

VALORACIÓN DE PRÉSTAMOS CORPORATIVOS MEDIANTE MATRICES DE TRANSICIÓN NEUTRALES AL RIESGO

Fabián Taviro Fernández

Trabajo de investigación 013/020

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Álvaro M^a Chamizo
Dr. Alfonso Novales

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

Valoración de préstamos corporativos mediante matrices de transición neutrales al riesgo

Fabián Taviro Fernández¹²

1 Sept 2013

¹Los tutores de este trabajo de fin de máster han sido Álvaro María Chamizo de BBVA y Alfonso Novales de la UCM.

²Trabajo englobado dentro del Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas de la Universidad de Valencia, Universidad Complutense de Madrid, Universidad del País Vasco y Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

Dentro del mundo financiero, resulta habitual tomar al préstamo corporativo como instrumento equivalente a un bono arriesgado. No obstante, existen diferencias relevantes que hacen que la valoración del primero sea más compleja que la del segundo. Por un lado los préstamos son activos ilíquidos que suelen mantenerse hasta vencimiento, aunque en la última década el mercado secundario ha crecido de forma notoria. Por otro lado, los préstamos suelen incluir cláusulas, como la opción de prepago, cuya aplicación dependerá de la calidad crediticia del prestatario. Ya sea por motivos meramente contables o para realizar la cobertura de la cartera de préstamos de una entidad financiera, disponer del precio de un préstamo corporativo es cada vez más atractivo en la industria financiera. Por tanto es necesario nuevos métodos de valoración que tengan en cuenta todas las peculiaridades del préstamo. En este sentido vamos a presentar un nuevo modelo basado en matrices de transición riesgo neutrales (Benzschawel et al, 2012), donde se han aplicado diversas mejoras que pretenden hacer el modelo más robusto. Además compararemos los resultados de este nuevo método con los que se podrían obtener a través de árboles binomiales, analizando las ventajas e inconvenientes de cada enfoque.

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Principales características de los préstamos corporativos	3
1.2. ¿Por qué un modelo basado en matrices de transición?	5
2. Revisión bibliográfica	8
2.1. Modelos estructurales	8
2.2. Modelos de forma reducida	9
2.2.1. Modelo de Black, Derman y Toy (1990)	11
3. Implementación del modelo	13
3.1. Asignación de estado de crédito inicial	14
3.2. Obtención de la matriz de transición histórica	15
3.3. Transformación riesgo-neutral de la matriz de transición histórica	16
3.3.1. Jarrow, Lando y Turnbull (1997)	17
3.3.1.1. Método alternativo con ajuste a la probabilidad acumulada de in- solvencia	19
3.3.2. Kijima y Komoribayashi (1998)	20
3.3.3. Lando y Mortensen (2005)	20
3.4. Valoración del préstamo	23
4. Aplicación del modelo en la valoración	26
4.1. Datos	26
4.2. Transformación de matrices a la versión neutral al riesgo	26
4.3. Valoración de un préstamo	34
5. Conclusiones del trabajo	44

Capítulo 1

Introducción

A primera vista puede resultar nula la diferencia entre un bono y un préstamo corporativo. En ambos los deudores se comprometen con los acreedores para devolver el dinero prestado más unos intereses, siguiendo un esquema de pagos predeterminado en el momento del acuerdo. Tanto un préstamo como un bono pueden tener el mismo esquema de pago, con lo que a efectos de la valoración de los flujos de dinero el resultado sería el mismo. Sin embargo, a pesar de esta igualdad en flujos, existen peculiaridades relevantes en la valoración de cada uno.

Los bonos corporativos suelen ser emitidos por las empresas para obtener financiación en los mercados de deuda, mientras que los préstamos son acuerdos entre una entidad financiera y una empresa para obtener financiación. Mediante ambos las empresas consiguen financiación, pero bajo condiciones diferentes. Puesto que los préstamos son acuerdos bilaterales que se originan tras una negociación privada, suelen tener diversas cláusulas que modifican el esquema de pagos en función de los escenarios futuros. Estas cláusulas pueden beneficiar tanto a la parte deudora como la acreedora, aunque restan liquidez al contrato en caso de querer abandonarlo alguna de las partes. Históricamente, los préstamos suelen mantenerse en la cartera de activos de un banco o entidad financiera hasta el vencimiento, con lo que el problema de la liquidez no resulta tan grave siendo ésta el precio a pagar por ambas partes para que la negociación llegue a buen puerto.

Dicho esto, ciertos cambios han acontecido en los últimos años. Hasta el comienzo de la crisis hipotecaria americana, el mercado secundario de préstamos corporativos ha crecido de manera significativa, quintuplicándose en el mercado norteamericano el volumen de negocio entre los años 2000 y 2007. Desde entonces, el volumen de negociación anual se ha situado de manera estable alrededor de los 500 millardos de dólares [14]. Además, este fuerte crecimiento en el mercado de préstamos ha venido acompañado por un enorme crecimiento en el mercado de derivados de crédito, siendo los más populares los *credit default swaps* (CDS), *loan-only credit default swaps* (LCDS), productos estructurados con garantía de un préstamo (CLO) o los índices de crédito (CDX, LCDX, iTraxx). El producto que más liquidez muestra es el CDS, siendo el volumen total de todos los notacionales referenciados en 2010 de 26 billones de dólares [20]. La incursión de estos nuevos instrumentos y la enorme liquidez de productos como el CDS, **ha sido aprovechada por las instituciones financieras para la cobertura de la cartera de préstamos corporativos**, haciendo necesaria la correcta valoración de dichos préstamos.

Dejando de lado la cobertura, **una entidad financiera puede estar interesada en conocer cual es el valor en el mercado de su cartera de préstamos, atendiendo únicamente a motivos contables**. Normalmente, debido a la regulación instaurada por el Comité de Basilea, se calcula el valor de un préstamo de forma estática, es decir, a través de medidas como el RAROC. Este cociente

nos mide el rendimiento ponderado por el capital económico y la pérdida esperada, ajustando la distribución de los rendimientos futuros para tener en cuenta la opción de prepago, por ejemplo. Si empleamos la misma medida pero tomando excesos de rendimientos respecto del mercado, tendremos una medida RAROC de mercado. Así pues, se recurre a este enfoque regulatorio en detrimento de una visión a través de flujos descontados en el tiempo. En este sentido creemos que el segundo enfoque es mucho más preciso y potente que uno a través de RAROC, puesto que en el primero es mucho más sencillo de añadir todo tipo de cláusulas además de poder ajustarse a parámetros de mercado tales como la volatilidad en spread de crédito, tipos de interés, etc.

En la siguiente sección veremos cuales son las principales características a tener en cuenta en la valoración de un préstamo corporativo.

1.1. Principales características de los préstamos corporativos

Dejando de lado las cláusulas particulares de cada contrato, la valoración de un préstamo dependerá de una serie de factores comunes. Estos factores serán los mismos que los utilizados para establecer el valor de los bonos arriesgados. Veámoslos a continuación.

