

**ESTIMADOR VALUE-AT-RISK  
INSEGADO EN PROBABILIDAD**

**Laura García Jorcano**

Trabajo de investigación 012/014

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director: Dr. Alfonso Novales Cinca

Universidad Complutense de Madrid

Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia



# Estimador Value-at-Risk insesgado en probabilidad

Laura García Jorcano

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director: Dr. Alfonso Novales Cinca  
Catedrático de Fundamentos de Análisis Económico  
Departamento de Economía Cuantitativa  
Universidad Complutense de Madrid

Comentarista: Dr. Gonzalo García-Donato Layrón  
Departamento de Análisis Económico y Finanzas  
Universidad de Castilla-La Mancha

Madrid, octubre de 2012

## Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir una nueva propiedad para el estimador Value-at-Risk (VaR). Los estimadores VaR utilizados normalmente para estimar cuantiles (estimadores *plug-in*) a una probabilidad dada, no son insesgados en probabilidad. En este trabajo se presenta el estimador VaR insesgado en probabilidad como el estimador del cuantil- $\alpha$  ( $\hat{Q}_\alpha$ ), a partir de una cantidad finita de datos de una función de distribución  $F_\theta$  con parámetro  $\theta$ , tal que este estimador también tenga esta probabilística propiedad de umbral o frontera en media de una variable aleatoria  $X$  distribuida  $F_\theta$ , para todo  $\theta$ , es decir,  $E^{\hat{Q}_\alpha}[F_\theta(\hat{Q}_\alpha)] = \alpha$ . En otras palabras, que el estimador sea insesgado en probabilidad significa que el cuantil- $\alpha$  estimado a partir de una cantidad finita de datos es sólo excedido con una probabilidad  $\alpha$  por la observación siguiente de la misma distribución.

Tras el cálculo de la estimación puntual del estimador insesgado en probabilidad, se presenta una estimación por intervalo que utiliza la distribución derivada del VaR estimado para calcular los extremos del intervalo de confianza insesgado en probabilidad, para una cantidad finita de datos.

Este trabajo se realiza considerando que esta cantidad finita de datos viene de una función de distribución ( $F_\theta$ ): Normal, t-Student o Mixtura de dos Normales.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Estimador insesgado en probabilidad</b>	<b>4</b>
2.1. Cuantil o estimador VaR . . . . .	4
2.2. Estimación del intervalo de confianza . . . . .	6
2.3. Función de distorsión o de ajuste . . . . .	7
<b>3. Distribución Normal</b>	<b>8</b>
3.1. [Normal] Estimación puntual . . . . .	8
3.2. [Normal] Simulación de Monte-Carlo . . . . .	12
3.3. [Normal] Estimación por intervalo de confianza . . . . .	12
<b>4. Distribución t-Student</b>	<b>14</b>
4.1. [t-Student] Estimación puntual . . . . .	14
4.2. [t-Student] Simulación de Monte-Carlo . . . . .	17
4.3. [t-Student] Estimación por intervalo de confianza . . . . .	17
<b>5. Distribución Mixtura de dos Normales</b>	<b>19</b>
5.1. [Mixtura] Definición . . . . .	19
5.2. [Mixtura] Casuística . . . . .	19
5.2.1. Mixtura de Normales con $\mu$ igual y $\sigma$ similar . . . . .	19
5.2.2. Mixtura de Normales con $\mu$ igual y $\sigma$ diferente . . . . .	20
5.2.3. Mixtura de Normales con $\mu$ diferente y $\sigma$ similar . . . . .	20
5.2.4. Mixtura de Normales con $\mu$ diferente y $\sigma$ diferente . . . . .	21
5.3. [Mixtura] Estimación puntual . . . . .	22
5.4. [Mixtura] Simulación de Monte-Carlo . . . . .	27
5.5. [Mixtura] Estimación por intervalo de confianza . . . . .	27
<b>6. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>7. Trabajando con datos reales</b>	<b>30</b>
7.1. Análisis exploratorio de los datos . . . . .	30
7.2. Otra posible aplicación . . . . .	31

## 1. Introducción

El Value-at-Risk (VaR) fue propuesto como medida de riesgo de mercado a principios de los años 90 por J. P. Morgan. Se define como la máxima pérdida esperada debida a un movimiento adverso, dentro de un determinado intervalo de confianza  $(1 - \alpha)$ , a lo largo de un determinado horizonte temporal.

El VaR de los rendimientos de un determinado activo o cartera es actualmente una de las principales medidas de riesgo. Su importancia hace necesaria la búsqueda de mejoras en los modelos estadísticos utilizados para su estimación, así como, el análisis y la investigación del mismo como medida de riesgo. Se ha demostrado que presenta los inconvenientes de no establecer cuál será la pérdida máxima que se observará una vez superado el nivel de confianza, y de no ser una medida de riesgo coherente<sup>1</sup>, por lo que en algunos casos, se prefiere utilizar el VaR condicional o Expected Shortfall.

No obstante, es una medida de riesgo muy utilizada, dado que: 1) permite estimar el riesgo de mercado de una manera rápida y sencilla, 2) proporciona una información global sobre el citado riesgo, y 3) es fácilmente monitorizable mediante backtesting.

La estimación del VaR puede calcularse de distintas maneras, proporcionando, cada una de ellas, resultados sustancialmente diferentes. Estas diferencias en los resultados se deben principalmente a la distinta capacidad que tiene cada modelo de recoger las características de las series temporales de los rendimientos, tales como asimetría, curtosis, agrupamientos de volatilidad, etc.

Uno de los métodos más utilizados para la estimación del VaR es el paramétrico de varianzaco-varianza en el que se estiman los parámetros de la distribución de los rendimientos y se "enchufan" en la función de distribución para una probabilidad dada. Este estimador del VaR es el llamado *plug-in*. Para su cálculo se necesitan la probabilidad de la estimación ( $\alpha$ ), el horizonte temporal ( $t$ ) y la distribución de probabilidad de los rendimientos ( $F_\theta$ ), aunque ésta última, en la práctica, sea difícil de conocer.

Se va a introducir un nuevo criterio a la calidad del estimador VaR, la propiedad de insesgadez en probabilidad. Partiendo de una cantidad finita de datos se calcula el cuantil de la distribución de ren-

tabilidades y la calidad del VaR estimado se evalúa comparando el número de violaciones del cuantil estimado respecto del valor teórico. En este estudio se establece que el estimador VaR debería ser insesgado respecto a la violación del cuantil. Un estimador es insesgado o centrado cuando su esperanza es igual al verdadero valor del parámetro que se desea estimar.

Este trabajo viene a comprobar el método para el cálculo del estimador VaR insesgado en probabilidad que, para una distribución Normal, introducen Francioni, I. and Herzog, F. del SwissQuant Group AG and ETH Zurich, en parte de su artículo "Probability-unbiased Value-at-Risk estimators", y a extender este método a otras distribuciones paramétricas como la t-Student y la Mixtura de dos Normales.

Se generarán muestras aleatorias de diferente tamaño a partir de una distribución Normal, de una distribución t-Student o de una distribución Mixtura de dos Normales al objeto de adaptar el estimador puntual del VaR para que sea insesgado en probabilidad y el estimador por intervalo del VaR para que se produzca la cobertura exacta del VaR. Esta memoria se ha dividido en ocho secciones: esta sección 1 introductoria, la sección 2 sobre el concepto de estimador insesgado en probabilidad, las secciones 3, 4 y 5 en las que se aplica este concepto para el caso de que las observaciones sigan una distribución Normal, una distribución t-Student o una distribución Mixtura de dos Normales, respectivamente, la sección 6 con las conclusiones, la sección 7 en la que se intenta deducir la distribución de probabilidad que sigue una muestra de datos reales haciendo uso de las conclusiones obtenidas en el presente trabajo, como otra aplicación de la probabilidad insesgada, y finalmente, la sección 8 con los códigos de Matlab necesarios para este trabajo.

<sup>1</sup>Artzner *et al.* (1999) definen como medida de riesgo coherente aquella que cumple las propiedades de: 1) Monotonicidad, 2) Invarianza a la traslación del origen, 3) Homogeneidad y 4) Subaditividad. El VaR no verifica la propiedad de subaditividad ya que no siempre la diversificación de la composición de una cartera reduce su riesgo de mercado.

## 2. Estimador insesgado en probabilidad

### 2.1. Cuantil o estimador VaR

Se parte de una variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución  $F_\theta$ , donde  $\theta$  es un parámetro. El cuantil- $\alpha$ ,  $Q_\alpha$  de  $X$ , es definido como

$$Q_\alpha = F_\theta^{-1}(\alpha)$$

En la comunidad financiera, el cuantil  $Q_\alpha$  es denominado Value-at-Risk (VaR) a un nivel  $\alpha$  o a un nivel de confianza  $1 - \alpha$ . Por ello, el término cuantil puede ser reemplazado por el término VaR. Por definición, el cuantil tiene la siguiente propiedad

$$F_\theta(Q_\alpha) = \alpha$$

Esta ecuación representa el concepto intuitivo de cuantil como umbral o frontera, que es excedido con una probabilidad  $\alpha$ . El objetivo es estimar  $Q_\alpha$  tal que el estimador también tenga la propiedad probabilística de umbral o frontera en media para una variable aleatoria  $X$  que sigue una función de distribución  $F_\theta$  para todo  $\theta$ , tal que

$$E^{\widehat{Q}_\alpha}[F_\theta(\widehat{Q}_\alpha)] = \alpha$$

En términos de gestión de riesgos, esta ecuación señala que si se estima el VaR se espera que ese VaR estimado,  $\widehat{Q}_\alpha$ , sea excedido exactamente con probabilidad  $\alpha$ . La probabilidad con la que se excede el  $\widehat{Q}_\alpha$  se comprueba mediante backtesting. La ecuación de arriba, para el estimador *plug-in*

$$\widehat{Q}_\alpha = F_{\widehat{\theta}}^{-1}(\alpha)$$

donde  $\widehat{\theta}$  es un estimador del parámetro  $\theta$ , sólo se cumple asintóticamente, es decir, cuando el número de observaciones tiende a infinito.

La estimación del parámetro puede realizarse por cualquier método de estimación, Máxima Verosimilitud, Método de Momentos, etc., de tal forma que los datos observados estén bien descritos.

Se denomina estimador *plug-in* de  $g(\theta)$  a aquel estimador que obtenemos al reemplazar el parámetro  $\theta$  por una estimación del mismo, esto es

$$\widehat{g(\theta)} = g(\widehat{\theta})$$

El estimador *plug-in* es, como se conoce, el único método para calcular estimación de cuantiles en modelos paramétricos. Se puede pensar que tales

parámetros estimados llevan a obtener un buen estimador del cuantil en el sentido explicado arriba, pero esto no es cierto. Este estimador no cumple, en general, la propiedad de insesgaredad en probabilidad, ya que, como se ha visto, considera a los parámetros como valores deterministas, pero en realidad dichos parámetros son variables aleatorias y este hecho ha de ser incorporado en un buen estimador.

**Definición 1** Un estimador  $\widehat{g(\theta)}$ , que depende de las observaciones  $(X_1, \dots, X_n) \sim F_\theta$  de  $g(\theta)$ , es insesgado en probabilidad con respecto a la variable aleatoria  $Z$  con función de distribución  $F^Z$ , si

$$F^Z(g(\theta)) = E_\theta[F^Z(\widehat{g(\theta)})]$$

para todo  $\theta$ .

En el caso de la estimación del cuantil/VaR donde todo  $X_i \sim^{i.i.d} F_\theta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , el estimador insesgado en probabilidad con respecto a  $Z = X_{n+1}$  es

$$E_\theta[P(X_{n+1}) < \widehat{Q}_\alpha] = \alpha \quad (1)$$

Para obtener el estimador VaR *insesgado en probabilidad* se tienen dos formas distintas, a saber:

1. Estimando una probabilidad  $\alpha_{pu}$  que modifique el cuantil que se toma de la distribución estimada. El estimador será

$$\widehat{Q}_\alpha = F_{\widehat{\theta}}^{-1}(\alpha_{pu})$$

donde  $\alpha_{pu}$  es elegido de forma que la ecuación (1) se cumpla. Si  $F$ , por ejemplo, es una distribución Normal el estimador VaR puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\widehat{VaR}_\alpha = \widehat{\mu} + \widehat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha_{pu})$$

2. Modificando el/los parámetro/s estimado/s de la distribución  $F$  en el estimador *plug-in*

$$\widehat{Q}_\alpha = F_{\widehat{\theta}_{pu}}^{-1}(\alpha)$$

Si  $F$ , por ejemplo, es una distribución Normal el estimador VaR puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\widehat{VaR}_\alpha = \widehat{\mu}_{pu} + \widehat{\sigma}_{pu}\Phi^{-1}(\alpha),$$

mientras que el estimador *plug-in*, el que se viene utilizando en el cálculo del cuantil/VaR es

$$\widehat{VaR}_\alpha = \widehat{\mu} + \widehat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$$

El presente trabajo utiliza la primera de las dos formas para calcular el VaR *insesgado en probabilidad*; y se apoya en la segunda, allí donde sea posible, para graficar una aproximación de la función F distorsionada por la modificación del parámetro  $\hat{\theta}$ .

Así pues, el estimador sería el siguiente

$$\hat{Q}_\alpha = F_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha_{pu})$$

donde  $\alpha_{pu}$  es elegido de forma que la ecuación (1) se cumpla. Es decir, se obtiene un estimador insesgado en probabilidad.

Para encontrar una aproximación de  $\alpha_{pu}$  se utiliza el método o algoritmo bootstrapping.

La idea de fondo que subyace en el método bootstrap es la de construir un modelo de distribución para determinados estadísticos a partir de la información proporcionada por la muestra.

Con los métodos estadísticos clásicos, la base para hacer inferencias sobre la población se encuentra en suponer para los estadísticos una distribución muestral teórica, cuyos parámetros pueden ser estimados a partir de los estadísticos observados en la muestra. En cambio, los procedimientos basados en bootstrap implican obviar los supuestos sobre la distribución teórica que siguen los estadísticos. En su lugar, la distribución del estadístico se determina simulando un número elevado de muestras aleatorias construidas directamente a partir de los datos observados. Es decir, se utiliza la muestra original para generar a partir de ella nuevas muestras que sirvan de base para estimar inductivamente la forma de la distribución muestral de los estadísticos, en lugar de partir de una distribución teórica asumida a priori.

El método bootstrap tiene un antecedente inmediato en las técnicas de simulación de Monte Carlo, consistentes en extraer un número elevado de muestras aleatorias de una población conocida para calcular a partir de ellas el valor del estadístico cuya distribución muestral pretende ser estimada. Sin embargo, en la práctica no se suele conocer la población y lo que se maneja es una muestra extraída de ella.

**Definición 2** *El bootstrapping (bootstrap) es un método o algoritmo de remuestreo que consiste en generar un número elevado de remuestras utilizando muestreo con reemplazamiento (después de extraer aleatoriamente una observación de la muestra original la devolvemos a la misma antes de extraer la siguiente observación, implicando que cualquier ob-*

*servación puede extraerse ninguna, una o más veces), de una muestra aleatoria original de tamaño muestral  $t$  que representa a la población de la que fue extraída. Cada remuestra es del mismo tamaño que la muestra aleatoria original. Las remuestras hacen las veces de muestras de la población.*

De acuerdo con la idea central de bootstrap, el procedimiento supone utilizar la muestra considerando que en sí misma contiene la información básica sobre la población. Por tanto, la adecuación de este método será tanto mayor cuanto más información aporte la muestra sobre la población. Una consecuencia directa es que a medida que aumenta el tamaño de la muestra mejor será la estimación que podemos hacer sobre la distribución muestral de un estadístico. No obstante, incluso con muestras pequeñas, entre diez y veinte casos, el método bootstrap puede ofrecer resultados correctos (Bickel y Krieger, 1989) juzgándose inadecuados para muestras de tamaño inferior a cinco (Chernick, 1999).

El  $\alpha_{pu}$  que se obtiene a través del remuestreo va a ser diferente según el tamaño de la muestra ( $t$ ).

