TAYLOR EXPANSIONS AROUND BLACK-SCHOLES: A NEW WAY TO APPROXIMATING DERIVATIVE PRICES IN CONTINUOUS TIME MODELS

Borja Montealegre Moyano

Trabajo de investigación 013/012

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

www.finanzascuantitativas.com

Valoración de derivados de renta fija según el enfoque Kristensen-Mele

Borja Montealegre Moyano

3 de julio de 2013

Trabajo fin de Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Directores:
Manuel Moreno Fuentes (Universidad de Castilla-la Mancha)
Javier Fernández-Navas (Universidad Pablo de Olavide, Sevilla)

Índice

Resumen

Este trabajo implementa un método de obtención de precios de derivados recientemente propuesto en Kristensen y Mele (2011). Este enfoque proporciona precios aproximados de derivados para modelos en tiempo continuo que no proporcionan fórmula cerrada. Con el fin de lograr este objetivo, se precisa de un modelo auxiliar, cuya solución sea conocida en forma cerrada. Dicho modelo auxiliar difiere según el contexto. Por ejemplo, podemos utilizar los modelos propuestos en Black-Scholes (1973) y Vasicek (1977) para valoración de derivados de renta variable y de renta fija, respectivamente. El enfoque propuesto consiste en encontrar una fórmula cerrada (bajo condiciones de regularidad) que permita encontrar la diferencia entre los precios obtenibles bajo ambos modelos. A continuación, se analiza su precisión numérica y el cálculo de sensibilidades dentro de este nuevo marco teórico juntamente con una comparación con otros modelos de referencia.

1. Introducción

En los últimos años se ha visto como la demanda de nuevos modelos de valoración se ha incrementado. La gran mayoría de estos modelos están desarrollados dentro del marco tiempo-continuo, una de las herramientas analíticas más populares de la economía financiera (Brigo and Mercurio, 2006). La principal ventaja de utilizar este marco es que puede proporcionar elegantes representaciones en la valoración de diversos activos financieros, pero, algunas veces nos encontramos ante modelos que no disponen de una solución analítica explícita mediante una fórmula cerrada, planteándose, de manera natural, la siguiente cuestión práctica: ¿cómo implementar dichos modelos?

Para solucionar este problema se dispone de dos enfoques alternativos: el primero depende de la solución numérica de una ecuación en derivadas parciales, obtenida a través de, por ejemplo, diferencias finitas, transformadas de Fourier, métodos de árboles, etc. (Schwartz, 1977; Hull and White, 1990; Scott, 1997). El segundo enfoque, iniciado por Boyle (1977), está basado en simulación Monte Carlo. Pero ambos métodos pueden resultar muy tediosos en su implementación numérica y requerir de grandes recursos computancionales.

En este artículo nos centramos en un nuevo marco conceptual, propuesto recientemente en Kristensen y Mele (2001) (K-M, de aquí en adelante). Este nuevo enfoque para la valoración de derivados puede desarrollar aproximaciones en forma cerrada para cualquier modelo de subyacentes, con una implementación sencilla y no demasiado intensa computancionalmente. La idea principal es elegir un modelo de valoración "auxiliar" para el cual se dispone de solución con fórmula cerrada. Dado este modelo auxiliar, se deriva una expresión para la diferencia entre el valor del modelo a aproximar y el auxiliar. Esta expresión toma la forma de una esperanza condicional bajo la probabilidad riesgo neutral, que bajo condiciones de regularidad, puede ser expresada en términos de una expansión en serie de Taylor. Finalmente, se proporciona una aproximación para el valor que hasta ahora nos era desconocido mediante truncamiento en un número finito de la serie infinita de términos.

El método es muy general y, por tanto, se puede aplicar a una amplia gama de escenarios, incluyendo valoración de opciones, el cálculo de las sensibilidades ("griegas") asociadas, y valoración de bonos. En este trabajo se desarrollarán ejemplos en los que se muestre lo fácil y precisa que es su implementación, además de sus principales ideas.

Otras expansiones similares son ampliamente utilizadas en econometría financiera y finanzas empíricas (ver, por ejemplo, Aït-Sahalia, 2002; Schaumburg, 2004; Aït-Sahalia and Yu, 2006; Bakshi, Ju and Ou-Yang, 2006; Aït-Sahalia and Kimmel, 2007; Xiu, 2010). Una característica clave de esta literatura es la expansión de la esperanza condicional de una variable continua en el tiempo, por ejemplo, algún momento condicional relacionado con el tipo de interés a corto plazo, que se prevé durante un pequeño lapso de tiempo, un día o una semana como máximo. Este tipo de expansiones son relativamente menos útiles cuando el objetivo es aproximar modelos de valoración de opciones, ya sea por (i) presencia de opcionalidad que conduce a funciones de payoff no diferenciables, como por ejemplo, el caso simple de valoración de opciones europeas, o porque (ii) el vencimiento de los contratos puede prolongarse mucho en el tiempo, como por ejemplo, en derivados cuyo valor depende directamente de la estructura temporal de tipos de interés. Por estas razones, las "pequeñas expansiones temporales"no se han aplicado a la valoración de activos previamente.

El enfoque K-M también se basa en desarrollos en serie de expectativas condicionales, pero funciona de manera distinta: en lugar de ser aplicado directamente a la función payoff, nuestras expansiones se aplican a los errores en la valoración, que resumen la diferencia entre el valor proporcionado por el modelo real y el auxiliar, escogido para aproximar el modelo verdadero. Estas expresiones de error suelen ser diferenciables incluso cuando la función payoff no lo es.

El truco de expandir el valor de activos en torno a valores calculados en forma cerrada, es similar al empleado por Yang (2006) mediante el uso de "modelos-base". Sin embargo, la aproximación que surge a través del método de Yang es muy diferente a la usada en este trabajo. La expasión de Yang se basa en la mejora de los términos en el modelo-base, que son expectativas del término de error tomadas bajo la probabilidad del modelo-base. Sin embargo, nuestros términos correctivos son expectativas condicionales del error surgido de una valoración a través de un modelo auxiliar, tomando la probabilidad real del modelo a aproximar.

Una interpretación del método K-M es que su enfoque es una expansión de la probabilidad neutral al riesgo implícita por el modelo verdadero, en torno a un modelo auxiliar elegido por el usuario.

Cuando aplicamos nuestra expansión a la valoración de activos, nos encontramos con algunas ventajas sobre las aproximaciones de las densidades condicionales, evitando, por ejemplo, el cálculo numérico de integrales de Riemann multidimensionales, dando lugar a una nueva e interesante visión económica.

Este trabajo está estructurado como sigue: En la próxima sección, ilustramos la aplicación del enfoque K-M a través de un ejemplo relacionado con la valoración de opciones en modelos con volatilidad estocástica. En la Sección 3, se expone el marco teórico general que nos permite desarrollar aproximaciones para la valoración de activos y el cálculo de sensibilidades. La Sección 4, relaciona las expansiones K-M con otras ya existentes en la literatura. Finalmente, comprobamos su precisión numérica en la valoración de bonos cupón cero y opciones sobre bonos, tanto en modelos unifactoriales como de dos factores.

2. La esencia del método de aproximación

A continuación, ilustramos las ideas básicas que subyacen al método K-M mediante un ejemplo empírico relevante, que surge en el contexto de la valoración de opciones europeas. Es bien sabido que la volatilidad de los rendimientos de acciones es estocástica. Esta característica es denominador común de muchos de los modelos derivados del modelo Black-Scholes (1973). En un modelo de volatilidad estocástica, el precio en el instante t de una acción $S(t)$ es la solución a:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sqrt{\nu(t)}dW(t) \tag{1}$$

donde $W(t)$ es el movimiento Browniano estándar bajo probabilidad riesgo neutral, r es el interés a corto plazo (tomado constante)y $\nu(t)$ es la varianza instantánea de los rendimientos. Por ejemplo, $\nu(t)$ puede ser un proceso con reversión a la media, con elasticidad constante de varianza (CEV, de aquí en adelante), como en el siguiente modelo:

$$d\nu(t) = \kappa(\alpha - \nu(t))dt + \omega \left|\nu(t)\right|^{\xi} dW_{\nu}(t) \tag{2}$$

donde $dW_{\nu}(t)$ es el movimiento Browniano correlado con $W(t)$, con correlación instantánea ρ, $\xi > 0$ es el parámetro CEV, y, finalmente, (κ, α, ω) son tres constantes adicionales.

