos mercados y puede tener implicaciones importantes en la valoración de opciones, cálculo de garantías o cálculo de medidas de riesgo entre otros.

El modelo empleado para el análisis ha sido el modelo desarrollado por Aaron Smith en su artículo de 2005 "*Partially overlapping time series: a new model for volatility dynamics*". Este modelo tiene la ventaja de que nos permite modelizar conjuntamente los diferentes vencimientos negociados, característica especialmente deseable a la hora de analizar efectos estacionales. El procedimiento empleado por Smith es computacionalmente complejo, y es por ello que, ante la incertidumbre respecto al tiempo necesario para implementar el procedimiento con éxito, se haya desarrollado un procedimiento alternativo de estimación.

En la primera sección del documento se revisan algunos conceptos relativos a la teoría de valoración de contratos a plazo, en la segunda sección, identificamos los aspectos relevantes a la hora de caracterizar la volatilidad en un mercado de futuros y marcamos los objetivos del análisis. En la tercera sección presentamos el modelo utilizado y desarrollamos el procedimiento de estimación alternativo empleado. En la cuarta sección presentamos los resultados y en la quinta enumeramos las conclusiones. Por último y, a modo de anexo, desarrollamos de forma detallada el procedimiento de estimación empleado por Smith y detallamos uno de los procedimientos de estimación de los factores considerados.

### **1. TEORIA DE VALORACIÓN**

La literatura de valoración de contratos a plazo se sustenta principalmente en dos enfoques diferenciados.

Por un lado el *enfoque de gestión de riesgos* (Keynes, 1930; Stein, 1986), sostiene que existen agentes, llamados coberturistas, que por su actividad económica están sujetos a un riesgo de precio en el mercado de contado, estos agentes, están dispuestos a pagar una prima en el mercado de futuros a cambio de eliminar toda incertidumbre sobre el precio al que efectivamente podrán realizar las transacciones futuras, los especuladores en cambio, reciben una prima por asumir el riesgo que los coberturistas desean eliminar. Bajo este enfoque el precio a futuro es un estimador sesgado a la baja del precio spot. La existencia de una prima de riesgo implica que los precios forward son decrecientes con el vencimiento lo que da lugar a una curva forward en "*backwards*".

$$F(T, t) = E_t(S_T)e^{(r-\alpha)(T-t)}$$

El enfoque de gestión de riesgos ha encontrado poco soporte empírico al no haberse encontrado evidencia sobre la existencia de una prima de riesgo, Kold (1992), Bessembinder (1993), lo que justifica la práctica habitual de modelizar los precios a futuro como martingalas.

En segundo lugar, el enfoque adoptado por la “*Theory of storage*” (Working ,1948), sostiene que los precios a futuro están determinados por relaciones de arbitraje. A grandes rasgos podemos decir que la diferencia entre el precio spot y el precio a futuro es igual al coste de almacenamiento del activo, es decir, el coste que implica el comprar hoy el activo y almacenarlo hasta la fecha de vencimiento del contrato de futuro. A este coste se le conoce como “*cost of carry*” y sus determinantes dependen de la naturaleza del subyacente. Este enfoque se puede aplicar únicamente cuando el subyacente es negociable y almacenable, ya que estas características hacen posible el arbitraje que refuerza la relación entre el precio de contado y el precio a futuro. Bajo condiciones normales, este enfoque implica un curva forward en “*contango*”.

La tipología de mercados de futuros es muy amplia, si nos limitamos a mercados donde el activo subyacente es negociable y almacenable, podemos dividir los mercados de futuros en dos grandes grupos:

*Futuros cuyo subyacente es o puede considerarse como un activo financiero*

La valoración de este tipo de contratos es bastante directa en un mercado sin fricciones y bajo ausencia de oportunidades de arbitraje. Este tipo de contratos se caracterizan por que los costes de almacenamiento del subyacente son prácticamente nulos, p.ej. acciones, o muy bajos, p.ej. oro. Los componentes del “*cost of carry*” en este tipo de contratos son el tipo de interés libre de riesgo y la tasa de rendimiento explícito del activo subyacente.

$$F(T, t) = S_t e^{(r-\delta)(T-t)}$$

En este contexto y, bajo la “*Theory of storage*”, cualquier shock que se produzca en el precio de contado se transmitirá de forma inmediata a todos los vencimientos, por lo que el precio de los diferentes vencimientos obedece a un único factor común entre todos los contratos, este es, el precio spot del subyacente.

*Futuros cuyo subyacente tiene un uso industrial.*

La valoración de este tipo de contratos es más compleja, ya que el hecho de que el subyacente tenga un uso industrial, provoca que la valoración por arbitraje deba considerar la existencia del conocido como “*convenience yield*”, que represente el beneficio implícito que para un productor supone la posesión física de la mercancía. Los componentes del “*cost of carry*” en este tipo de contratos son, el tipo de interés libre de riesgo, los costes de almacenamiento y el “*convenience yield*”. En este caso la valoración por arbitraje proporciona unas bandas de no arbitraje ya que el “*convenience yield*” beneficia únicamente a los productores que utilizan el subyacente como input de su proceso productivo.

$$S_t e^{(r+\lambda-c)(T-t)} \leq F(T, t) \leq S_t e^{(r+\lambda)(T-t)}$$

La existencia del “*convenience yield*” implica la posibilidad de un *cost of carry* negativo y por tanto una curva forward en “*backwards*”. Esta situación puede darse en épocas de inventarios bajos, épocas en las que los productores valoran especialmente la posesión física del subyacente y en las que son reticentes a realizar arbitraje inverso. Cuando los stocks de la mercancía son bajos se produce una presión al alza en los precios de contado y en los precios a futuro con vencimiento más próximo, los precios de los contratos con vencimiento relativamente más largo no se ven presionados por qué se entiende que a largo plazo los inventarios se regularizaran. Cuando los inventarios vuelven a niveles normales, los tenedores de la mercancía física no son reticentes a realizar arbitraje inverso y el mercado vuelve a una situación de contango. En este contexto el precio de los diferentes vencimientos a futuro pueden obedecer a factores diferentes, un factor que influye al precio de contado y a los vencimientos a futuro más próximos y otro factor que influye a aquellos contratos con vencimiento posterior al momento en que se espera que los inventarios estén regularizados.

## 2. MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

La existencia de patrones en la dinámica de la volatilidad del precio a futuro tiene implicaciones importantes en la valoración de opciones, determinación de garantías, o en la cobertura. Samuelsson (1965), Anderson (1985), Milonas (1986), Streeter y Tomek (1992) o Karali (2010) son algunos de los muchos autores que han analizado la volatilidad en el mercado de futuros.

El objetivo de este estudio es encontrar patrones en la volatilidad del mercado de futuros sobre maíz, para ello, debemos especificar un modelo que incorpore aquellos elementos que empíricamente se ha demostrado que inciden en los niveles de volatilidad de este mercado y hacerlo de forma que nos permita analizar la importancia relativa de cada uno de ellos dentro de un marco unificado.

Estudios previos han tratado de explicar la volatilidad en el precio de futuros sobre granos a partir de variables de información (volumen, tiempo hasta vencimiento, estacionalidad), variables económicas (oferta-demanda, nivel de inventarios) y variables de estructura de mercado (ratio de especuladores-coberturistas). En general todos estos estudios coinciden en que a la hora de analizar la volatilidad en el mercado de granos, inventario, tiempo hasta vencimiento y estacionalidad son factores determinantes.

La estacionalidad es una característica clave de los mercados de granos ya que la cosecha es estacional y está sujeta a la evolución del clima. La producción total depende del área dedicada al cultivo y de la evolución del clima durante la época de siembra. El flujo de información que determina los precios de las nuevas cosechas no se produce de forma lineal, sino que se concentra en periodos concretos del ciclo productivo, p ej., cuando se toman las decisiones del área a cultivar o cuando se acerca el momento de la recolección. Por ello, el momento concreto dentro del ciclo productivo será determinante en los niveles de volatilidad.

En el mercado del maíz y, bajo la “*Theory of storage*”, un nivel bajo de inventarios puede provocar presiones en el precio de los contratos a futuro con vencimiento anterior a la

próxima cosecha. En esta situación, cabe esperar que la volatilidad de los contratos con vencimiento anterior a la próxima cosecha sea mayor que la de los contratos con vencimiento posterior. En este contexto, el conjunto de contratos a futuro negociados un día determinado se puede dividir en dos grupos; un grupo formado por los contratos cuyas variaciones en precio vienen explicadas por un factor común y asociado a la cosecha nueva y otro grupo, formado por los contratos cuyas variaciones en precio vienen explicadas por un factor común asociado a la cosecha vieja. En situaciones de inventarios normales cabe esperar que estos dos factores estén altamente correlacionados, disminuyendo significativamente esta relación, en situaciones de inventarios bajos donde la convergencia forzada por las operaciones de arbitraje se ve limitada.

El conocido como efecto Samuelsson postula que la volatilidad del precio de un contrato de futuro es una función decreciente del tiempo hasta vencimiento. En mercados estacionales este efecto tiende a confundirse con el efecto que produce la estacionalidad, la estacionalidad provoca que las épocas donde se genera un mayor flujo de información relativa al nivel de producción coincida con la época de mayor volatilidad en todos los vencimientos, de manera que los contratos con vencimiento posterior a ese periodo pueden exhibir tramos de volatilidades crecientes con el vencimiento. Sin embargo, encontraremos evidencia del efecto Samuelson si, en un momento concreto del ciclo productivo, los contratos con vencimiento más cercano exhiben mayores niveles de volatilidad que los contratos con vencimiento relativamente mas lejano. Por otro lado cabe esperar que en épocas de inventarios bajos, donde se rompe la relación entre los dos factores, el efecto Samuelson sea más pronunciado.

### **3. MODELO**

#### **SELECCIÓN DEL MODELO**

Una característica importante de los mercados de futuros es la existencia de contratos con diferentes vencimientos negociados en un mismo momento del tiempo. Cuando un contrato de un determinado vencimiento expira, uno nuevo empieza a negociarse. Por tanto una muestra de precios de contratos de futuros es un conjunto de series temporales parcialmente solapadas en el tiempo. Esta característica hace que en todo estudio relativo al mercado de futuros tenga que decidirse la forma de organizar toda la información que supone ese conjunto de series parcialmente solapadas en el tiempo.

Tradicionalmente todo ese conjunto de información se ha reducido a una única serie temporal, rolendo el contrato con vencimiento más próximo o eligiendo un vencimiento concreto y rolendo sucesivamente. Dado que en un momento concreto del tiempo se negocian varios vencimientos, esta metodología desecha mucha información e ignora la existencia de características intrínsecas de los distintos vencimientos negociados. Otra limitación de trabajar con una única serie temporal surge al tratar de distinguir la importancia relativa de cada uno de los determinantes de la volatilidad, por ejemplo, si se detecta un nivel alto de volatilidad en la época de siembra puede resultar complicado atribuir el efecto individual que, sobre ese nivel de volatilidad, tienen el tiempo a vencimiento o la estacionalidad.

Los estudios más recientes emplean técnicas de estimación que permiten utilizar toda la información contenida en la muestra y que contemplan tanto la dimensión temporal como la sección cruzada inherente en estos mercados. El presente estudio emplea el modelo POTS, modelo desarrollado por Aarón Smith en su artículo “*Partially Overlapping Time Series*”. Dicho modelo nos ofrece la flexibilidad necesaria para recoger de forma unificada los efectos de cada uno de los determinantes de la volatilidad en los diferentes vencimientos negociados.

El modelo POTS utiliza toda la información, incluida la del mes de entrega, información que los enfoques más tradicionales desechan. Esta característica del modelo POTS permite analizar la eficiencia en el proceso de entrega. Un proceso de entrega eficiente propicia la convergencia del precio a futuro con el precio de contado, sin embargo, la existencia de fricciones institucionales relacionadas con la entrega física dificulta las operaciones de arbitraje y provoca la falta de convergencia exacta de los precios a futuro con los precios de contado. Esta falta de convergencia tiene implicaciones importantes ya que menoscaba la efectividad de los contratos a futuro como instrumento de cobertura. Smith (2005) encuentra síntomas de ineficiencia en el proceso de entrega del contrato sobre maíz negociado en el CBOT durante el periodo 1991-2001. En 2001 CME introduce algunos cambios en la especificación del contrato en un intento de reducir estas fricciones y mejorar la convergencia, en este sentido, el presente estudio tratara de determinar la efectividad de estas medidas.