1. **La probabilidad de que el prestatario incumpla su compromiso de entregar los pagos determinados en las fechas acordadas.** A esta medida le llamaremos *probabilidad de insolvencia o probabilidad de default (PD)*. Al complementario de la probabilidad de insolvencia la llamaremos *probabilidad de supervivencia (PS)*.
2. **En caso de que la insolvencia suceda, el valor del préstamo será la tasa de recuperación o recovery value (R).** Este valor dependerá tanto de la prioridad de pago en caso de evento (*seniority*) como de los activos que han sido obtenidos por parte del prestatario con el dinero prestado. Es habitual dentro de la literatura asignar un valor de *recovery value* de un 40 % del nominal para los bonos y de un 60 % para los préstamos, lo cual coincide en primera aproximación con lo que se ha observado en el último año [17]. Esto es debido a que los préstamos suelen tener una prioridad de pago mayor que los bonos. Además, los bancos suelen tener otras relaciones contractuales con el prestatario, siendo capaces de monitorizar el estado crediticio del deudor mejor que un bonista. En este sentido disponen de una mayor cantidad de información e incluso de cierto poder de decisión a la hora del evento de crédito, siendo así la tasa de recuperación más alta. Incluso otros informes dicen que este ratio es incluso mayor, siendo el estándar para la valoración de los *loan-only credit default swap* (LCDS) del orden del 75 % [18]. En cualquier caso este valor es muy controvertido, puesto que estamos aproximando una variable aleatoria a un número concreto.
3. El periodo hasta el **vencimiento y las fechas de pago**, que suelen ser cada trimestre para los préstamos.
4. **Spread por riesgo de crédito** que se debe pagar trimestralmente según el contrato (fijo en el tiempo) y prima de riesgo de mercado del prestatario, que se empleará para conocer la probabilidad de insolvencia que el mercado asocia a dicho deudor (variable en el tiempo). Tanto el cupón como la prima de mercado se expresan como un spread anual por encima de un tipo de referencia libre de riesgo, siendo los más comunes el LIBOR y el EURIBOR. Obsérvese que no se ha tomado como referencia un tipo libre de riesgo, si no el tipo al que los bancos se prestan dinero entre ellos. De esta manera, todo spread positivo por encima del tipo de referencia se deberá únicamente por riesgo de insolvencia, dejando de lado el sobre coste que

tienen que pagar las entidades financieras para disponer del dinero. Por último, la mayoría de los préstamos se originan a tipo variable, con lo que se puede despreciar el riesgo de tipo de interés. Así pues únicamente tenemos el riesgo de crédito como fuente de incertidumbre.

Por otro lado, tenemos las cláusulas de contingencia de los préstamos, que serán el principal aspecto que los diferencia de los bonos. Entre las más empleadas se encuentran las siguientes.

1. **La opción de prepago:** Cuando el spread de crédito contratado es superior al spread de mercado, la empresa deudora puede salir del préstamo entregando el nominal y los intereses devengados. De esta manera, el prestatario podría reducir el coste que paga por financiarse entrando en un nuevo préstamo. En la mayoría de los contratos suele incluirse esta opción de prepago y es, con diferencia, la cláusula más empleada e importante de entre todas las acordadas. Normalmente el prestamista incluye una penalización por prepago, es decir, si el valor del préstamo está por encima de la par y el prestatario desea prepagar, éste deberá pagar una tasa por hacerlo. Habitualmente esta tasa se ha situado en 50 pb, aunque en los últimos años ha tendido a reducirse hasta hacerse nula. Aún así, el prestatario puede incurrir en otros gastos legales o administrativos si ejerce la opción, con lo que dicho ejercicio no suele ser eficiente.
2. **La opción de disposición:** Aparte de préstamos, existen otros productos financieros como líneas de crédito o avales que se ajustan mejor a las necesidades del cliente. En las líneas de crédito la entidad financiera deja a disposición del prestatario una cantidad de efectivo que podrá ser retirado en la proporción que le convenga. Es razonable pensar que la proporción retirada (ratio de utilización) dependerá de la calidad crediticia del deudor, además de que el prestamista puede añadir un límite al ratio de utilización en función del rating. Tanto por la cantidad retirada como por la no retirada se paga una tasa, siendo normalmente mayor la cargada por la cantidad empleada. Además, estas dos tasas pueden depender también del rating del deudor, conociéndose este recurso como *rating grid*. En los avales, el banco proporcionará la cantidad acordada a una tercera parte en caso de que suceda un evento previamente registrado en un contrato. Así pues, cuanto menor sea el rating del referente, más probable será su posible utilización, marcando un rating límite a partir del cual el dinero debe ser dispuesto por el banco al prestatario para cumplir con el aval.
3. **Rating grids:** Como ya hemos mencionado, el cupón puede depender del rating del prestatario, siendo mayor cuanto peor sea la calidad crediticia del deudor. Este recurso puede emplearse tanto en préstamos como en líneas de crédito. La estructura de cupones en función del rating está predefinida en el contrato y además, puede depender también del ratio apalancamiento o algún otro parámetro financiero.
4. **La opción de convertibilidad:** Otra opción muy común en las líneas de crédito es la de convertir la cantidad retirada del producto en un préstamo con una estructura de pagos definida. Esta opción suele incluirse en líneas de crédito de corto plazo (menores a un año), las cuales son muy populares en la industria por motivos regulatorios.

Obsérvese como todas las cláusulas dependen de la calidad crediticia del deudor. Algunas de ellas son beneficiarias para éste, como la opción de prepago o la opción de convertibilidad, y otras lo

son para el acreedor, como el *rating grid*. Estos recursos añaden gran flexibilidad a la hora de la negociación de los términos del préstamo, aunque añaden complicaciones a la hora de la estimación de su precio.

1.2. ¿Por qué un modelo basado en matrices de transición?

Los ratings son medidas de propensión de la compañía referenciada a la insolvencia. En otras palabras, miden la calidad discretizando los posibles estados y los ordena en función de la probabilidad de insolvencia de un referente. La discretización de los estados crediticios suele depender de la empresa comercial que los emita. Estas empresas se encargan de analizar aspectos fundamentales de la compañía a la que hace referencia el rating y emiten una opinión sobre la probabilidad de que esta empresa sea insolvente durante un plazo concreto. Además de esta probabilidad de insolvencia, también elaboran tablas donde se refleja la probabilidad de transición a otro estado crediticio. Estas tablas o matrices de transición se elaboran tomando el número de empresas que se han mantenido o han cambiado de rating respecto del total de empresas que comenzaron con ese rating durante un periodo concreto de muestreo.

El uso de ratings está totalmente extendido dentro de la industria financiera, no sin haber alguna crítica acerca de su desempeño en momento de estrés. Sin embargo, **la mayoría de las cláusulas vigentes en un préstamo están condicionadas a la evolución del rating del prestatario en el futuro**, así que resulta totalmente sensato aprovechar las probabilidades que nos dan las matrices de transición para la valoración de préstamos corporativos.

Siguiendo este razonamiento, Benzschawel et al.[2] proponen **un modelo similar al de los árboles binomiales (valoración hacia atrás), pero sustituyendo los nodos del árbol por ratings de crédito**. La probabilidad de pasar a cualquier nodo en el periodo siguiente vendrá dada por las matrices de transición riesgo-neutrales para cada periodo, siendo dichas matrices de transición riesgo-neutrales el producto de una transformación aplicada a la matriz de transición histórica que tendremos de Moody's, S&P, etc. **La transformación que se realiza será tal que las probabilidades de insolvencia para cada rating son las que se observan en el mercado. Además habrá que ajustar el resto de elementos de la matriz, tal que la suma de probabilidades de cada fila siga siendo la unidad**. Como veremos más adelante, dicha transformación es crucial para el resultado final y es ahí donde se centrará gran parte del trabajo investigador de este documento.

Una vez que tengamos la matriz de transición riesgo-neutral, podremos iniciar la **valoración hacia atrás**, comenzando en el vencimiento (T). En este momento, el nodo correspondiente a la insolvencia tendrá como pago la tasa de recuperación, siendo el resto de nodos iguales al pago del cupón correspondiente y el principal del contrato. Como hemos calculado la matriz transición que va entre el vencimiento y la anterior fecha de pago, conocemos en $T-1$ cual será la probabilidad de venir de cada nodo. Si calculamos la esperanza, induciremos el valor del préstamo en $T-1$, al que habría que añadir el pago de los correspondientes cupones. Continuaremos con el procedimiento hasta la fecha actual, siendo el precio del préstamo aquel nodo que coincida con el rating actual del prestatario.