El cambio de  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$  corrige el hecho de que no se observen infinitas realizaciones. A mayor número de observaciones ( $t$ ) el mejor estimador *plug-in* es el estimador insesgado en probabilidad. Esta es la principal diferencia entre el estimador insesgado en probabilidad y el estimador *plug-in*. El estimador *plug-in* tiene las propiedades importantes para ser un buen estimador sólo asintóticamente, mientras que el estimador insesgado en probabilidad es un buen estimador aún en el caso de tener sólo un número finito de observaciones.

Para calcular el estimador VaR insesgado en probabilidad se procede a buscar una aproximación de  $\alpha_{pu}$  y para ello se utiliza el algoritmo bootstrap. A partir de una muestra aleatoria original de tamaño  $t$ , procedente de una distribución  $F_\theta$ , se han de generar  $B$  remuestras del mismo tamaño  $t$ . Estas remuestras se obtienen a través de muestreo con reemplazamiento. Los pasos a realizar son los siguientes:

1. Partir de unos valores observados  $X_1, \dots, X_n \sim^{i.i.d.} F_\theta$
2. Calcular  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$
3. Para  $i=1:B$   
Remuestras  $X_1^*, \dots, X_n^*$  desde  $F_{\hat{\theta}}$   
Calcular  $\hat{\theta}_i^*$  Encontrar el  $\alpha_{pu}$  que minimiza la

siguiente función objetivo

$$\alpha_{pu} = \operatorname{argmin}_{\gamma} \left| \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B F_{\hat{\theta}}(F_{\hat{\theta}_i^*}^{-1}(\gamma)) - \alpha \right|$$

El  $\alpha_{pu}$  es elegido de forma que la ecuación (1) se cumpla. Sustituyendo  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$  se obtiene el estimador VaR insesgado en probabilidad, al ser  $\alpha_{pu}$  un estimador insesgado de  $\alpha$ .

## 2.2. Estimación del intervalo de confianza

El valor de un estimador proporciona lo que se denomina en estadística una estimación puntual del valor del parámetro en estudio, pero en general se suele preferir realizar una estimación mediante un intervalo, ya que ésta proporciona información sobre el posible error de estimación asociado con la amplitud de dicho intervalo.

Ahora se va a realizar una estimación mediante un intervalo de confianza dentro del cuál se debe encontrar el VaR. Se quiere estimar el intervalo de confianza  $(1 - 2\alpha_{CI})$  de la forma  $I = [CI_{low}, CI_{up}]$ . La probabilidad de cobertura exacta indica que

$$P(g(\theta) \in I) = 1 - 2\alpha_{CI}$$

Para calcular el intervalo de confianza se utiliza el método bootstrap. Su utilización es común para la estimación de intervalos de confianza vía remuestreo. Se han de seguir los siguientes pasos:

1. Partir de unos valores observados  $X_1, \dots, X_n \sim^{i.i.d} F_{\theta}$
2. Calcular  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$
3. Para  $i=1:B$   
Remuestras  $X_1^*, \dots, X_n^*$  desde  $F_{\hat{\theta}}$   
Calcular  $\hat{\theta}_i^* = \hat{\theta}_i^*(X_1^*, \dots, X_n^*)$   
Calcular  $g(\hat{\theta}_i^*)$
4. Calcular una estimación  $\hat{G}^*$  de  $G$ , la distribución de  $g(\hat{\theta})$ , con la ayuda de las remuestras bootstrap  $g(\hat{\theta}_1^*), \dots, g(\hat{\theta}_B^*)$
5. Calcular  $\hat{I}$  con la ayuda de la distribución  $\hat{G}^*$

$$\hat{CI}_{low} = (\hat{G}^*)^{-1}(\alpha_{CI}), \hat{CI}_{up} = (\hat{G}^*)^{-1}(1 - \alpha_{CI})$$

para un intervalo de confianza simétrico.

La distribución bootstrap ( $\hat{G}^*$ ) del estimador  $g(\hat{\theta})$ , basado en muchas remuestras, representa la distribución muestral de este estimador basado en muchas muestras. Conforme se aumenta el número de remuestras  $B$ , la estimación del intervalo converge a la estimación obtenida mediante el estimador *plug-in*. La distribución bootstrap es utilizada como una forma de estimar la variación de  $g(\hat{\theta})$  basada en los datos originales. Se puede ver el sesgo del estimador si la distribución bootstrap del estimador está centrada o no al valor de la estimación en la muestra original,  $g(\hat{\theta})$ . El sesgo del estimador de la distribución bootstrap es la diferencia entre la media de la distribución bootstrap y el valor de la estimación en la muestra original.

Para obtener el intervalo de confianza insesgado en probabilidad se estiman sus dos extremos. Se calcula el extremo superior  $CI_{up}$  tal que

$$P(CI < g(\theta)) = \alpha_{CI}$$

El respectivo extremo inferior  $CI_{low}$  se obtiene sustituyendo  $\alpha_{CI}$  por  $1 - \alpha_{CI}$ .

El objetivo es calcular el estimador insesgado en probabilidad con respecto a  $g(\theta)$ , tal que

$$P(\hat{CI} < g(\theta)) = \alpha_{CI}$$

Se reemplaza  $\alpha_{CI}$  por  $\alpha_{CI,pu}$  y obtenemos

$$\hat{CI} = (\hat{G}^*)^{-1}(\alpha_{CI,pu})$$

donde  $\hat{G}$  es la estimación de  $G$ .

Para estimar una aproximación  $\alpha_{CI,pu}$  se utiliza el algoritmo bootstrap, siguiendo los pasos:

1. Repetir  $B_2$  veces los pasos 2 y 3 del algoritmo bootstrap para obtener realizaciones  $\hat{G}_1^*, \dots, \hat{G}_{B_2}^*$  de  $\hat{G}$
2. Encontrar el  $\alpha_{CI,pu}$  que minimiza la siguiente función objetivo

$$\alpha_{CI,pu} = \operatorname{argmin}_{\gamma} \left| \frac{1}{B_2} \sum_{i=1}^{B_2} 1_{(\hat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\hat{\theta})} - \alpha_{CI} \right|$$

donde  $1_{(\hat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\hat{\theta})}$  es una función indicatriz que da el valor 1 si el VaR se encuentra fuera del intervalo, es decir, indica la probabilidad de que esté fuera, y da el valor 0 si se encuentra dentro del intervalo. En otras palabras,  $g(\hat{\theta})$  es excedido en media con probabilidad aproximadamente  $1 - \alpha_{CI}$  por el cuantil  $\alpha_{CI,pu}$  de  $\hat{G}_i$ ,  $i = 1, \dots, B$ .



Es importante tener en cuenta que calcular el extremo inferior del intervalo de confianza tomando el cuantil  $1 - \alpha_{CI,pu}$  de la distribución estimada  $\hat{G}^*$  no es posible porque la distribución  $G$  es normalmente no simétrica. Se ha de repetir el algoritmo anterior para obtener  $CI_{low}$  sustituyendo  $\alpha_{CI}$  por  $1 - \alpha_{CI}$ .

### 2.3. Función de distorsión o de ajuste

En este apartado el concepto de estimación de cuantiles insesgados en probabilidad es ampliado al concepto de estimación insesgada en probabilidad para toda la distribución al introducir la función de distorsión  $v$ . La función de distorsión o de ajuste  $v$  indica cómo ha de ser cambiada la función de distribución del estimador *plug-in* para una muestra de tamaño  $t$  tal que la estimación llegue a ser con probabilidad insesgada. Esta extensión es razonable porque si se conocen prácticamente todos los cuantiles de la distribución, la distribución completa puede ser determinada.

El estimador insesgado en probabilidad del cuantil es

$$\hat{Q}_\alpha = F_{\hat{\theta}}^{-1}(v^{-1}(\alpha)) = (v \circ F_{\hat{\theta}})^{-1}(\alpha)$$

La función de distorsión o de ajuste  $v$  explícitamente está definida por la ecuación (1) y es una función biyectiva y creciente que depende del tamaño muestral  $t$  y del valor del parámetro estimado.

$$v : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$\alpha_{pu} \longmapsto \alpha$$

Es decir,  $v(\alpha_{pu}) = \alpha$ .

### 3. Distribución Normal

#### 3.1. [Normal] Estimación puntual

En esta sección se parte del supuesto de que la cantidad finita de datos viene de una función de distribución ( $F_\theta$ ) Normal.

Para obtener el estimador del VaR se utiliza una estimación que modifique el cuantil que tomamos de la distribución estimada para un  $\alpha$  dado.

El estimador insesgado en probabilidad va a ser

$$\widehat{Q}_\alpha = F_{\widehat{\theta}}^{-1}(\alpha_{pu})$$

donde  $\alpha_{pu}$  es elegido de forma que la ecuación (1) se cumpla.

Se aplica la primera forma descrita anteriormente para estimar el VaR insesgado en probabilidad, es decir, se modifica el cuantil de la distribución estimada sustituyendo  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$ .

Si  $F$  es una distribución Normal el estimador VaR insesgado en probabilidad es

$$\widehat{VaR}_\alpha = \widehat{\mu} + \widehat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha_{pu})$$

El  $\alpha_{pu}$  elegido es aquél que hace que el estimador VaR sea insesgado en probabilidad.

El algoritmo de remuestreo (bootstrapping) permite obtener dicho  $\alpha_{pu}$ .

Según el Dr. Gonzalo García-Donato, se puede calcular el  $\alpha_{pu}$  a partir de métodos estadísticos clásicos. Esto supone el conocimiento teórico de la distribución muestral de los estadísticos. Los parámetros de la distribución Normal estimados por máxima verosimilitud son de la forma

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{t}\sum X_i$$

$$\widehat{\sigma}_2 = \frac{1}{t-1}\sum(X_i - \widehat{\mu})^2$$

Las distribuciones de los estimadores son conocidas. La distribución de la media muestral es una distribución Normal y la distribución de la varianza muestral es una Chi-cuadrado con  $t - 1$  grados de libertad

$$\widehat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{t}\right)$$

$$\widehat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{t-1}\chi_{t-1}^2$$

Así,  $\alpha_{pu}$  será aquél que cumpla la siguiente ecuación,

$$\iint \Phi(x + Z_{\alpha_{pu}}\sqrt{\frac{y}{t-1}})N(x | 0, \frac{1}{t})\chi_{t-1}^2(y)dx dy = \alpha \quad (2)$$

Esta ecuación (2) no tiene solución analítica por lo que se ha de resolver numéricamente, por ejemplo, a través de Monte Carlo puro.

Según García-Donato el bootstrap resuelve numéricamente las integrales que definen  $\alpha_{pu}$ , obteniendo resultados aproximados a la aproximación que se obtendría por Monte Carlo puro.

No obstante, si se pone en cuestión el supuesto de normalidad poblacional, no es una mala estrategia determinar las características de la población a partir de una muestra que proceda de ella, como hace el bootstrap, sin que se abuse así de las leyes de probabilidad, y en especial de la ley Normal. En realidad, a falta de un ajuste a modelos teóricos conocidos, ésta sería la mejor y única información a tener en cuenta.

En definitiva, tanto el enfoque paramétrico clásicos como el método bootstrap implican partir de una muestra observada con el propósito de llegar a conclusiones sobre una población, pero mientras que la estadística paramétrica se apoya en supuestos sobre la distribución poblacional o sobre sus parámetros, el bootstrap prescinde de ellos.

La corrección de los resultados obtenidos por medio del bootstrap para la inferencia estadística ha sido demostrada a partir de su utilización en simulaciones, en la que se analizaban muestras extraídas de poblaciones distribuidas normalmente. En tales circunstancias, la aplicación de los métodos paramétricos y métodos bootstrap dió lugar a resultados similares (Mooney y Duval, 1993).

Si bien esta comparación permite incrementar la confianza sobre el método bootstrap, bien es verdad que si los supuestos en los que se basa la descripción matemática de la población se cumplen, no hay razones para descartar los procedimientos de inferencia estadística que posibilitan el enfoque tradicional.

La utilidad del método bootstrap se hace patente, de manera especial, en aquellas situaciones en las que no es posible justificar los supuestos de partida o cuando no se encuentran fórmulas analíticas en las que basar nuestra descripción de la población.

En este trabajo, como se comentó anteriormente, se utiliza el método bootstrap. El cambio de  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$  corrige el hecho de que no se observen infinitas

realizaciones. A mayor número de observaciones ( $t$ ) el mejor estimador *plug-in* es el estimador insesgado en probabilidad.

En la Tabla 1 pueden verse las probabilidades  $\alpha_{pu}$  obtenidas a partir del bootstrapping dependiendo del tamaño muestral ( $t$ ) y del valor  $\alpha$ . Se observa que  $\alpha_{pu} \rightarrow \alpha$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Se parte de una muestra aleatoria de tamaño  $t$  generada a partir de una distribución Normal con media 0 y desviación típica 1. Esta es la muestra aleatoria original a partir de la cuál se generan 10000 remuestras de tamaño muestral  $t$ .

La media y la desviación típica estimada por Máxima Verosimilitud,  $\mu_y$  y  $\sigma_y$  respectivamente, de la muestra aleatoria original tienden a la media ( $\mu_x = 0$ ) y a la desviación típica poblacional ( $\sigma_x = 1$ ) conforme aumenta el tamaño muestral de la misma.

De cada una de las remuestras se estima la media y la desviación típica obteniendo 10000 medias y 10000 desviaciones típicas. Estas estimaciones se utilizan para encontrar el  $\alpha_{pu}$  que minimiza la siguiente función objetivo

$$\alpha_{pu} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B F_{\hat{\theta}}(F_{\hat{\theta}_i}^{-1}(\gamma)) - \alpha \right|$$

t	$\mu_x$	$\mu_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\alpha$			
					0,50%	1%	5%	10%
					$\alpha_{pu}$ (%)			
15	0	-0,25	1	0,97	0,08	0,26	3,03	7,58
20	0	-0,04	1	1,17	0,13	0,38	3,49	8,19
25	0	0,15	1	1,13	0,24	0,58	4,05	8,86
30	0	0,30	1	0,98	0,23	0,57	4,06	8,89
40	0	-0,05	1	0,87	0,33	0,74	4,39	9,25
50	0	0,10	1	1,05	0,34	0,75	4,45	9,34
100	0	0,09	1	0,96	0,38	0,83	4,64	9,59
150	0	0,00	1	1,00	0,42	0,88	4,75	9,72
200	0	-0,14	1	0,97	0,46	0,94	4,87	9,85
250	0	0,09	1	1,02	0,46	0,94	4,86	9,84
500	0	0,04	1	1,03	0,48	0,97	4,94	9,94
1000	0	-0,02	1	1,03	0,49	0,98	4,97	9,96

TABLA 1. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad para diferentes valores de  $\alpha$  en el caso de la distribución Normal.

En la Tabla 2 se recogen los  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad, ( $VaR_{pu}$ ), y los  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* (los calculados normalmente cuando se estima el VaR) que se obtienen para diferentes tamaños muestrales y  $\alpha$ 's.

Se observa que el  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* infravalora el riesgo, indicando menos pérdidas de las que realmente son con un  $\alpha$  % de probabilidad. Así, para una muestra

aleatoria de tamaño 25, la máxima pérdida esperada con un 95 % de probabilidad o lo que es lo mismo la mínima pérdida con un 5 % no es de 1,71 si no de 1,82.