#### MODELO POTS

Smith modeliza el cambio en el precio con un modelo de dos factores en el que tanto las sensibilidades a los factores como la volatilidad de los componentes idiosincráticos de cada vencimiento son funciones del tiempo hasta el vencimiento. Al modelizar los factores con un DBEKK de volatilidades condicionales, Smith relaciona las épocas de inventarios bajos con las épocas en las que se produce una disminución en la correlación condicional de los factores, superando elegantemente, la limitación que supone la inexistencia de datos relativos al nivel de inventarios con frecuencia diaria. La especificación del modelo es como sigue.

$$\Delta F_{d,t} = \theta_{d,t} C'_{d,t} \varepsilon_t + \lambda_{d,t} u_{d,t}$$

$$\Delta F_{d,t} = F_{d,t} - F_{d+1,t-1}$$

$$\Omega = E[\varepsilon_t \varepsilon'_t] = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad c'_{d,t} \Omega c_{d,t} = 1 \quad E[\varepsilon_s u_{d,t}] = 0$$

$$E[u_{d,t}^2] = 1 \quad \text{Para todo } s, t \text{ y } d \quad E[u_{d,t} u_{k,t}] = 0 \quad \text{Para todo } d, t \text{ y } k$$

Donde  $d$  representa el tiempo hasta vencimiento y  $t$  el momento temporal de la observación, nótese que la conjunción  $d, t$  es suficiente para identificar todas las observaciones que compongan la muestra.

$\theta_{d,t}$  representa la sensibilidad a los factores y  $\lambda_{d,t}$  representa la desviación típica de la innovación idiosincrática, estos dos parámetros son funciones deterministas de  $d$  y de  $t$  y capturan los efectos predecibles que la estacionalidad y el tiempo hasta vencimiento tienen sobre la volatilidad de los distintos contratos. La modelización se realiza con splines cúbicos, introduciendo de este modo, regímenes diferenciados en función del tiempo a vencimiento.

$C_{d,t}$  es un vector 2x1 que selecciona el factor o combinación lineal de los factores que ha de aplicarse en  $t$  al contrato con vencimiento en  $d$  días. En cada  $t$ , se determina si un contrato ha de entregarse de la cosecha nueva o de la vieja. En el mercado de maíz, todos los contratos excepto el de Septiembre son función de un único factor, el contrato de Septiembre tiene la peculiaridad de que su periodo de entrega termina en época de recolección, y es por ello que su componente factorial es una combinación lineal de los dos factores.

$u_{d,t}$  es un ruido blanco y  $\varepsilon_t$  es un vector 2x1 que representa las innovaciones en los factores.

Basándose en la falta de evidencia sobre la existencia de una prima de riesgo se asume:

$$E(\Delta F_{d,t} | F^t) = 0$$

Bajo estos supuestos se cumple  $E(\Delta F_{d,t}^2) = \theta_{d,t}^2 + \lambda_{d,t}^2$ , es decir, la volatilidad incondicional es una función determinista de  $d$  y de  $t$ . La volatilidad condicional tiene dos componentes, uno determinista recogido por theta y lambda y otro estocástico representado por la matriz de correlación condicional de los factores modelizados con un DBEKK.

El procedimiento de estimación empleado por Smith se desarrolla en el anexo.

#### **PROCEDIMIENTO DE ESTIMACIÓN ALTERNATIVO**

La complejidad en la estimación del modelo POTS ha motivado que en el presente estudio se diseñe un proceso de estimación alternativo. El método propuesto en este estudio pretende reducir la complejidad en el proceso de estimación y conservar al mismo tiempo la riqueza y flexibilidad ofrecida por el modelo original.

Conservando la forma funcional del modelo original, la estimación se realiza en varias etapas, en primer lugar se obtienen estimaciones de las series temporales de los dos factores, en una segunda etapa obtenemos estimaciones de las funciones deterministas  $\theta_{d,t}$  y  $\lambda_{d,t}$ , por último y con la finalidad de identificar las épocas de inventarios bajos, ajustamos un modelo DBEKK de volatilidades condicionales a los dos factores.

En la estimación de los factores, el objetivo es obtener una serie temporal representativa de los contratos afectados por la cosecha nueva y otra serie representativa de los contratos afectados por la cosecha vieja. Se han empleado dos métodos diferentes. En un primer momento se utilizó un método basado en el análisis de componentes principales, en el anexo se desarrolla el procedimiento y se muestra por qué los resultados obtenidos fueron rechazados. El método empleado finalmente consiste en construir series temporales rolado

determinados vencimientos en momentos concretos del año, este método es el aconsejado por Smith (2005) para obtener una única serie temporal representativa de los contratos afectados por un mismo factor. Smith aconseja utilizar las variaciones en precio del contrato de Mayo durante Enero y Febrero, las del contrato de Julio desde Marzo hasta Mayo, las del de Diciembre entre Junio y Octubre y las del vencimiento de Marzo durante Noviembre y Diciembre. El contrato de Septiembre se excluye por ser función de los dos factores. Smith demuestra que este método proporciona una serie que recoge los efectos estacionales en la volatilidad de forma continua y homogénea. Para la obtención de la serie representativa de los contratos que deban hacer entrega de la cosecha vieja se han utilizado los contratos aconsejados con vencimiento más cercano, para la obtención de la serie representativa de la cosecha nueva se han utilizado los contratos aconsejados con vencimiento inmediatamente superior a un año.

Una vez obtenidas las series de los factores pasamos a estimar los parámetros de los polinomios  $\theta_{d,t}$  y  $\lambda_{d,t}$ . Estos polinomios admite una representación del tipo:

$$\theta_{d,t} = \theta_1 + \theta_2 d_t + \theta_3 d_t^2 + \theta_4 d_t^3$$

$$\lambda_{d,t} = \lambda_1 + \lambda_2 d_t + \lambda_3 d_t^2 + \lambda_4 d_t^3$$

Donde  $d_t$  denota el tiempo a vencimiento del contrato al que le quedan  $d$  días hasta el vencimiento en el día  $t$ . Permitimos además, que tal representación varíe en función del tiempo que resta a vencimiento del contrato, mediante splines. Incluyendo 4 nodos localizados en 0, 126, 252 y 378 tenemos:

$$\begin{aligned} \theta_{d,t} = & (\theta_1 + \theta_2 d_t + \theta_3 d_t^2 + \theta_4 d_t^3) D_1 + (\theta_5 + \theta_6 (d_t - 126) + \theta_7 (d_t - 126)^2 + \\ & \theta_8 (d_t - 126)^3) D_2 + (\theta_9 + \theta_{10} (d_t - 252) + \theta_{11} (d_t - 252)^2 + \theta_{12} (d_t - 252)^3) D_3 + \\ & (\theta_{13} + \theta_{14} (d_t - 378) + \theta_{15} (d_t - 378)^2 + \theta_{16} (d_t - 378)^3) D_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{d,t} = & (\lambda_1 + \lambda_2 d_t + \lambda_3 d_t^2 + \lambda_4 d_t^3) D_1 \\ & + (\lambda_5 + \lambda_6 (d_t - 126) + \lambda_7 (d_t - 126)^2 + \lambda_8 (d_t - 126)^3) D_2 \\ & + (\lambda_9 + \lambda_{10} (d_t - 252) + \lambda_{11} (d_t - 252)^2 + \lambda_{12} (d_t - 252)^3) D_3 \\ & + (\lambda_{13} + \lambda_{14} (d_t - 378) + \lambda_{15} (d_t - 378)^2 + \lambda_{16} (d_t - 378)^3) D_4 \end{aligned}$$

El procedimiento de estimación de los polinomios  $\lambda_t$  y  $\theta_t$  se basa en regresiones restringidas, en primer lugar estimamos los parámetros de la función  $\theta_t$ :

$$\begin{aligned} \Delta F_{d,t} = & (\theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_t d_t + \theta_3 \varepsilon_t d_t^2 + \theta_4 \varepsilon_t d_t^3) D_1 + (\theta_5 \varepsilon_t + \theta_6 \varepsilon_t (d_t - 126) + \\ & \theta_7 \varepsilon_t (d_t - 126)^2 + \theta_8 \varepsilon_t (d_t - 126)^3) D_2 + (\theta_9 \varepsilon_t + \theta_{10} \varepsilon_t (d_t - 252) + \\ & \theta_{11} \varepsilon_t (d_t - 252)^2 + \theta_{12} \varepsilon_t (d_t - 252)^3) D_3 + (\theta_{13} \varepsilon_t + \theta_{14} \varepsilon_t (d_t - 378) + \\ & \theta_{15} \varepsilon_t (d_t - 378)^2 + \theta_{16} \varepsilon_t (d_t - 378)^3) D_4 + v_{d,t} \end{aligned}$$

Donde D1, D2, D3 y D4 denotan variables ficticias que toman valor 1 si  $d$ , el número de días al vencimiento del contrato el día  $t$  es: inferior a 10 días, está entre 9 y 126, entre 126 y 252, entre 252 y 378, o excede de 378 días. Con objeto de que los splines tengan el mismo nivel y la misma pendiente en los extremos de los nodos, imponemos las restricciones:

$$\begin{aligned}\theta_5 &= \theta_1 + \theta_2(126) + \theta_3(126^2) + \theta_4(126^3) \\ \theta_9 &= \theta_5 + \theta_6(126) + \theta_7(126^2) + \theta_8(126^3) \\ \theta_{13} &= \theta_9 + \theta_{10}(126) + \theta_{11}(126^2) + \theta_{12}(126^3) \\ \theta_6 &= \theta_2 + 2\theta_3(126) + 3\theta_4(126^2) \\ \theta_{10} &= \theta_6 + 2\theta_7(126) + 3\theta_8(126^2) \\ \theta_{14} &= \theta_{10} + 2\theta_{11}(126) + 3\theta_{12}(126^2)\end{aligned}$$

Si un contrato está por encima de 126 días a vencimiento, su valor de  $\theta_{d,t}$  viene dado por:

$$\theta_{d,t} = \theta_5 + \theta_6(d_t - 126) + \theta_7(d_t - 126^2) + \theta_8(d_t - 126^3)$$

Mientras que si vence en menos de 126 días, su valor de  $\theta_{d,t}$  viene dado por:

$$\theta_{d,t} = \theta_1 + \theta_2 d_t + \theta_3 d_t^2 + \theta_4 d_t^3$$

Si queremos que a 126 días del vencimiento ambas expresiones coincidan, debe cumplirse la primera de las restricciones del conjunto anterior. Para que sus pendientes, respecto de  $d_t$  coincidan en  $d_t=126$ , debe cumplirse la cuarta de las restricciones del conjunto anterior.

Por último, para que la pendiente sea cero en los dos puntos extremos, imponemos:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 0 \\ \theta_{14} + 2\theta_{15}(126) + 3\theta_{16}(126)^2 &= 0\end{aligned}$$

En el polinomio  $\lambda_t$  imponemos análogas restricciones.

El resultado de esta estimación restringida es una serie temporal  $v_{d,t}$  para cada uno de los contratos vivos en  $t$ . O dicho de otro modo, un residuo  $v_{d,t}$  para cada contrato y cada día.

Ahora bien, cada  $v_{d,t}$  es el producto  $\lambda_t u_t$ . Bajo la restricción de identificación  $var(u_{d,t}) = 1$ , podemos identificar  $\lambda_t$  estimando una regresión de  $|v_{d,t}|$  como proxy de  $\lambda_t$ , sobre  $d_t$  y sus potencias:

$$\begin{aligned}|v_{d,t}| &= (\lambda_1 + \lambda_2 d_t + \lambda_3 d_t^2 + \lambda_4 d_t^3)D_1 \\ &+ (\lambda_5 + \lambda_6(d_t - 126) + \lambda_7(d_t - 126)^2 + \lambda_8(d_t - 126)^3)D_2 \\ &+ (\lambda_9 + \lambda_{10}(d_t - 252) + \lambda_{11}(d_t - 252)^2 + \lambda_{12}(d_t - 252)^3)D_3 \\ &+ (\lambda_{13} + \lambda_{14}(d_t - 378) + \lambda_{15}(d_t - 378)^2 + \lambda_{16}(d_t - 378)^3)D_4 + \xi_{d,t}\end{aligned}$$

A partir de esta regresión,  $\lambda_{d,t}$  se define como el valor ajustado en la misma, es decir,  $\lambda_{d,t} = |v_{d,t}| - \xi_{d,t}$

Con la información obtenida de este modo, podemos calcular la proporción de varianza explicada por los factores comunes para cada contrato. Para ello, elevamos al cuadrado el valor numérico de  $\theta_{d,t}$  ajustado en la primera de las dos regresiones,  $\theta_{d,t}^2$ , y el valor numérico de  $\lambda_{d,t}$  ajustado en la segunda regresión y calculamos  $\theta_{d,t}^2 + \lambda_{d,t}^2$ , y la ratio  $\frac{\theta_{d,t}^2}{\theta_{d,t}^2 + \lambda_{d,t}^2}$

En la tercera y última etapa ajustamos un modelo DBEKK a los dos factores

$$H_t = \omega + \beta H_{t-1} \beta' + \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} \alpha'$$

Como la varianza incondicional de los dos factores es igual a uno, la matriz  $\omega$  contiene un único elemento libre, elemento que recoge la correlación incondicional de los factores.  $\beta$  y  $\alpha$  son matrices diagonales 2x2.