En la Figura 1.1 mostramos un ejemplo del procedimiento. Supongamos un préstamo a 5 años con pago anual de LIBOR + 200 pb y con rating BB. En la parte de arriba de dicha figura mostramos los pagos a realizar en cada nodo. En el vencimiento se pagará el cupón correspondiente y el principal del préstamo. En el resto de fecha se pagará únicamente el cupón y en caso de insolvencia, el

pago será la tasa de recuperación, que en este caso, se ha elegido el estándar del 60 % del nominal. El estado de insolvencia es absorbente, es decir, la probabilidad de abandonar este estado es nula.

Una vez iniciado el descuento hacia atrás, **debemos evaluar en cada nodo si el valor del préstamo es tal que alguna cláusula deba ser aplicada**. Por ejemplo, supongamos que el valor del préstamo es mayor que el pago de principal, cupones y penalización, es decir, es más barato refinanciarse en el mercado tras la mejora en el estado crediticio. En consecuencia, el deudor ejercerá la opción de prepago, sustituyéndose en el nodo el valor descontado de los flujos futuros por el valor del nominal. De la misma manera se procederá para el resto de cláusulas, hasta conseguir un precio que tenga en cuenta todas ellas.

A pesar de la aparente sencillez del método, el éxito del resultado depende fuertemente de la elección de los parámetros y de ciertos procedimientos intermedios. Por un lado, (i) se toma la tasa de recuperación como una constante y no como una variable aleatoria, siendo Además inexistente un consenso acerca de qué valor es el más apropiado. Por otro lado, (ii) las matrices de transición dependen del rango de tiempo que se toma y de la agencia comercial que los suministra. Si tomamos una matriz de transición anual que recoja la actual situación económica, estaremos cometiendo un error muy alto en la estimación de los elementos de la matriz, puesto que el número de migraciones habrá sido demasiado pequeño. En cambio, si ampliamos demasiado la ventana temporal de la muestra para una mejor precisión, no será representativa de las condiciones de mercado más actuales.

Adicionalmente, (iii) para la transformación de las matrices de transición históricas a sus homólogos riesgo-neutrales vamos a necesitar los spreads de crédito de las empresas valoradas. En este trabajo hemos tomado dicho spread como el que se observa en el mercado de CDS. Sería más conveniente tomar LCDS, pero la baja liquidez de éstos favorece la elección de los CDS. El supuesto de asumir que el spread del CDS es el mismo que el spread que se debería cargar en un préstamo, aunque aceptable, es cuestionable. Para la valoración del spread de los CDS se asume una tasa de recuperación menor que la del préstamo, lo que provoca una sobreestimación del spread. No obstante, existen otros muchos factores que también influyen de manera sustancial. Para el caso de las líneas de crédito, (iv) el ratio de utilización es también una variable aleatoria, utilizándose en el procedimiento un valor estimado.

Por último (v), la transformación de las matrices al caso riesgo-neutral es, con toda seguridad, el supuesto más fuerte del procedimiento. Como veremos, se emplearán tres métodos diferentes cuyos resultados serán bastante diferentes entre sí. Dentro de la industria, tampoco hay un estándar para este tipo de transformaciones, siendo muchas veces la sencillez en la implementación el criterio más empleado para la selección del algoritmo. Aún así, se justificará qué métodos pueden resultar más convenientes para este tipo de modelos, basándonos tanto en argumentos económicos como en el análisis de los resultados. Los problemas mencionados no dejan de ser los habituales dentro del mundo de la modelización. A pesar de no haber consenso en muchos aspectos, todos ellos están respaldados por diversos criterios que creemos adecuados.

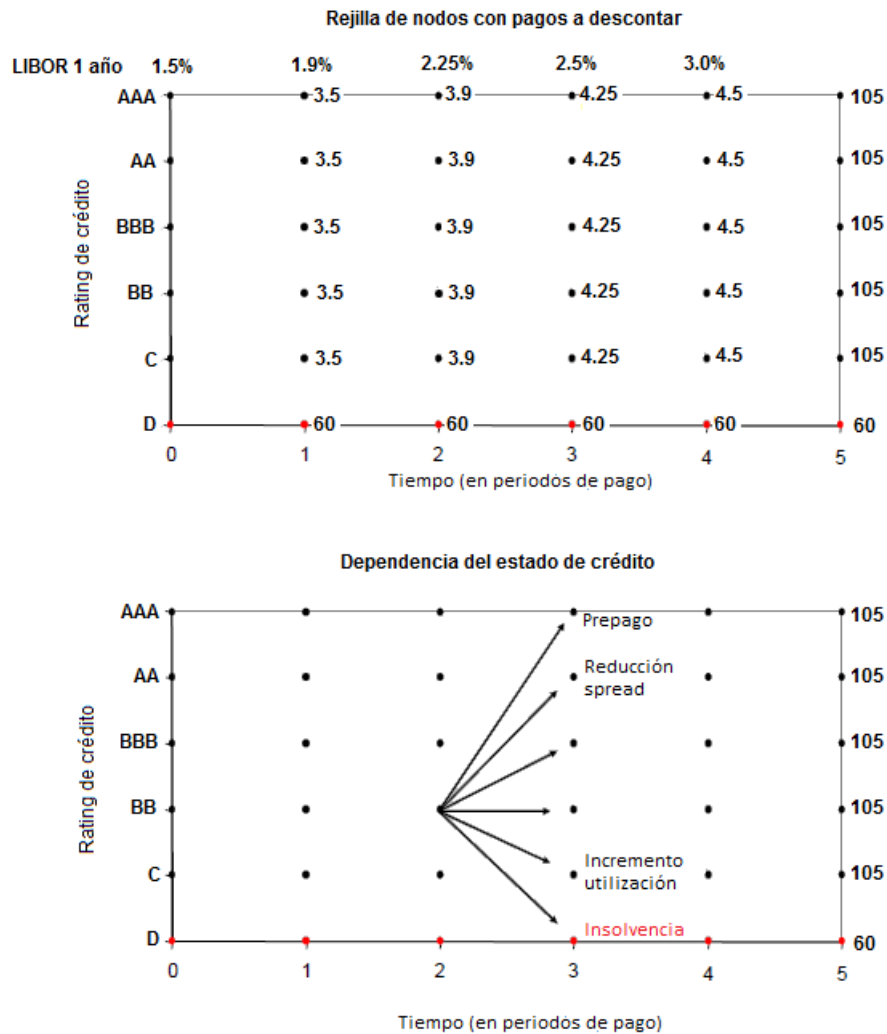


Figura 1.1: (Arriba) Pagos del préstamo para cada estado de crédito. En la parte superior, LIBOR implícito a un año observado en el momento de la valoración. (Abajo) Sucesos posibles en caso de migración de rating.

Una vez presentada la motivación de este trabajo, mostraremos la estructura que seguiremos para la exposición de las ideas. A continuación, en el Capítulo 2 mostraremos una revisión bibliográfica de la literatura existente en la valoración de préstamos corporativos. En el Capítulo 3 volveremos sobre el método de Benzhawel et al. (2012) [2], centrándonos sobre todo en la transformación de las matrices. Explicaremos en que consiste cada uno de los tres algoritmos empleados, haciendo hincapié las ventajas e inconvenientes de cada uno. En el Capítulo 4 vamos a poner a prueba el procedimiento de valoración. Comenzaremos primero probando qué método de transformación de matrices valora mejor el préstamo más sencillo que existe: el bono. Continuaremos luego con la valoración de un préstamo con opción de prepago y compararemos los resultados con los que se obtendrían con un método alternativo. Además, motivaremos el uso de préstamos con otro tipo de cláusulas. Para terminar, en el Capítulo 5 analizaremos los principales resultados, mostrando las conclusiones más importantes del trabajo y los aspectos que se deben mejorar en futuras investigaciones.