Consideremos una opción call Europea sobre este activo. El payoff de esta opción a vencimiento, $T > 0$, es $b(S(T)) \equiv \max\{S(T) - K, 0\}$, donde $K > 0$ es el strike. Sea $w(S, \nu, t)$ la prima de la opción para cada $t \in [0, T]$, donde S, ν son el precio del activo y la varianza instantánea, respectivamente. Llegado el vencimiento T, $w(S, \nu, t) = b(S)$ para todo ν. Sujeto a esta condición, la prima de la opción satisface la ecuación

$$Lw(x, \nu, t) - rw(x, \nu, t) = 0 \tag{3}$$

donde L es el generador infinitesimal asociado a las ecuaciones (1)-(2):

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial t} + rx\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}\nu x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa(\alpha - \nu)\frac{\partial w}{d\nu} + \frac{1}{2}\omega^2\nu^{2\xi}\frac{\partial^2 w}{d\nu^2} + \rho\omega\nu^{\xi+\frac{1}{2}}x\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \nu} \tag{4}$$

Aparte del modelo afín de Heston (1993), con $\xi = 1/2$, la solución a la ecuación (3), siempre que exista, no es conocida en forma cerrada. Nuestro objetivo es obtener una aproximación en forma cerrada de $w(x, \nu, t)$, apoyándose en un modelo "auxiliar" que pueda ser resuelto en forma cerrada. Dentro de este contexto, el modelo de Black-Scholes es el modelo auxiliar más simple. De acuerdo a este modelo, el precio del subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico y la prima de la opción, $w^{bs}(x, t; \sigma_0)$, es la solución de la ecuación

$$L_0 w^{bs}(x, t; \sigma_0) - rw^{bs}(x, t; \sigma_0) = 0 \tag{5}$$

donde $w^{bs}(x,t;\sigma_0) = b(x)$ y el operador infinitesimal asociado, L_0, son los mismos que en la ecuación (4), pero con la constante σ_0^2 reemplazando a la varianza estocástica instantánea ν y con todas las derivadas parciales con respecto a ν iguales a cero, esto es, $\partial w/\partial\nu \equiv \partial^2 w/\partial\nu^2 \equiv \partial^2 w/\partial x\partial\nu \equiv 0$.

Restando (5) de (3), se obtiene $\Delta w(x,\nu,t;\sigma_0) \equiv w(x,\nu,t) - w^{bs}(x,t;\sigma_0)$, satisfaciendo

$$L\Delta w(x,\nu,t;\sigma_0) - r\Delta w(x,\nu,t;\sigma_0) + \delta(x,\nu,t;\sigma_0) = 0 \tag{6}$$

con la condición $\Delta w(x,\nu,T;\sigma_0) = 0$, $\forall x,\nu$ y una "función mispricing" (de error) δ dada por

$$\delta(x,\nu,t;\sigma_0) \equiv \frac{1}{2}(\nu-\sigma_0^2)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w^{bs}(x,t;\sigma_0) \tag{7}$$

Como $w^{bs}(x,t;\sigma_0)$ es conocido, podemos calcular $\delta(x,\nu,t;\sigma_0)$. Apoyándonos en el teorema de representación de Feynman-Kac sobre la ecuación (6) (Karatzas y Shreve, 1991) y recordando la definición de la diferencia en la valoración, $\Delta w = w - w^{bs}$, el valor de la prima desconocida, w, puede ser expresado como la suma de la prima bajo el modelo Black-Scholes más un momento condicionado, que será interpretado posteriormente

$$w(x,\nu,t) = w^{bs}(x,t;\sigma_0) + \mathbb{E}_{x,\nu,t}\left[\int_t^T e^{-r(u-t)}\delta(S(u),\nu(u),u;\sigma_0)du\right] \tag{8}$$

La función mispricing, δ, dada por (7) se puede interpretar como el incremento instantáneo en el coste total de cobertura derivado de la utilización de un modelo equivocado para protegerse contra el verdadero modelo, ecuaciones (1) y (2). El momento condicional en (8) viene dado bajo la dinámica de precios de acciones dadas en (1) y (2). Por tanto, en general imposible obtener una expresión en fórmula cerrada para el segundo término en (8). Sin embargo, bajo condiciones de regularidad, el mismo momento condicional puede ser formulado explícitamente como una expansión en serie, expresada en términos del generador infinitesimal asociado con el modelo real, L en (4). De tal modo (Kristensen and Mele, 2011) la ecuación (8) es equivalente a

$$w(x,\nu,t) = w^{bs}(x,t;\sigma_0) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(T-t)^{n+1}}{(n+1)!}\delta_n(x,\nu,t;\sigma_0) \tag{9}$$

donde δ_n satisface la ley recursiva $\delta_{n+1}(x,\nu,t;\sigma_0) = L\delta_n(x,\nu,t;\sigma_0) - r\delta_n(x,\nu,t;\sigma_0)$, con $\delta_0 \equiv \delta$. En la práctica, esta fórmula se ve truncada a un número finito de términos, teniendo

$$w_N(x,\nu,t;\sigma_0) = w^{bs}(x,t;\sigma_0) + \sum_{n=0}^{N}\frac{(T-t)^{n+1}}{(n+1)!}\delta_n(x,\nu,t;\sigma_0) \tag{10}$$

para algún $N \geq 0$. Naturalmente, la prima de la opción w no depende de σ_0, aunque su truncamiento w_N sí lo haga. En la Sección 5.1 se comentará acerca de la elección de σ_0 encontrando que la precisión numérica de w_N no depende de manera crucial de su elección.

Finalmente, notar que incluso cuando el modelo de Black-Scholes tiene volatilidad constante, nuestro modelo permite la obtención de información acerca de la volatilidad estocástica. La razón se debe a que nuestras expansiones están supeditadas a la función mispricing inicial, derivada del uso del modelo de Black-Scholes (1973); y esta función mispricing es una función del estado inicial, es decir, del precio y la volatilidad. Entonces, a medida que aumentan en número de términos, mayor es la información que estas expansiones aportan sobre la volatilidad estocástica.

3. Marco teórico: fórmula general de aproximación

En esta sección, siguiendo el ejemplo del apartado anterior, se deriva una expresión generalizada para la aproximación en la valoración de activos en modelos no resueltos con fórmula cerrada. En primer lugar, introducimos la notación a usar tanto para el modelo a aproximar como para su correspondiente modelo auxiliar, concluyendo con una fórmula de aproximación general. En segundo término, se analizan las sensibilidades de los activos con respecto a las variables estado subyacentes al marco de valoración.

3.1. El modelo y su aproximación

Consideremos un modelo multifactorial con un vector d-dimensional de variables estado $x(t)$ que afectan a la valoración de todos los activos en la economía. Asumimos que bajo probabilidad riesgo neutral, $x(t)$ satisface

$$dx(t) = \mu(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dW(t) \tag{11}$$

Donde $W(t)$ es un movimiento Browniano d-dimensional bajo probabilidad riesgo neutral, y $\mu(x,t)$ y $\sigma(x,t)$ son las funciones de deriva y difusión. Este marco general cubre las especificaciones más populares en la literatura de valoración de activos. Por ejemplo, en el modelo de volatilidad estocástica visto en la Sección 2, (1) y (2), el vector estado es $x(t) = [S(t), \nu(t)]$, precio del subyacente y varianza instantánea de sus rendimientos, respectivamente.

Sea $w(x,t)$ el valor de un derivado sujeto a la realización de $x(T)$, para algún $T > t$, cuando el estado actual es $x(t) = x$. La valoración de este derivado viene determinada por tres componentes exógenas: (i) Su payoff en T dado por $b(x(T))$ para una función $b(x)$; (ii) El tipo cupón instantáneo pagado por el activo a tiempo t y denotado por $c(x(t),t)$; (iii) El tipo de interés instantáneo a corto plazo a tiempo t, $R(x(t),t)$, con el cual el payoff esperado y los pagos de cupones serán descontados, bajo probabilidad neutral al riesgo.