#### 4. RESULTADOS EMPIRICOS

##### DATOS

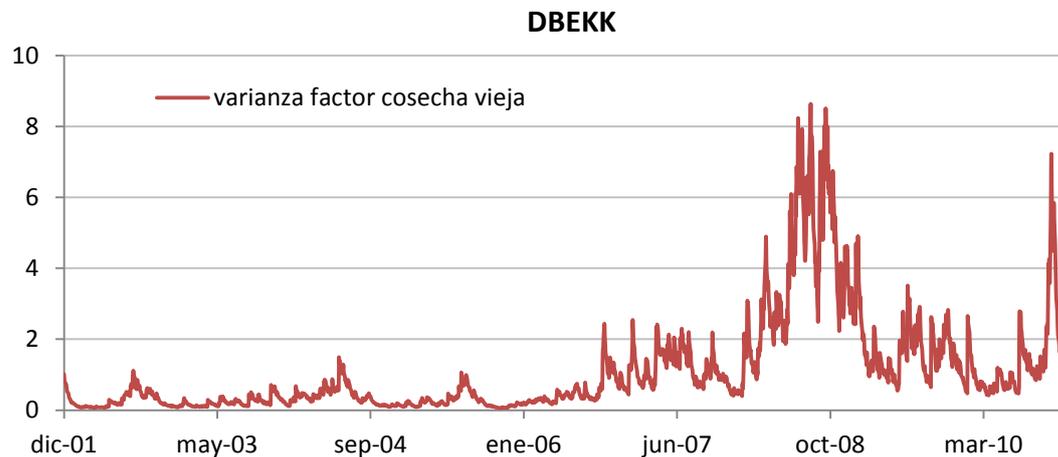
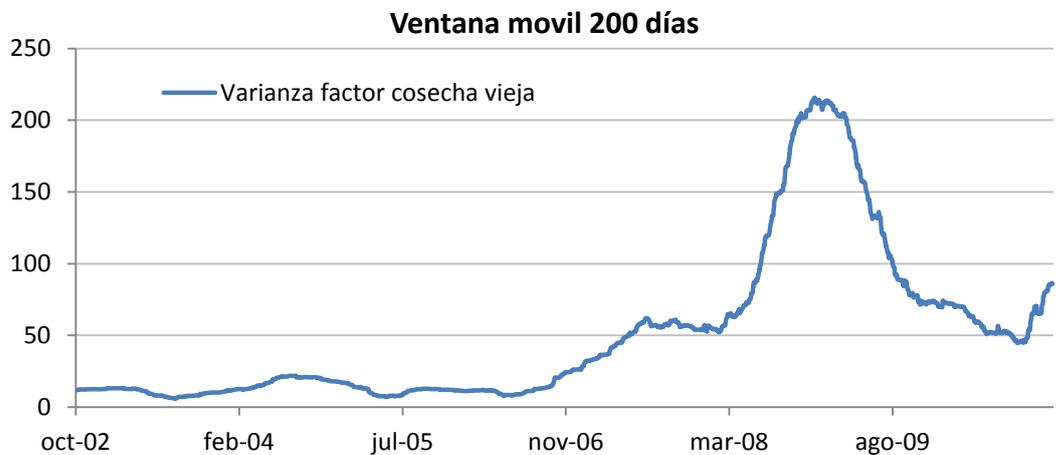
Utilizamos cambios diarios en el precio de cierre de los contratos de futuros sobre maíz negociados en el Chicago Board of Trade (CBOT). Los precios están expresados en céntimos de dólar por bushel y el tamaño del contrato son 5000 bushels. En el CBOT se negocian cinco vencimientos distintos del maíz; Marzo, Mayo, Julio, Septiembre y Diciembre. La liquidación se produce mediante la entrega física de la mercancía en alguna de las localidades especificadas en el contrato. El “*first notice day*” es aproximadamente el primer día del mes de vencimiento, y es, a partir de esa fecha y hasta aproximadamente el último día de negociación, cuando una posición corta puede manifestar a la cámara de compensación su intención de hacer entrega.

El periodo de muestra abarca desde el 18-12-2001 hasta el 14-12-2010, durante este periodo se negocian 51 contratos distintos y el número total de observaciones es de 24992. Cada vencimiento comienza a negociarse entre un año y medio y tres años y medio antes de la expiración. El momento concreto en que comienza a negociarse cada vencimiento varía cada año lo que provoca que el número de contratos negociados en un día concreto sea distinto cada año. Durante el periodo de muestra el número de contratos negociados en un día determinado va desde un máximo de 13 contratos hasta un mínimo de 7 contratos. En la tabla siguiente se muestran algunos estadísticos descriptivos de la muestra.

<i>Media</i>	0.07
<i>Desviación típica</i>	6.54
<i>Asimetría</i>	-0.21
<i>Curtosis</i>	7.94

## ESTIMACIONES

En el siguiente gráfico se muestra la varianza condicional del factor asociado a la cosecha vieja obtenida con una ventana móvil de 200 días y la obtenida con el modelo DBEKK.



En ambos gráficos se pueden apreciar las importantes diferencias en los niveles de volatilidad que se producen a lo largo del periodo de muestra, es por ello que, se ha considerado oportuno presentar los resultados del estudio para dos periodos distintos. En primer lugar se ha estimado el modelo para la totalidad del periodo muestral y en segundo lugar se han obtenido estimaciones para los cuatro primeros años de muestra, donde se observan unos niveles de volatilidad más estables.

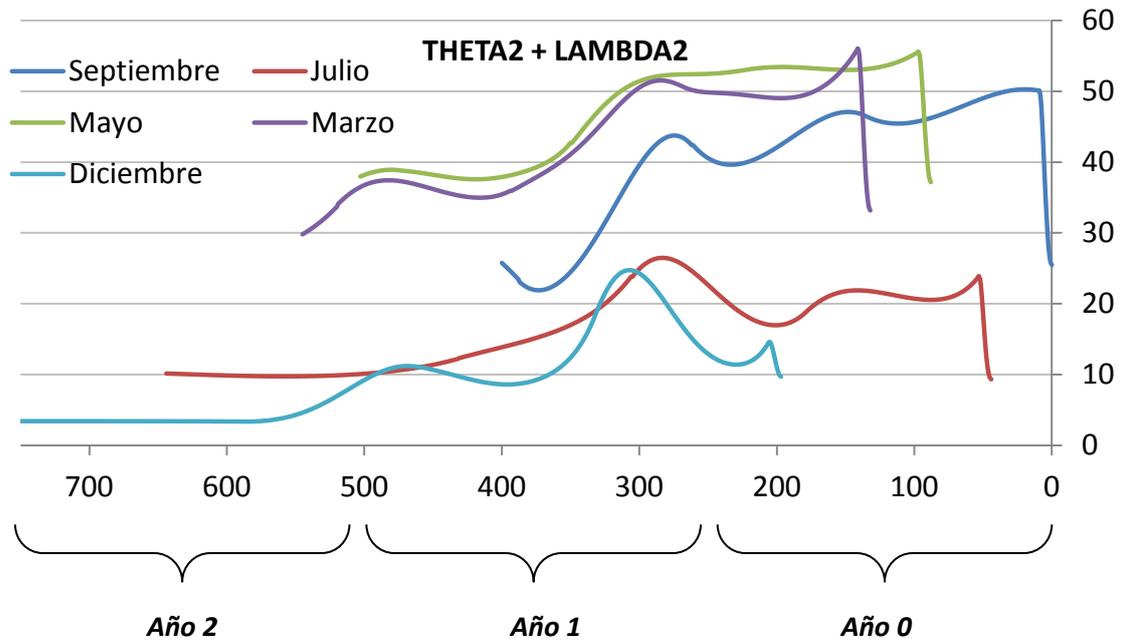
En la estimación de los splines se han ubicado nodos en 9, 135, 262 y 388 en los cinco vencimientos y se ha supuesto que el contrato de Septiembre está únicamente afectado por el factor de la cosecha vieja. Dado el elevado número de parámetros estimados en los splines, se presentan los resultados mediante gráficos en lugar de detallar el valor numérico de los parámetros estimados. En los siguientes gráficos se muestran las estimaciones de los cinco vencimientos presentadas en distintas formas. En todos los gráficos se muestran las estimaciones durante un ciclo de tres años, todos los contratos representados deben hacer entrega durante el año 0 representado entre 250 y 0 en el eje de abscisas, la entrega de todos

estos contratos deberá de realizarse con la cosecha del año uno, el periodo de cosecha del año 1 se localiza entre 350 y 250 del eje de abscisas.

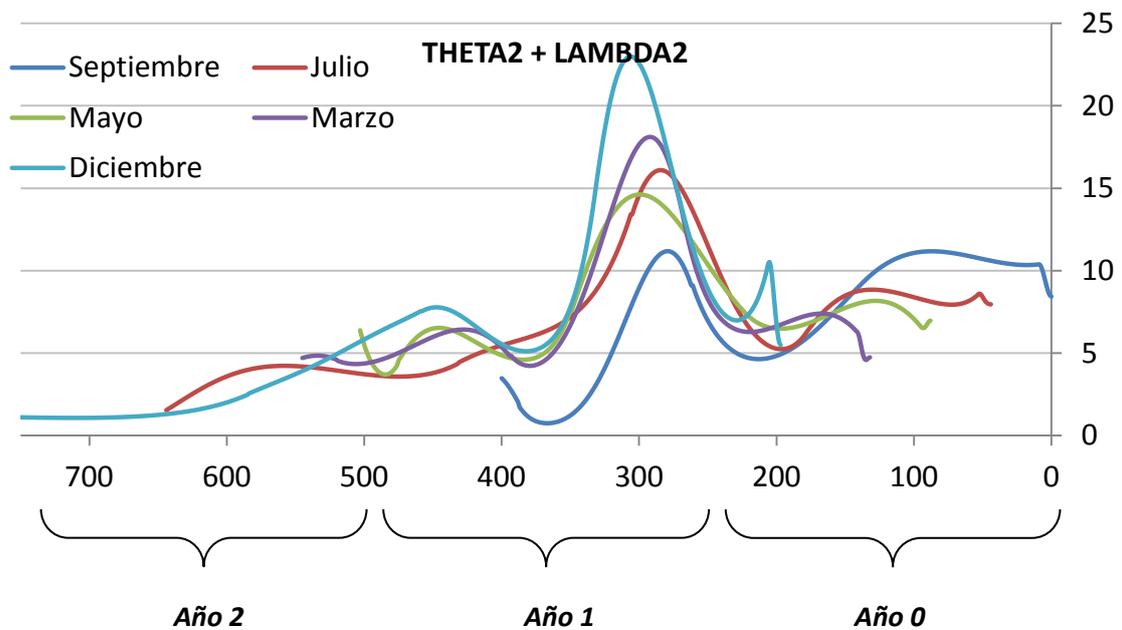
En el grafico 1 se representa la varianza incondicional en función del día de negociación. En el modelo POTS la varianza incondicional se obtiene como  $(\theta_{d,t}^2 + \lambda_{d,t}^2)$ .