Capítulo 2

Revisión bibliográfica

En este capítulo vamos a hablar de las diferentes alternativas al modelo de valoración con matrices de transición que podemos emplear. Principalmente, en la literatura se pueden encontrar dos grandes tipos de modelos. Por un lado tenemos los modelos estructurales, cuyos fundamentos son puramente económicos. Estos modelos tratan de predecir eventos futuros de crédito basándose en características propias de una empresa como el capital o la deuda.. Por otro lado tenemos los modelos de forma reducida, donde la probabilidad de impago proviene de una variable exógena de mercado. Mediante ambas aproximaciones podemos estimar un precio para el préstamo, a pesar de que parten de fundamentos diferentes. En este trabajo vamos a mencionar un modelo de cada tipo, haciendo mayor hincapié en los de forma reducida

2.1. Modelos estructurales

En el enfoque estructural se considera el valor de la compañía como una variable de estado, siendo la evolución de todos sus activos contingente a dicha variable. Se aplica entonces la teoría de valoración de opciones desarrollada por Black y Scholes [4] y Merton [15]. A pesar de las numerosas extensiones que se ha realizado en diversas direcciones y del alto contenido económico de la aproximación, históricamente se ha enfrentado a diversos inconvenientes. Por ejemplo, puesto que el valor de gran parte de los activos de la compañía no son comercializables, resulta muy complicado la estimación del valor de la empresa en cuestión. Además, la estructura temporal de spreads de crédito que resultaba no era comparable con la que se observaba en el mercado, con lo que hacía imposible la valoración de cualquier activo que dependiera de la calidad crediticia.

A pesar de estos inconvenientes, se han llegado a desarrollar modelos estructurales cuyo desempeño es muy exitoso. Entre ellos se encuentra el KMV de Moody's, que se ha convertido en uno de los mejores predictores de eventos de crédito del mercado. Siguiendo la buena actuación de KMV, Moody's Analytics ha implementado un modelo de valoración de préstamos empleando la Distancia a Default (DD) [1]. Al igual que en el artículo de Benzschawel et al. (2012)[2], se crea una rejilla de nodos que muestre la evolución temporal de la DD. La evolución de la DD seguirá las probabilidades de migración históricas que tiene recogidas KMV en su base de datos desde los años 80. De esta manera se creará una matriz de transición entre Distancias a Default, que se supondrá markoviana.

Para realizar una valoración libre de arbitraje se debe realizar una transformación de la DD tal que tenga en cuenta la prima por riesgo del mercado. Este ajuste dependerá tanto del ratio de Sharpe del mercado como de la correlación del mismo con los activos de la firma. Realizado el ajuste, podemos empezar con la valoración hacia atrás comenzando por el vencimiento. Cuando

se llegue a la fecha de valoración, se deberán llevar los pagos al nodo que coincida con la DD actual de la compañía. De esta manera conseguiríamos el valor del préstamo corporativo.

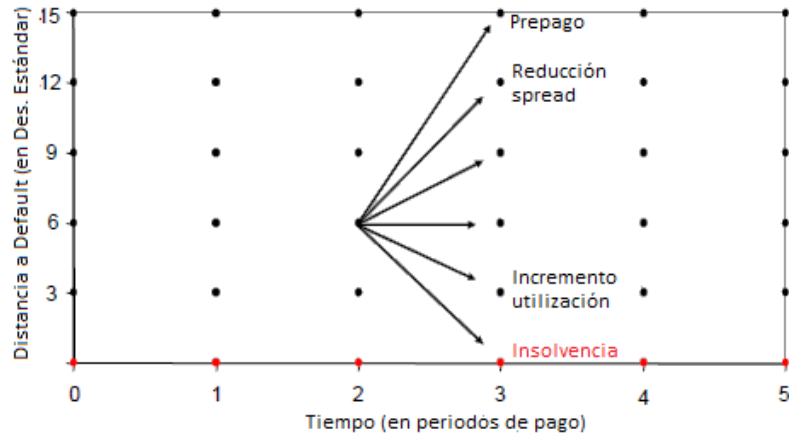


Figura 2.1: Rejilla de estados de crédito en enfoque DD de KMV con el escenario más probable en cada nodo.

Este enfoque es básicamente igual al de las matrices de transición de las agencias de calificación, siendo la medida de riesgo crediticio la Distancia a Default en vez del rating. Sin embargo, es necesario disponer de una licencia de KMV para tener acceso a toda la información requerida, aunque la propia agencia Moody's ha realizado una calculadora que emplea esta metodología para la valoración de préstamos corporativos conocida como CreditMarkTM. Este hecho complica la comparativa entre la actuación de éste modelo y el que propone Benzschawel et al. (2012) [2], así que no iremos a los de forma reducida.

2.2. Modelos de forma reducida

Continuando con la revisión, centraremos ahora nuestro objetivo en los modelos de forma reducida, cuya tratabilidad matemática y desempeño los han hecho posicionarse como el enfoque más empleado en la industria. Estos modelos generan las probabilidades de insolvencia directamente de los spreads de crédito del mercado sin elaborar ningún supuesto sobre su origen o causa. En este sentido, los modelos de forma reducida resultan ser una extensión de los modelos de valoración de activos arriesgados a través de la teoría de ausencia de arbitraje, que tan exitosa ha resultado en la modelización de los tipos de interés. Dicho esto, vamos a explicar cuál es el fundamento teórico de esta aproximación.

Para una mayor comprensión del enfoque, vamos a presentar una situación de ejemplo donde tengamos que aplicar estos modelos. Supongamos un bono arriesgado cuyo vencimiento es dentro de un periodo. Este bono puede descomponerse en otros dos activos, atendiendo a los estados de la naturaleza posibles. El primero sería un activo que paga el nominal más un cupón del 6 % en el vencimiento si el emisor del bono es solvente. El segundo sería un activo que paga el ratio de recuperación, el 60 % del nominal por ejemplo, si es insolvente. Si conocemos cuál es el tipo libre de riesgo en este periodo (4 %) y cuál es el precio de este bono (par), podemos conocer cuál es la probabilidad de insolvencia para este emisor.

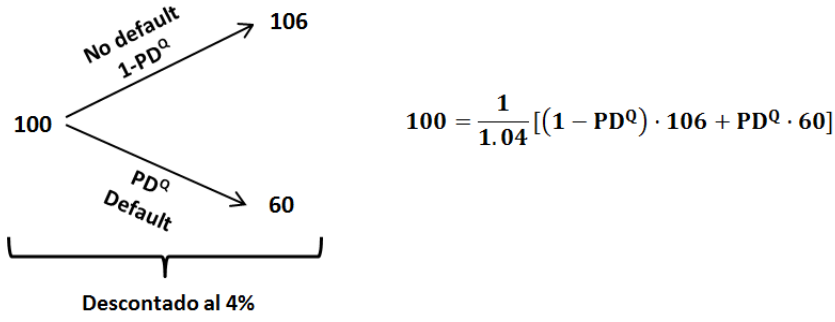


Figura 2.2: Representación de un bono a un período con cupón del 6 % bajo la medida riesgo-neutral.