Calcular el VaR insesgado en probabilidad es relevante sobre todo para muestras de tamaño pequeño, que es cuando la diferencia en la estimación del VaR es mayor, ya que con muestras grandes, el  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgado en probabilidad es similar al  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in*.

t	$\alpha_{pu}$				$\alpha_{pu}$			
	0,50%	1%	5%	10%	0,50%	1%	5%	10%
	$VaR_{pu}$				$VaR_{plug-in}$			
15	-3,31	-2,95	-2,06	-1,64	-2,74	-2,50	-1,84	-1,49
20	-3,57	-3,17	-2,16	-1,67	-3,06	-2,76	-1,97	-1,54
25	-3,04	-2,70	-1,82	-1,38	-2,76	-2,48	-1,71	-1,30
30	-2,47	-2,17	-1,41	-1,02	-2,22	-1,98	-1,31	-0,95
40	-2,42	-2,18	-1,54	-1,21	-2,30	-2,08	-1,49	-1,17
50	-2,75	-2,46	-1,69	-1,29	-2,61	-2,35	-1,63	-1,25
100	-2,48	-2,23	-1,53	-1,17	-2,40	-2,16	-1,50	-1,15
150	-2,62	-2,36	-1,66	-1,29	-2,56	-2,32	-1,64	-1,28
200	-2,68	-2,43	-1,76	-1,40	-2,65	-2,41	-1,74	-1,39
250	-2,58	-2,32	-1,61	-1,23	-2,55	-2,29	-1,59	-1,22
500	-2,64	-2,38	-1,67	-1,29	-2,62	-2,37	-1,66	-1,29
1000	-2,67	-2,41	-1,71	-1,33	-2,66	-2,41	-1,71	-1,33

TABLA 2. -  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad vs.  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* en el caso de la distribución Normal.

La Figura 1 muestra los gráficos de la función de distorsión para diferentes tamaños muestrales (línea roja). Se corrobora que a más observaciones, la corrección necesaria que ha de realizarse es menor, convergiendo  $v$  a la identidad (línea negra).

En la Figura 2 se observa la distorsión de los cuantiles de la función de distribución Normal. Por ejemplo, para  $t=15$ , la estimación *plug-in* del cuantil es -2 y la estimación *insesgada en probabilidad* es -2.5.

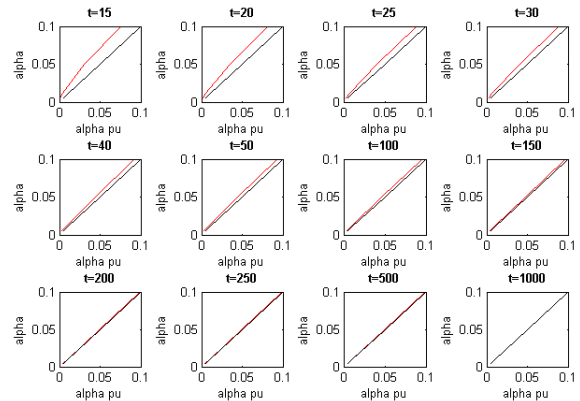


FIGURA 1. - Función de distorsión  $v$  para la distribución Normal. La diagonal (línea negra) representa la no distorsión.

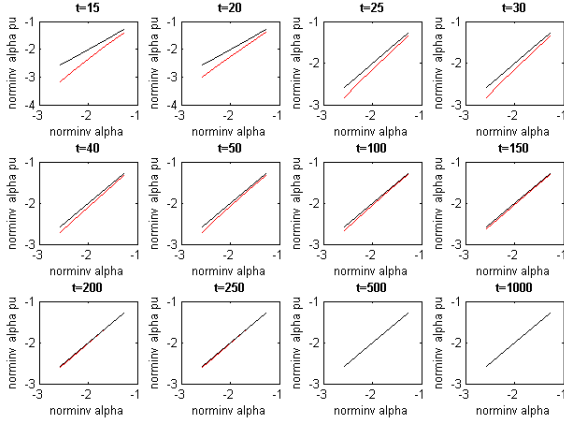


FIGURA 2. - Los cuantiles de la cdf Normal vs. los cuantiles de la cdf Normal distorsionada. La diagonal (línea negra) representa la no distorsión.

La Tabla 3 presenta la probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* con  $F^{-1}(\alpha_{pu})$ , para  $\alpha_{pu}$  dados y para cada tamaño muestral. Por ejemplo, si los parámetros de una muestra de 25 realizaciones son estimados, la probabilidad de que la próxima observación caiga por debajo del  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* es 6,74%.

t	$\alpha_{pu}$			
	0,50%	1%	5%	10%
15	1,36	2,16	7,02	12,25
20	1,43	2,20	6,82	11,90
25	1,23	2,00	6,74	11,89
30	1,22	1,98	6,66	11,76
40	0,83	1,46	5,87	10,97
50	0,68	1,27	5,54	10,62
100	0,61	1,17	5,32	10,37
150	0,57	1,10	5,19	10,21
200	0,55	1,07	5,16	10,19
250	0,55	1,07	5,14	10,17
500	0,52	1,03	5,06	10,07
1000	0,51	1,01	5,03	10,03

TABLA 3. - Probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* con  $F^{-1}(\alpha_{pu})$ .

Ahora, con apoyo de la segunda forma de las dos descritas en la sección 2 para calcular el estimador VaR insesgado en probabilidad, se calculan los  $\widehat{\sigma}_{pu}$  de la función de distribución distorsionada F al objeto de su representación.

Si  $F$  es una distribución Normal, el estimador VaR *insesgado en probabilidad* puede ser escrito de la siguiente forma

$$\widehat{VaR}_\alpha = \widehat{\mu}_{pu} + \widehat{\sigma}_{pu} \Phi^{-1}(\alpha)$$

Como la media de la distribución varía muy poco, se puede considerar que es la misma, esto es  $\widehat{\mu}_{pu} = \widehat{\mu}$ , pudiendo así calcularse la desviación típica  $\widehat{\sigma}_{pu}$  de la función de distribución distorsionada. Esta desviación típica va a ser diferente para cada  $\alpha$  y para cada tamaño muestral ( $t$ ), véase la Tabla 4.

t	$\alpha$			
	0,50%	1%	5%	10%
15	1,19	1,16	1,10	1,08
20	1,37	1,34	1,29	1,27
25	1,24	1,23	1,20	1,19
30	1,08	1,06	1,04	1,03
40	0,92	0,92	0,91	0,90
50	1,11	1,10	1,09	1,08
100	1,00	0,99	0,98	0,98
150	1,02	1,02	1,01	1,01
200	0,98	0,98	0,98	0,98
250	1,03	1,03	1,03	1,03
500	1,04	1,04	1,04	1,04
1000	1,03	1,03	1,03	1,03

TABLA 4. - Desviaciones típicas estimadas para la función de distribución distorsionada.

En la Figura 3 se muestra la verdadera función de densidad de una variable aleatoria  $N(0,1)$  (línea azul), la función de densidad de una muestra aleatoria de tamaño 15 de una variable aleatoria que sigue una distribución  $N(0,1)$  (línea roja), y la función de densidad de la función de distribución distorsionada de la muestra aleatoria de tamaño 15 de la variable aleatoria que sigue una  $N(0,1)$  (línea verde). Se observa que la función de distribución distorsionada tiene colas más pesadas lo que se ajusta mejor a la evidencia empírica. Presenta una mayor curtosis que la función de densidad *plug-in*. De hecho, para un  $t=15$ , la curtosis de la distribución *plug-in* es 2.0165 y para la distribución distorsionada es 3.1327, superior a 3 que es la curtosis de una distribución Normal.

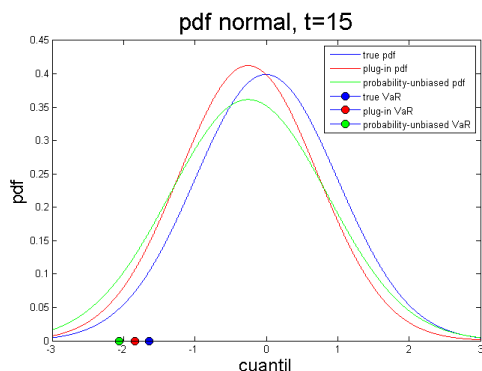


FIGURA 3. - La función de densidad  $N(0,1)$  (línea azul), la función de densidad *plug-in* (línea roja) y la función de densidad de la función de distribución *insesgada en probabilidad* (línea verde). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

El  $\widehat{VaR}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde) indica unas pérdidas mayores que el  $\widehat{VaR}$  *plug-in* (punto rojo). Con ello se comprueba lo dicho anteriormente, el estimador *plug-in* infravalora el riesgo sobre todo en muestras de tamaño pequeño, es decir, cuanto menor es la muestra, la corrección o ajuste de la distribución es mayor.

A continuación, la Figura 4 recoge la función de distribución de la  $N(0,1)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución *insesgada en probabilidad* (línea verde). También se representan sus respectivas estimaciones del VaR al 5%.

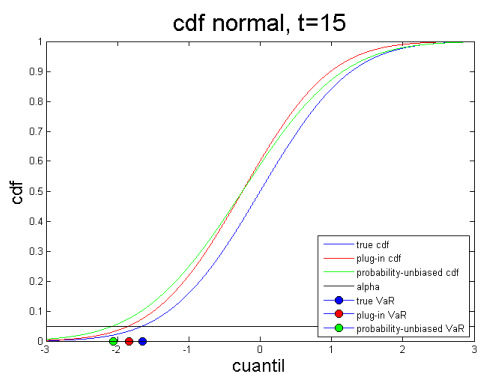


FIGURA 4. - La función de distribución  $N(0,1)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución *insesgada en probabilidad* (línea verde). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

Se han representado las funciones de densidad y de distribución basadas en una muestra aleatoria de tamaño 15, en la que se observa mejor la distorsión, ya que a menor tamaño, la distorsión en la función de distribución *plug-in* es mayor.

Las Figura 5 y 6 recogen las funciones de densidad y las de distribución, respectivamente, para diferentes tamaños muestrales. También se recogen las respectivas estimaciones puntuales del VaR al 5%. Estas figuras muestran la convergencia de la distribución *plug-in* y de la distribución *insesgada en probabilidad* a la verdadera distribución conforme aumenta el tamaño de la muestra aleatoria.

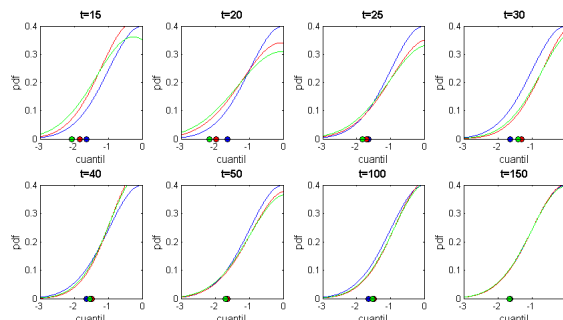


FIGURA 5. - La función de densidad  $N(0,1)$  (línea azul), la función de densidad *plug-in* (línea roja) y la función de densidad de la función de distribución *insesgada en probabilidad* (línea verde) para diferentes tamaños muestrales (ampliación de la cola izquierda). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

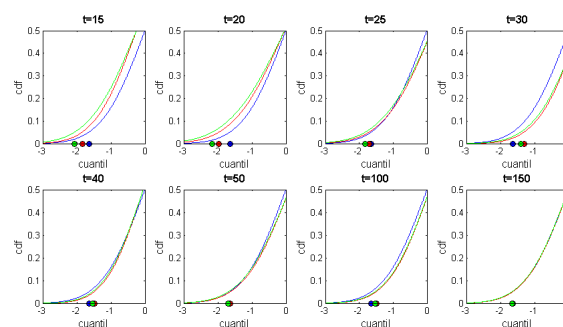


FIGURA 6. - La función de distribución  $N(0,1)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución *insesgada en probabilidad* (línea verde) para diferentes tamaños muestrales (ampliación de la cola izquierda). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

### 3.2. [Normal] Simulación de Monte-Carlo

Para testear los resultados obtenidos teóricamente se realizan simulaciones de las estimaciones del estimador VaR *plug-in* y del VaR *insesgado en probabilidad* y se calculan las probabilidades de exceso de dichas estimaciones. Para la simulación de Monte-Carlo con  $S$  simulaciones se realizan los siguientes pasos:

1. Iniciar el contador de la simulación  $s = 0$ .
2. Incrementar el contador de la simulación  $s = s + 1$ .
3. Simular muestra de tamaño  $n + 1$  cuyas observaciones estén distribuidas normalmente.
4. Calcular la media y la desviación típica basadas en las primeras  $n$  observaciones.
5. Calcular la estimación del VaR a partir del estimador *plug-in* y a partir del estimador *insesgado en probabilidad* utilizando los  $\alpha_{pu}$  calculados en la Tabla 1 para los valores observados de  $\mu$  y  $\sigma$  (paso 4).
6. Comprobar si la observación  $n + 1$  excede del  $\widehat{VaR}$  del estimador *plug-in* y del estimador *insesgado en probabilidad*. Cuando dicha observación exceda del  $\widehat{VaR}$  la función indicatriz dará 1 y, en caso contrario, dará 0.
7. Volver al paso 2 mientras  $s < S$ .
8. Calcular la probabilidad de exceso como la suma de los valores obtenidos (0 ó 1) y dividir por el número total de simulaciones ( $S$ ).

Los resultados, Tabla 5, para muestras de tamaño 15, 20, 25 y 30, para un  $\widehat{VaR}_{1\%}$  y para un  $\widehat{VaR}_{5\%}$ , con  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y  $S = 100000$ , indican que la probabilidad de exceso de la estimación del VaR *insesgada en probabilidad* para los distintos tamaños muestrales es muy similar a la probabilidad teórica del 1% y 5%, respectivamente. Sin embargo, la probabilidad de exceso de la estimación del VaR *plug-in*, siendo superior, difiere más de la probabilidad teórica, confirmando los resultados recogidos en la Tabla 3.

En el caso del estimador VaR *plug-in*, conforme el tamaño de la muestra aumenta, la probabilidad de exceso calculada a partir de las simulaciones, se aproxima a la teórica. Sin embargo, para el caso del estimador VaR *insesgado en probabilidad* se

mantiene prácticamente similar a la probabilidad teórica, para todo tamaño muestral.

t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
15	2,024	0,828	6,691	4,582
20	1,775	0,864	6,253	4,645
25	1,567	1,008	5,964	5,031
30	1,485	0,98	5,932	4,936

TABLA 5. - Probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* y del  $\widehat{VaR}$  *insesgado en probabilidad* en la simulación de Monte-Carlo para el caso de la distribución Normal.

### 3.3. [Normal] Estimación por intervalo de confianza

Se va a realizar una estimación por intervalo con un nivel de confianza de  $1 - 2\alpha_{CI}$  donde, por ejemplo,  $\alpha_{CI} = 0,05$ .

Se obtiene, utilizando el algoritmo bootstrap, la distribución del  $\widehat{VaR}_{5\%}$  sobre la que se calcula el intervalo de confianza dentro del cuál se encontrará el verdadero VaR.

La Tabla 6 muestra el intervalo *plug-in* a un nivel de confianza del 90%. Se observa que conforme aumenta el tamaño muestral este intervalo de confianza se estrecha.

t	Estimac. puntual	$\alpha_{CI}$	$1 - \alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
15	-1,71	5	95	-2,25	-0,99
20	-1,39	5	95	-1,69	-0,98
25	-1,25	5	95	-1,51	-0,85
30	-1,70	5	95	-2,04	-1,29
40	-1,64	5	95	-1,95	-1,35
50	-1,38	5	95	-1,67	-1,10
100	-1,35	5	95	-1,55	-1,09
150	-1,62	5	95	-1,82	-1,37
200	-1,75	5	95	-1,91	-1,60
250	-1,51	5	95	-1,59	-1,32
500	-1,71	5	95	-1,82	-1,61
1000	-1,63	5	95	-1,72	-1,58

TABLA 6. - Estimación puntual del VaR *plug-in*, probabilidad  $\alpha_{CI}(\%)$ ,  $1 - \alpha_{CI}(\%)$  y cuantiles correspondientes a los extremos inferior y superior del intervalo de confianza 90% para el caso de la distribución Normal.

Para calcular el intervalo de confianza *insesgado en probabilidad* se debe obtener el  $\alpha_{CI,pu}$ . El  $\alpha_{CI,pu}$  será el valor que minimice la siguiente función objetivo

$$\alpha_{CI,pu} = \operatorname{argmin}_{\gamma} \left| \frac{1}{B_2} \sum_{i=1}^{B_2} 1_{(\widehat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\widehat{\theta})} - \alpha_{CI} \right|$$

donde  $1_{(\widehat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\widehat{\theta})}$  es una función indicatriz que indica la probabilidad de que el VaR esté fuera del intervalo.