**GRAFICO 1**

Muestra completa



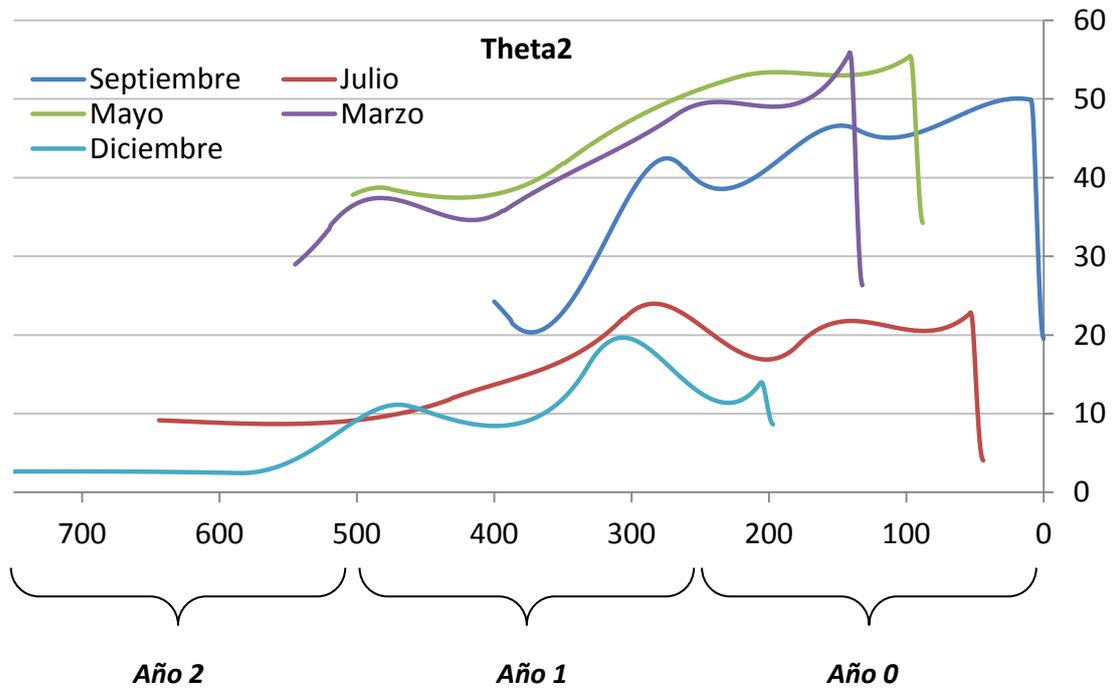
Muestra parcial



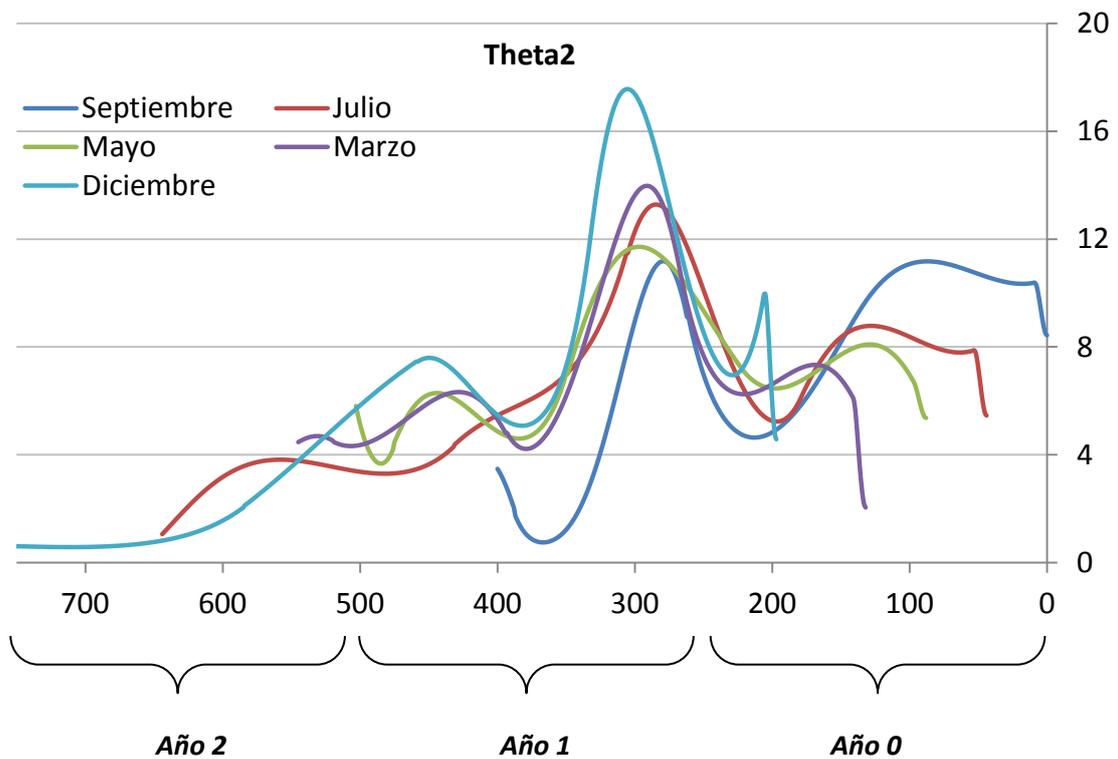
En el gráfico 2 se representa el componente factorial de la varianza incondicional ( $\theta_{a,t}^2$ ) en función del día de negociación.

GRAFICO 2

Muestra completa



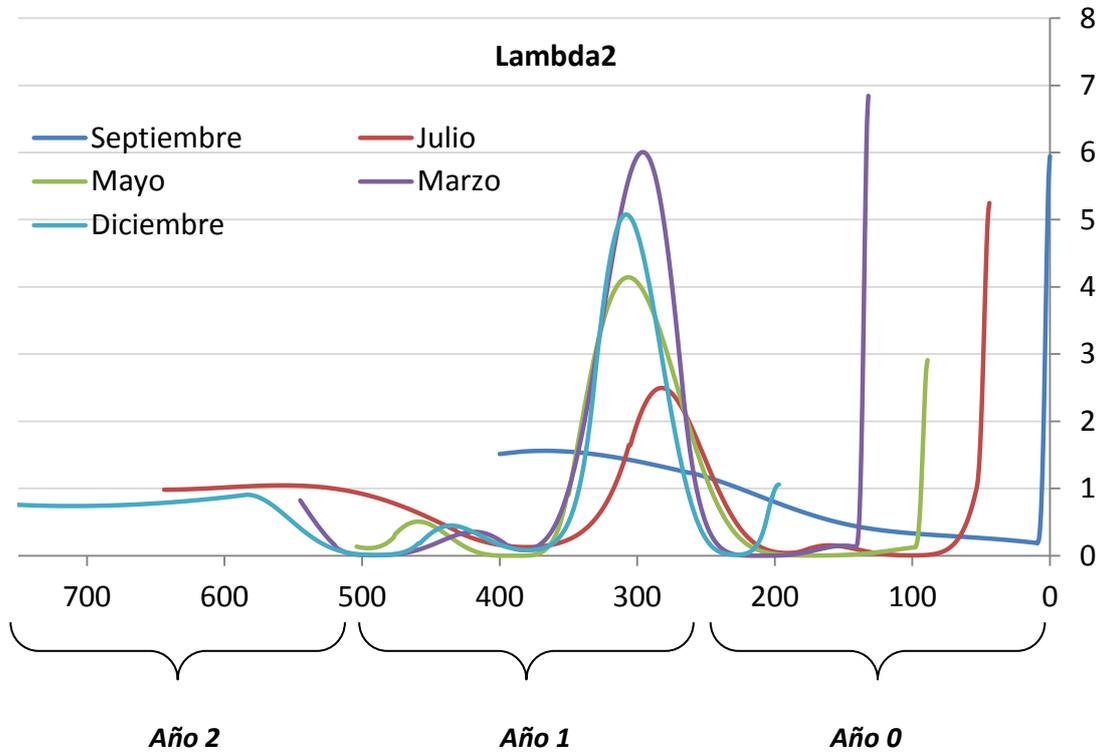
Muestra parcial



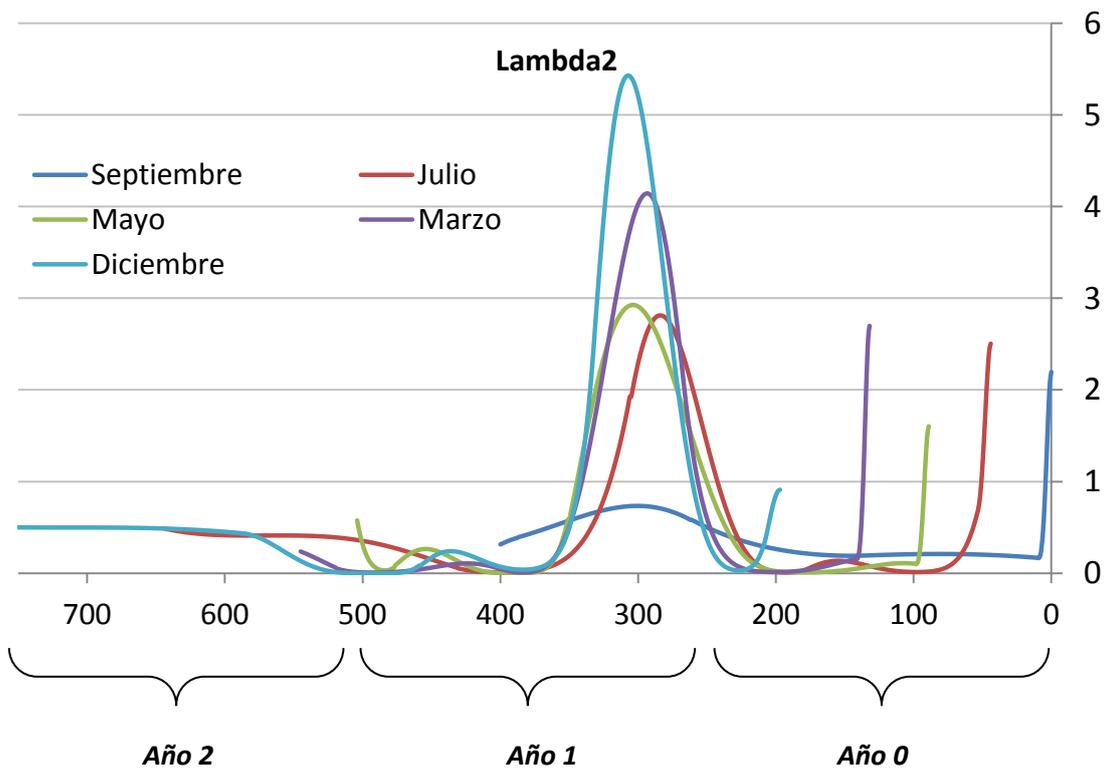
En el grafico 3 se representa el componente idiosincrático ( $\lambda_{d,t}^2$ ) en función del día de negociación.