Si tuviéramos un bono con cupones, tendríamos que continuar el árbol de probabilidades, teniendo en cuenta que el estado de *default* es absorbente. Puesto que las probabilidades de incumplimiento marginales en cada período no son iguales, deberíamos recurrir al *bootstrapping* con bonos arriesgados a diferentes vencimientos, al igual que se hace para calcular la estructura temporal de tipos de interés. No obstante, lo más habitual es asumir que el evento de crédito puede suceder en cualquier momento de tiempo en vez de únicamente en cierto puntos, tomando así el tiempo como un continuo. En este caso, el valor del bono arriesgado sería el valor de los flujos descontados bajo la probabilidad neutral al riesgo:

$$v(0, T) = \tilde{E} \left[e^{-\int_0^T r dt} 1_{\{\tau < T\}} \right] + \tilde{E} \left[e^{-\int_0^T r dt} R_{\{T > \tau\}} \right] \quad (2.1)$$

En el artículo de Jarrow y Turnbull (1995)[8] se introdujo el método de modelizar el proceso de insolvencia como un evento de Poisson, donde la probabilidad riesgo-neutral acumulada de insolvencia hasta el tiempo T , PD_T^Q viene dado por:

$$PD_T^Q = e^{-\int_0^T h dt} \quad (2.2)$$

donde h es la tasa instantánea de cometer la insolvencia o *hazard rate*. Dicho esto, podemos expresar cuál debería ser la prima cargada sobre el tipo de interés libre de riesgo que iguale el precio del bono arriesgado, o lo que es lo mismo, el spread de crédito (s) que buscamos. Así pues, sustituyendo en 2.1 la expresión $v(0)$ por $e^{-(r+s)t}$ y asumiendo una curva plana de los tipos de interés hasta el momento t , tendremos:

$$e^{-(r+s)t} = (1 - PD_t^Q) e^{-rt} + R PD_t^Q e^{-rt} \quad (2.3)$$

Despejando PD_t^Q de la ecuación 2.3 obtendremos:

$$PD_t^Q = \frac{1 - e^{-st}}{1 - R} \quad (2.4)$$

Por tanto, con la ecuación 2.4 tenemos una expresión para obtener la probabilidad de insolvencia acumulada riesgo-neutral hasta el momento t en función del spread de crédito de mercado para un bono cupón cero con vencimiento también en t , donde se debe asumir un valor de tasa de recuperación. Además, del propio mercado podemos tener valores de spread de crédito a diferentes vencimientos con lo que, asumiendo cierta forma funcional, podemos obtener una curva que sea la estructura temporal de crédito para cada emisor de deuda. Esta estructura se empleará para valorar bonos arriesgados con cupones y será también empleada para poner precio a

un préstamo corporativo. Sin embargo, es necesaria añadir dinámica a esta curva para poder poner precio a las diferentes cláusulas del contrato.

La cantidad de modelos que existen en la literatura para la dinámica de curvas de estructuras temporales, ya se fundamenten en la ausencia de arbitraje o en el supuesto de una economía en equilibrio, es ingente. Entre los más estudiados se encuentran los de Black y Scholes (1973) [4], Vasicek (1977) [21] y Cox, Ingersoll y Ross (1985) [6], entre muchos otros. Todos ellos se basan en la resolución de una ecuación diferencial estocástica que marcará los futuros cambios en la curva, siendo necesario en la mayoría de casos recurrir a métodos numéricos.

En este trabajo vamos a centrarnos en explicar un modelo de forma reducida en detalle. El trabajo seleccionado es el de Black, Derman y Toy (1990) [5], donde sustituiremos los tipos de interés instantáneos por el spread de crédito instantáneo. Dado este enfoque con *hazard rates*, la correspondencia entre los tipos y el spread es unívoca, no habiendo que añadir ninguna modificación a lo que el artículo original propone. La razón por la que vamos a detallar el desarrollo de este modelo se basa en el posterior uso que se hará en el Capítulo 4, cuando **contrastaremos los resultados de la opción de prepago entre el modelo basado en migraciones de rating de Benzschawel et al. (2012) [2] y una aproximación a través de la modelización del spread de crédito según el modelo Black, Derman y Toy [5].**

2.2.1. Modelo de Black, Derman y Toy (1990)

El modelo de Black, Derman y Toy (BDT) es un modelo unifactorial, es decir, la evolución de los tipos de interés sólo dependerá de un factor, en este caso, la forma de la curva del propio tipo de interés. Sus características le hicieron popular durante los años 90, aunque ya en los años 80 fue empleado por los autores durante su estancia en Goldman Sachs para la valoración de opciones en renta fija. En este trabajo lo emplearemos para la modelización de la estructura temporal del spread de crédito, siendo las principales características que observaremos: (i) el spread nunca será negativo, puesto se distribuirá como una lognormal; (ii) se permite la reversión a la media, la cual se observa dentro del mercado [19], y (iii) es posible tener en cuenta la estructura temporal de volatilidades. Así pues, matemáticamente hablando la ecuación diferencial estocástica empleada es:

$$d \ln s(t) = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'_t}{\sigma_t} \ln s(t) \right] dt + \sigma_t dZ_t \quad (2.5)$$

donde $s(t)$ es el spread de crédito instantáneo en el momento futuro t , σ_t es la estructura temporal de volatilidades, σ'_t es la primera derivada de dicha estructura respecto del tiempo, θ_t es el parámetro que determinara la velocidad de reversión a la media y Z_t es un movimiento browniano. Si deseamos conocer cual es la curva de spread, debemos de integrar estocásticamente dicha expresión. No obstante, no existe una expresión analítica para el resultado, teniendo que recurrir a métodos numéricos, como los árboles binomiales.

Para simplificar la implementación, prescindiremos de la reversión a la media y supondremos que la volatilidad es constante en el tiempo. A pesar de la simplificación, creemos que será útil para la comparativa posterior con el modelo basado en ratings. Así pues, la nueva ecuación diferencial estocástica será:

$$d \ln s(t) = \theta(t) dt + \sigma_t dZ_t \quad (2.6)$$

Debemos ahora ajustar el parámetro $\theta(t)$ tal que en el momento de valoración la curva de spread sea la observada en el mercado. En el Apéndice 1 se puede observar cual es el procedimiento que se ha llevado a cabo para la implementación. Así pues, dada una curva de spread del prestatario en el mercado y la volatilidad que se estima que tendrá dicho spread, podemos obtener el valor de un préstamo sin cláusulas, es decir, un bono corporativo.

Para conseguir la valoración del préstamo, debemos de traducir los valores de ejercicio de las cláusulas a spreads de crédito. **En el caso de la opción de prepago resulta sencillo, puesto que siempre que se baje del umbral marcado por el spread actual más la penalización, se ejercerá la opción.** No obstante, cuando las cláusulas dependan del rating, ha de traducirse dichos ratings a spreads de crédito. Dicha correspondencia es observable en la fecha de valoración, pero es difícil de saber cual será en el futuro, puesto que no solo depende del prestatario, si no de la evolución de los ratings de las otras compañías. No obstante, siempre es posible obtener una estimación, en función de las perspectivas de rating en el sector y la evolución de la economía, en general.

Una vez explicado dos de los modelos más empleados en el mundo de la valoración de préstamos, vamos a focalizarnos en el modelo basado en transición de rating de Benzschawel et al. (2012) [2], explicando cuáles son los detalles más importante a la hora de la implementación.

Capítulo 3

Implementación del modelo

En el Capítulo 1 introdujimos cuáles eran los principales beneficios de aplicar las matrices de transición en la valoración de instrumentos financieros como los préstamos. En este capítulo explicaremos en profundidad el método para obtener el precio, pero antes vamos a hacer un pequeño resumen de cuál es el procedimiento de implementación.

El proceso de valoración comienza con (i) la asignación de un estado de crédito inicial en la fecha de valoración ($t = 0$), existiendo diversos métodos para conseguirlo. Por ejemplo, podemos emplear el rating sobre el emisor que ha considerado una agencia de rating o en cambio, traducir el spread de crédito en el mercado a un rating determinado. Una vez sepamos el estado crediticio actual, (ii) cada nodo en la rejilla de valoración debe tener asignado una probabilidad de transición a cada nodo en el siguiente periodo. El proceso de asignación de las probabilidades partirá de la matriz de transición histórica de las agencias comerciales. Sin embargo, (iii) transformaremos dichas probabilidades tal que tengan en cuenta el ciclo económico en el que nos encontramos a la hora de la valoración, consiguiendo una matriz de transición riesgo-neutral. Para llevar a cabo dicha transformación, emplearemos la curva de spread de crédito de mercado.