Así, se obtiene el extremo superior del intervalo. Para obtener el extremo inferior se debe realizar, otra vez en su totalidad, el algoritmo bootstrap, pero en este caso sustituyendo  $\alpha_{CI}$  por  $1 - \alpha_{CI}$ .

En la Tabla 7 se observa que el intervalo que se obtiene a un nivel de confianza del 90 %, no se encuentra entre los dos valores obtenidos en la tabla anterior, sino entre los que se recogen aquí. El intervalo de confianza al 90 % se desplaza a la izquierda pero no de forma simétrica. Casi todos los excesos ocurren en el extremo inferior.

t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	$CI_{low,pu}$	$CI_{up,pu}$
15	1,2	44	-2,71	-1,57
20	1,07	59,92	-1,85	-1,35
25	1,01	73,33	-1,54	-1,08
30	1,13	74,98	-2,07	-1,50
40	1,63	70,59	-1,98	-1,52
50	1,6	76,91	-1,73	-1,25
100	1,83	88,14	-1,62	-1,18
150	1,18	92,22	-1,85	-1,38
200	1,74	90,35	-2,00	-1,61
250	1,66	94,12	-1,65	-1,32
500	1,48	89,28	-1,84	-1,64
1000	2,84	95,54	-1,73	-1,58

TABLA 7. -Probabilidades  $\alpha_{CI,pu}$  (%) tal que  $\alpha_{CI} = P(\widehat{CI} < VaR)$  con  $\alpha_{\widehat{VaR}} = \alpha = 5\%$  en el  $\widehat{VaR}$  y cuantiles correspondientes al extremo inferior y superior del intervalo de confianza 90 % para el caso de la distribución Normal.

Conforme aumenta el tamaño muestral la distorsión del intervalo de confianza es menor y el intervalo se estrecha.

## 4. Distribución t-Student

### 4.1. [t-Student] Estimación puntual

En esta sección la cantidad finita de datos viene de una función de distribución ( $F_\theta$ ) t-Student.

Para obtener el estimador del VaR se utiliza una estimación que modifique el cuantil que tomamos de la distribución estimada para un  $\alpha$  dado.

Se utiliza la primera forma de las descritas en la sección 2 para calcular el VaR insesgado en probabilidad. En este caso, el parámetro estimado no varía. Se sustituye  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$  con lo que el cuantil que se toma de la distribución es diferente.

Si  $F$  es una distribución t-Student, el estimador VaR puede ser escrito

$$\widehat{VaR}_\alpha = t^{-1}(\alpha_{pu})$$

El  $\alpha_{pu}$  es elegido de forma que la ecuación  $E_\theta[P(X_{n+1}) < \widehat{Q}_\alpha] = \alpha$  se cumpla.

El algoritmo de bootstrap permite obtener una aproximación de  $\alpha_{pu}$ .

El cambio de  $\alpha$  por  $\alpha_{pu}$  corrige el hecho de que no se observen infinitas realizaciones. Se obtiene un estimador *insesgado en probabilidad* para todo tamaño muestral, incluido muestras de tamaño pequeño, en cambio el estimador *plug-in* sólo es *insesgado en probabilidad* cuando  $t \rightarrow \infty$

La Tabla 8 refleja las probabilidades  $\alpha_{pu}$  obtenidas a partir del remuestreo. Éstas dependen del tamaño muestral ( $t$ ) y del valor  $\alpha$ .

Se parte de una muestra aleatoria de tamaño  $t$  generada a partir de una distribución t-Student con 2 grados de libertad. Ésta es la muestra aleatoria original a partir de la cuál se generan 10000 remuestras de tamaño muestral  $t$ .

El parámetro a estimar en esta distribución son los grados de libertad. Se ha utilizado el estimador de Método de Momentos <sup>2</sup>

$$gl = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 - 1}$$

De cada una de las remuestras se estiman los grados de libertad, que son utilizados para encontrar el  $\alpha_{pu}$  que minimiza la siguiente función

$$\alpha_{pu} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B F_{\widehat{\theta}_i^*}(F_{\widehat{\theta}_i^*}^{-1}(\gamma)) - \alpha \right|$$

<sup>2</sup>Se podría haber calculado el estimador máximo verosímil de los grados de libertad a través de diversos optimizadores, pero debido a su sencillez, se ha utilizado el de Método de Momentos, aunque se debe tener en cuenta que este estimador exige que la distribución tenga una varianza mayor que 1.

En la Tabla 8 se observa que  $\alpha_{pu} \rightarrow \alpha$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , que con la t-Student la convergencia es más rápida, y que para muestras de tamaño pequeño se obtiene un  $\alpha_{pu}$  más cercano al teórico que con la Normal. Esto es debido a que la distribución t-Student presenta mayor curtosis que la Normal, es decir los eventos extremos ocurren con mayor probabilidad, por lo que la corrección que hay que hacer a  $\alpha$  es menor, por tanto, menor la corrección que hay que hacer al VaR.

t	gl <sub>x</sub>	gl <sub>y</sub>	$\alpha$			
			0,50%	1%	5%	10%
			$\alpha_{pu}$ (%)			
15	2	2,40	0,35	0,79	4,65	9,65
20	2	2,14	0,28	0,68	4,45	9,45
25	2	2,07	0,38	0,82	4,67	9,66
30	2	2,62	0,32	0,75	4,61	9,62
40	2	2,18	0,37	0,81	4,65	9,64
50	2	2,16	0,14	0,44	3,94	8,93
100	2	2,64	0,43	0,90	4,83	9,83
150	2	2,43	0,41	0,87	4,77	9,77
200	2	2,40	0,48	0,97	4,94	9,94
250	2	2,23	0,44	0,92	4,84	9,84
500	2	2,48	0,45	0,93	4,88	9,88
1000	2	2,16	0,43	0,90	4,80	9,79

TABLA 8. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad para diferentes valores de  $\alpha$  en el caso de la distribución t-Student.

La Tabla 9 recoge los  $\widehat{VaR}_\alpha$  *insesgados en probabilidad*, ( $VaR_{pu}$ ), y los  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* (los calculados normalmente cuando se estima el VaR) que se obtienen para diferentes tamaños muestrales y  $\alpha$ 's.

t	$\alpha_{pu}$				$\alpha_{pu}$			
	0,50%	1%	5%	10%	0,50%	1%	5%	10%
	$VaR_{pu}$				$VaR_{plug-in}$			
15	-8,85	-6,22	-2,72	-1,80	-7,57	-5,60	-2,62	-1,76
20	-11,75	-7,65	-2,98	-1,90	-8,87	-6,36	-2,79	-1,83
25	-10,77	-7,35	-2,97	-1,90	-9,41	-6,67	-2,86	-1,86
30	-8,03	-5,73	-2,60	-1,74	-6,76	-5,11	-2,50	-1,70
40	-9,93	-6,89	-2,87	-1,86	-8,64	-6,23	-2,76	-1,82
50	-16,00	-9,38	-3,17	-1,97	-8,80	-6,32	-2,78	-1,83
100	-7,12	-5,30	-2,53	-1,72	-6,69	-5,07	-2,49	-1,70
150	-8,05	-5,85	-2,66	-1,77	-7,43	-5,51	-2,60	-1,75
200	-7,68	-5,65	-2,63	-1,76	-7,53	-5,57	-2,61	-1,75
250	-8,83	-6,32	-2,77	-1,82	-8,36	-6,06	-2,72	-1,80
500	-7,52	-5,55	-2,60	-1,75	-7,22	-5,39	-2,57	-1,73
1000	-9,38	-6,64	-2,84	-1,85	-8,78	-6,31	-2,78	-1,83

TABLA 9. -  $\widehat{VaR}_\alpha$  *insesgados en probabilidad* vs.  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* en el caso de la distribución t-Student.



Se observa que el  $\widehat{VaR}_\alpha$  *plug-in* infravalora el riesgo, indicando menos pérdidas de las que realmente son a un  $\alpha\%$  de probabilidad.

Así, para un muestra aleatoria de tamaño 25, la máxima pérdida esperada con un 95% de probabilidad o lo que es lo mismo la mínima pérdida con un 5% no es de 2,86 si no de 2,97.

Al igual que ocurría con la distribución Normal, el cálculo del VaR insesgado en probabilidad es relevante para muestras de tamaño pequeño que es cuando la diferencia en la estimación del VaR es mayor, aunque en este caso, las diferencias son mucho menores.

La Figura 7 muestra los gráficos de la función de distorsión para diferentes tamaños muestrales (línea roja). Se corrobora que a más observaciones la corrección necesaria que ha de realizarse es menor, convergiendo  $v$  a la identidad (línea negra).

En la Figura 8 se observa la distorsión de los cuantiles de la función de distribución t-Student.

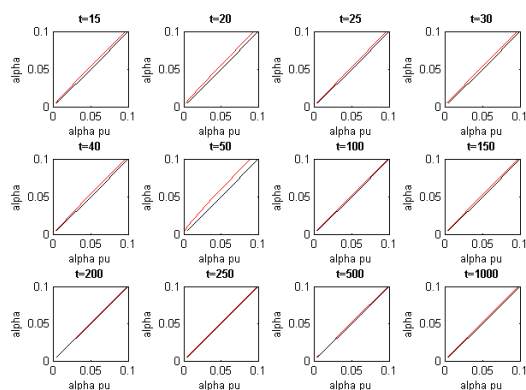


FIGURA 7. - Función de distorsión  $v$  para la distribución t-Student. La diagonal (línea negra) representa la no distorsión.

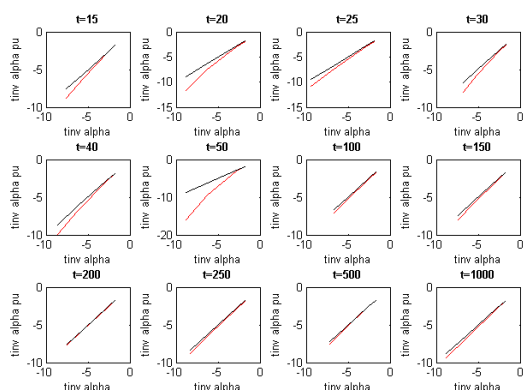


FIGURA 8. - Los cuantiles de la cdf t-Student vs. los cuantiles de la cdf t-Student distorsionada. La diagonal (línea negra) representa la no distorsión.

La Tabla 10 presenta la probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* con  $F^{-1}(\alpha_{pu})$ , para  $\alpha_{pu}$  dados y para cada tamaño muestral. Por ejemplo, si los parámetros de una muestra de 25 realizaciones son estimados, la probabilidad de que la próxima observación caiga por debajo del  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* es 5,33%.

Se observa que los valores que se obtienen de  $\alpha$  se acercan más a los de  $\alpha_{pu}$  de lo que se acercaban en el caso de la distribución Normal, para los diferentes tamaños muestrales.

t	$\alpha_{pu}$			
	0,50%	1%	5%	10%
15	0,68	1,23	5,36	10,35
20	0,78	1,37	5,56	10,54
25	0,64	1,19	5,33	10,34
30	0,71	1,27	5,40	10,38
40	0,65	1,21	5,36	10,36
50	1,09	1,76	6,09	11,05
100	0,58	1,11	5,17	10,17
150	0,60	1,14	5,23	10,23
200	0,52	1,03	5,06	10,06
250	0,56	1,09	5,16	10,16
500	0,55	1,07	5,12	10,12
1000	0,57	1,11	5,20	10,21

TABLA 10. - Probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* con  $F^{-1}(\alpha_{pu})$  para el caso de la distribución t-Student.

Ahora, con apoyo de la segunda forma de las dos descritas en la sección 2 para calcular el estimador VaR insesgado en probabilidad, se calculan los  $\widehat{gl}_{pu}$  de la función de distribución distorsionada  $F$  al objeto de su representación.

Si  $F$  es una distribución t-Student, el estimador VaR *insesgado en probabilidad* puede ser escrito de la siguiente forma

$$\widehat{VaR}_\alpha = t_{\widehat{gl}_{pu}}^{-1}(\alpha)$$

Estos grados de libertad van a ser diferentes para cada  $\alpha$  y para cada tamaño muestral ( $t$ ), veáse la Tabla 11.

t	$\alpha$			
	0,50%	1%	5%	10%
	$g_{pu}^t$			
15	2,15	2,19	2,24	2,25
20	1,82	1,87	1,95	1,96
25	1,91	1,92	1,95	1,96
30	2,30	2,35	2,42	2,44
40	2,00	2,02	2,05	2,05
50	1,57	1,65	1,79	1,82
100	2,51	2,53	2,55	2,56
150	2,29	2,30	2,32	2,33
200	2,37	2,37	2,38	2,38
250	2,15	2,16	2,17	2,17
500	2,41	2,41	2,42	2,43
1000	2,07	2,07	2,08	2,09

TABLA 11. - Grados de libertad estimados para la función de distribución distorsionada.

La Figura 9 muestra la verdadera función de densidad de una variable aleatoria  $t(2)$  (línea azul), la función de densidad de una muestra aleatoria de tamaño 15 de una variable aleatoria que sigue una distribución  $t(2)$  (línea roja), y la función de densidad de la función de distribución distorsionada de la muestra aleatoria de tamaño 15 de la variable aleatoria que sigue una  $t(2)$  (línea verde). La función de distribución distorsionada, al igual que pasaba con la Normal, tiene colas más pesadas al presentar mayor curtosis que la función de densidad *plug-in*. El  $\widehat{VaR}$  insesgado en probabilidad (punto verde) indica unas pérdidas mayores que el  $\widehat{VaR}$  *plug-in* (punto rojo), resultado que va en consonancia con el hecho de que el  $VaR$  *plug-in* infravalore el riesgo.

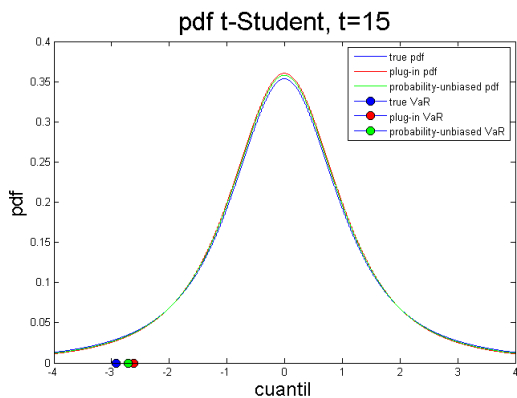


FIGURA 9. - La función de densidad  $t(2)$  (línea azul), la función de densidad *plug-in* (línea roja) y la función de densidad de la función de distribución insesgada en probabilidad (línea verde). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  insesgado en probabilidad (punto verde).

La Figura 10 recoge la función de distribución de la  $t(2)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución insesgada en probabilidad (línea verde). También se representan las respectivas estimaciones del  $VaR$  al 5%.

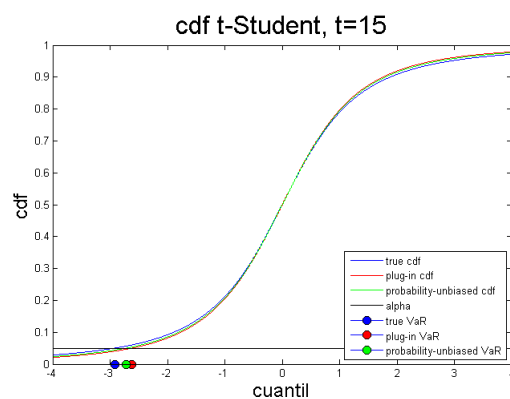


FIGURA 10. - La función de distribución  $t(2)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución insesgada en probabilidad (línea verde). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  insesgado en probabilidad (punto verde).

Se han representado las funciones de densidad y de distribución basadas en una muestra aleatoria de tamaño 15, en la que se observa mejor la distorsión, ya que a menor tamaño, la distorsión en la función de distribución *plug-in* es mayor.