**GRAFICO 3**

Muestra completa



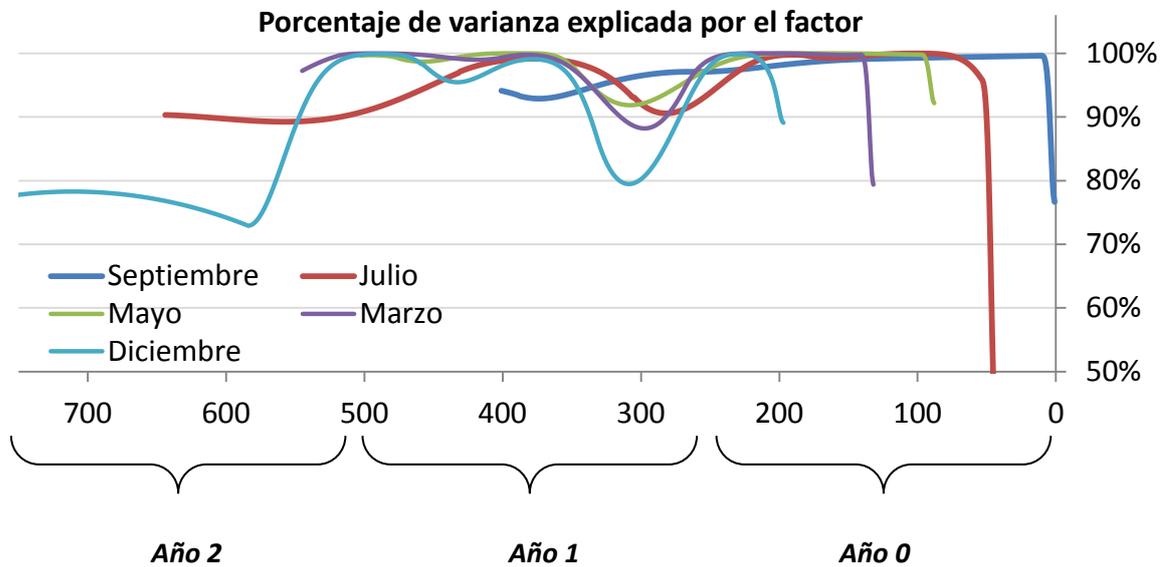
Muestra parcial



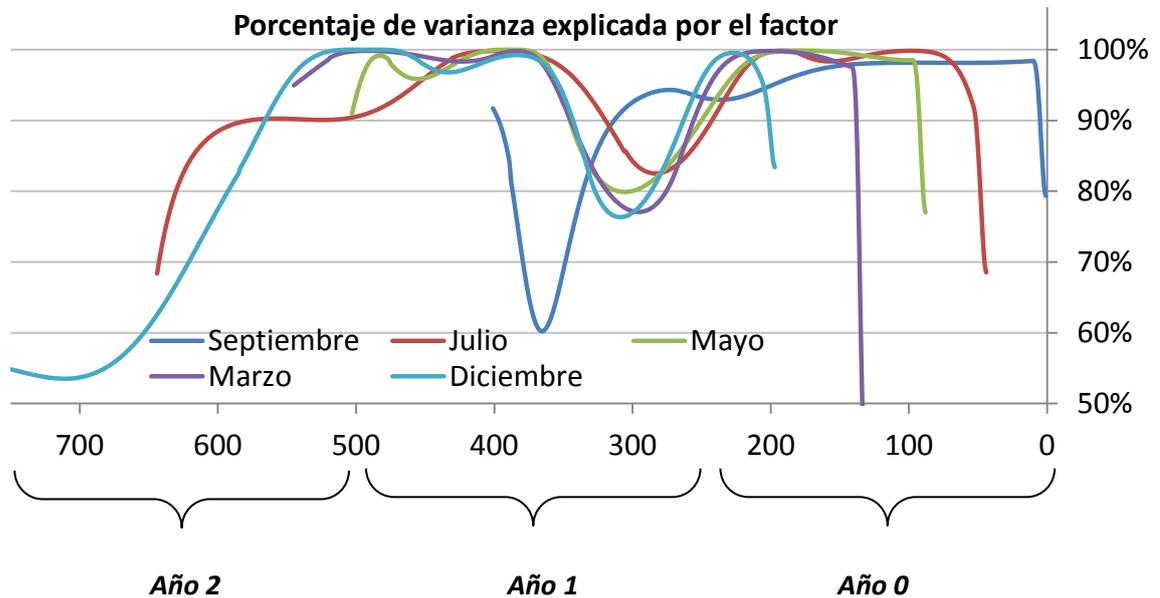
Por último, en el gráfico 4 se representa el porcentaje de varianza explicada por el componente factorial  $\left(\frac{\theta_{a,t}^2}{\theta_{a,t}^2 + \lambda_{a,t}^2}\right)$ .

GRAFICO 4

Muestra completa



Muestra parcial



Las diferencias en los resultados obtenidos con los dos periodos considerados se hacen más evidentes en el grafico 1, en primer lugar se aprecia la diferencia en los niveles de varianza, como cabria esperar, los niveles en varianza obtenidos con la muestra completa son muy superiores a los obtenidos con la muestra parcial. En segundo lugar podemos apreciar como la varianza incondicional de los contratos de Julio y Diciembre obtenida con toda la muestra es muy inferior a la del resto de contratos. La segunda diferencia tiene una difícil justificación, ya que si bien, esperamos comportamientos distintos entre vencimientos, cabe esperar que esas

diferencias se mantengan dentro de unos límites razonables. En este sentido consideramos que las estimaciones obtenidas con la muestra completa se ven de alguna manera afectadas negativamente por los distintos regímenes de volatilidad registrados en este periodo, es por ello que, de cara a analizar los aspectos motivados en las secciones anteriores, utilicemos los resultados obtenidos con la muestra parcial, al considerar que estos, representan una situación más acorde con la realidad del mercado.

#### **ESTACIONALIDAD**

Como se ha comentado, el flujo de información que determina los precios del maíz no es lineal a lo largo del año, si no que es mayor en épocas determinadas del año, en este sentido, cabe esperar que durante la época de siembra el precio de todos los contratos sea más volátil, en especial en aquellos contratos que deban hacer entrega de esa cosecha. En el grafico 1 se aprecia como en la época de cosecha del maíz que ha de ser entregado (en torno a 300 del eje de abscisas) la varianza aumenta en todos los vencimientos, tras la cosecha, cuando el maíz ya está almacenado y se conoce la oferta total para la temporada se produce un paulatino descenso en la varianza de todos los contratos, en la época de cosecha del año anterior los efectos no parecen relevantes. En este sentido nuestra conclusión es que la estacionalidad en el mercado de maíz tiene claros efectos en la volatilidad de los futuros.

#### **EFFECTO SAMUELSON**

La estacionalidad recogida por el modelo provoca que en el grafico 1 se observe una versión particular del efecto Samuelson. El efecto que la estacionalidad tiene sobre la varianza supone evidencia en contra del efecto Samuelson entendido en su sentido estricto, sin embargo, entendemos que en este caso la relación entre volatilidad y tiempo hasta vencimiento merece un análisis más pormenorizado. Dejando a un lado el efecto estacional, puede percibirse una tendencia alcista de la varianza a medida que nos acercamos al vencimiento. Por otro lado, si nos fijamos en un día de negociación concreto, observamos que los contratos suelen tener mayor varianza cuanto menor es el tiempo hasta su vencimiento, lo que supone un cumplimiento del efecto Samuelson condicionado al día de negociación. Por tanto concluimos que en el mercado del maíz y ante presencia de estacionalidad se cumple una versión no lineal y no monótona del efecto Samuelson.

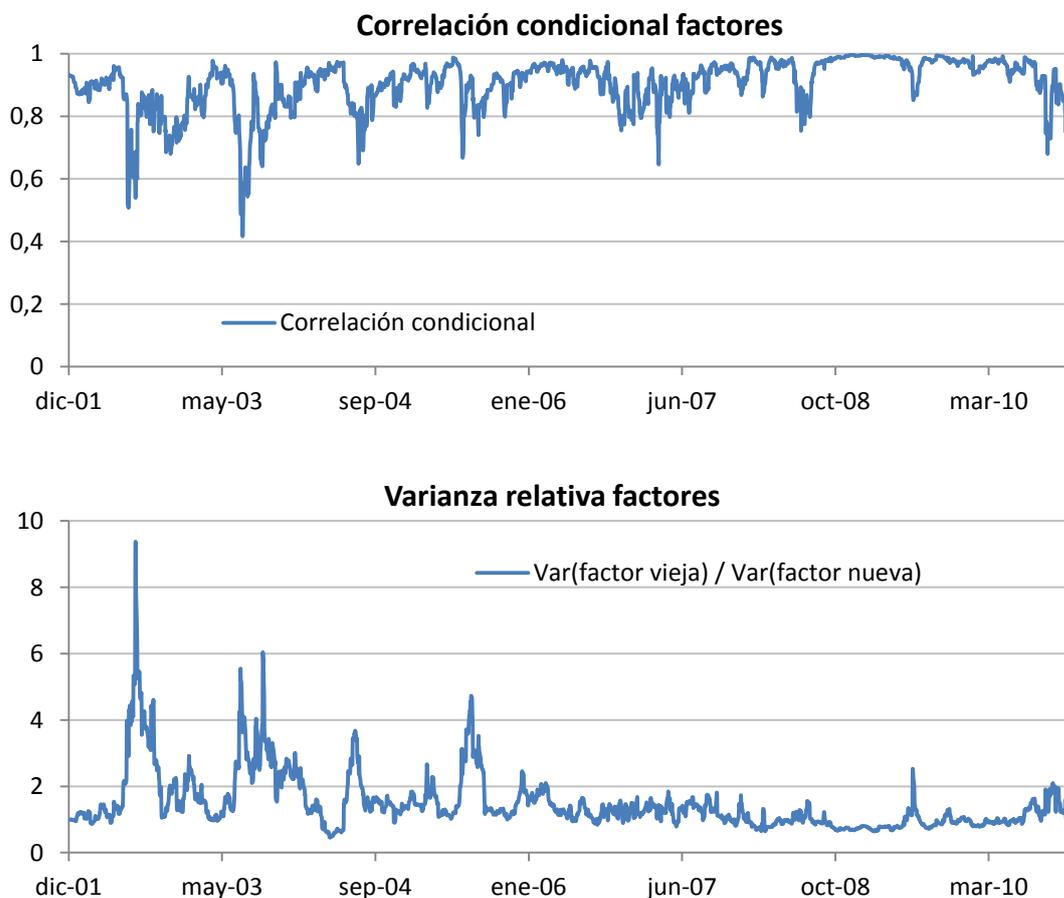
#### **THEORY OF STORAGE**

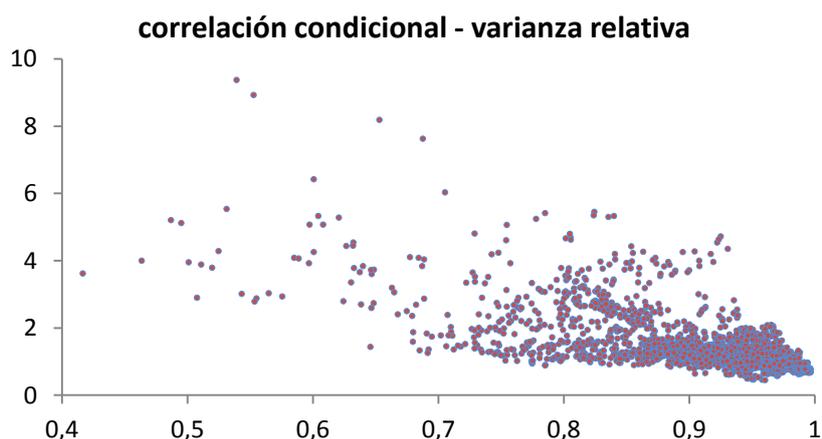
Según la “*Theory of storage*” las diferencias en precio de los distintos vencimientos se deben principalmente a los costes del almacenamiento, en este sentido cabe esperar un alto porcentaje de varianza explicada por el factor común en los precios de los distintos vencimientos. En la siguiente tabla se muestra el porcentaje medio de varianza explicado por el factor en cada vencimiento.

<i>Sep</i>	<i>Jul</i>	<i>May</i>	<i>Mar</i>	<i>Dic</i>	<i>Total</i>
92%	93%	94%	94%	82%	91%

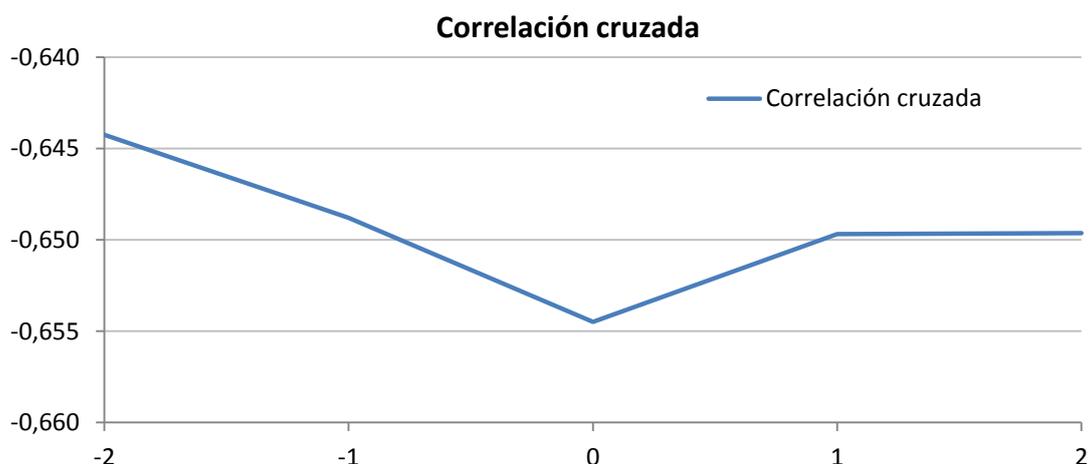
Los altos porcentajes de varianza explicados por los factores son consistentes con los conceptos promulgados por la “*Theory of storage*”. Estos resultados son muy próximos a los obtenidos por Smith en el estudio de referencia. La estimación del modelo DBEKK nos proporciona la serie de correlaciones condicionales entre los dos factores considerados. En una situación inventarios normales cabe esperar una correlación cercana a uno, en situaciones de inventarios bajos y debido a la reticencia de los tenedores de la mercancía física a realizar arbitraje inverso puede romperse la relación entre los precios de los distintos contratos. En este sentido y bajo la *Theory of storage* se pueden identificar las épocas de inventarios bajos, ya que estas, se corresponden con las épocas de descensos en la correlación condicional de los factores. En épocas de inventarios bajos los shocks de demanda provocan un aumento en la varianza de los contratos que han de hacer entrega de la cosecha vieja por lo que debe existir una correspondencia entre las épocas de baja correlación entre los factores y las épocas donde la varianza de los contratos afectados por la cosecha vieja excede a la varianza de los contratos afectados por la cosecha nueva. En el grafico 5 se representan la correlación condicional, la varianza condicional relativa de los factores y la nube de puntos entre estas dos series, donde se puede apreciar la correspondencia esperada. Un análisis más profundo consistiría en consultar la información relativa al nivel de inventarios publicada con frecuencia trimestral por el USDA para confirmar que los picos de varianza relativa se corresponden con los periodos de inventarios bajos.