Definimos el generador infinitesimal L asociado a (11) como

$$Lw(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \mu_i(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^2(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{12}$$

donde $\sigma^2(x,t) = \sigma(x,t)\sigma(x,t)^\top \in \mathbb{R}^{d\times d}$. El valor del derivado, $w(x,t)$, puede ser expresado como la solución a la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$Lw(x,t) + c(x,t) = R(x,t)w(x,t) \tag{13}$$

con la condición $w(x,T) = b(x)$ para todo x. En otros términos, una inversión en este activo debe ser tal que la ganancia de capital instantánea esperada bajo la probabilidad neutral al riesgo, $Lw(x,t)$, además del tipo cupón instantáneo, sea igual a la rentabilidad instantánea de un activo libre de riesgo. Introducimos ahora el modelo auxiliar con el fin de aproximar el valor desconocido $w(x,t)$:

$$dx_0(t) = \mu_0(x_0(t),t)dt + \sigma_0(x_0(t),t)dW(t) \tag{14}$$

para ciertas funciones de deriva y difusión $\mu_0(x,t)$ y $\sigma_0(x,t)$. El objetivo es formular una expansión adecuada del modelo real alrededor de este modelo auxiliar. Para ello, suponemos que la dimensión del model auxiliar es la misma que la del modelo original, es decir, x_0 es un vector d-dimensional. Este supuesto no conlleva ninguna pérdida de generalidad, ya que siempre podemos añadir componentes constantes, como ahora explicaremos. Consideremos, por ejemplo, un modelo auxiliar con una dimensión menor, con vector estado $y(t) \in \mathbb{R}^m$, con $m < d$, resuelto para ciertas funciones de deriva y difusión μ_Y y σ_Y:

$$dy(t) = \mu_Y(y(t),t)dt + \sigma_Y(y(t),t)dW_1(t)$$

donde $W_1(t)$ es un movimiento Browniano estándar m-dimensional. El vector proceso $\left[y^\top x_{m+1} \cdots x_d\right]^\top$, donde las últimas d-m componentes permanecen constantes con el tiempo, es solución a (14) con

$$\mu_{0,i}(x,t) = \begin{cases} \mu_{Y,i}(y,t) & 1 \le i \le m \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\sigma_{0,ij}(x,t) = \begin{cases} \sigma_{Y,ij}(y,t) & 1 \le i,j \le m \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por ejemplo, en la Sección 2, se usa este truco con un modelo auxiliar cuya dimensión es menor, Black-Scholes (1973), como aproximación a la valoración de opciones en modelos de mayor dimensionalidad, en su caso debido a la presencia de volatilidad estocástica. Para ahorrar en la notación, no se hace explícito que $w_0(x,t)$ depende de parámetros de perturbación, como se observa en el ejemplo introductorio de la sección anterior.

Por tanto, la diferencia de valoración, $\Delta w(x,t) \equiv w(x,t) - w_0(x,t)$, satisface

$$L\Delta w(x,t) + \delta(x,t) = R(x,t)\Delta w(x,t) \tag{15}$$

con la condición $\Delta w(x,T) = d(x)$. Los dos términos de ajuste vienen dados por

$$d(x) = b(x) - b_0(x) \tag{16}$$

y $\delta(x,t) = (L - L_0)w_0(x,t)$, esto es,

$$\delta(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \Delta\mu_i(x,t)\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \Delta\sigma_{ij}^2(x,t)\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{17}$$

donde $\Delta\mu_i(x,t) = \mu_i(x,t) - \mu_{0,i}(x,t)$, $\quad \Delta\sigma_{ij}^2(x,t) = \sigma_{ij}^2(x,t) - \sigma_{0,ij}^2(x,t)$

El primer término de ajuste, $d(x)$, surge del uso de un payoff distinto al usado en el modelo a aproximar. El segundo término captura discrepancias entre el modelo auxiliar y el real, en relación con los factores subyacentes que impulsan el mercado.

Dado un $N \geq 1$, asumimos que $d(x)$ sea diferenciable $2N$ veces con respecto a x, y $\delta(x,t)$ sea $2N$ veces diferenciable respecto de x y N veces respecto de t. El número N es, fundamentalmente, el orden de la aproximación de nuestra expansión, expresada más adelante en la Definición 1, y estos supuestos sobre d y δ son necesarios para que esta expansión esté bien definida. Las condiciones impuestas sobre $d(x)$ excluyen la elección de $b_0(x) \neq b(x)$, si la función payoff, $b(x)$, no es diferenciable (como, por ejemplo, en el caso de las opciones "plain vanilla").

Bajo condiciones de regularidad estándar (Kristensen and Mele, 2011), podemos aplicar el teorema de representación de Feynman-Kac a $\Delta w(x,t)$ en (15), para obtener la siguiente representación del valor del áctivo, $w(x,t)$ en términos del modelo auxiliar $w_0(x,t)$.

Teorema 1 ***(Representación del valor del activo)***

Supongamos que las dos soluciones, $w(x,t)$ y $w_0(x,t)$ correspondientes a la valoración en (13) y (15) existen. Entonces la siguiente identidad se mantiene bajo condiciones estándar de regularidad

$$\begin{aligned} w(x,t) = w_0(x,t) &+ \mathbb{E}_{x,t}\left[\exp\left(-\int_t^T R(x(s),s)ds\right) d(x(T))\right] \\ &+ \int_t^T \mathbb{E}_{x,t}\left[\exp\left(-\int_t^s R(x(u),u)du\right)\delta(x(s),s)\right] ds \end{aligned} \tag{18}$$

donde $x(t)$ satisface (11), y d, δ vienen dados por (16) y (17).

El lado derecho proporciona una expresión exacta para el error cometido por el uso de un modelo auxiliar. Esta representación es útil por si misma, ya que muestra, precisamente, como se relaciona el error en la valoración con el modelo auxiliar.

Sin embargo, el objetivo principal es la búsqueda de una aproximación del término de error con el fin de ajustarlo a $w_0(x,t)$ y reducir el error involucrado. En consecuencia, el próximo paso será aproximar las dos esperanzas de (18) usando expansiones en serie. Para ello, consideramos la siguiente definición:

Definición 1 ***(Aproximación al valor del áctivo)***

El N-ésimo orden de la aproximación, $w_N(x,t)$, al valor desconocido $w(x,t)$ en (18), en un instánte t y un estado x, viene dado por

$$w_N(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^n}{n!} d_n(x,t) + \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^{n+1}}{(n+1)!}\delta_n(x,t) \tag{19}$$

donde $d_0(x,t) = d(x)$, $\delta_0(x,t) = \delta(x,t)$ y

$$\begin{aligned} d_n(x,t) &= Ld_{n-1}(x,t) - R(x,t)d_{n-1}(x,t) \\ \delta_n(x,t) &= L\delta_{n-1}(x,t) - R(x,t)\delta_{n-1}(x,t) \end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que, se podría haber usado simulaciones para el cálculo de las esperanzas condicionales que aparecen en la representación de Feynman-Kac de $w(x,t)$, sin embargo, la característica que hace más atractivo el uso de expansiones es que, una vez implementado, prácticamente no requiere tiempo de cálculo.

3.2. Aproximación para el cálculo de "Griegas"

A continuación, se da un esbozo sobre como pueden ser usadas las expansiones propuestas en K-M para la obtención de fórmulas cerradas de derivadas parciales sobre funciones de valoración, lo cual, es muy útil en la estimación de griegas. De hecho, estas aproximaciones se obtienen fácilmente, derivando la fórmula de aproximación (19), de la Definición 1, con respecto a las variables de interés.

La aproximación a la derivada k-ésima de $w(x,t)$ viene dada por:

$$\frac{\partial^k w_N(x,t)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k w_0(x,t)}{\partial x^k} + \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^n}{n!} d_n^{(k)}(x,t) + \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^{n+1}}{(n+1)!} \delta_n^{(k)}(x,t) \tag{20}$$

donde

$$d_n^{(k)}(x,t) = \frac{\partial^k d_n(x,t)}{\partial x^k}, \delta_n^{(k)}(x,t) = \frac{\partial^k \delta_n(x,t)}{\partial x^k}$$

Las dos secuencias $d_n^{(k)}(x,t)$ y $\delta_n^{(k)}(x,t)$ pueden ser evaluadas numéricamente (usando, por ejemplo, métodos de diferencias finitas) o analíticamente. Por ejemplo, para el cálculo de la aproximación de primer orden $k=1$, usamos la recursión: $d_0^{(1)}(x,t) = \partial d(x)/\partial x$, $\delta_0^{(1)}(x,t) = \partial \delta(x)/\partial x$ y

$$\begin{aligned} d_n^{(1)}(x,t) &= L d_{n-1}^{(1)}(x,t) - R(x,t) d_{n-1}^{(1)}(x,t) + L^{(1)} d_{n-1}(x,t) - \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} d_{n-1}(x,t) \\ \delta_n^{(1)}(x,t) &= L \delta_{n-1}^{(1)}(x,t) - R(x,t) \delta_{n-1}^{(1)}(x,t) + L^{(1)} \delta_{n-1}(x,t) - \frac{\partial R(x,t)}{\partial x} \delta_{n-1}(x,t) \end{aligned}$$

donde

$$L^{(1)}\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mu_i(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ij}^2(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}$$

4. Relación con métodos de aproximación existentes

En esta sección, se discute acerca de cómo está relacionada la aproximación con la que trabajamos con otros métodos ya existentes. En la Sección 4.1, compararemos nuestra expansion con la de Yang (2006) y en la Sección 4.2 se explicará cómo el enfoque K-M está relacionado con métodos basados en las expansiones de densidades neutrales al riesgo.