En las Figura 11 y 12 se recogen las funciones de densidad y las de distribución para diferentes tamaños muestrales, respectivamente. También se recogen las respectivas estimaciones puntuales del  $VaR$  al 5%. Estas figuras muestran la convergencia de las funciones de densidad y de distribución conforme aumenta el tamaño de la muestra aleatoria, aunque, como ya se comentó anteriormente, dicha convergencia es más rápida que con la Normal, es decir, la distorsión que sufre la distribución  $t$ -Student para cada  $t$  y para cada  $\alpha$  es menor que con la Normal.

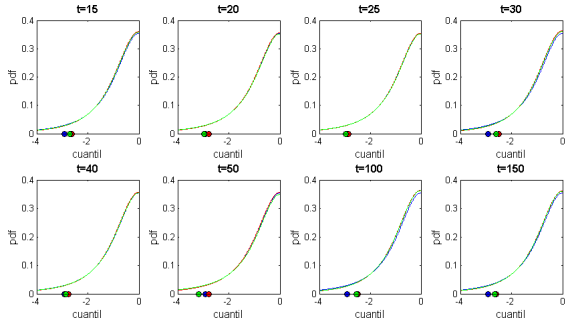


FIGURA 11. - La función de densidad  $t(2)$  (línea azul), la función de densidad *plug-in* (línea roja) y la función de densidad de la función de distribución *insesgado en probabilidad* (línea verde) para diferentes tamaños muestrales (ampliación de la cola izquierda). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

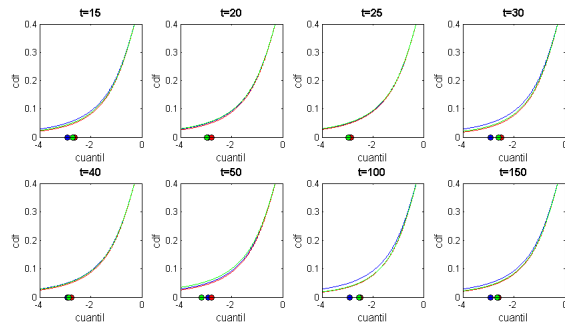


FIGURA 12. - La función de distribución  $t(2)$  (línea azul), la función de distribución *plug-in* (línea roja) y la función de distribución *insesgado en probabilidad* (línea verde) para diferentes tamaños muestrales (ampliación de la cola izquierda). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  verdadero (punto azul), el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

#### 4.2. [t-Student] Simulación de Monte-Carlo

Para comprobar los resultados obtenidos teóricamente se realizan simulaciones, igual que se hizo para la distribución Normal, de las estimaciones del estimador *VaR plug-in* y del *VaR insesgado en probabilidad* y se calculan las probabilidades de exceso de dichas estimaciones del VaR.

Los resultados obtenidos se reflejan en la Tabla 12, para muestras de tamaño 15, 20, 25 y 30, para un  $\widehat{VaR}_{1\%}$  y para un  $\widehat{VaR}_{5\%}$ , con  $gl = 2$  y  $S = 100000$ , e indican que la probabilidad de ex-

ceso de la estimación del VaR *insesgado en probabilidad* para los distintos tamaños muestrales es muy similar a la probabilidad teórica del 1% y 5%, respectivamente. Sin embargo, la probabilidad de exceso de la estimación del VaR *plug-in* difiere más de la probabilidad teórica.

Conforme el tamaño de las muestras aumenta, la probabilidad de exceso calculada a partir de las simulaciones, coincide con la teórica en el caso del estimador VaR *plug-in*. Sin embargo, para el caso del estimador VaR *insesgado en probabilidad* se mantiene prácticamente similar a la probabilidad teórica, aunque sí que se observa que los excesos no están tan cercanos al exceso teórico como en el caso de la distribución Normal.

t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
15	2,558	1,396	7,346	6,022
20	2,338	1,257	7,21	6,018
25	2,269	1,034	7,051	5,688
30	2,279	1,381	6,987	6,025

TABLA 12. - Probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* y del  $\widehat{VaR}$  *insesgado en probabilidad* en la simulación de Monte-Carlo para el caso de la distribución t-Student.

#### 4.3. [t-Student] Estimación por intervalo de confianza

Se va a realizar una estimación por intervalo con un nivel de confianza de  $1 - 2\alpha_{CI}$  donde, por ejemplo,  $\alpha_{CI} = 0,05$ . Para el cálculo del intervalo de confianza se utiliza el método bootstrap.

La Tabla 13 muestra el intervalo *plug-in* a un nivel de confianza del 90%. Conforme aumenta el tamaño muestral este intervalo se estrecha.

t	Estimac. puntual	$\alpha_{CI}$	$1 - \alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
50	-2,54	5	95	-2,63	-2,41
75	-2,62	5	95	-2,71	-2,50
80	-2,79	5	95	-2,85	-2,35
90	-2,63	5	95	-2,78	-2,32
100	-2,54	5	95	-2,66	-2,37
200	-2,66	5	95	-2,77	-2,33

TABLA 13. - Estimación puntual del  $VaR_{5\%}$  *plug-in*, probabilidad  $\alpha_{CI}(\%)$ ,  $1 - \alpha_{CI}(\%)$  y cuantiles correspondientes a los extremos inferior y superior del intervalo de confianza 90% para el caso de la distribución t-Student.

Para calcular el intervalo de confianza *insesgado en probabilidad* se debe obtener el  $\alpha_{CI,pu}$  que minimice la siguiente función objetivo

$$\alpha_{CI,pu} = \operatorname{argmin}_{\gamma} \left| \frac{1}{B_2} \sum_{i=1}^{B_2} 1_{(\widehat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\widehat{\theta})} - \alpha_{CI} \right|$$

donde  $1_{(\widehat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\widehat{\theta})}$  es una función indicatriz que indica la probabilidad de que el VaR esté fuera del intervalo de confianza.

Así, obtendremos el extremo superior del intervalo. Para obtener el extremo inferior se debe realizar, otra vez en su totalidad, el algoritmo bootstrap, pero en este caso sustituyendo  $\alpha_{CI}$  por  $1 - \alpha_{CI}$ .

En la Tabla 14 se observa que el intervalo que se obtiene a un nivel de confianza del 90%, no se encuentra entre los dos valores obtenidos en la tabla anterior, sino entre los que se recogen aquí. El intervalo de confianza al 90% se desplaza a la izquierda pero no de forma simétrica. Casi todos los excesos ocurren en el extremo inferior.

t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	CI <sub>low,pu</sub>	CI <sub>up,pu</sub>
50	1,03	33,71	-2,65	-2,55
75	1,06	50,23	-2,72	-2,62
80	1,26	3,25	-2,86	-2,85
90	1,15	9,83	-2,79	-2,75
100	1,37	50,52	-2,68	-2,53
200	1,07	13,02	-2,81	-2,73

TABLA 14. - Probabilidades  $\alpha_{CI,pu}$  (%) tal que  $\alpha_{CI} = P(\widehat{CI} < VaR)$  con  $\alpha_{\widehat{VaR}} = \alpha = 5\%$  en el  $\widehat{VaR}$  y cuantiles correspondientes al extremo inferior y superior del intervalo de confianza 90% para el caso de la distribución t-Student.

## 5. Distribución Mixtura de dos Normales

### 5.1. [Mixtura] Definición

**Definición 3** Se dice que una distribución es una mezcla de dos distribuciones cuando su función de distribución puede escribirse como:

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x)$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución y  $p$  un valor entre cero y uno que representa la probabilidad de que el elemento  $x$  provenga de la distribución  $F_1$ .

La media de la mixtura es

$$m_{mix} = pm_1 + (1 - p)m_2$$

Y la varianza

- Si  $m_1 = m_2$

$$\sigma_{mix}^2 = p\sigma_1^2 + (1 - p)\sigma_2^2$$

- Si  $m_1 \neq m_2$

$$\sigma_{mix}^2 = p\sigma_1^2 + (1 - p)\sigma_2^2 + p(1 - p)(m_1 - m_2)^2$$

Estrictamente, casi cualquier distribución que se observe en la práctica puede considerarse como una distribución mezclada. Pero vale la pena preocuparse por los componentes si conocerlos aumenta el conocimiento de la realidad estudiada.

La distribución Mixtura de dos Normales, a diferencia de la combinación lineal de Normales, no tiene por qué ser Normal, ya que se obtiene cogiendo aleatoriamente, con una probabilidad  $p$  datos de la primera distribución Normal y con probabilidad  $1 - p$  datos de la segunda.

Podría entenderse la mixtura como la modificación de una distribución (en este trabajo será siempre la segunda) debida a la influencia de otra (en este trabajo será siempre la primera). Conforme aumenta el parámetro mezcla  $p$  la primera distribución va influyendo en mayor medida a la segunda.

### 5.2. [Mixtura] Casuística

Se pueden obtener diferentes distribuciones mixtura según las distribuciones Normales que se mezclen y según el parámetro mezcla que se utilice.

#### 5.2.1. Mixtura de Normales con $\mu$ igual y $\sigma$ similar

En este caso la distribución mixtura que se obtiene es similar a la Normal. La media de la mixtura va a ser la misma que la media de las distribuciones Normales mezcladas y la varianza de la mixtura será la ponderación de las respectivas varianzas de las distribuciones Normales mezcladas.

Se observa en la Figura 13 la distribución mixtura que se obtiene al mezclar una distribución Normal de media 0 y desviación típica 2 y un distribución Normal de media 0 y desviación típica 1.

Con  $p = 0,1$  la distribución mezclada es similar a la segunda distribución Normal. Conforme se va aumentando dicho parámetro mezcla la mixtura se va pareciendo cada vez más a la primera distribución, al ir ponderando más la primera que la segunda, llegando en  $p = 0,9$  a ser la mixtura muy similar a la primera distribución.

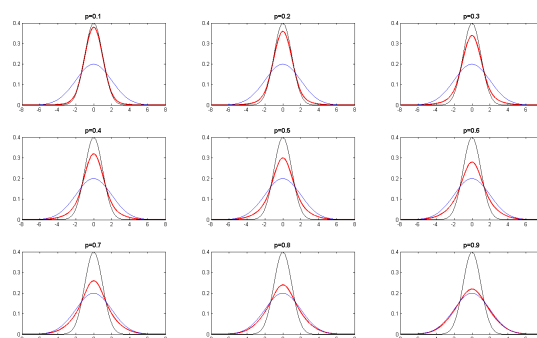


FIGURA 13. - Función de densidad de la mixtura de  $N1(0,2)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de densidad de la  $N1(0,2)$  (línea azul) y función de densidad de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla.

En la Figura 14 se recogen las respectivas funciones de distribución. Se ha trazado una horizontal (línea negra) para señalar el valor  $\alpha = 0,05$ . El VaR *plug-in* a un 5% es el cuantil donde se corta esta línea con la función de distribución de la mixtura (línea roja). Conforme se aumenta el parámetro mezcla, el VaR se desplaza a la izquierda, lo que señala una mayor pérdida esperada a una 95% de nivel de confianza. Esto es debido a que conforme el parámetro mezcla es mayor la distorsión que produce la primera distribución Normal sobre la segunda es mayor, y al tener la primera Normal mayor varianza que la segunda, introduce en ésta más valores extremos, aumentando las colas y desplazando el VaR a la

izquierda, esto es, haciéndolo más negativo.

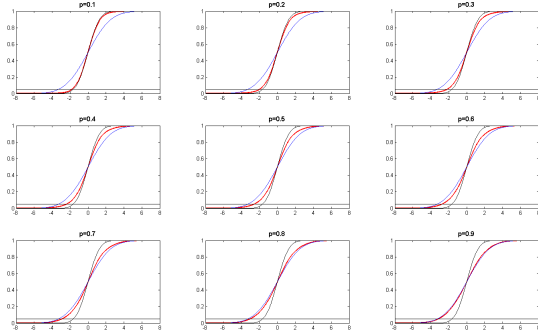


FIGURA 14. - Función de distribución de la mixtura de  $N1(0,2)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de distribución de la  $N1(0,2)$  (línea azul) y función de distribución de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla. La línea horizontal negra señala el  $\alpha = 0,05$ .

### 5.2.2. Mixtura de Normales con $\mu$ igual y $\sigma$ diferente

En este segundo caso, se parte de una distribución Normal de media 0 y desviación típica 10 y de una distribución Normal de media 0 y desviación típica 1. Al mezclarse distribuciones con desviaciones típicas muy diferentes la distribución mixtura que se obtiene es más similar a una t-Student que a una Normal, al observarse mayor probabilidad en las colas debido a los valores extremos introducidos por la primera distribución Normal.

En la Figura 15 se recogen las funciones de densidad de la mixtura y de las dos distribuciones normales que se mezclan.

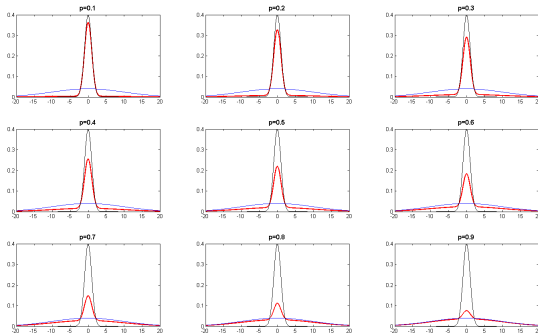


FIGURA 15. - Función de densidad de la mixtura de  $N1(0,10)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de densidad de la  $N1(0,10)$  (línea azul) y función de densidad de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla.

La Figura 16 representa las correspondientes funciones de distribución. La mixtura va mezclando las dos Normales, partiendo de ponderar mucho la segunda distribución y poco la primera hasta llegar a ponderar poco la segunda y mucho la primera.

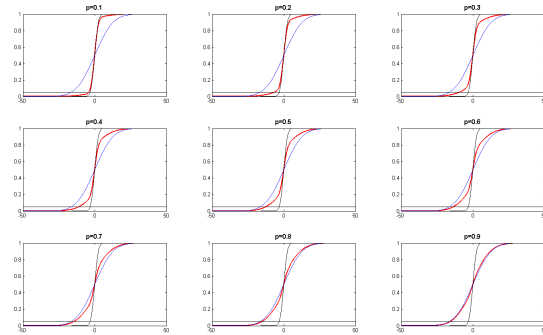


FIGURA 16. - Función de distribución de la mixtura de  $N1(0,10)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de distribución de la  $N1(0,10)$  (línea azul) y función de distribución de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla. La línea horizontal negra señala el  $\alpha = 0,05$ .

### 5.2.3. Mixtura de Normales con $\mu$ diferente y $\sigma$ similar

Aquí se crea una distribución mixtura a partir de la mezcla de una distribución Normal con media -5 y desviación típica 2 y de una distribución Normal con media 0 y desviación típica 1.

Se observa que a partir de distribuciones normales con medias muy diferentes, la cola izquierda se hace más pesada que en una Normal cuando el parámetro mezcla pondera poco la primera distribución Normal y mucho la segunda, y la cola derecha se hace más pesada que en una Normal cuando el parámetro mezcla pondera mucho la primera distribución Normal y poco la segunda.

En este caso, a diferencia de los dos anteriores, al no tener las distribuciones normales que se mezclan igual media, las dos colas no se engrosan por igual, sino que se engrosa una más que otra dependiendo de si la media de la primera Normal se encuentra a la izquierda o a la derecha de la media de la segunda Normal, y de la ponderación proporcionada por el parámetro mezcla  $p$ . Esta mezcla es adecuada cuando se quiere obtener una distribución mezclada con asimetría.

En este ejemplo, la cola izquierda se hace más pesada (cuando  $p = 0,1$ ) que la cola derecha debido a

que la primera Normal tiene su media a la izquierda de la media de la segunda Normal.

En la Figura 17 se observa que existe un  $p$  para el cuál la distribución mixtura es bimodal (entre  $p = 0,6$  y  $p = 0,7$ ).

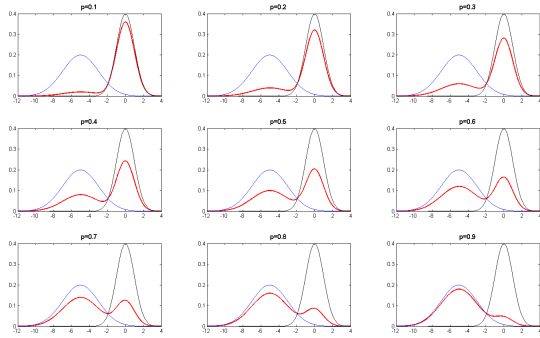


FIGURA 17. - Función de densidad de la mixtura de  $N1(-5,2)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de densidad de la  $N1(-5,2)$  (línea azul) y función de densidad de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla.