**GRAFICO 5**





Con objeto de detectar una posible relación de causalidad, se han obtenido las correlaciones cruzadas entre la varianza relativa y la correlación condicional, en el siguiente grafico se representan los resultados obtenidos, se puede observar que la menor correlación se obtiene en el punto 0 del eje x donde alcanza un valor de -0.6545, es decir, la menor correlación se obtiene tomando las observaciones contemporáneas por lo que no encontramos una relación de causalidad de alguna de las series hacia la otra.



#### **VOLATILIDAD DURANTE EL MES DE ENTREGA**

Los costes asociados a la entrega física de la mercancía en un mercado de futuros dependen en gran medida de la existencia o inexistencia de un mercado de contado lo suficientemente líquido en la localidad de entrega especificada en el contrato. La inexistencia de un mercado líquido en la localidad de entrega implica unos costes de entrega elevados, costes que entre otros pueden responder a la necesidad de almacenar o transportar la mercancía desde otros puntos donde exista un mercado más líquido. En estos casos, el precio de los contratos puede variar por cuestiones no relacionadas con los fundamentales del mercado durante el periodo de entrega, mostrándose por tanto, una mayor influencia del componente idiosincrático.

En el gráfico 4 se puede observar como el porcentaje de varianza explicada por el factor desciende bruscamente al comenzar el mes de entrega en todos los vencimientos. Como se puede observar en los gráficos 2 y 3 este descenso en el porcentaje está provocado principalmente por un descenso en el componente factorial y en menor medida por un aumento del componente idiosincrático. El mayor peso del componente idiosincrático es síntoma de ineficiencia en el proceso de entrega del mercado de futuros sobre maíz del CBOT.

Las medidas adoptadas por el CBOT en el 2001 parecen haber mejorado la eficiencia en el proceso de entrega ya que en nuestra muestra se observa un descenso menos pronunciado que el que se observa en las estimaciones realizadas por Smith con una muestra anterior a la implementación efectiva de las medidas mencionadas, sin embargo y debido a las diferencias en el proceso de estimación de los dos estudios tomamos estas conclusiones con la debida cautela.

Un aspecto reflejado en el gráfico 4 para el que no encontramos una justificación teórica es el descenso en el porcentaje de varianza explicado por el componente factorial en la época de cosecha del maíz que ha de ser entregado (300 eje de abscisas), este descenso viene provocado por un aumento considerable del componente idiosincrático, estos resultados son diferentes a los de Smith, en sus resultados no se refleja este descenso, estas diferencias pueden venir explicadas por estimar con diferentes muestras o más probablemente por una limitación en el procedimiento de obtención de los factores comunes.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente estudio se aplica el modelo POTS desarrollado por Aaron Smith en un artículo de 2005 empleando un procedimiento alternativo de estimación. El procedimiento alternativo de estimación se implementa por etapas a diferencia del procedimiento original en el que se maximiza una verosimilitud en función de la totalidad de parámetros de forma simultánea. En el proceso de estimación desarrollado la principal dificultad ha sido la obtención de las series de factores, para tal fin, se ha probado con dos procedimientos distintos, el análisis de componentes principales y el roll-over de contratos aconsejado por Smith. Con el segundo procedimiento se han obtenido resultados más satisfactorios y ha sido el empleado finalmente en los resultados presentados. Otra cuestión clave ha sido la localización de los splines ya que las estimaciones se han mostrado muy sensibles en este aspecto.

En líneas generales, los resultados y conclusiones obtenidas han sido muy parecidos a las obtenidas en el artículo de referencia que emplea el método de estimación original. La estacionalidad en oferta del mercado de maíz tiene implicaciones importantes en la dinámica de la volatilidad de sus productos derivados. Se ha encontrado evidencia a favor del efecto Samuelson y de la *"Theory of storage"*. El aumento del componente idiosincrático durante el mes de entrega pone de manifiesto la ineficiencia en el proceso de entrega.

También existen algunas discrepancias entre los resultados. En nuestras estimaciones no se produce un aumento de la varianza durante el mes de entrega mientras que en las estimaciones de Smith se produce un aumento importante. En nuestros resultados se refleja

un incremento importante del componente idiosincrático de la varianza durante la época de cosecha mientras que en los resultados de Smith tal incremento no se produce. Las diferencias obtenidas pueden deberse a las diferentes muestras empleadas o bien a las diferencias en el procedimiento de estimación. La respuesta a esta pregunta podría encontrarse empleando ambos métodos de estimación sobre la misma muestra.

#### **BIBLIOGRAFIA**

Smith A.2005. *Partially overlapping time series: A new model for volatility dynamics*.

Diebold FX, Nerlove M.1989. *The dynamics of exchange rate volatility: a multivariate latent factor ARCH model*.

Stein. 1986. *The Economics of Futures Markets*

Samuelson PA. 1965. *Proof that properly anticipated futures prices fluctuate randomly*.

Working H.1949. *The theory of price storage*.

Keynes JM. 1930. *A Treatise on Money*.

## ANEXO 1: ESTIMACIÓN DEL MODELO POTS

$$\Delta F_{d,t} = \theta_{d,t} C'_{d,t} \varepsilon_t + \lambda_{d,t} u_{d,t} \quad (1)$$

$$\Delta F_{d,t} = F_{d,t} - F_{d+1,t-1}$$

Donde  $d$  representa el tiempo hasta vencimiento y  $t$  el momento temporal de la observación,  $\theta_{d,t}$  representa la sensibilidad a los factores y  $\lambda_{d,t}$  representa la desviación típica de la innovación idiosincrática, estos dos parámetros son funciones deterministas de  $d$  y de  $t$  y capturan los efectos de la estacionalidad y del tiempo hasta vencimiento sobre los dos componentes de la volatilidad de los distintos contratos.  $C_{d,t}$  es un vector 2x1 que selecciona que factor o combinación lineal de los factores ha de aplicarse al contrato con vencimiento en  $d$  (en cada  $t$  se determina si un contrato pertenece a cosecha nueva o vieja, todos los contratos excepto el de septiembre son función de un único factor).  $u_{d,t}$  es un ruido blanco y  $\varepsilon_t$  es un vector 2x1 que representa las innovaciones en los factores.

Suponiendo:

$$\Omega = E[\varepsilon_t \varepsilon'_t] = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad c'_{d,t} \Omega c_{d,t} = 1 \quad E[\varepsilon_s u_{d,t}] = 0 \quad E[u^2_{d,t}] = 1$$

$$E[u_{d,t} u_{k,t}] = 0 \quad \text{Para todo } s, t, d \text{ y } k$$

Basándose en la falta de evidencia sobre la existencia de una prima de riesgo se asume:

$$E(\Delta F_{d,t} | F^{t-1}) = 0$$

El autor aconseja el no transformar la serie tomando logaritmos ya que al ser el precio a futuro una martingala, el log del precio a futuro tiene media negativa y posiblemente cambiante en el tiempo.

Bajo estos supuestos se cumple  $E(\Delta F^2_{d,t}) = \theta^2_{d,t} + \lambda^2_{d,t}$ , es decir, la varianza incondicional es una función determinista de  $d$  y de  $t$  (diferente para cada vencimiento). El vector de innovaciones  $[\varepsilon_t]$  se modeliza con un modelo BEKK de volatilidades condicionales bivalente, por tanto la volatilidad condicional tiene dos componentes, uno determinista representado por  $\theta_t$  y  $\lambda_t$  y otro estocástico representado por la matriz de covarianzas condicional de los factores.

Incluyendo todas las observaciones de una misma fecha en un mismo vector, el modelo se puede representar como:

$$\Delta F_t = \theta_t C_t \varepsilon_t + \lambda_t u_t \quad E(\Delta F_t \Delta F'_t | F^{t-1}) = \Sigma_t = \theta_t C_t H_t C'_t \theta_t + \lambda_t^2$$

Donde  $\theta_t$  y  $\lambda_t$  son matrices diagonales  $n_t \times n_t$  que representan las sensibilidades a los factores y la volatilidad idiosincrática,  $C_t$  es una matriz  $n_t \times 2$ ,  $\varepsilon_t$  es 2x1 y  $u_t$  y  $\Delta F_t$  es  $n_t \times 1$ . Donde  $n_t$  es el número de contratos negociados en  $t$ ,  $n_t$  no es constante pero si determinista. Los factores  $\varepsilon_t$  se modelizan con un BEKK multivariante de volatilidades condicionales.

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_t' | F^{t-1}) = H_t$$

$$H_t = \omega + \beta H_{t-1} \beta' + \alpha E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' | F^{t-1}) \alpha' \quad (2)$$

Donde  $\omega, \beta$  y  $\alpha$  son matrices  $2 \times 2$ . Como la varianza incondicional de los dos factores es igual a uno la matriz  $\omega$  tiene un único elemento no restringido, elemento relacionado con la correlación incondicional de los factores. A la hora de estimar deberemos restringir sustituyendo:

$\omega = \Omega - \beta \Omega \beta' - \alpha \Omega \alpha'$  Donde  $\Omega$  es la matriz de covarianzas incondicional de  $\varepsilon_t$  que contiene el parámetro rho.

En el modelo BEKK aparece  $E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' | F^{t-1})$ , los factores son latentes y cuando vayamos a estimar el BEKK lo haremos utilizando una estimación de los factores, por eso aparece el operador esperanza condicionada a  $F^{t-1}$ , condicionada a  $F^{t-1}$  por que en el filtro de Kalman utilizamos información del mismo t para realizar la estimación del factor latente en t.

En el artículo se pone de relieve la importancia de especificar  $H_t \quad F^{t-1}$  medible ya que existe la posibilidad de incluir  $E(\varepsilon_t \varepsilon_t' | F^t)$  en lugar de  $E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' | F^{t-1})$  puesto que la serie de los factores la hemos obtenido previamente con el filtro de Kalman. Si se especificara  $H_t \quad F^t$  medible la estructura dinámica sería muy compleja y dificultaría mucho la estimación.

La innovación  $F^{t-1}$  medible que aparece en (2) es:

$$E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' | F^{t-1}) = \varepsilon_{t-1|t-1} \varepsilon_{t-1|t-1}' + P_{t-1|t-1}$$

$$\varepsilon_{t-1|t-1} = E(\varepsilon_{t-1} | F^{t-1}) \quad P_{t-1|t-1} = E\left(\left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1|t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1|t-1}\right)' | F^{t-1}\right)$$

Definiendo  $\Sigma_t = E(\Delta F_t \Delta F_t') = \theta_t C_t H_t C_t' \theta_t + \lambda_t^2$  y suponiendo normalidad el filtro de kalman resulta en:

$$\varepsilon_{t|t} = H_t C_t' \theta_t \Sigma_t^{-1}$$

$$P_{t|t} = H_t - H_t C_t' \theta_t \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t$$

El filtro de Kalman estima el estado de un sistema dinámico, incluso si la forma precisa del sistema es desconocida, este procedimiento de estimación proporciona estimaciones pasadas, presentes y futuras de las variables de estado (no observables).