Por último, (iv) iniciaremos la valoración hacia atrás en la rejilla de nodos riesgo-neutral. En cada nodo comprobaremos si ha de aplicarse alguna cláusula, cambiando el valor del nodo si así fuera, y continuando sin más problema el proceso de valoración. El valor resultante cuando hayamos descontado hasta el presente será el nodo que iguale la asignación de crédito inicial, siendo éste el precio del préstamo. En la siguiente figura mostramos de manera esquemática la implementación.

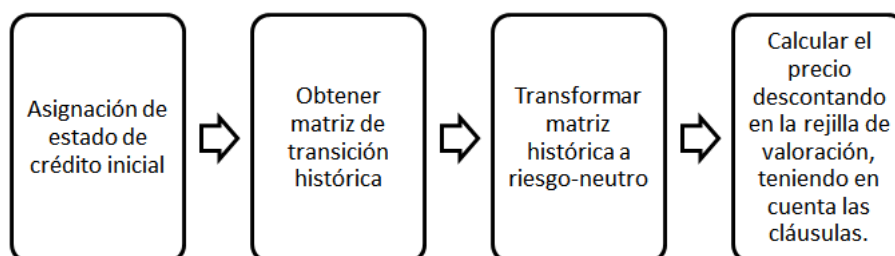


Figura 3.1: *Diagrama con los principales pasos de la implementación.*

3.1. Asignación de estado de crédito inicial

Debemos de traducir la medida de nivel de riesgo de crédito que tenemos a un rating que pueda emplearse como único nodo en la fecha de valoración y que albergará el precio del préstamo. **Habitualmente dispondremos del rating de la empresa en cuestión, con lo que la asignación es directa.** Si únicamente tuviéramos el spread de crédito, ya sea del mercado o el obtenido a través de una estimación, debemos de asociarlo a un rating. Para ello tenemos que saber qué relación existe entre los spread de crédito y los ratings para empresas que dispongan de ambas medidas. Dicha correspondencia se realiza a través de las probabilidades de insolvencia riesgo-neutrales.

Por un lado, la ecuación 2.4 muestra el modo en el que se transforma un spread de crédito en una probabilidad de insolvencia a un cierto momento. Por el otro, las agencias de rating llevan a cabo todo tipo de análisis para estimar una probabilidad de insolvencia, siendo luego necesaria una equivalencia con el rating. En la Figura 3.2 mostramos un diagrama con la equivalencia entre ratings, probabilidades de insolvencia y spread de crédito de un CDS a 5 años cuyo origen es el propio artículo de Benzschawel et al. (2012) [2]. En este caso, para la equivalencia con los spreads de los CDS se ha tomado la mediana de todos los CDS que cotizaban para cada rating, puesto que si tomáramos la media, podríamos llegar a una tendencia que no fuera creciente en la Figura 3.2. Este hecho ocurre sobre todo en ratings de grado especulativo y es debido a que la distribución tiene colas pesadas, probablemente debido al retardo que suelen tener los ratings a la hora de ajustarse a cambios en el estado crediticio.

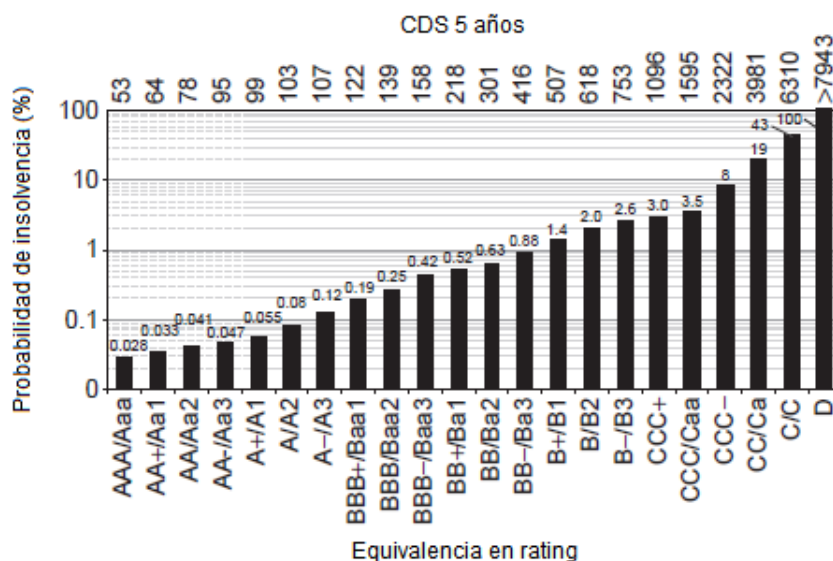


Figura 3.2: Equivalencia de los rating de S&P y Moody's con las probabilidades de insolvencia y el spread del CDS a 5 años. Fuente: Benzschawel et al. (2012)

En este caso hemos optado por escoger los CDS como medida de spread de mercado para todo el trabajo. Nuestra idea es aplicar el método al máximo número posible de prestatarios, por tanto, debemos encontrar una medida de riesgo de crédito que sea muy extendida y con alta liquidez, para que el precio provenga de un equilibrio entre oferta y demanda. Aún así, cuando otras medidas como los LCDS o los spread de préstamos que coticen en un mercado secundario sean también igual de líquidos, podrán usarse de la misma manera que empleamos los CDS.

3.2. Obtención de la matriz de transición histórica

Una vez que el estado inicial ha sido asignado, debemos calcular las probabilidades de acceder a los diferentes escenarios posibles. Dichas probabilidades provendrán de una transformación cuya semilla es la matriz de transición histórica emitida por las agencias de calificación. Los elementos de esta matrices serán la proporción de empresas que empezaron en el rating de origen y que han pasado al rating de llegada durante un periodo concreto de tiempo. Habitualmente se toma un año como periodo de muestreo, aunque las agencias de calificación permiten la opción de modificarlo a prácticamente cualquier intervalo de tiempo. No obstante, periodos más cortos que el año harán que el número de observaciones sea demasiado pequeño, dando una matriz poco realista.

Además, **se supone que las matrices de transición cumplen con la propiedad markoviana**, lo cual simplifica sobremanera cualquier tipo de análisis que las involucre. Esta propiedad nos permite asumir que la matriz de transición a un año es la misma para todos los periodos anuales futuros, lo que de manera formal sería:

$$M(0, t) = M^t \quad (3.1)$$

donde M es la matriz de transición anual y $M(0, t)$ es la matriz de transición para t años. En otras palabras, si queremos saber cual es la matriz de transición entre el momento $t=0$ y los próximos n periodos, únicamente debemos multiplicar n veces la matriz de transición para el primer periodo por ella misma. Sin embargo, **en este trabajo necesitamos una matriz de transición markoviana cuyo periodo sea de un trimestre**. Este trimestre será la distancia de tiempo entre nodos vecinos, estando la elección relacionada con el pago trimestral que suele ser habitual en los préstamos corporativos. Así pues, necesitamos calcular la raíz cuarta de nuestra matriz de transición anual M .