La Figura 18 representa las funciones de distribución.

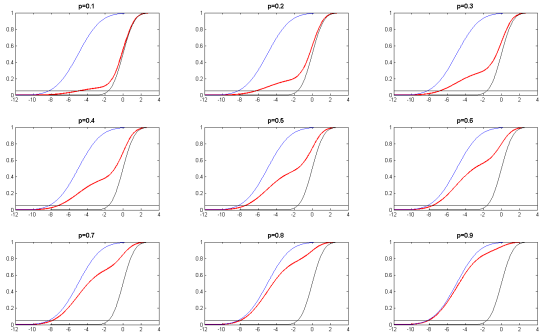


FIGURA 18. - Función de distribución de la mixtura de  $N1(-5,2)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de distribución de la  $N1(-5,2)$  (línea azul) y función de distribución de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla. La línea horizontal negra señala el  $\alpha = 0,05$ .

A diferencia de lo que ocurría en los dos primeros casos, el VaR se desplaza más a la izquierda conforme aumenta el parámetro mezcla debido a que se parte de distribuciones normales con medias muy diferentes. En el primer subgráfico, cuando  $p = 0,1$ , la distribución mezclada tiene la cola izquierda más pesada que la segunda distribución Normal debido a la pequeña influencia de la primera distribución

Normal. En cambio, en el último subgráfico, cuando  $p = 0,9$ , se observa que la distribución mezclada tiene la cola derecha más pesada pero en menor proporción que la izquierda en el primer subgráfico, debido a que la segunda distribución Normal tiene menor desviación típica que la primera distribución Normal.

#### 5.2.4. Mixtura de Normales con $\mu$ diferente y $\sigma$ diferente

Se toma como ejemplo la mezcla de una distribución Normal con media  $-5$  y desviación típica  $10$  y de una distribución Normal con media  $0$  y desviación típica  $1$ .

Este caso proporciona como resultado una distribución mezclada con más valores extremos en la cola izquierda, cuando el parámetro mezcla es  $p = 0,1$ , que en el caso anterior. Se debe, a que la primera distribución Normal, que es la que tiene la media más a la izquierda, es la que tiene mayor desviación típica. Esto es, la cola izquierda de la Mixtura es menos pesada que en el caso anterior.

Conforme aumenta el parámetro mezcla, la segunda distribución Normal se va contagiando en mayor medida por la primera, hasta que finalmente con un  $p = 0,9$  se obtiene como resultado una distribución mixtura similar a la primera distribución Normal modificada por los pocos valores introducidos por la segunda distribución Normal que afectarán a la parte derecha de la distribución al estar la media de la segunda distribución Normal a la derecha de la media de la primera distribución Normal (Veáse Figura 19).

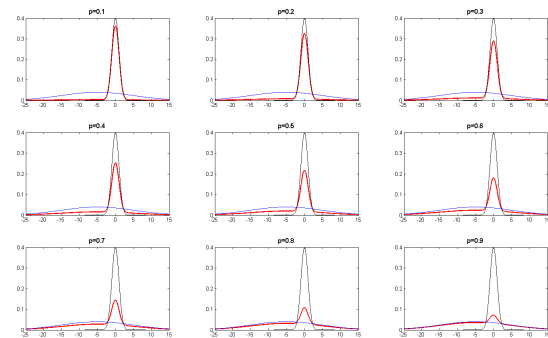


FIGURA 19. - Función de densidad de la mixtura de  $N1(-5,10)$  y  $N2(0,1)$  (línea roja), función de densidad de la  $N1(-5,10)$  (línea azul) y función de densidad de la  $N2(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla.

En la Figura 20 se observa claramente que la distribución que se obtiene no es una distribución Normal. La función de distribución de la mixtura presenta menos valores centrales que las Normales que se mezclan, sobre todo con  $p$  intermedias, donde la mayoría de valores se encuentran en los extremos.

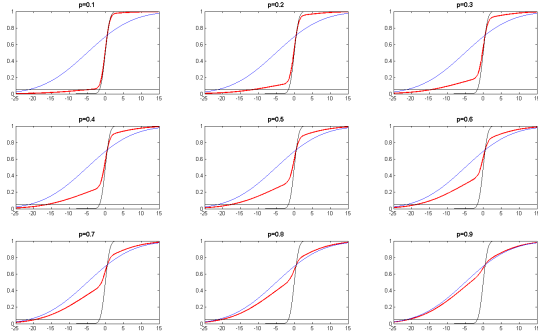


FIGURA 20. - Función de distribución de la mixtura de  $N(5,10)$  y  $N(0,1)$  (línea roja), función de distribución de la  $N(5,10)$  (línea azul) y función de distribución de la  $N(0,1)$  (línea negra) para diferentes valores del parámetro mezcla. La línea horizontal negra señala el  $\alpha = 0,05$ .

### 5.3. [Mixtura] Estimación puntual

En este apartado se va a calcular el estimador VaR insesgado en probabilidad para cada una de las cuatro posibles combinaciones de distribuciones normales vistas en el apartado anterior. Se comienza con una mixtura de dos distribuciones normales con media igual y desviación típica similar, concretamente con una mixtura de una Normal(0,2) y de una Normal(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  (se utiliza un  $p$  pequeño para obtener una distribución mixtura similar a una distribución Normal, con algunos datos atípicos provenientes de la primera distribución Normal), de la que se extraen muestras aleatorias de tamaño 100, 200, 300 y 400.

En la Tabla 15 se recogen los principales momentos de estas muestras extraídas de esta distribución mixtura, observando que la desviación típica y la curtosis de la mixtura es superior a la de la segunda distribución Normal, debido a la influencia de la primera Normal, al menos para las muestras de mayor tamaño (más significativas). No obstante, la mixtura presenta una distribución prácticamente Normal ya que las dos distribuciones normales que se han utilizado para realizar la mezcla son muy similares.

MIXTURA de $N(0,2)$ y $N(0,1)$				
t	$\mu_{mix}$	$\sigma_{mix}$	asimetría <sub>mix</sub>	curtosis <sub>mix</sub>
100	-0,0111	1,0427	-0,2318	2,5156
200	0,1246	1,1602	0,0827	3,2897
300	-0,0229	1,2119	0,4906	4,8465
400	0,0946	1,1553	-0,1329	4,8632

TABLA 15. - Los cuatro primeros momentos para las muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de  $N(0,2)$  y  $N(0,1)$  con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ .

Para obtener el estimador VaR *insesgado en probabilidad* se calcula la probabilidad  $\alpha_{pu}$  correspondiente que modifique el cuantil de la distribución para un  $\alpha$  dado.

La Mixtura de dos Normales es una distribución paramétrica, es decir, se conoce la función de distribución de la misma y depende de los parámetros de las dos Normales que se mezclan y del parámetro mezcla:

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x)$$

pero no tiene una fórmula cerrada que permita aplicar el método de varianza-covarianza. Por esta razón, a la hora de calcular el VaR no se utiliza este método sino el percentil de la muestra que deja a su izquierda un  $\alpha\%$  de los datos.

La Tabla 16 muestra los  $\alpha_{pu}$  obtenidos de forma que la ecuación (1) se cumpla y así obtener un estimador VaR *insesgado en probabilidad*. Se observa que el VaR *plug-in* 1% y 5% señala un menor riesgo que el proporcionado por el VaR *insesgado en probabilidad*, esto es, el VaR *plug-in* infravalora el riesgo. Además, a mayor tamaño muestral, el VaR *insesgado en probabilidad* se aproxima al VaR *plug-in*.



$\alpha = 1\%$			
t	$\alpha_{pu}$	VaR <sub>pu</sub>	VaR <sub>plug-in</sub>
100	0,64	-2,66	-2,48
200	0,71	-2,62	-2,59
300	0,89	-2,70	-2,68
400	0,88	-2,51	-2,50
$\alpha = 5\%$			
t	$\alpha_{pu}$	VaR <sub>pu</sub>	VaR <sub>plug-in</sub>
100	4,54	-2,01	-1,93
200	4,62	-1,83	-1,83
300	4,90	-1,99	-1,99
400	4,91	-1,79	-1,78

TABLA 16. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad para muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400<sup>3</sup> de una distribución mixtura de una Normal(0,2) y de una Normal(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  y los respectivos VaR *insesgado en probabilidad* y VaR *plug-in* para  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ .

En las Figuras 21 y 22 se representan las funciones de densidad de la mixtura y de las normales que se mezclan, con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  y las funciones de distribución, respectivamente, para la muestra de tamaño 100. También se representa en el eje horizontal el VaR *plug-in* y el VaR *insesgado en probabilidad* al 5 %.

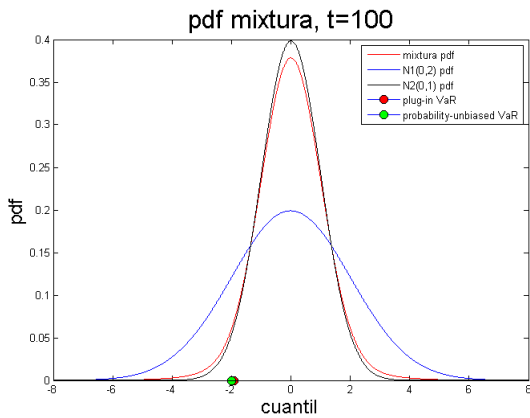


FIGURA 21. - La función de densidad de la mixtura (línea roja), la función de densidad de la N(0,2) (línea azul) y la función de densidad de la N(0,1) (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

<sup>3</sup>Se parte de muestras de tamaño mayor que en los casos de las distribuciones Normal y t-Student debido a que el VaR tanto *plug-in* como *insesgado en probabilidad* se calcula como un percentil de la muestra. Si, por ejemplo, se quiere calcular el percentil 1 % se ha de partir de una muestra de un tamaño considerable para evitar que dicho percentil caiga fuera del intervalo de datos que se tiene, ya que en caso contrario, la función *prctile* de Matlab devolverá el primer valor de la muestra sin ser éste el percentil 1 % sino uno mayor.

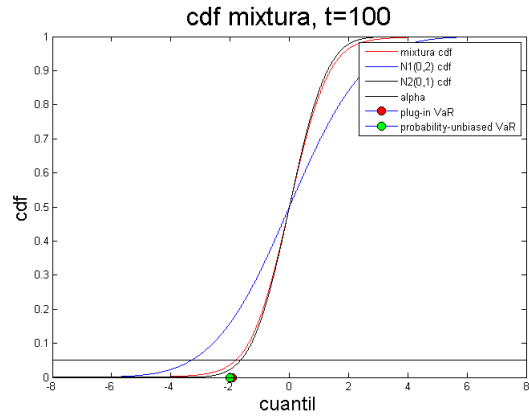


FIGURA 22. - La función de distribución de la mixtura (línea roja), la función de distribución de la N(0,2) (línea azul) y la función de distribución de la N(0,1) (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

Ahora se realiza otra mixtura, esta vez de dos distribuciones normales con media igual y desviación típica diferente, la generada por las Normales (0,10) y (0,1), con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ , de la que se extraen muestras aleatorias de tamaño 100, 200, 300 y 400. La mixtura que se obtiene con esta mezcla es más similar a una distribución t-Student, que en el caso anterior, al tener las distribuciones normales que se mezclan una desviación típica diferente, razón por la cual este caso es más relevante que el anterior.

En la Tabla 17 se presentan los primeros momentos de las muestras extraídas.

La distribución mixtura, se puede interpretar cómo la distribución que se obtiene distorsionando la segunda distribución Normal al introducir el 10 % de los datos de la primera. Así, en este caso, la mixtura tiene una mayor desviación típica y una mayor curtosis que la N(0,1), en mayor medida que en el caso anterior, debido al ratio de las desviaciones típicas de las dos Normales. La curtosis obtenida en la mixtura, para los diferentes tamaños muestrales, indica que la distribución no es Normal, sino más bien, una t-Student.

MIXTURA de N(0,10) y N(0,1)				
t	$\mu_{mix}$	$\sigma_{mix}$	asimetría <sub>mix</sub>	curtosis <sub>mix</sub>
100	-0,1630	1,5950	-1,8959	10,7701
200	0,1145	3,0345	-1,6851	28,7797
300	0,2841	3,2635	1,2468	18,2806
400	-0,0734	3,7079	-0,3584	22,2558

TABLA 17. - Los cuatro primeros momentos para las muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de N(0,10) y N(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ .

La Tabla 18 recoge los  $\alpha_{pu}$  obtenidos a partir del método bootstrapping para obtener un VaR *insesgado en probabilidad*. Se observa que son inferiores a  $\alpha$  para todos los tamaños muestrales, por lo que en este caso, el VaR *plug-in* también infravalora el riesgo. Conforme aumenta el tamaño muestral,  $\alpha_{pu}$  tiende a  $\alpha$ .

$\alpha = 1\%$			
t	$\alpha_{pu}$	VaR <sub>pu</sub>	VaR <sub>plug-in</sub>
100	0,50	-8,27	-7,35
200	0,83	-10,56	-10,02
300	0,83	-13,25	-12,85
400	0,87	-14,50	-14,30
$\alpha = 5\%$			
t	$\alpha_{pu}$	VaR <sub>pu</sub>	VaR <sub>plug-in</sub>
100	4,74	-2,39	-2,36
200	4,85	-2,04	-1,96
300	4,92	-1,95	-1,95
400	4,95	-2,38	-2,37

TABLA 18. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad para muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de una Normal(0,10) y de una Normal(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  y los respectivos VaR *insesgado en probabilidad* y VaR *plug-in* para  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ .

En la Figura 23 se observan las funciones de densidad de la mixtura, de la N(0,10) y de la N(0,1), y en la Figura 24 las de distribución, señalándose, en ambas, el  $VaR_{5\%}$  *plug-in* y el  $VaR_{5\%}$  *insesgado en probabilidad*.

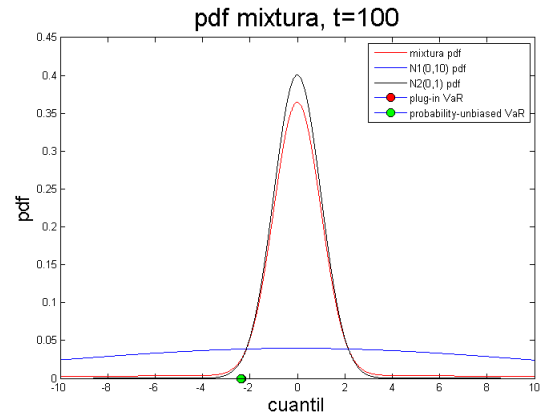


FIGURA 23. - La función de densidad de la mixtura (línea roja), la función de densidad de la N(0,10) (línea azul) y la función de densidad de la N(0,1) (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

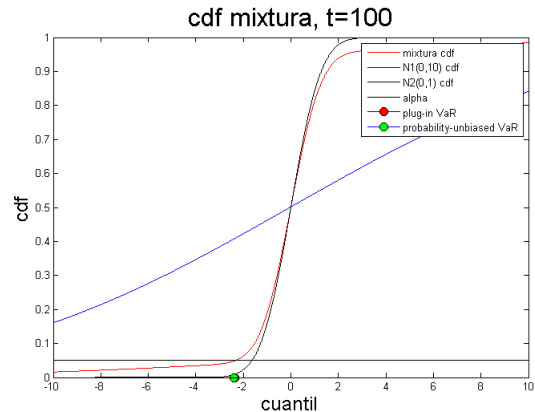


FIGURA 24. - La función de distribución de la mixtura (línea roja), la función de distribución de la N(0,10) (línea azul) y la función de distribución de la N(0,1) (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

La siguiente mixtura se realiza con distribuciones normales de media diferente y desviación típica similar, esto es, con la N(-5,2) y la N(0,1) y con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ . De la misma se extraen muestras aleatorias de tamaño 100, 200, 300 y 400. Esta mixtura tiene la cola izquierda (cola relevante para el VaR) más distorsionada que en los casos anteriores.