4.1. Expansión de Yang

Las expansiones en valoración de activos han sido consideradas típicamente en la literatura como un medio para aproximar modelos de valoración de opciones con volatilidad estocástica. La aproximación desarrollada por Yang (2006) se basa en la idea sobre la cual la solución desconocida al modelo verdadero puede ser expresada en términos de un "modelo-base" y unos "residuos" adecuados. Mientras que, el "modelo-base"de Yang es similar a nuestro "modelo auxiliar ", nuestras series de expansiones son sustancialmente distintas. Con el objetivo de simplificar la representación, se establece que el interés a corto plazo R y el cupón c en (13) sean iguales a cero, $R(x,t) = c(x,t) = 0$, y que el primer término de ajuste, (16), $d(x) = b(x) - b_0(x) = 0$, es decir, el modelo auxiliar y el modelo verdadero tienen la misma función payoff, supongamos igual a uno.

El punto de partida del método de Yang es similar al aquí propuesto, especificar un modelo-base caracterizado por un generador infinitesimal, tal que $L_0 w^{(0)} = 0$, para alguna función de valoración conocida, $w^{(0)}$, satisfaciendo la misma condición de contorno que la función valor a calcular, w. Notar, entonces, que en (13), la función de valoración desconocida siempre puede ser escrita como solución a

$$0 = Lw(x,t) \equiv L_0 w(x,t) + (L - L_0)w(x,t) \tag{21}$$

Considerar, por ejemplo, el modelo con volatilidad estocástica de la Sección 2, donde las variables estado eran el precio del subyacente S, y la varianza instantánea de los rendimientos ν, $x = [S, \nu]$. Siendo Black-Scholes el modelo-base escogido, se obtiene

$$\begin{aligned} L_0 w &= \frac{\partial w}{\partial t} + rs\frac{\partial w}{\partial S} + \frac{1}{2}\nu S^2 \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \\ (L - L_0)w &= \kappa(\alpha - \nu)\frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\omega^2 \nu^{2\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} + \rho\omega\nu^{\xi+1/2} S \frac{\partial^2 w}{\partial S \partial \nu} \end{aligned} \tag{22}$$

Descomponer (3) de esta manera es conveniente ya que la valoración para el modelo-base, w_0, es entonces el proporcionado por Black-Scholes (1973), con la característica especial de que la variable varianza, ν, está introducida directamente en la fórmula en lugar de ser una varianza constante, σ_0^2, es decir, $w_0(x,t) = w^{bs}(S, t; \sqrt{\nu})$, en términos de la notación usada en la Sección 2.

El operador $L - L_0$ en (21), una vez aplicado a la función valor w, conduce a un término que lleva a la interpretación de la función mispricing, $(L - L_0)w$, similar a la función de mispricing δ en (15). Formalmente, (21) junto con el hecho de que $L_0 w^{(0)} = 0$ implica que la diferencia entre el valor del modelo real y el modelo-base, $\Delta w = w - w^{(0)}$, satisface $L_0 \Delta w(x,t) + (L - L_0)w(x,t) = 0$ o, de manera equivalente,

$$w(x,t) = w^{(0)}(x,t) + \int_t^T \mathbb{E}^0_{x,t}\left[(L - L_0)w(x(u), u)\right] du \tag{23}$$

donde $\mathbb{E}^0_{x,t}$, denota la esperanza tomada bajo la probabilidad subyacente al modelo-base, tal y como se define con L_0. Esta expresión es similar a la establecida en el Teorema 1, que bajo los supuestos establecidos en esta sección sería:

$$w(x,t) = w^{(0)}(x,t) + \int_t^T \mathbb{E}_{x,t}\left[(L - L_0)w_0(x(u), u)\right] du \tag{24}$$

A pesar de que ambas ecuaciones, (23) y (24), se basan en modelos auxiliares resueltos con fórmula cerrada, los términos de correción son distintos. En la representación de Yang (2006), (23), el término de corrección es la esperanza del término mispricing desconocido, $(L - L_0)w$, tomada bajo la probabilidad del modelo-base. En la representación empleada en este trabajo, (24), el término de correción es la esperanza de la función conocida $(L - L_0)w_0$, tomada bajo la probabilidad del verdadero modelo.

Estas diferencias tienen implicaciones, cuando se trata de aproximar cualquiera de estos términos correctivos. En nuestro caso, el término de ajuste está basado en $\delta = (L - L_0)w_0$, el cual, es conocido en fórmula cerrada, permitiendo así una aproximación directa mediante fórmula cerrada de la integral de la esperanza. El término de ajuste de Yang se basa en $(L-L_0)w$, donde w es desconocido, dando resultado a una aproximación basada en una expansión donde

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} w^{(m)}(x,t) \tag{25}$$

Y los términos $w^{(m)}(x,t)$ pueden ser resueltos recursivamente, como solución a: $L_0 w^{(m)} + (L - L_0)w_{(m-1)} = 0$, con condiciones de contorno $w^{(m)}(x,T) = 0, m = 1, 2, \ldots$. Yang propone aproximar w solamente incluyendo los primeros M términos de la suma infinita, lo cual, puede ser realizado de manera numérica o analítica. Además sugiere utilizar sus correspondientes representaciones de Feynman-Kac,

$$w^{(m)}(x,t) = \int_t^T \mathbb{E}^0_{x,t}\left[(L - L_0)w^{(m-1)}(x(u),u)\right] du, \qquad m = 1, \ldots, M$$

que pueden ser calculados a través de paquetes de software simbólico estándar.

4.2. Probabilidades riesgo neutrales

El precio de un activo se calcula como una cierta expectativas condicionada tomada bajo una distribución de probabilidad neutral al riesgo. Por tanto, la aproximación a este valor implica, necesariamente, aproximar las probabilidades neutrales al riesgo. ¿Cómo se relacionan, entonces, los métodos de aproximación con estas probabilidades riesgo neutrales aproximadas?. En esta sección, se vincula la expansión del valor $w(x,t)$ del Teorema 1 alrededor del valor auxiliar, $w_0(x,t)$, con la expansión de las probabilidades neutrales al riesgo del modelo de valoración alrededor del modelo de valoración auxiliar.

Para simplificar, al igual que antes, se establecen sobre (13) y (16) los mismos supuestos que en la Sección 4.1, es decir, $R(x,t) = c(x,t) \equiv 0$ y $d(x) = 0$, respectivamente. Entonces, las dos funciones valor son simplemente

$$w(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} b(y)p(y,T|x,t)dy$$
$$w_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} b(y)p_0(y,T|x,t)dy$$

donde, p y p_0, son las densidades condicionadas neutrales al riesgo subyacentes a los dos modelos: el verdadero, p, y el auxiliar, p_0. Claramente, tenemos

$$w(x,t) = w_0(x,t) + \int_{\mathbb{R}^d} b(y)\Delta p(y,T|x,t)dy \tag{26}$$

siendo $\Delta p \equiv p - p_0$ la diferencia entre las dos densidades condicionadas o "discrepancia de transición", usando la terminología propuesta por Aït-Sahalia (1996). Es fácil ver (Kristensen and Mele, 2011) que la representación propuesta en el Teorema 1 implica la siguiente identidad

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(y)\Delta p(y, T|x, t)dy = \int_t^T \mathbb{E}_{x,t}\left[\delta(x(s), s)\right] ds \tag{27}$$

donde, δ, es el misma expresión vista en (17). Por lo tanto, la expansión expuesta de $\int_t^T \mathbb{E}_{x,t}\left[\delta(x(s), s)\right] ds$ (ver Definición 1) está relacionada con la correspondiente expansión de la discrepancia de transición neutral al riesgo.