Para este cálculo es necesario obtener la matriz generatriz, G . Los elementos (i, j) de G nos dicen la probabilidad de transición entre el estado i y el estado j para un tiempo infinitesimalmente pequeño. La relación entre G y $M(0, t)$ viene dada por:

$$M(0, t) = M(t) = \exp(G \cdot t) \quad (3.2)$$

donde t se expresa en unidades del periodo de muestreo original, en nuestro caso, en años. Por tanto, para calcular G debemos únicamente calcular el logaritmo neperiano de la matriz de transición anual, sin embargo, muchas veces obtenemos una matriz con elementos que forman parte del cuerpo de los números complejos. En este caso debemos recurrir a una aproximación a través de una serie de potencial cuya convergencia a elementos de matriz reales está garantizada. Esta aproximación se encuentra dentro del artículo de Israel et al. [7] y es básicamente la aproximación del logaritmo neperiano por serie de potencias:

$$G \simeq (P - I) - \frac{1}{2}(P - I)^2 + \frac{1}{3}(P - I)^3 - \frac{1}{4}(P - I)^4 + \dots \quad (3.3)$$

Con esta aproximación nos aseguramos de que la suma de todas la filas de G es igual a cero, con lo que a través de la ecuación (8), condición necesaria para la matriz generatriz. Sin embargo, no se cumple la otra condición necesaria: que todos los elementos fuera de la diagonal fuesen mayor que cero. En este sentido, los elementos que no cumplen esta condición son muy próximos a cero con lo que diseñamos un algoritmo tal que los iguale a cero y ajuste los valores del resto de los elementos tal que la suma siga siendo igual a cero. Este algoritmo puede encontrarse en Apéndice 2, aunque básicamente consiste en añadir la diferencia entre el valor negativo fuera de la diagonal

y cero al resto de los elementos de forma ponderada.

Una vez solucionado estos posibles problemas, únicamente debemos aplicar la ecuación 3.2, es decir, calcular la exponencial de la matriz generatriz multiplicada por el tiempo del ajuste, en este caso, por 0.25 (un trimestre). La matriz resultante será la matriz de transición histórica trimestral que seguirá cumpliendo con la propiedad markoviana. Sin embargo, puede que a la hora de obtener la versión neutral al riesgo tengamos problemas asociados a la falta de monotonicidad en ciertas filas y columnas de la matriz. Por ejemplo, dado que la muestra temporal es pequeña comparada con las probabilidades tan bajas que existen para ciertas migraciones, existe un error bastante grande en la estimación por falta de realizaciones. Así pues, **puede existir la casualidad de que un rating mejor tenga una mayor probabilidad de insolvencia que un rating peor**. Puesto que el mercado las probabilidades que se descuentan si cumplen esta propiedad de monotonicidad, dichas inconsistencias pueden afectar a la transformación.

En este sentido, si las matrices sufren de este problema se debe de estimar unas nuevas tal que sí cumplan con la monotonicidad. Con la muestra que tenemos podemos suponer una distribución de la curva y ajustar los parámetros de ésta tal que se reduzca el error cuadrático medio. Las más sensatas sería suponer en cada fila decaimiento exponencial o potencial tanto para las probabilidades que se alejen de la diagonal para las filas como para las probabilidades de insolvencia.

3.3. Transformación riesgo-neutral de la matriz de transición histórica

En esta sección vamos a presentar uno de los puntos clave tanto de esta metodología como de este trabajo: la transformación riesgo-neutral. Éste es uno de los pasos que más problemas resulta dar dentro de la implementación, y es en sí misma un extenso campo de investigación. Trataremos en este espacio de presentar los tres modelos de transformación más empleados y populares en la literatura, detallando los beneficios y desventajas de cada enfoque. Estos son el de Jarrow, Lando y Turnbull (1997) [9] o como lo llamaremos a partir de ahora, JLT; el enfoque de Kijima y Komoribayashi (1998) [10] o KK, y el algoritmo presentado por Lando y Mortensen (2005) [13], en su artículo sobre valoración de bonos *step-up* o desde ahora, LM.

Antes de comenzar con cada modelo, diremos que ninguna conversión de matrices de probabilidades reales a neutras al riesgo es única, desafiando lo que la teoría financiera asegura que debe darse para la valoración. Aunque tomemos del mercado la probabilidad de migrar a la insolvencia, no conocemos cuál es la probabilidad que el mercado asocia al resto de transiciones. Si existiera algún tipo de CDS tal que pagara cuando hubiese una transición entre, por ejemplo, AA+ y AA, entonces seríamos capaces de deducir cual es esa probabilidad de esta migración riesgo neutral. Si ya existen problemas con la formación del precio de mercado para CDS a vencimientos que no sean el de 5 años, podemos imaginar la imposibilidad de que exista a nivel práctico un mercado líquido de CDS entre transiciones para inducir la probabilidad correctamente. Suponiendo, por ejemplo, una escala corta de 7 ratings significativos y el impago, tendría que haber mercado para 7×7 productos que pagan en función de cada transición, a parte de los ya mencionados CDS. Y todos ellos para diferentes vencimientos.

Puesto que la estimación directa del mercado es imposible, tenemos que suponer cuál es la probabilidad de transición neutral al riesgo. Estos supuestos deben de ser tal que tengan en cuenta las preferencias de los participantes del mercado en la formación del precio de cada transacción. Sin embargo, dada la dificultad de modelizar la economía y las preferencias de los inversores, utilizamos algo así como una variable proxy que nos dé una aproximación coherente. Esta proxy será la

matriz de transición histórica de las agencias de calificación.

Sin embargo, no tomaremos la transición histórica como si fuera riesgo-neutral en la valoración. **Dado que conocemos cual es la probabilidad de impago que cotizada en el mercado, tenemos, al menos, una columna de la matriz de transición neutral al riesgo.** Así pues, sustituiremos esta columna en la matriz de transición histórica. **Para el resto de elementos de la matriz, es decir, la matriz de supervivencia, necesitaremos los algoritmos de transformación que diversos autores han propuesto.** Algunos de estos se basan en una economía simplificada, como LM, pero los otros son maneras más o menos sofisticadas de repartir probabilidad tras el cambio en el vector de probabilidades de insolvencia. En el siguiente diagrama representamos de manera sencilla cuál es la transformación.

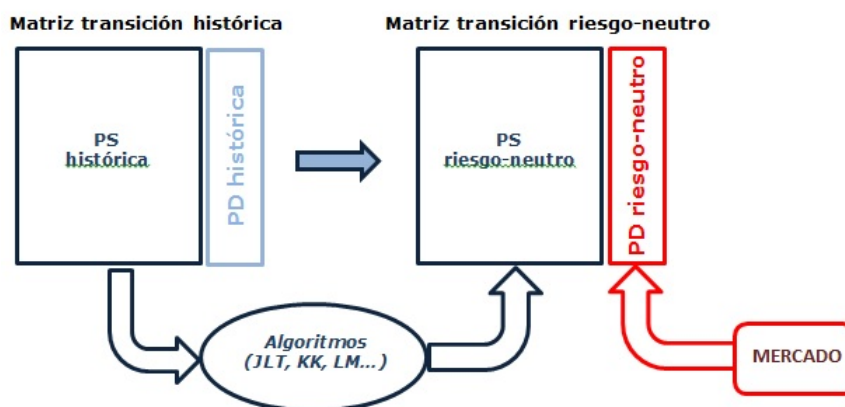


Figura 3.3: Diagrama sobre la transformación de la matriz histórica a la versión neutral al riesgo.

Una vez hemos explicado de forma resumida en qué consiste la transformación neutral al riesgo, vamos a profundizar en cada uno de los métodos propuestos. Los apartados que a continuación vienen forman seguramente la parte más exigente para el lector, ya que hará falta cierta abstracción matemática.

3.3.1. Jarrow, Lando y Turnbull (1997)

El método propuesto por estos tres autores es el primero que se conoce en la literatura. Este algoritmo es el que se emplea en el artículo original de Benzschawel et al. (2012) siendo las otras dos aproximación una contribución de nuestro trabajo.