En la práctica es importante detectar que tenemos una distribución mezclada cuando las dos distribuciones normales que se mezclan son muy distintas y  $p$  es pequeño, es decir la primera aparece con baja probabilidad y la segunda con alta. Esto puede ocurrir si, sin saberlo, se observan algunos datos en condiciones totalmente distintas del resto. Entonces los valores generados por la primera distribución Normal serán atípicos con relación a la segunda, y es importante detectarlos para que no distorsionen los resultados. Estas situaciones se detectan porque la distribución mezclada tendrá un coeficiente de curtosis muy alto.

La distribución mixtura presenta una media que estará desplazada a la izquierda, siendo la media teórica de la mixtura  $m_{mix} = 0,1(-5) + (1 - 0,1)(0) = -0,5$ . Las muestras que se recogen en la Tabla 19 presentan una media en torno a la teórica. La desviación típica de la mixtura es mayor que la que presenta la  $N(0,1)$ , al verse ésta distorsionada por la  $N(-5,2)$ . La distribución mixtura también presenta asimetría negativa debido a la mezcla de dos distribuciones normales con media diferente. La curtosis de la mixtura es bastante superior a la Normal, esto se debe a que se mezclan distribuciones diferentes en media y desviación típica. Se engrosa más la cola izquierda que la derecha ya que la media de la Normal distorsionadora está a la izquierda de la Normal distorsionada y se utiliza un parámetro mezcla  $p$  pequeño.

MIXTURA de N(-5,2) y N(0,1)				
t	$\mu_{mix}$	$\sigma_{mix}$	asimetría <sub>mix</sub>	curtosis <sub>mix</sub>
100	-0,4173	1,9107	-2,0661	7,9924
200	-0,2348	1,5175	-1,1762	6,2227
300	-0,5152	1,8328	-2,0430	8,1173
400	-0,5945	2,0769	-1,7753	6,4910

TABLA 19. - Los cuatro primeros momentos para las muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de una  $N(-5,2)$  y  $N(0,1)$  con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ .

El estimador VaR *insesgado en probabilidad* se obtiene como en los casos anteriores. La Tabla 20 muestra los  $\alpha_{pu}$ , el  $VaR_{pu}$  y el  $VaR_{plug-in}$  para un  $\alpha = 1\%$  y un  $\alpha = 5\%$ .

$\alpha = 1\%$			
t	$\alpha_{pu}$	$VaR_{pu}$	$VaR_{plug-in}$
100	0,79	-8,03	-7,78
200	0,86	-5,42	-5,35
300	0,83	-7,31	-7,03
400	0,95	-7,92	-7,89
$\alpha = 5\%$			
t	$\alpha_{pu}$	$VaR_{pu}$	$VaR_{plug-in}$
100	4,44	-5,14	-4,86
200	4,95	-2,99	-2,98
300	4,83	-5,20	-5,19
400	5,00	-5,80	-5,80

TABLA 20. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgados en probabilidad para muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de una Normal(-5,2) y de una Normal(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  y los respectivos VaR *insesgado en probabilidad* y VaR *plug-in* para  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ .

De lo observado se concluye lo mismo que en los casos anteriores.

En la Figura 25 y 26 se representan, nuevamente, las funciones de densidad y de distribución, respectivamente, para este caso.

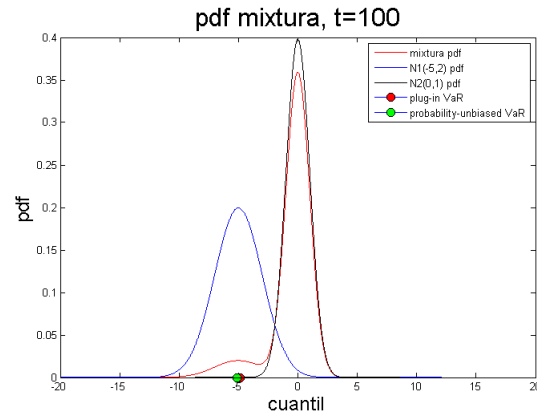


FIGURA 25. - La función de densidad de la mixtura (línea roja), la función de densidad de la  $N(-5,2)$  (línea azul) y la función de densidad de la  $N(0,1)$  (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

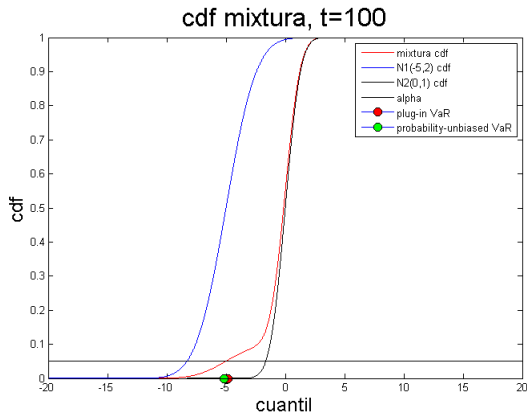


FIGURA 26. - La función de distribución de la mixtura (línea roja), la función de distribución de la  $N(-5,2)$  (línea azul) y la función de distribución de la  $N(0,1)$  (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

Por último, se realiza una mixtura de distribuciones normales con media diferente y desviación típica diferente. Se trabaja con una mixtura de  $N(-5,10)$  y  $N(0,1)$  con parámetro mezcla  $p = 0,1$ . Al ser las distribuciones normales tan diferentes y  $p$  pequeño, la mixtura que se obtiene permite reflejar los posibles datos atípicos que una distribución Normal no presenta, por lo que se ajusta mejor a la evidencia empírica.

En la Tabla 21 se recogen los momentos de las muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de dicha mixtura.

Como resultado de esta mezcla, la distribución que se obtiene tiene una menor media, mayor desviación típica y mayor curtosis que la segunda distribución Normal, en mayor medida que en los casos anteriores, al ser las normales que se mezclan tan distintas en media y desviación típica.

MIXTURA de $N(-5,10)$ y $N(0,1)$				
t	$\mu_{mix}$	$\sigma_{mix}$	asimetría <sub>mix</sub>	curtosis <sub>mix</sub>
100	-0,5274	3,8400	-3,0260	18,8137
200	-0,5415	3,4229	-4,9035	34,4905
300	-0,2653	2,7198	-2,1651	29,9570
400	-0,2644	3,4468	-2,6797	27,9013

TABLA 21. - Los cuatro primeros momentos para las muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de una  $N(-5,10)$  y  $N(0,1)$  con un parámetro mezcla  $p = 0,1$ .

La Tabla 22 recoge los  $\alpha_{pu}$  calculados a partir del método bootstrap y obtenidos para calcular el VaR *insesgado en probabilidad*. En este caso, se vuelve a ver que el VaR *plug-in* 1% y 5% infravalora el riesgo.

$\alpha = 1\%$			
t	$\alpha_{pu}$	$VaR_{pu}$	$VaR_{plug-in}$
100	0,58	-23,24	-19,05
200	0,80	-18,47	-17,77
300	0,83	-12,62	-12,41
400	0,87	-20,60	-18,81
$\alpha = 5\%$			
t	$\alpha_{pu}$	$VaR_{pu}$	$VaR_{plug-in}$
100	4,65	-6,63	-5,58
200	4,68	-2,25	-1,89
300	4,87	-2,14	-2,11
400	4,88	-2,79	-2,61

TABLA 22. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_{\alpha}$  insesgados en probabilidad para muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400 de una distribución mixtura de una Normal(-5,10) y de una Normal(0,1) con un parámetro mezcla  $p = 0,1$  y los respectivos VaR *insesgado en probabilidad* y VaR *plug-in* para  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ .

En las Figuras 27 y 28 se representan las funciones de densidad y de distribución, respectivamente, para este caso.

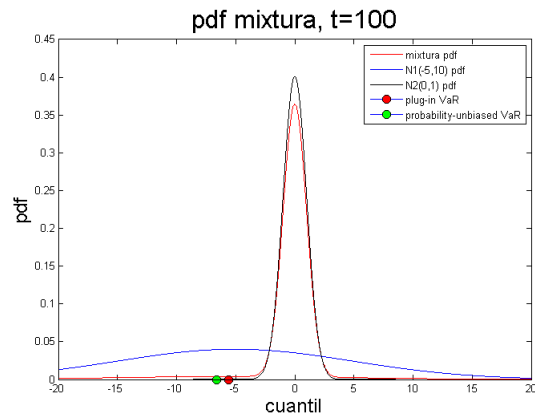


FIGURA 27. - La función de densidad de la mixtura (línea roja), la función de densidad de la  $N(-5,10)$  (línea azul) y la función de densidad de la  $N(0,1)$  (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

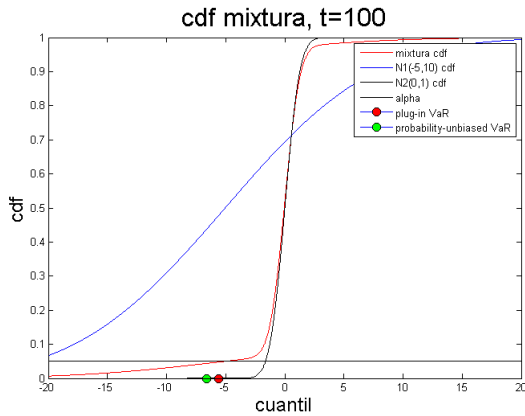


FIGURA 28. - La función de distribución de la mixtura (línea roja), la función de distribución de la  $N(-5,10)$  (línea azul) y la función de distribución de la  $N(0,1)$  (línea negra). En el eje horizontal los puntos señalan el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *plug-in* (punto rojo) y el  $\widehat{VaR}_{5\%}$  *insesgado en probabilidad* (punto verde).

### 5.4. [Mixtura] Simulación de Monte-Carlo

Se comprueban, mediante simulaciones, los resultados obtenidos teóricamente de las estimaciones del estimador VaR *plug-in* y del VaR *insesgado en probabilidad* y se calculan las probabilidades de exceso de dichas estimaciones del VaR.

Se realizan  $S=10000$  simulaciones para cada una de las cuatro mixturas vistas en el apartado anterior. Los resultados obtenidos, que se recogen en la Tabla 23, para muestras de tamaño 100, 200, 300 y 400, para un  $\widehat{VaR}_{1\%}$  y un  $\widehat{VaR}_{5\%}$ , indican que la probabilidad de exceso del VaR del estimador *insesgado en probabilidad* para los distintos tamaños muestrales es muy cercana a la probabilidad teórica del 1% y 5%, respectivamente. Sin embargo, la probabilidad de exceso del VaR del estimador *plug-in* difiere más de la probabilidad teórica, llegando a ser superior.

Mixtura de $N(0,2)$ y $N(0,1)$				
t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
100	1,2	0,93	4,92	4,56
200	1,25	0,91	5,12	4,75
300	1,16	1,09	4,96	4,89
400	1,09	1,01	5,37	5,3

Mixtura de $N(0,10)$ y $N(0,1)$				
t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
100	1,47	1,1	5,47	5,27
200	1,18	1,02	5,18	5,05
300	1,03	0,91	5,32	5,24
400	1,12	0,99	5,44	5,38

Mixtura de $N(-5,2)$ y $N(0,1)$				
t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
100	1,24	1,07	5,29	4,74
200	1,23	1,12	5,05	4,99
300	1,19	1,01	5,53	5,38
400	1,14	1,08	5,11	5,11

Mixtura de $N(-5,10)$ y $N(0,1)$				
t	1% plug-in	1% prob.unb	5% plug-in	5% prob.unb
100	1,53	1,2	5,41	5,13
200	1,29	0,94	5,47	5,08
300	1,22	1,05	5,11	4,98
400	1,05	0,98	4,97	4,97

TABLA 23. - Probabilidad  $\alpha\%$  de que la próxima observación exceda del  $\widehat{VaR}$  *plug-in* y del  $\widehat{VaR}$  *insesgado en probabilidad* en la simulación de Monte-Carlo para los diferentes casos de la distribución mixtura.

### 5.5. [Mixtura] Estimación por intervalo de confianza

Se va a realizar una estimación por intervalo con un nivel de confianza de  $1 - 2\alpha_{CI}$ , donde  $\alpha_{CI} = 0,05$ , utilizando bootstrapping.

La Tabla 24 muestra el intervalo *plug-in* a un nivel de confianza del 90%. Conforme aumenta el tamaño muestral este intervalo se estrecha.

5.5 [Mixtura] Estimación por intervalo de confianza

Mixtura de N(0,2) y N(0,1)					
t	Estimación puntual	$\alpha_{CI}$	$1-\alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
100	-2,11	5	95	-2,48	-1,49
200	-1,80	5	95	-2,34	-1,29
300	-1,86	5	95	-2,00	-1,65
400	-1,77	5	95	-1,95	-1,57
Mixtura de N(0,10) y N(0,1)					
t	Estimación puntual	$\alpha_{CI}$	$1-\alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
100	-4,94	5	95	-5,85	-3,97
200	-3,84	5	95	-5,20	-2,27
300	-5,45	5	95	-6,14	-4,62
400	-5,80	5	95	-6,52	-4,35
Mixtura de N(-5,2) y N(0,1)					
t	Estimación puntual	$\alpha_{CI}$	$1-\alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
100	-6,74	5,00	95,00	-8,29	-4,81
200	-5,60	5,00	95,00	-6,90	-4,77
300	-5,66	5,00	95,00	-6,50	-4,82
400	-5,16	5,00	95,00	-6,10	-4,48
Mixtura de N(-5,10) y N(0,1)					
t	Estimación puntual	$\alpha_{CI}$	$1-\alpha_{CI}$	$CI_{low}$	$CI_{up}$
100	-12,46	5	95	-17,65	-2,71
200	-11,23	5	95	-17,30	-4,29
300	-5,34	5	95	-8,33	-1,99
400	-5,16	5	95	-10,95	-3,09

TABLA 24. - Estimación puntual del  $Var_{5\%}$  *plug-in*, probabilidad  $\alpha_{CI}$  (%),  $1 - \alpha_{CI}$  (%) y cuantiles correspondientes a los extremos inferior y superior del intervalo de confianza 90% para los diferentes casos de la distribución mixtura.

Para calcular el extremo superior del intervalo de confianza *insesgado en probabilidad* se debe obtener el  $\alpha_{CI,pu}$  que minimice la siguiente función objetivo:

$$\alpha_{CI,pu} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \left| \frac{1}{B_2} \sum_{i=1}^{B_2} 1_{(\widehat{G}_i^*)^{-1}(\gamma) < g(\widehat{\theta})} - \alpha_{CI} \right|$$

El extremo inferior se calcula realizando, otra vez en su totalidad, el algoritmo bootstrap, pero en este caso sustituyendo  $\alpha_{CI}$  por  $1 - \alpha_{CI}$ .

En la Tabla 25 se observa que el intervalo que se obtiene a un nivel de confianza del 90%, no se encuentra entre los dos valores obtenidos en la tabla anterior, sino entre los que se recogen aquí. El intervalo se desplaza a la izquierda y no es simétrico.

Mixtura de N(0,2) y N(0,1)				
t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	$CI_{low,pu}$	$CI_{up,pu}$
100	1,03	15,15	-2,56	-2,31
200	1,02	72,37	-2,46	-1,59
300	1,07	34,57	-2,13	-1,88
400	1,05	63,46	-1,95	-1,63
Mixtura de N(0,10) y N(0,1)				
t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	$CI_{low,pu}$	$CI_{up,pu}$
100	1,62	87,14	-6,14	-4,44
200	1,43	90,54	-5,24	-2,45
300	4,14	98,11	-6,18	-4,57
400	1,16	19,16	-6,85	-6,14
Mixtura de N(-5,2) y N(0,1)				
t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	$CI_{low,pu}$	$CI_{up,pu}$
100	1,15	52,56	-8,88	-6,19
200	4,44	97,64	-6,91	-4,14
300	1,04	64,07	-6,54	-5,51
400	2,66	87,45	-6,18	-4,63
Mixtura de N(-5,10) y N(0,1)				
t	$\alpha_{CI,pu}$	$\alpha_{CI,pu}$	$CI_{low,pu}$	$CI_{up,pu}$
100	1,43	65,91	-17,71	-9,31
200	2,87	95,61	-18,44	-4,17
300	1,32	89,35	-9,29	-2,49
400	9,36	98,67	-9,48	-2,06

TABLA 25. - Probabilidades  $\alpha_{CI,pu}$  (%) tal que  $\alpha_{CI} = P(\widehat{CI} < Var)$  con  $\alpha_{\widehat{Var}} = \alpha = 5\%$  en el  $\widehat{Var}$  y cuantiles correspondientes al extremo inferior y superior del intervalo de confianza 90% para los diferentes casos de la distribución mixtura.