A pesar de darse esta equivalencia, los métodos de aproximación son, en general, más sencillos de implementar ya que conducen a fórmulas cerradas, fáciles de calcular, para los errores de pricing. Concretamente, la parte de la derecha de la igualdad en (27), que es el error en la valoración derivado del uso de un modelo incorrecto, puede ser calculado fácilmente a través de la expansión propuesta en la Definición 1. Por el contrario, el lado izquierdo de la igualdad en (27), que es el error derivado del uso de una densidad auxiliar riesgo neutral, requiere del cálculo de una integral de Riemman. Este cálculo puede llegar a ser tedioso, especialmente cuando la dimensión del modelo, d, es grande.

5. Precisión numérica del método

En esta sección, se evalua el desempeño del enfoque Kristensen-Mele dentro del contexto natural de la estructura temporal de tipos de interés: (*i*) en la Sección 5.1, con la valoración de bonos utilizando modelos unifactoriales, (*ii*) Valoración de bonos en modelos multifactoriales, Sección 5.2 y (*iii*) Valoración de opciones sobre bonos en modelos de un factor, Sección 5.3. A continuación, se ilustra su aplicación y se exponen y comentan los resultados númericos obtenidos.

5.1. Modelos unifactoriales

Consideremos ahora que queremos aplicar el método a modelos de un factor. Escogiendo $x(t) = r(t)$ como tipo de interés a corto plazo, el precio de un bono resuelve la ecuación (13) con $c(x, t) = 0$, $R(x, t) = x$ y $b(x) = 1$.

Tomemos como punto de inicio (suponiendo que sea desconocida) la solución obtenida en Vasicek (1977) como modelo de tipos de interés, donde el tipo de interés a corto plazo es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \beta(\alpha - r(t))dt + \sigma dW(t) \tag{28}$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\sigma > 0$ son constantes.

El primer modelo auxiliar que analizamos es simple:

5.1.1. Vasicek (1977) con payoff 0 como modelo auxiliar

Tomemos un modelo cuyos términos de deriva y difusión coincidan con los de Vasicek, ecuación (28), esto es $\mu = \mu_0$ y $\sigma = \sigma_0$ en términos del marco general descrito en la Sección 3, asumiendo, sin embargo, que en este modelo auxiliar, el payoff final es siempre cero, $b_0(x) = 0$.

El precio del contrato en el modelo auxiliar es, naturalmente, cero, $w_0(x,t) = 0$. De forma inmediata obtenemos $d(x) = 1$ y $\delta(x,t) = 0$, por tanto, atendiendo a la aproximación dada en la ecuación (19) de la Definición 1 obtenemos:

$$w_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^n}{n!} d_n(x,t) \tag{29}$$

donde

$$\begin{aligned} d_0(x,t) &= 1, \quad d_1(x,t) = -x, \quad d_2(x,t) = -(\mu(x,t) - x^2), \\ d_3(x,t) &= -\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} + \mu(x,t)\left(2x - \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\left(2 - \frac{\partial^2 \mu(x,t)}{\partial x^2}\right) + x(\mu(x,t) - x^2) \end{aligned}$$

Estos valores se han obtenido mediante la fórmula recursiva planteada en la Definición 1 de la Sección 3, siendo L el generador infinitesimal asociado a la ecuación (28).

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial t} + \beta(\alpha - r)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

La Figura 1 representa el porcentaje de error en el precio para la aproximación de orden N donde $N = 0,1,2,3,4,5$, con parámetros fijos expuestos en la leyenda de la misma, y un nivel inicial de tipos de interes igual a 10 %.

Un truncamiento de la Ecuación (29), basada en unos pocos términos, proporciona una aproximación bastante exacta a los precios de los bonos cercanos a vencimiento. En cambio, se necesita de muchos más términos para resultar precisos en los vencimientos mas lejanos. Como ejemplo de ello, podemos ver que la calidad de la aproximación basada solamente en los tres primeros términos se deteriora para $T - t \geq 2$

Pasamos ahora a una expansión basada en un modelo auxiliar más rico, es decir, uno en el que la función payoff no sea cero.

5.1.2. CIR (1985) como modelo auxiliar

Tomando ahora como modelo auxiliar el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) (CIR de aquí en adelante), el tipo de interés a corto plazo viene dado por la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \beta_0(\alpha_0 - r(t))dt + \sigma_0\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{30}$$

Los resultados correspondientes al ejemplo anterior pueden ser mejorados, debido al uso de un modelo auxiliar más informativo, donde el payoff del bono es igual a la unidad, $b_0(x) = 1$, de modo que $d(x) = 0$. La solución para el precio del bono, w_0 es bien conocida:

$$P(t,T,r(t)) = A(t,T)e^{B(t,T)r(t)} \tag{31}$$

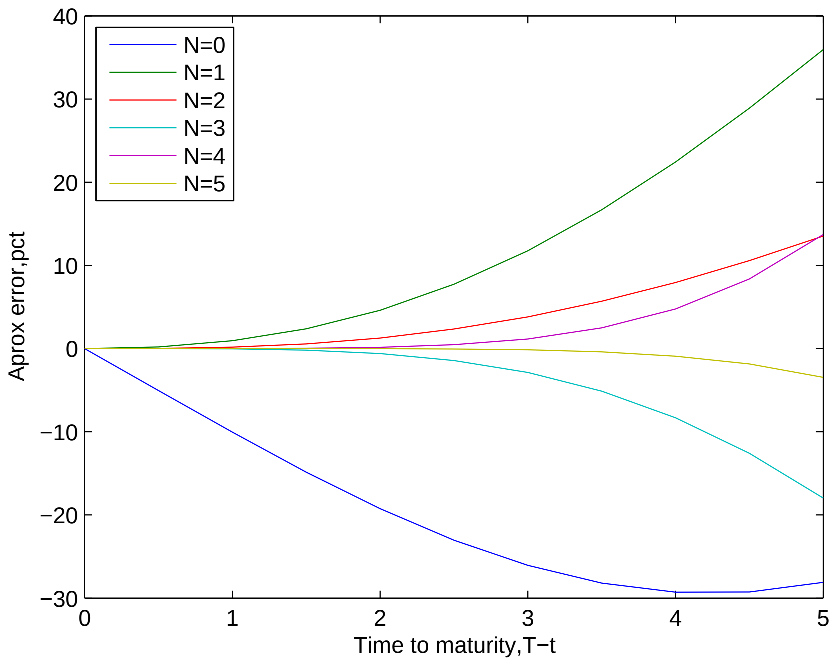

Figure 1: Porcentaje de error de aproximar precios de bonos Vasicek (1977), con parámetros $\alpha = 0{,}06$, $\beta = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}12$ y nivel actual de los tipos de interés a corto plazo 10 %, usando como modelo auxiliar el propio Vasicek (1977), pero con función de payoff igual a cero

donde

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\beta_0+\gamma)(T-t)/2}}{(\beta_0+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\beta_0\alpha_0/\sigma^2}$$

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\beta_0+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\beta_0^2 - 2\sigma^2}$$

Ahora, la función mispricing, δ, es

$$\begin{aligned}\delta(x,t;\theta_0) = {} & (\mu(x,t) - \beta_0(\alpha_0 - x))\frac{\partial w_0(x,t;\theta_0)}{\partial x} \\ & +\frac{1}{2}(\sigma^2(x,t) - \sigma_0^2 x)\frac{\partial^2 w_0(x,t;\theta_0)}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{32}$$

Como se anticipó en la Sección 2, el uso de un modelo auxiliar conduce, inevitablemente, a la necesidad de utilizar parametros que no afectan a la función precio, $w(x,t)$, pero que sí aparecen en la fórmula de aproximación. En el caso derivado del uso de CIR, dichos parámetros son $\theta_0 = [\alpha_0 \;\; \beta_0 \;\; \sigma_0]^\top$, obteniendo ahora una función $\delta(x,t;\theta_0)$ mucho más compleja que la expuesta en la Sección 2. Analizando en detalle $\delta(x,t;\theta_0)$, vemos que su segundo término, el ajuste de convexidad, nos es familiar por los resultados obtenidos en la Sección 2. Su primer término, desconocido hasta ahora, se debe a que el tipo de interés a corto plazo no es, obviamente, un riesgo que pueda ser negociado, lo cual lleva a que las dos derivas bajo la probabilidad riesgo neutral, μ y μ_0, difieran.