El filtro de Kalman se implementa en dos etapas: Predicción y corrección. En la primera etapa se estima la variable de estado con el *dynamic model*. En la segunda etapa la primera estimación es corregida empleando el *observation model* de forma que la covarianza del error del estimador se minimiza, en este sentido es un estimador óptimo.

**Predicción:** En esta etapa obtenemos la predicción a priori a partir del dynamic model

*Dynamic model:* Modelo que describe la evolución de las variables de estado (factores) a lo largo del tiempo.

Dado que se ha supuesto que los precios a futuro son martingalas.  $E(\Delta F_t | F^{t-1}) = 0$

$$\text{Tenemos: } E(\varepsilon_t | F^{t-1}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{t1} | F^{t-1}) \\ E(\varepsilon_{t2} | F^{t-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El modelo que nos describe la evolución de las variables de estado a lo largo del tiempo lo podemos expresar como:

$$E(\varepsilon_t | F^t) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{t1} | F^t) \\ E(\varepsilon_{t2} | F^t) \end{bmatrix} = E(\varepsilon_t | F^{t-1}) + n(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix}$$

Donde  $E(\varepsilon_t | F^t)$  es la predicción mejorada o a posteriori (empleamos información de t).

$E(\varepsilon_t | F^{t-1})$  Representa la predicción a priori ya que empleamos información de t-1

El vector  $n(t)$  recoge el error de predicción a priori, suponemos que este error se distribuye normal multivariante.

Para realizar la predicción a priori empleamos el dynamic model obviando el vector  $n(t)$ , por tanto la predicción a priori será  $E(\varepsilon_{ti} | F^{t-1}) = 0 \quad i=1,2$ .

Como hemos supuesto en los factores poseen una dinámica GARCH tenemos que  $n(t) = N(0, H_t)$ , por lo que la predicción a priori de la matriz de varianzas y covarianzas de los factores será igual a  $H_t$  ( $F^{t-1}$  medible). Al igual que con la predicción a priori de los factores latentes, esta predicción a priori de la matriz de V-C será corregida en la fase de corrección utilizando información ( $F^t$  medible) obteniendo como resultado una matriz de V-C corregida que denotaremos como  $H_t^+$ .

**Corrección:** En esta etapa corregimos la predicción a priori obteniendo como resultado la predicción a posteriori, para ello utilizamos información del mismo t, información que conocemos y que está contenida en  $\Delta F_t$ . Para llevar a cabo esta predicción a posteriori empleamos el *observation model*.

*Observation model:* Representa la relación entre los factores latentes y las mediciones ( $\Delta F_t$ ). En nuestro caso vendrá dado por el modelo:

$$\Delta F_t = \theta_t C_t \varepsilon_t + \lambda_t u_t$$

Como hemos visto en la fase de predicción, la predicción a posteriori o corregida es:

$$E(\varepsilon_t | F^t) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{t1} | F^t) \\ E(\varepsilon_{t2} | F^t) \end{bmatrix} = E(\varepsilon_t | F^{t-1}) + n(t)$$

Conocido que  $E(\varepsilon_t | F^{t-1}) = 0$ , tenemos que  $E(\varepsilon_t | F^t) = n(t)$

La matriz de Covarianzas corregida la podemos expresar como:

$$H_t^+ = H_t + \Delta H_t$$

Donde  $\Delta H_t = E[n(t) n(t)']$

Utilizando los resultados del documento que he utilizado como guión (resultados que no se desarrollan) obtengo las expresiones para  $n(t)$  y  $\Delta H_t$ .

$$n(t) = H_t C'_t \theta_t (\theta_t C_t H_t C'_t \theta_t + \lambda_t^2)^{-1} (\Delta F_t - E(\varepsilon_t | F^{t-1}))$$

$$n(t) = H_t C'_t \theta_t (\theta_t C_t H_t C'_t \theta_t + \lambda_t^2)^{-1} (\Delta F_t)$$

$$n(t) = H_t C'_t \theta_t \Sigma_t^{-1} (\Delta F_t) = E(\varepsilon_t | F^t) = \varepsilon_{t|t}$$

En esta última expresión, la predicción a priori y la medición se combinan y ponderan para obtener el estado a posteriori o corregido, si la covarianza de la medición es menor que la del estado a priori, la ponderación otorgada a la medición será alta y la otorgada a la predicción a priori será baja, de esta forma se reduce la incertidumbre.

La matriz de Covarianzas a posteriori se obtiene a partir de la ley de propagación del error, concretamente, si desarrollamos la expresión  $\Delta H_t = E[n(t) n(t)']$

$$\Delta H_t = E[n(t) n(t)'] = H_t C'_t \theta_t \Sigma_t^{-1} \Delta F_t \Delta F_t' \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t = H_t C'_t \theta_t \Sigma_t^{-1} \Sigma_t \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t = H_t C'_t \theta_t \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t$$

Por lo que la matriz de Covarianzas a posteriori será:

$$H_t^+ = H_t + \Delta H_t = H_t + H_t C'_t \theta_t \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t = E((\varepsilon_t - \varepsilon_{t|t})(\varepsilon_t - \varepsilon_{t|t})' | F^t) = P_{t|t}$$

La expresión obtenida para  $\varepsilon_{t|t}$  coincide exactamente con la del artículo de Smith, La expresión obtenida para  $P_{t|t}$  coincide en todo salvo en el signo, yo llego a una suma y en el artículo llega a una resta. Con estas expresiones obtenemos las series de los factores de forma recursiva y posteriormente el componente  $E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} | F^{t-1})$  necesario para la estimación del modelo BEKK.

Una vez obtenidas las expresiones que nos proporcionan la estimación de los factores latentes pasamos a modelizar los dos componentes deterministas de la varianza de  $\Delta F_{t,d}$ , es decir,  $\theta_{d,t}$  y  $\lambda_{d,t}$ , para ello emplearemos splines cúbicos.

Cada spline consiste en una secuencia de funciones cubicas, estas funciones cubicas se conectan en los nodos las dos funciones cubicas adyacentes deberán tener el mismo valor y pendiente.

Por la naturaleza de los mercados de futuros, tenemos que en cada  $t$  el correspondiente valor de  $d$  será uno de los del pequeño conjunto determinado por los contratos negociados en dicha fecha  $t$ . Debido a esto no es necesario modelizar  $\theta_t$  y  $\lambda_t$  a lo largo de todo el plano  $[d, t]$ , mejor ajustar dos splines (uno para theta y otro para lambda) para cada uno de los vencimientos (marzo, mayo,.....). Esto supone estimar un total de 10 splines y el número total de parámetros dependerá del número de nodos contemplados. Para un vencimiento en concreto tenemos:

$$\theta_{d,t} = \sum_{j=1}^K (\phi_{0j} + \phi_{1j}(d_t - k_{j-1}) + \phi_{2j}(d_t - k_{j-1})^2 + \phi_{3j}(d_t - k_{j-1})^3) I_{j,t}$$

$$\lambda_{d,t} = \sum_{j=1}^K \left( \gamma_{0j} + \gamma_{1j}(d_t - k_{j-1}) + \gamma_{2j}(d_t - k_{j-1})^2 + \gamma_{3j}(d_t - k_{j-1})^3 \right) I_{j,t}$$

Donde  $I_{j,t}$  es una función indicador tal que  $I_{j,t} = 1(k_{j-1} \leq d_t \leq k_j)$  y  $k = 1, 2, \dots, k$  son los nodos seleccionados previamente. La combinación  $d, t$  consigue capturar tanto los efectos del tiempo a vencimiento como de la estacionalidad. Como hemos comentado previamente debemos restringir las estimaciones de cada spline:

Las funciones que integran un determinado spline deben tener el mismo valor en los nodos, por ejemplo para theta:

$$\phi_{0j+1} = \phi_{0j} + \phi_{1j}(k_j - k_{j-1}) + \phi_{2j}(k_j - k_{j-1})^2 + \phi_{3j}(d_t - k_{j-1})^3 \quad j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Las funciones que integran un determinado spline deben tener la misma pendiente en los nodos, por ejemplo para theta:

$$\phi_{1j+1} = \phi_{1j} + 2\phi_{2j}(k_j - k_{j-1}) + 3\phi_{3j}(k_j - k_{j-1})^2 \quad j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Por último se incluyen dos últimas restricciones para forzar que la pendiente en los puntos finales sean igual a cero (esta restricción no entiendo porque la incluye).

$$\phi_{11} = 0$$

$$\phi_{1k} + 2\phi_{2k}(k_k - k_{k-1}) + 3\phi_{3k}(k_k - k_{k-1})^2 = 0$$

Incluyendo esta restricciones tenemos que cada spline es una combinación lineal de  $2K$  parámetros,  $k$  es el numero de nodos seleccionado, como hemos restringido el valor en el punto inicial y final de cada función cubica, de los cuatro parámetros (que tiene cada función cubica) únicamente existen dos libres.

El vector  $C_t$  es un vector  $n_t \times 2$  que selecciona el factor que aplica a un determinado vencimiento en un  $t$  determinado, en el maíz, todos los vencimientos salvo en Septiembre sabemos que factor es el que aplica a cada vencimiento en cada  $t$ , para ello únicamente tenemos que ver si la entrega de cada vencimiento corresponde a cosecha nueva o vieja. El mes de Septiembre vence al poco tiempo de comenzada la cosecha, por lo que en este caso el precio de futuro va a estar afectado tanto por el factor asociado a la cosecha nueva como por el factor asociado a la cosecha vieja, debemos por tanto, estimar en qué proporción afecta cada uno de ellos, dicha estimación deberá restringirse de forma que cualquier combinación lineal de los factores tenga un varianza incondicional igual a 1, es decir:

$$C'_{d,t} \Omega C_{d,t} = 1$$

Conocidas las expresiones recurrentes obtenidas por el filtro de Kalman, y las formas funcionales para  $\theta_{d,t}$  y  $\lambda_{d,t}$  pasamos al proceso de estimación propiamente dicho. El modelo propuesto en forma matricial es:

$$\Delta F_t = \theta_t C_t \varepsilon_t + \lambda_t u_t \quad E(\Delta F_t \Delta F'_t | F^{t-1}) = \Sigma_t = \theta_t C_t H_t C'_t \theta_t + \lambda_t^2$$

Recopilando los supuestos:

$$E(\Delta F_t | F^{t-1}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t | F^{t-1}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{t1} | F^{t-1}) \\ E(\varepsilon_{t2} | F^{t-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_t' | F^{t-1}) = H_t$$

$$c'_{d,t} \Omega c_{d,t} = 1 \quad E(u_t) = 0 \quad E[\varepsilon_s u_{d,t}] = 0 \quad E[u_{d,t}^2] = 1 \quad E[u_{d,t} u_{k,t}] = 0$$

Para todo  $s, t, d$  y  $k$

En el artículo no hace mención expresa, pero como maximiza una verosimilitud gaussiana supongo que implícitamente se está suponiendo (para  $\varepsilon_t$  asume normalidad cuando emplea el filtro de Kalman):

$$u_t \sim N(0, I_{nt}) \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t)$$

Para la estimación del modelo se maximiza la verosimilitud normal multivariante condicional de  $\Delta F_t$

$$L = \prod_{t=1}^T f(\Delta F_t | F^{t-1})$$

$$\begin{aligned} \log L &= \log \prod_{t=1}^T f(\Delta F_t | F^{t-1}) = \\ &= \sum_{t=1}^T \log f(\Delta F_t | F^{t-1}) = \sum_{t=1}^T \log \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nt} |\Sigma_t|^2}} e^{-\frac{1}{2} \Delta F_t' \Sigma_t^{-1} \Delta F_t} \right) = \\ &= -\frac{\bar{n}T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \Delta F_t' \Sigma_t^{-1} \Delta F_t \quad (3) \end{aligned}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{t=1}^T nt}{T}$$

Observamos que en la verosimilitud resultante todos los parámetros a estimar se encuentran dentro de  $\Sigma_t$

$$\Sigma_t = \theta_t C_t H_t C_t' \theta_t + \lambda_t^2$$

El autor afirma que la verosimilitud (3) se puede maximizar directamente con métodos numéricos pero advierte de que el proceso puede ser extremadamente lento debido a la no linealidad y al elevado número de parámetros a estimar. La no linealidad surge debido a que los parámetros de los splines aparecen en la expresión del modelo DBEKK, esto provoca que sea imposible obtener expresiones analíticas para el gradiente y la matriz hessiana, por lo que deberían obtenerse dichas expresiones numéricamente en cada iteración.