## 6. Conclusiones

Para las distintas distribuciones que se han utilizado en este estudio, los resultados obtenidos indican que el estimador VaR *plug-in* infravalora el riesgo para un determinado rango de probabilidades ( $\alpha$ ) cuando se trabaja con muestras de tamaño finito. Cuanto menor es el tamaño de la muestra, mayor es la infravaloración del riesgo por parte del estimador VaR *plug-in*.

El rango de probabilidades en los que el VaR *plug-in* infravalora el riesgo depende del tamaño de la muestra y de la distribución de probabilidad de la que se ha obtenido la misma.

Se ha observado que cuando se parte de una muestra procedente de una distribución Normal los  $\alpha_{pu}$  difieren más del  $\alpha$ , que cuando se parte de una muestra procedente de una distribución t-Student. Si se parte de una muestra de una distribución Mixtura los  $\alpha_{pu}$  diferirán más o menos del  $\alpha$ , dependiendo de los parámetros de las normales que se mezclan y del parámetro mezcla.

Para las tres distribuciones con las que se ha trabajado, el intervalo de confianza *insesgado en probabilidad* se desplaza a la izquierda para recoger con un nivel de confianza  $1 - \alpha$  al verdadero VaR.

Este trabajo propone una alternativa al VaR *plug-in*, el VaR *insesgado en probabilidad*, cuyo cálculo será relevante cuando se trabaje con muestras de tamaño pequeño y se requiera una probabilidad  $\alpha$  pequeña (la más habitual en el cálculo el VaR), ya que bajo estos supuestos, el VaR *insesgado en probabilidad* difiere más del *plug-in*.

## 7. Trabajando con datos reales

### 7.1. Análisis exploratorio de los datos

La primera parte de esta sección consiste en explorar los datos. Esta labor es fundamental, para el cálculo del VaR, dado que la principal fuente de información corresponde a los datos o eventos extremos generados tanto en periodos normales como de crisis.

Se trabaja con los precios diarios de cierre de seis índices bursátiles: EURO STOXX 50, IBEX 35, DOWN JONES, S&P 500, NIKKEI 225 y NASDAQ 100. El periodo de la muestra para todos los índices es del 22/05/1987 al 23/05/2012 (6524 datos).

El análisis exploratorio de los datos permite un primer acercamiento al comportamiento de las distribuciones de los índices en las colas.

La Tabla 26 presenta la estadística descriptiva de los rendimientos diarios de los seis índices. Los rendimientos diarios son definidos como:

$$r_{i,t} = \log\left(\frac{x_{i,t}}{x_{i,t-1}}\right)$$

donde  $x_{i,t}$  es el valor de cierre diario del índice bursátil,  $i$ , en el tiempo  $t$ .

El mayor promedio diario corresponde al índice NASDAQ 100 (0,040%) y el menor al índice NIKKEI 225 (-0,016%), que es el único que presenta un promedio de rendimientos diarios negativo. Se observa que los índices que presentan menor desviación típica son el DOWN JONES (1,156%) y el S&P (1,197%) y el de mayor el NASDAQ 100 (1,7810%). En cuanto a la asimetría todos los índices la presentan negativa, indicando que los rendimientos se extienden más hacia los valores negativos que a los positivos, siendo mayor la de S&P (-1,312) y menor la de NASDAQ 100 (-0,078). La asimetría es importante conocerla porque toda medida de riesgo debe tener en cuenta el comportamiento asimétrico en las colas, negativa y positiva, de la distribución de rendimientos de los índices.

De acuerdo con la muestra, todos los índices presentan exceso de curtosis, lo cual sugiere que la distribución de los rendimientos diarios de los índices tiene colas pesadas. El exceso de curtosis es menor para los índices EURO STOXX 50 (6,075), IBEX 35 (6,282) y NASDAQ 100 (6,975) y mayor para los índices S&P (28,318), DOWN JONES (16,117) y NIKKEI 225(28,318).

Los valores más extremos se encuentran en los índices S&P Y NASDAQ 100, presentando un rango de valores de 33,790% y 33,544% respectivamente. El índice que presenta menor rango de valores es el EURO STOXX 50 (18,699%).

El estadístico Jarque y Bera indica que la distribución de los rendimientos diarios no es Normal, al ser muy superior al valor crítico (5.9835) en todos los índices.

	EUROSTOXX50	IBEX35	DOWN JONES
media	0,014%	0,015%	0,024%
desviación típica	1,345%	1,380%	1,156%
asimetría	-0,159	-0,111	-0,908
exceso curtosis	6,075	6,282	16,117
rango	18,699%	23,070%	27,933%
mínimo	-8,262%	-9,586%	-17,136%
máximo	10,438%	13,484%	10,797%
Jarque y Bera	10059,342	10737,812	71496,631
	S&P	NIKKEI225	NASDAQ100
media	0,024%	-0,016%	0,040%
desviación típica	1,197%	1,477%	1,782%
asimetría	-1,312	-0,274	-0,078
exceso curtosis	28,318	8,374	6,975
rango	33,790%	29,370%	33,544%
mínimo	-22,833%	-16,135%	-16,341%
máximo	10,957%	13,235%	17,203%
Jarque y Bera	219823,832	19141,579	13228,739

TABLA 26. - Resumen estadística descriptiva rendimientos diarios.

La Figura 29 presenta los gráficos de las funciones de densidad para los seis índices, comparando las distribuciones empíricas, ajustadas mediante la densidad de Kernel, con las respectivas Normales. Se observa que las distribuciones empíricas presentan exceso de curtosis.

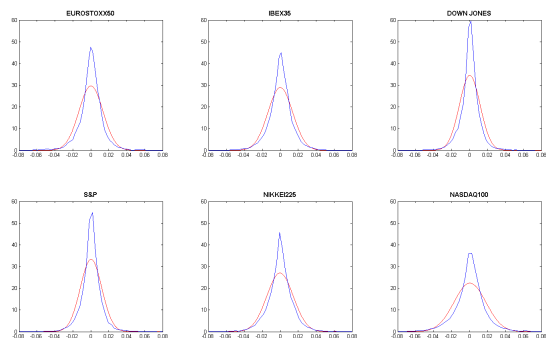


FIGURA 29. - Distribución Normal (roja) vs Empírica (azul). La distribución empírica ha sido ajustada mediante la densidad de Kernel.



También se analiza el QQ-plot (Figura 30), confirmando la presencia de colas más pesadas que las de una distribución Normal.

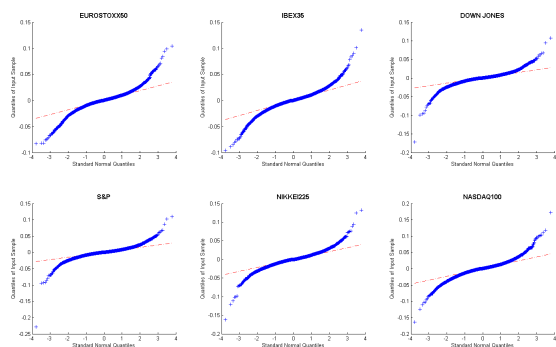


FIGURA 30. - QQ-plots de los seis índices bursátiles.

## 7.2. Otra posible aplicación

En esta segunda parte se van a calcular los  $\alpha_{pu}$  correspondientes a un  $\alpha = 1\%$  y a un  $\alpha = 5\%$ , necesarios para obtener los respectivos VaR insesgados en probabilidad para cada uno de los seis índices. Los  $\alpha_{pu}$  se van a calcular suponiendo que los rendimientos diarios de los índices siguen una distribución Normal, t-Student o Mixtura de dos Normales. Como otra posible aplicación del VaR insesgado en probabilidad, se intenta conocer la distribución que siguen los rendimientos diarios de cada índice en la cola izquierda, a partir de los  $\alpha_{pu}$ .

La Tabla 27 muestra que el  $\widehat{VaR}_1\%$  y  $\widehat{VaR}_5\%$  *plug-in* sobrevalora el riesgo cuando se supone que la distribución de rendimientos diarios sigue una distribución Mixtura de dos Normales para los índices EURO STOXX 50, DOWN JONES y NIKKEI 225. Esto supone que la distribución de los rendimientos de estos índices presenta una cola izquierda más pesada que la de una t-Student, es decir, existe un máximo local en la cola izquierda de forma que cambia la curvatura de la misma, produciendo que los VaR *plug-in* obtenidos sobrevaloren el riesgo. Por tanto, se puede concluir que los índices EURO STOXX 50, DOWN JONES y NIKKEI 225 siguen una distribución Mixtura de dos Normales concreta

en la cola izquierda de tal forma que la distorsión que produce la primera distribución Normal sobre la segunda hace que al 1% y al 5% el VaR *plug-in* sobrevalore el riesgo.

Para los índices IBEX 35 y NASDAQ 100, cuando se supone que sus rendimientos diarios siguen una distribución Mixtura de dos Normales, el  $\widehat{VaR}_1\%$  *plug-in* infravalora el riesgo y el  $\widehat{VaR}_5\%$  *plug-in* lo sobrevalora, lo que señala que los rendimientos de dichos índices siguen una distribución Mixtura de dos Normales diferente a la anterior al producirse el cambio de curvatura en la cola a una probabilidad mayor. Esta mixtura de dos Normales será el resultado de mezclar Normales de parámetros diferentes y/o de utilizar un parámetro mezcla diferente al caso anterior.

Por último, para el caso del índice S&P, si se supone que los rendimientos diarios del mismo siguen una Mixtura, tanto para una 1% como para un 5% el VaR *plug-in* infravalora el riesgo, al igual que lo hace si se supone que siguen una distribución Normal o t-Student. En este caso, no se puede intuir claramente la distribución que sigue la cola izquierda. Se debe de elegir la distribución cuyos  $\alpha_{pu}$ 's sean más similares a los  $\alpha$ . Se observa que la Mixtura es la que proporciona unos  $\alpha_{pu}$ 's más cercanos al  $\alpha$ , 1% y 5%, respectivamente, por lo que se concluye que la cola izquierda de la distribución de los rendimientos diarios del índice S&P también sigue una distribución Mixtura de dos Normales de determinados parámetros y con un determinado parámetro mezcla.

Al observar cómo se comporta el  $\widehat{VaR}_1\%$  y el  $\widehat{VaR}_5\%$  *plug-in* con respecto al riesgo, cuestión que se conoce gracias al cálculo del VaR *insesgado en probabilidad*, se puede conocer la distribución que siguen los rendimientos de cada índice en la cola izquierda. No se puede afirmar nada de cómo se comporta el resto de la distribución sólo a partir de lo visto en la cola izquierda, pero esto es indiferente, dado que para el VaR, como para cualquier otra medida de riesgo, lo que interesa conocer son los eventos extremos que se presentan en la cola izquierda, ya que son los que indican la probabilidad de pérdida.

7.2 Otra posible aplicación

	$\alpha_{pu}$		$VaR_{pu}$		$VaR_{plug-in}$	
	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$
<b>Normal</b>						
EUROSTOXX50	0,994966431	4,993694266	-0,031167413	-0,021986335	-0,031141961	-0,021978109
IBEX35	0,989304214	4,979661559	-0,032008698	-0,022574393	-0,031953049	-0,022547132
DOWN JONES	0,985994048	4,976596176	-0,026698526	-0,018788876	-0,026637428	-0,018762605
S&P	0,991463640	5,005490809	-0,027638337	-0,019438978	-0,027599869	-0,019445345
NIKKEI225	0,995244486	4,997854717	-0,034544894	-0,024456117	-0,034518485	-0,024453044
NASDAQ100	0,994026799	4,991467376	-0,041086681	-0,028918354	-0,041046643	-0,028903602

	$\alpha_{pu}$		$VaR_{pu}$		$VaR_{plug-in}$	
	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$
<b>t-Student</b>						
EUROSTOXX50	0,995729287	4,992612120	-3,372362705	-2,017315714	-3,368430140	-2,016155339
IBEX35	0,985558480	4,974868349	-3,391151082	-2,023049631	-3,377694967	-2,019081932
DOWN JONES	0,975799319	4,956373220	-3,602321646	-2,088133881	-3,576668408	-2,080747724
S&P	0,940596362	4,891033310	-3,711880530	-2,120401817	-3,644914352	-2,101403764
NIKKEI225	0,980981375	4,966859952	-3,469797018	-2,047488519	-3,451178892	-2,042115736
NASDAQ100	0,989041507	4,981276176	-3,416145598	-2,030902728	-3,405769950	-2,027919269

	$\alpha_{pu}$		$VaR_{pu}$		$VaR_{plug-in}$	
	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$
<b>Mixtura</b>						
EUROSTOXX50	1,002953039	5,027070923	-0,042724101	-0,021127588	-0,042730662	-0,021140049
IBEX35	0,989763388	5,018962396	-0,040372294	-0,021732206	-0,040258637	-0,021799433
DOWN JONES	1,001348318	5,041262002	-0,032480607	-0,017394946	-0,032532004	-0,017413216
S&P	0,988124583	4,983017416	-0,032530685	-0,017741545	-0,032433826	-0,017684633
NIKKEI225	1,016999148	5,060948797	-0,039510085	-0,023327950	-0,039733416	-0,023432103
NASDAQ100	0,994275446	5,017705785	-0,050461001	-0,028497162	-0,050411174	-0,028529118

TABLA 27. - Probabilidades  $\alpha_{pu}$  para obtener  $\widehat{VaR}_\alpha$  insesgado en probabilidad para los rendimientos diarios de los diferentes índices bursátiles, suponiendo que éstos siguen una distribución Normal, t-Student <sup>4</sup> o Mixtura de dos Normales y sus respectivos VaR *insesgado en probabilidad* y VaR *plug-in* para  $\alpha = 1\%$  y  $\alpha = 5\%$ .

<sup>4</sup>Se ha calculado el número de grados de libertad de la t-Student por el Método de Momentos utilizando la expresión del exceso de curtosis, en lugar de la de la varianza que se utilizó en la sección de la t-Student, debido a que todos los índices presentan una distribución de rendimientos diarios con varianza menor que 1. El número de grados de libertad será

$$gl = \frac{6}{EC} + 4$$

donde EC es el exceso de curtosis.

## Referencias

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D., *Coherent measures of risk*, Math. Finance, 1998, 9, 203-228.
- [2] Duffie, D and Pan, J., *An overview of value at risk*, J. Deriv, 1997, 4, 7-49.
- [3] Efron, B. and Tibshirani, R.J., *An introduction to the Bootstrap*, 1993 (Chapman & Hall: New York).
- [4] Francioni, I. and Herzog, F., *Probability-unbiased Value-at-Risk estimators*, Quantitative Finance, 2010, 1-14.
- [5] Hull, J., *Risk Management and Financial Institutions*, (Pearson, Prentice Hall).
- [6] Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, 2000 (Irwin, CA).
- [7] López Cachero, M., *Fundamentos y métodos estadísticos*, 1996, (Pirámide, Madrid).
- [8] McNeil, A., Frey, A. and Embrechts, P., *Quantitative Risk Management*, 2005, (Princeton University Press: Princeton, NJ).
- [9] Pearson, N.D. and Smithson, C., *VaR The State of Play*, Rev. Financial Econ., 2002, 11, 175-189.
- [10] Peña, D., *Fundamentos de estadística*, 2001, (Alianza Editorial, Madrid).