Una elección que simplifica la funcion δ en la Ecuación (32) es $\mu(x,t) = \beta_0(\alpha_0 - x))$, la cual usamos en nuestros resultados numéricos expuestos a continuación.

Haciendo uso de la fórmula de aproximación, ecuación (19), de la Definición 1, se deriva la siguiente fórmula para valoración de Bonos Vasicek (1977):

$$w_N(x,t;\theta_0) = w_0(x,t;\theta_0) + \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^n}{n!}\delta_n(x,t;\theta_0) \tag{33}$$

con, $\delta_n(x,t;\theta_0) = L\delta_{n-1}(x,t;\theta_0) - x\delta_{n-1}(x,t;\theta_0)$ y $\delta_0(x,t;\theta_0) \equiv \delta(x,t;\theta_0)$, siendo δ la función dada en la Ecuación (32).

De acuerdo a lo explicado anteriormente, ya que Vasicek (1977) y CIR (1985) poseen ambos una deriva lineal, podemos identificar perfectamente α_0 y β_0 con los valores numéricos usados en Vasicek (1977) α y β, es decir, $\alpha = \alpha_0$ y $\beta = \beta_0$. En consecuencia, $\theta_0 = \sigma_0$, es el único parámetro restante en la función mispricing δ, quedando simplificada a

$$\delta(x,t;\sigma_0) = \frac{1}{2}(\sigma^2(x,t) - \sigma_0^2 x)\frac{\partial^2 w_0(x,t;\sigma_0)}{\partial x^2}$$

Ahora, hay varias alternativas a la hora de tratar con este parámetro. Una de ellas podría ser considerar,

$$\widehat{\sigma}_N(x,t) = \underset{\sigma}{argmin}(w_N(x,t;\sigma) - w_0(x,t;\sigma))^2 \tag{34}$$

Como ejemplo simple, tenemos que para $N = 0$, $\widehat{\sigma}_0 = \sigma(x,t)/\sqrt{x}$. Claramente, $\lim_{N\to\infty}\widehat{\sigma}_N(x,t) = IV(x,t)$, siendo $IV(x,t)$ la volatilidad implícita en el modelo CIR (1985) definida como $w(x,t) = w_0(x,t;IV(x,t))$. Por tanto, para un N fijo, la función $w(x,t)$ puede ser aproximada por $w_N(x,t;\widehat{\sigma}_N(x,t))$, o de modo más general, $w_N(x,t;\widehat{\sigma}_M(x,t))$, donde $M \leq N$, como hacemos con nuestros resultados.

Para ilustrar el rendimiento de la aproximación resultante, establecemos como tipo a corto plazo $x = 10\,\%$, como en el ejemplo anterior. La Fig.2 representa el porcentaje de error con respecto al tiempo a vencimiento para distintos valores de N y para los mismos valores de Vasicek (1977) usados en el análisis anterior.

Comparando los errores obtenidos en ambos, comprobamos que una aproximación basada en el modelo de CIR(1985) funciona considerablemente mejor, ya que sólo se necesita un par de términos para lograr un nivel considerable de precisión. Cabe destacar que la aproximación funciona igualmente bien para otros valores iniciales del tipo a corto x.

5.2. Modelos multi-factoriales

Ahora, de manera similar a la realizada anteriormente, queremos comprobar la solidez de los resultados de modelos que van más alla de la clase afín. Consideramos el modelo

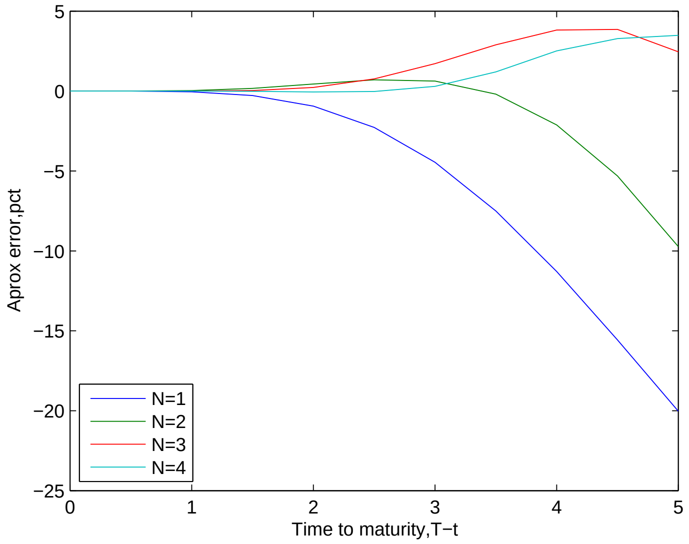

Figure 2: Porcentaje de error de aproximar precios de bonos Vasicek (1977), con parámetros $\alpha = 0{,}06$, $\beta = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}12$ y nivel actual de los tipos de interés a corto plazo 10 %, usando como modelo auxiliar CIR (1985)

no afín de dos factores propuesto por Fornari y Mele (2006) donde $r(t)$ es solución a:

$$\begin{cases} dr(t) = \beta(\alpha - r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t) \\ d\sigma(t) = \kappa(\mu - \sigma(t))dt + \omega\sigma(t)dW_\sigma(t) \end{cases} \tag{35}$$

donde $W(t)$ y W_σ son los movimientos Brownianos con correlación ρ. Este modelo es una version extendida del modelo CIR (1985) en la Ecuación (30), donde el coeficiente de difusión del tipo de interés es estocástico, siguendo también un proceso de reversión a la media. En este contexto, el precio del bono viene dado por dos factores, $x(t) = (r(t), \sigma(t))$, y es solución a $Lw(x,t) - rw(x,t) = 0$, con condición de contorno $w(x,T) = 1$, siendo L el generador infinitesimal asociado a la Ecuación (35):

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial t} + \beta(\alpha - r)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \kappa(\mu - \sigma)\frac{\partial w}{d\sigma}$$

$$+\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2\frac{\partial^2 w}{d\sigma^2} + \rho\omega\sigma^2\sqrt{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\sigma} \tag{36}$$

Este modelo es no afín por dos razones: a) el coeficiente de difusión del tipo de interés es $\sigma\sqrt{r}$, y dado que σ es estocástico, el modelo no puede generar precios de bonos afines exponenciales y b) incluso si el coeficiente de difusión fuese σ, en lugar de $\sigma\sqrt{r}$, el modelo no sería afin pues la segunda ecuación incluida en (35) se refiere a la dinámica de σ, en lugar de σ^2.

Para aproximar la solución a este modelo usamos un modelo unifactorial, Vasicek(1977), como modelo auxiliar. La fórmula de aproximación resultante es la misma que la vista en la Ecuación (33), pero con w_0 siendo la fórmula cerrada de valoración de bonos con Vasicek (1977), que viene dada por (31) pero con

$$A(t,T) = e^{(\frac{\theta}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta^2})(B(t,T)-(T-t))-\frac{\sigma^2}{(4\beta)}B(t,T)^2}$$

$$B(t,T) = \frac{1-e^{\beta(T-t)}}{\beta}$$

$$\theta = \alpha\beta$$

y con función mispricing

$$\begin{aligned} \delta(r,\sigma,t;\theta_0) = (\beta(\alpha - r) - \beta_0(\alpha_0 - r))\frac{\partial w_0(r,t;\theta_0)}{\partial r} \\ +\frac{1}{2}(\sigma^2 r - \sigma_0^2)\frac{\partial^2 w_0(r,t;\theta_0)}{\partial r^2} \end{aligned} \tag{37}$$

donde θ_0 denota el mismo vector de parámetros que en la ecuación (32).[1] Estableciendo $\beta_0 = \beta$ y $\alpha_0 = \alpha$, eliminamos el primer término de $\delta(x,t;\theta_0)$. Escogemos $\sigma_0^2 = \sigma^2 r$, con la intención de que coincidan los coeficientes de difusión para Vasicek (1977) y el modelo dado en la ecuación (35).

La tabla 1 muestra el porcentaje de error a la hora de aproximar precios de bonos para una variedad de niveles de tipos de interés, r, volatilidades σ y tiempo a vencimiento, con $N = 4$. Nuestro precio teórico de referencia para el bono será el calculado mediante integración numérica Monte Carlo.