Si condicionamos a  $H_t$  y a  $\varepsilon_t$  el problema de maximización es mucho más simple y se pueden encontrar expresiones analíticas para el gradiente y la hessiana (supongo que con estas expresiones analíticas el proceso de estimación es más eficiente) ya que podemos obtener las derivadas parciales respecto de los parámetros de los splines. El autor aprovecha esto para diseñar un método de estimación basado en el algoritmo EM. El algoritmo EM es un método iterativo de estimación en presencia de variables latentes, en general el algoritmo EM maximiza una función de verosimilitud alternando la obtención de la esperanza de la "complete data likelihood" con respecto a las variables latentes (E-step) y maximizando esta "complete data likelihood" respecto de los parámetros (M-Step).

La "complete data likelihood" es:

$$L_c = \sum_{t=1}^T \log f(\Delta F_t | \varepsilon_t, F^{t-1}) + \sum_{t=1}^T \log f(\varepsilon_t | F^{t-1})$$

$$f(\Delta F_t | \varepsilon_t, F^{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nt} |\lambda_t|^2}} e^{-\left(\frac{1}{2}(\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_t)' \lambda_t^{-2} (\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_t)\right)}$$

$$f(\varepsilon_t | F^{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |H_t|}} e^{-\left(\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t\right)}$$

$$L_c = -\frac{\bar{n}T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\lambda_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_t)' \lambda_t^{-2} (\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_t) - \frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |H_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t$$

He conseguido obtener la expresión de la "complete data likelihood" pero no acabo de entender bien lo que se hace. Intuyo que la densidad condicional original se puede interpretar como una densidad condicionada conjunta de  $\Delta F$  y de  $\varepsilon_t$ , esto es:

$$f(\Delta F_t | F^{t-1}) = f(\Delta F_t, \varepsilon_t | F^{t-1})$$

Aprovechando la relación entre densidad condicional e incondicional podemos escribir:

$$f(\Delta F_t, \varepsilon_t | F^{t-1}) = \frac{f(\Delta F_t, \varepsilon_t | F^{t-1})}{f(\varepsilon_t | F^{t-1})} f(\varepsilon_t | F^{t-1}) = f(\Delta F_t | \varepsilon_t, F^{t-1}) f(\varepsilon_t | F^{t-1})$$

$$\log f(\Delta F_t, \varepsilon_t | F^{t-1}) = \log f(\Delta F_t | \varepsilon_t, F^{t-1}) + \log f(\varepsilon_t | F^{t-1})$$

Entiendo que el tener la verosimilitud en función de la densidad condicional nos permite realizar el proceso de estimación alternando entre la obtención de las estimaciones de  $\varepsilon_t$  y las estimaciones de los parámetros, que es en lo que finalmente estamos interesados.

La expresión anterior está en función de los factores latentes, como lo que tenemos son estimaciones de dichos factores, la "complete data likelihood" habrá que condicionarla a las estimaciones de los factores ( $\varepsilon_t | t$ ) realizadas utilizando toda la muestra ( $F^T$ ), lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned}
E(L_c|F^T) = & -\frac{\bar{n}T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\lambda_t| \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_{t|t})' \lambda_t^{-2} (\Delta F_t - \theta_t C_t \varepsilon_{t|t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \text{tr}(C_t' \theta_t \lambda_t^{-2} \theta_t C_t P_{t|t}) \\
& - \frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |H_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t|t}' H_t^{-1} \varepsilon_{t|t} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \text{tr}(H_t^{-1} P_{t|t}) \quad (4)
\end{aligned}$$

La anterior expresión aparece con esperanzas por que utilizamos estimaciones de los factores y de su matriz de Covarianzas condicionales, además, en esta expresión aparecen dos términos nuevos que no aparecían en la “completa data likelihood” anterior, los dos términos donde aparece el operador  $\text{tr}(\cdot)$ , intuyo que estos dos nuevos términos son correcciones que se incluyen para poder utilizar las estimaciones pero no he conseguido averiguar de dónde salen.

Finalmente el autor detalla los pasos necesarios para maximizar la verosimilitud (3).

- Usar el filtro de Kalman para obtener  $P_{t|t}$  y  $\varepsilon_{t|t}$  (E-Step)
- Manteniendo  $H_t$  fija, maximizar (4) respecto de los parámetros de los splines utilizando Newton-Raphson (M-Step).
- Manteniendo  $H_t$  fija, iterar en el paso 1 y pasa 2 hasta que se llegue a la convergencia.
- Manteniendo fijos los parámetros de los splines, maximizar numéricamente la verosimilitud (3) respecto a otros parámetros del modelo.
- Repetir los pasos 1-2-3-4 hasta que se llegue a la convergencia
- Finalmente utilizaremos las estimaciones obtenidas en el paso 5 como condiciones iniciales para emplear un algoritmo numérico (propone el algoritmo BHHH) para maximizar la verosimilitud (3).

En el primer paso utilizamos las estimaciones actuales (las obtenidas en la última iteración) de  $\theta_t$ ,  $\lambda_t$  y  $H_t$  para obtener las series  $\varepsilon_{t|t}$  y  $P_{t|t}$ . Para iniciar el algoritmo deberemos fijar unas condiciones iniciales de  $H_t$ ,  $\theta_t$  y  $\lambda_t$ .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{t|t} &= H_t C_t' \theta_t \Sigma_t^{-1} = H_t C_t' \theta_t (\theta_t C_t H_t C_t' \theta_t + \lambda_t^2)^{-1} \\
P_{t|t} &= H_t - H_t C_t' \theta_t \Sigma_t^{-1} \theta_t C_t H_t = H_t - H_t C_t' \theta_t (\theta_t C_t H_t C_t' \theta_t + \lambda_t^2)^{-1} \theta_t C_t H_t
\end{aligned}$$

En el segundo paso empleamos las series  $\varepsilon_{t|t}$  y  $P_{t|t}$  obtenidas en el paso 1 y la última estimación de  $H_t$  para estimar los parámetros de los splines. En este paso al condicionar a  $H_t$   $\varepsilon_{t|t}$  y  $P_{t|t}$  los únicos parámetros libres son los de los splines.

En el tercer paso iteramos los pasos 1 y 2. Utilizando las estimaciones de los parámetros de los splines obtenemos las nuevas series  $\varepsilon_{t|t}$  y  $P_{t|t}$  (E-step) y a partir de ellas maximizamos de nuevo la verosimilitud (4) respecto de los parámetros de los splines. Repetimos los pasos 1 y 2 hasta que se produzca la convergencia.

En el cuarto paso, una vez conseguida la convergencia en el paso 3, maximizaremos (4) respecto a los parámetros del modelo BEKK condicionando a las estimaciones obtenidas en el paso 3. En este paso también se debería estimar  $C_t$  para el mes de Septiembre.

En el quinto paso repetimos los pasos 1, 2, 3 y 4 hasta conseguir la convergencia. Obtenidos los parámetros del modelo BEKK podemos obtener la serie de la matriz de varianzas condicionales de los factores  $H_t$ , serie que utilizamos para obtener nuevas estimaciones de  $\varepsilon_{t|t}$  y  $P_{t|t}$  a partir de las cuales podemos iterar de nuevo el algoritmo hasta el paso 4.

Una vez obtenida la estimación del algoritmo EM, utilizaremos las estimaciones obtenidas como condiciones iniciales para maximizar la verosimilitud (3) aplicando un algoritmo numérico tipo BHHH. El algoritmo BHHH es un algoritmo de optimización similar a Gauss-Newton que tiene la forma:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \lambda_k A_k \frac{\partial Q}{\partial \beta}(\beta = \beta_k)$$

## **ANEXO 2: FACTORES POR COMPONENTES PRINCIPALES**

Con objeto de simplificar el tratamiento computacional se supone:

-Durante el último año de negociación, el contrato de Septiembre está afectado únicamente por la cosecha vieja.

-El cambio de estatus de cosecha nueva a cosecha vieja se produce el día después del vencimiento del contrato de Septiembre, en ese día, los contratos vivos a los que les queda menos de un año para vencimiento pasan de estar asociados a la cosecha nueva a estar asociados a la cosecha vieja.

-El número de contratos negociados en un día concreto se ha igualado al número de contratos negociados en la fecha en que se negocian un menor número de contratos, en nuestra muestra, esto supone utilizar los siete contratos con vencimiento más cercano en cada fecha.

Estos supuestos nos permiten dividir la muestra en tramos donde cada uno de los contratos está afectado únicamente por uno de los dos factores. Cada tramo está definido por el intervalo de tiempo que transcurre entre vencimientos, por ejemplo, el primer contrato de la muestra en alcanzar el vencimiento es el de Marzo de 2002, el vencimiento de este contrato es el 14-3-2002, por lo que el primer tramo abarca desde el 18-12-2002, fecha de comienzo de la muestra, hasta el 14-3-2002. El segundo tramo abarca desde el 15-3-2002 hasta el 14-5-2002, fecha en que vence el segundo contrato de la muestra. Cada uno de los tramos se compone de

siete series temporales, series que se corresponden con los siete contratos con vencimiento más cercano.

Una vez definidos los 45 tramos en los que se ha dividido la muestra, debemos asociar cada una de las series temporales con su factor correspondiente, para ello debemos comparar la fecha de vencimiento de cada contrato del tramo con la fecha de referencia de cada tramo, de manera que los contratos que vencen antes de esa fecha de referencia estarán asociados a la cosecha vieja y los contratos con vencimiento posterior a la fecha de referencia estarán asociados a la cosecha nueva. La fecha de referencia de cada tramo es el día de vencimiento del contrato de Septiembre con vencimiento más próximo tomando como referencia la fecha de inicio de cada tramo. Por ejemplo, el primer tramo está compuesto por las series de precios de los siete contratos con vencimiento más cercano durante el periodo 18-12-02 - 14-3-02, concretamente tenemos los siguientes contratos:

Mayo 03      Marzo 03      Diciembre 02      Septiembre 02      Julio 02      Mayo 02      Marzo 02

La fecha de referencia en este tramo es la fecha de vencimiento del contrato de Septiembre de 2002, por lo que en este tramo los contratos asociados a la cosecha vieja serán Marzo 02, Mayo 02, julio 02 y Septiembre 02, mientras que el resto estarán asociados a la cosecha nueva.

Una vez asociadas las series temporales de cada tramo separamos aquellas series asociadas a la cosecha nueva y las series asociadas a la cosecha vieja. Este procedimiento genera un patrón que se repite cada año y que resulta en el siguiente número de series temporales asociadas a cada uno de los factores en cada tramo:

-Entre el vencimiento de mayo y el de julio:

- 2 series asociadas a la cosecha vieja (Julio más cercano y Septiembre más cercano)
- 5 asociadas a la cosecha nueva (Diciembre, Marzo, Mayo, Julio Septiembre lejano)

-Entre el vencimiento de Julio y de Septiembre:

- 1 serie asociada a la cosecha vieja (Septiembre más cercano)
- 6 series asociadas a la cosecha nueva

-Entre el vencimiento de Septiembre (cambio de estatus) y el vencimiento de Diciembre:

- 5 series asociadas a la cosecha vieja
- 2 series asociadas a la cosecha nueva

-Entre el vencimiento de Diciembre y el vencimiento de Marzo:

- 4 series asociadas a la cosecha vieja
- 3 cosechas asociadas a la cosecha nueva

Entre el vencimiento de Marzo y el vencimiento de Mayo:

- 3 series asociadas a la cosecha vieja
- 4 series asociadas a la cosecha nueva

A continuación aplicamos el análisis de componentes principales a cada uno de los dos grupos de series temporales en las que hemos dividido cada tramo. En cada tramo obtendremos el primer CP de las series asociadas a la cosecha nueva y el primer CP de las series asociadas a la cosecha vieja, posteriormente obtenemos las series temporales de estos dos primeros componentes principales. Por último enlazamos las series de componentes principales de todos los tramos obteniendo como resultado las series temporales de los dos factores para el periodo de muestra. Con objeto de mantener la especificación original del modelo se estandarizan las dos series de factores resultantes.

Al ajustar un modelo DBEKK a los factores estimados con este procedimiento observamos que se forzaba una estructura artificial en la varianza condicional relativa de los dos factores tal y como se puede observar en el siguiente grafico.