[1] Los parámetros α_0, β_0, σ_0 corresponden, ahora, a los coeficientes de Vasicek (1977), siguiendo la notación dada por el marco general, en la Sección 3, para el modelo auxiliar.

T-t=1/2

	σ^2=0.50%				r=6%		
	Montecarlo	Kristensen-Mele			Montecarlo	Kristensen-Mele	
r	Precio	Precio	%Dif	σ^2	Precio	Precio	%Dif
4%	0.9798	0.9798	-0.0001	0.40%	0.9702	0.9702	-0.0015
5%	0.9750	0.9750	-0.0047	0.45%	0.9703	0.9703	-0.0015
6%	0.9703	0.9703	-0.0015	0.50%	0.9703	0.9703	-0.0015
7%	0.9656	0.9656	-0.0005	0.55%	0.9703	0.9703	-0.0015
8%	0.9609	0.9609	-0.0020	0.60%	0.9703	0.9703	-0.0015

T-t=1

	σ^2=0.50%				r=6%		
	Montecarlo	Kristensen-Mele			Montecarlo	Kristensen-Mele	
r	Precio	Precio	%Dif	σ^2	Precio	Precio	%Dif
4%	0.9591	0.9592	-0.0169	0.40%	0.9411	0.9412	-0.0176
5%	0.9501	0.9502	-0.0128	0.45%	0.9411	0.9412	-0.0176
6%	0.9412	0.9412	-0.0070	0.50%	0.9412	0.9412	-0.0070
7%	0.9323	0.9323	-0.0102	0.55%	0.9412	0.9412	-0.0070
8%	0.9235	0.9236	-0.0117	0.60%	0.9412	0.9412	-0.0070

T-t=3

	σ^2=0.50%				r=6%		
	Montecarlo	Kristensen-Mele			Montecarlo	Kristensen-Mele	
r	Precio	Precio	%Dif	σ^2	Precio	Precio	%Dif
4%	0.8744	0.8752	-0.0976	0.40%	0.8310	0.8317	-0.0958
5%	0.8525	0.8532	-0.0880	0.45%	0.8312	0.8317	-0.0719
6%	0.8313	0.8318	-0.0601	0.50%	0.8313	0.8318	-0.0601
7%	0.8105	0.8108	-0.0479	0.55%	0.8314	0.8318	-0.0483
8%	0.7902	0.7905	-0.0382	0.60%	0.8315	0.8318	-0.0365

T-t=5

	σ^2=0.50%				r=6%		
	Montecarlo	Kristensen-Mele			Montecarlo	Kristensen-Mele	
r	Precio	Precio	%Dif	σ^2	Precio	Precio	%Dif
4%	0.7914	0.7927	-0.1763	0.40%	0.7337	0.7369	-0.4380
5%	0.7623	0.7643	-0.2712	0.45%	0.7340	0.7369	-0.3991
6%	0.7344	0.7369	-0.3468	0.50%	0.7344	0.7369	-0.3468
7%	0.7074	0.7105	-0.4384	0.55%	0.7347	0.7369	-0.3086
8%	0.6814	0.6849	-0.5278	0.60%	0.7351	0.7369	-0.2571

Table 1: Aproximación a modelos multi-factoriales de tipos de interés no afines. En esta tabla se comparan los precios de bonos obtenidos a través de la expansión de Kristensen-Mele, basada en Vasicek (1977) y $N = 4$, con integración Monte Carlo. Los parámetros utilizados son: $\beta = 0{,}11$, $\alpha = 0{,}07$, $\kappa = 0{,}38$, $\mu = 0{,}07$, $\omega = 0{,}81$, $\rho = 0{,}10$. Cada tabla refleja el precio del bono para vencimientos igual a seis meses y uno, tres y cinco años. Las columnas tituladas %Dif proporcionan el porcentaje de error respecto a Monte Carlo.

Los porcentajes de error calculados tienen la tendencia a crecer conforme el tiempo a vencimiento aumenta, aunque dichos porcentajes son muy bajos. Incluso para bonos con vencimiento en cinco años, el porcentaje oscila entre 0.30 %-0.40 %, con un error máximo cometido de 0.5278 % (para r=8 % y $\sigma = 0{,}50\,\%$).

5.3. Valoración de opciones sobre bonos

En esta sección, vamos más allá de la valoración de bonos, aplicando esta vez la fórmula general de aproximación a opciones europeas sobre bonos cupón cero. Tomaremos como modelo a aproximar (suponiendo que no exista solución en forma cerrada) el modelo CIR (1985) y como modelo auxilar Vasicek (1977), ecuaciones (30) y (28), respectivamente.

En este contexto, el valor de una call viene dado por un único factor, $x(t) = r(t)$ y es solución a $Lw(x,t) - rw(x,t) = 0$, con condición de contorno, $w(x,T) = \max\{P(T_c, T_b, x(T_c)) - K, 0\}$, donde T_c y TG_b denotan, respectivamente, el vencimiento de la opción y del bono, siendo L

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial t} + \beta(\alpha - r)\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

Ahora, nos vemos obligados a elegir como función payoff del modelo auxiliar la misma que la del modelo verdadero, al tratarse de una función payoff no diferenciable, tal y como vimos en el marco general, Sección 3. Por tanto, $d(x) = b(x) - b_0(x) = 0$. Utilizando nuevamente la Definición 1, el N-ésimo orden de la aproximación en la valoración de una call europea sobre un bono es exactamente la misma que en (33), pero con w_0 siendo la fórmula cerrada de valoración de opciones europeas sobre bonos que proporciona Vasicek (1977), esto es,

$$C_t = P(t, T_b, r(t))H_t^{T_b} + P(t, T_c, r(t))H_t^{T_c} \tag{38}$$

donde

$$H_t^{T_b} = N\left(d_1\left(t, \frac{P(t,T_b,r(t))}{P(t,T_c,r(t))}\right)\right) \quad y \quad H_t^{T_c} = -KN\left(d_2\left(t, \frac{P(t,T_b,r(t))}{P(t,T_c,r(t))}\right)\right)$$

$$d_1(t,x) = \frac{\log(x/K) + (\Sigma^2(t,T_c)/2)}{\Sigma(t,T_c)} \quad y \quad d_2(t,x) = d_1(t,x) - \Sigma(t,T_c)$$

$$\Sigma^2(t,T_c) = \int_t^{T_c} \left(\sigma_s^T - \sigma_s^{T_c}\right) ds$$

$$\sigma_s^t = -\sigma \frac{1 - e^{\beta(t-s)}}{\beta}$$

con función mispricing la vista en (37). Procedemos del mismo modo:

Estableciendo[2], $\beta_0 = \beta$ y $\alpha_0 = \alpha$, eliminamos el primer término de $\delta(x, t; \theta_0)$ y escogemos $\sigma_0^2 = \sigma^2 r$, con la intención de que coincidan los coeficientes de difusión para Vasicek (1977) y CIR (1985).

En esta ocasión, para comprobar la precisión del metodo dentro de este nuevo contexto, se ha considerado variar el tiempo a vencimiento de la opción, $T_c - t$ y su strike, K, además del tiempo a vencimiento del bono subyacente, $T_b - t$. Para ello, fijado $T_c - t$, variamos $T_b - t$ y K, obteniendo que, para tiempos a vencimiento de opciones no muy lejanos los errores son imperceptibles. Observamos nuevamente, que a mayor tiempo a vencimiento, tanto para la opción como para el bono subyacente, los errores van aumentando aunque dichas diferencias continuan siendo no significativas, obteniendo un error máximo de 1.1782 % para $T_c - t = 5, \quad T_b - t = 10$ y $K = 0{,}70$. Variando otros parámetros, tales como r, α, β ó σ, se ha comprobado que la aproximación proporciona errores similares a los obtenidos en la tabla 2.

[2]De nuevo, siguiendo la notación dada en el marco general de la Sección 3, los parámetros α_0, β_0, σ_0 corresponden a los de Vasicek (1977) y α, β, σ a los de CIR (1985)

	T_c-t=1/2 T_b-t=1				T_c-t=1/2 T_b-t=5		
	F. Cerrada	Kristensen-Mele			F.Cerrada	Kristensen-Mele	
K	Precio	Precio	%Dif	K	Precio	Precio	%Dif
0.10	0.8447	0.8447	0.0000	0.10	0.6438	0.6438	0.0000
0.20	0.7477	0.7477	0.0000	0.20	0.5467	0.5467	0.0000
0.30	0.6506	0.6506	0.0000	0.30	0.4497	0.4497	0.0000
0.40	0.5536	0.5536	0.0000	0.40	0.3527	0.3527	0.0000
0.50	0.4565	0.4565	0.0000	0.50	0.2556	0.2556	0.0000
0.60	0.3595	0.3595	0.0000	0.60	0.1586	0.1586	0.0000
0.70	0.2625	0.2625	0.0000	0.70	0.0615	0.0615	0.0000

	T_c-t=1 T_b-t=3				T_c-t=1 T_b-t=5		
	F.Cerrada	Kristensen-Mele			F.Cerrada	Kristensen-Mele	
K	Precio	Precio	%Dif	K	Precio	Precio	%Dif
0.10	0.7411	0.7411	0.0000	0.10	0.6467	0.6467	0.0000
0.20	0.6469	0.6469	0.0000	0.20	0.5525	0.5525	0.0000
0.30	0.5527	0.5527	0.0000	0.30	0.4583	0.4583	0.0000
0.40	0.4586	0.4586	0.0000	0.40	0.3641	0.3641	0.0000
0.50	0.3644	0.3644	0.0000	0.50	0.2700	0.2700	0.0000
0.60	0.2702	0.2702	0.0000	0.60	0.1758	0.1758	0.0000
0.70	0.1760	0.1760	0.0000	0.70	0.0816	0.0816	0.0000

	T_c-t=3 T_b-t=6				T_c-t=3 T_b-t=10		
	F.Cerrada	Kristensen-Mele			F.Cerrada	Kristensen-Mele	
K	Precio	Precio	%Dif	K	Precio	Precio	%Dif
0.10	0.6141	0.6141	0.0004	0.10	0.4653	0.4653	0.0011
0.20	0.5306	0.5306	0.0004	0.20	0.3818	0.3818	0.0013
0.30	0.4471	0.4471	0.0005	0.30	0.2982	0.2982	0.0016
0.40	0.3635	0.3635	0.0006	0.40	0.2147	0.2147	0.0023
0.50	0.2800	0.2800	0.0007	0.50	0.1312	0.1312	0.0037
0.60	0.1965	0.1965	0.0011	0.60	0.0477	0.0477	0.0102
0.70	0.1130	0.1130	0.0018	0.70	0.0000	0.0000	0.0000

	T_c-t=5 T_b-t=10				T_c-t=5 T_b-t=15		
	F.Cerrada	Kristensen-Mele			F.Cerrada	Kristensen-Mele	
K	Precio	Precio	%Dif	K	Precio	Precio	%Dif
0.10	0.4747	0.4747	0.0025	0.10	0.3326	0.3325	0.0050
0.20	0.4007	0.4007	0.0029	0.20	0.2585	0.2585	0.0062
0.30	0.3266	0.3266	0.0035	0.30	0.1844	0.1844	0.0085
0.40	0.2525	0.2525	0.0043	0.40	0.1103	0.1103	0.0139
0.50	0.1784	0.1784	0.0059	0.50	0.0362	0.0364	-0.4438
0.60	0.1043	0.1043	0.0096	0.60	0.0000	0.0000	0.0000
0.70	0.0302	0.0306	-1.1782	0.70	0.0000	0.0000	0.0000

Table 2: En esta tabla se comparan las primas de opciones europeas sobre bonos, obtenidas a través de la expansión Kristensen-Mele utilizando Vasicek (1977) como modelo auxiliar y $N = 4$, con la fórmula cerrada de valoración de opciones sobre bonos que proporciona CIR (1985). Los parámetros utilizados son: $r = 6\,\%, \beta = 0{,}10, \alpha = 0{,}06, \sigma = 0{,}50\,\%$. Cada tabla refleja la prima de la opción dado un tiempo a vencimiento de la call, $T_c - t$, y un tiempo a vencimiento del bono subyacente, $T_b - t$. Las columnas %Dif proporcionan el porcentaje de error respecto a la fórmula cerrada que proporcina CIR (1985).

6. Conclusiones

Basándonos en un nuevo enfoque, desarrollado por Kristensen and Mele (2011), hemos implementado sus conceptos y orientado sus ideas a la valoración de derivados de renta fija, dentro del contexto de modelos multi-factoriales en tiempo continuo. La idea es sencilla: dado un modelo que no proporciona solución en forma cerrada para el precio de un cierto activo financiero, escogemos otro modelo “auxiliar” para el cual esta solución es bien conocida de tal manera que aproximaremos el valor desconocido a través del valor dado por el modelo auxiliar y ciertas expansiones del término de error cometido.

Comparándolo con otros métodos de aproximación, como el propuesto por Yang (2006), comprobamos que las expansiones K-M son aproximaciones bajo la probabilidad subyacente al modelo a aproximar, evitándonos el cálculo de tediosas integrales de Riemman como ocurre en el segundo caso. Si la comparación se hace con otras alternativas como simulación Monte Carlo, diferencias finitas, transformadas de Fourier o métodos de árboles, observamos que, obteniendo el mismo grado de precisión numeérica, los recursos computancionales empleados han sido considerablemente inferiores.

Aunque solo nos hemos centrado en la valoración de derivados de renta fija, la gran versatilidad del método hace que pueda ser aplicado en una gran variedad de contextos tales como valoración de derivados exóticos, muchos de los cuales no disponen de solución conocida en fórmula cerrada y suelen ser valorados a través de métodos de simulación del activo subyacente del derivado. Otra aplicación comentada y muy útil, cuando el objetivo es la reducción del riesgo de un pasivo financiero, es el cálculo de “griegas”: su aproximación es inmediata y se deriva de la fórmula de aproximación K-M de manera trivial.

Otro punto que hace interesante la aproximación K-M es su utilización en la calibración de modelos. Se puede llegar a pensar que la gran desventaja del método es que muchos de los modelos con los que tratamos dependen de variables no observables directamente en el mercado y dichas variables son inputs de las expansiones resultantes. La estimación de tales variables podría llevarse a cabo pensando a la inversa, es decir: Si conociésemos precios de mercado y planteásemos la fórmula de aproximación K-M correspondiente, mediante la minimización de la función diferencia entre precio y fórmula, obtendriamos los parámetros resultantes.

Referencias

Aït-Sahalia, Y., 1996. Testing continuous-time models of the spot interest rate. Review of Financial Studies 9, 385-426.

Aït-Sahalia, Y., 2002. Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: a closed-form approximation approach. Econo.metrica 70, 223-262

Aït-Sahalia, Y., Yu, J., 2006. Saddlepoint approximations for continuous-time Markov processes. Journal of Econometrics 134, 507-551.

Aït-Sahalia, Y., Kimmel, R., 2007. Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. Journal of Financial Economics 83, 413-452.

Bakshi, G.S., Ju, N., Ou-Yang, H., 2006. Estimation of continuous-time models with an application to equity volatility. Journal of Financial Economics 82, 227-249.

Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637-659.

Boyle, P.P., 1977. Options: a Monte Carlo approach. jounal of Financial Economics 4, 323-338.

Brigo, D., Mercurio, F., 2006. Interest Rate Models: Theory and Practice, second ed. Springer Finance, Berlin.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., 1985. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53, 385-407.

Heston, S.L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies 6, 327-344.

Hull, J., White, A., 1990. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. Journal of Financial and Quantitative Analysis 25, 87-99.

Karatzas, I., Shreve, S.E., 1991. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer Verlag, Berlin.

Kristensen, D., Mele, A., 2011. Adding and subtracting Black-Scholes: A new approach to approximating derivative prices in continuous-time models. Journal of Financial Economics 102, 390-415.

Schaumburg, E., 2004. Estimation of Markov processes with Levy type generators. Unpublished working paper, Kellogg School of Management.

Schwartz, E., 1977. The valuation of warrants: implementing a new approach. Journal of Financial Economics 4, 79-94.

Scott, L.O., 1997. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods. mathematical Finance 7, 413-426.

Vasicek, O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5, 177-188.

Xiu, D., 2010. Dissecting option prices using cloased-form series expansion with an empirical study of variance risk premia. Unpublished working paper, Princeton University.

Yang, J., 2006. Stochastic Volatility Models: Option Price Approximations, Asymptotics and Maximum Likelihood Estimation. Ph.D. disertation, University of Illinois at Urbana-Champaign.