En primer lugar, los autores asumen que el mercado es completo y libre de arbitraje, con lo que la medida riesgo neutral es única. Además, siguiendo el artículo de Jarrow y Turnbull (1995) [8], proponen la simplificación de que el proceso estocástico que siguen los tipos de interés y el proceso estocástico que sigue el riesgo de insolvencia son independientes bajo la medida riesgo neutral. Bajo estos supuestos, el precio de un bono arriesgado $v(0, T)$ que comienza en $t=0$ y vence en T viene determinado por:

$$\begin{aligned}
v(0, T) &= \tilde{E} \left[e^{-\int_0^T r dt} (1_{\{\tau < T\}} + R_{\{T > \tau\}}) \right] \\
&= \tilde{E} \left[e^{-\int_0^T r dt} 1_{\{\tau < T\}} \right] \cdot \tilde{E} \left[e^{-\int_0^T r dt} R_{\{T > \tau\}} \right] \\
&= p(0, T) [R + (1 - R) \cdot Q(\tau > T)]
\end{aligned}$$

donde $p(0, T)$ es el precio de un bono libre de riesgo, R es el ratio de recuperación en caso de insolvencia y $Q(\tau > T)$ es la probabilidad neutral al riesgo de que la insolvencia, τ , se dé después de la fecha de vencimiento. Fácilmente podemos despejar $Q(\tau > T)$ y obtener de un bono arriesgado la probabilidad de que el evento de crédito suceda después de la fecha de vencimiento, es decir, la probabilidad de supervivencia neutral al riesgo. Si queremos conocer la probabilidad de insolvencia calcularemos el complementario de esta probabilidad.

Ahora bien, dado que conocemos la probabilidad de insolvencia riesgo neutral, tenemos ya la última columna de la matriz de transición, es decir, la probabilidad de ir al estado de insolvencia desde cualquier otro estado que proviene de mercado. También conocemos cuál es la probabilidad de supervivencia, pero no conocemos en qué medida se ha modificado cada uno de los elementos de la matriz de supervivencia cuya suma da dicha probabilidad. Es ahí donde se añaden los diferentes supuestos de JLT, KK y LM.

En el caso de JLT, **se modifican todos los elementos fuera de la diagonal por el valor de dividir la probabilidad de insolvencia neutral al riesgo entre la probabilidad de insolvencia de la matriz de transición histórica, que al ser markoviana, es igual en todos los periodos**. Tendremos un cociente para cada rating, por tanto, se transforma cada fila de la matriz por dicho cociente. De manera matemáticamente escribiríamos ésto como:

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t) \cdot q_{i,j} \quad \forall i, j, i \neq j \quad (3.4)$$

$$1 - \tilde{q}_{i,i}(t, t+1) = \sum_{j=1, j \neq i}^K \tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \quad \forall i = j \quad (3.5)$$

donde se debe cumplir que:

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \geq 0 \quad \forall i, j, i \neq j \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i} \tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \leq 1 \quad \forall i \quad (3.7)$$

donde $\tilde{q}_{i,j}(t, t+1)$ es el elemento (i,j) de la matriz de transición riesgo neutral para el periodo comprendido entre t y $t+1$ y $q_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz de transición histórica. El valor $\pi_i(t)$ es el cociente entre ambas probabilidades de insolvencia, siendo este cociente el empleado para la obtención del resto de los elementos a través de las ecuaciones 3.4 y 3.5. De manera matemática,

$$\pi_i(t) = \frac{\tilde{q}_{i,K}(t, t+1)}{q_{i,K}} \quad (3.8)$$

donde el estado $j = K$ representa la insolvencia. Obsérvese como este cociente depende del tiempo, puesta que las probabilidades implícitas de insolvencia varían en función del tiempo acorde a la estructural temporal de spreads de crédito que tenemos para cada rating. De forma matricial, las

ecuaciones 3.4 y 3.5 se pueden escribir así:

$$\tilde{Q}(t, t+1) = I + \Pi(t)(Q - I) \quad (3.9)$$

donde I representa la identidad. A través de 3.8 calculamos el vector de cocientes $\Pi(t)$ que luego emplearemos en 3.9 para obtener la matriz riesgo-neutral implícita en cada periodo trimestral. Si quisiéramos calcular la matriz de transición riesgo-neutral acumulada hasta cierto tiempo, debemos multiplicar las matrices implícitas tal que:

$$\tilde{Q}(0, t) = \tilde{Q}(0, 1) \cdot \tilde{Q}(1, 2) \cdot \dots \cdot \tilde{Q}(t-1, t) \quad (3.10)$$

Sin embargo, aquí acontece uno de los problemas más importantes de este enfoque: **las probabilidades acumuladas de incumplimiento de $\tilde{Q}(0, t)$ no son las mismas que las probabilidades acumuladas de incumplimiento que se observan el mercado**. Este hecho se explica a través de la ecuación 3.10. Al calcular la matriz acumulada a unos cuantos periodos, la probabilidad de insolvencia acumulada dependerá de los elementos de la matriz de supervivencia de todas las matrices implícitas. Estas matrices han sido manipuladas sin tener en cuenta que la multiplicación entre ellas debe de dar la probabilidad acumulada de insolvencia. Únicamente se ha repartido la probabilidad a través de una fórmula tan elegante como 3.9, de ahí que no tengamos la suerte de que coincidan las probabilidades.

Por otro lado, resultaría lógico pensar que si la probabilidad de default riesgo-neutral es mayor que la histórica, la probabilidad de degradaciones de rating también deban corregirse al alza. Sin embargo, en esta transformación también aumentarían las probabilidades de mejorar el rating, siendo la única probabilidad que se reduce la de mantenerse en el mismo rating.

Además, si $\pi_i(t)$ es muy alto, el ajuste para que la suma sea la unidad puede ser muy severo con los elementos diagonales, provocando que podamos tener elementos que salgan del rango entre 0 y 1. Este hecho puede provocar una fuerte inestabilidad en el algoritmo, sobre todo si tomamos la alternativa que a continuación mostramos

3.3.1.1. Método alternativo con ajuste a la probabilidad acumulada de insolvencia

En todo lo explicado hasta ahora, las probabilidades de impago marginales de mercado son los nuevos componentes de las matrices riesgo neutrales en el vector de insolvencias. Sin embargo, **la alternativa es averiguar cuál es la probabilidad marginal implícita tal que la probabilidad acumulada de impago sea la observada en el mercado para todo los periodos**. Ambos procedimientos no tienen por qué dar el mismo resultado y es así lo que realmente sucede. La alternativa parte de la ecuación 3.10. Supongamos que mediante 3.9 y 3.10 hemos calculado la matriz de transición para el primer periodo, es decir, $\tilde{Q}(0, 1)$. El vector de probabilidades de insolvencia implícitas será el mismo que el acumulado, por tanto, el método anterior y la alternativa dan el mismo resultado para el primer período. Sin embargo, ahora no emplearemos las marginales entre $t = 1$ y $t = 2$ para obtener $\tilde{Q}(1, 2)$ si no que conociendo cuál es la acumulada hasta $t=2$ y la acumulada hasta $t = 1$, sacaremos la implícita entre estos dos momentos. Matemáticamente, para un tiempo t cualquiera tendríamos:

$$\tilde{Q}(0, t+1) = \tilde{Q}(0, t) \cdot [I + \Pi(t)(Q - I)] \quad (3.11)$$

Puesto que conocemos $\tilde{Q}(0, t)$ pero solo los vectores de probabilidad de impago de $\tilde{Q}(0, t+1)$ y

Q que son los únicos que conocemos, podemos aún así despejar $\Pi(t)$ y calcular la matriz $\tilde{Q}(t, t+1)$. Desafortunadamente para nosotros, los cocientes $\Pi(t)$ obtenidos mediante la ecuación 3.11 y 3.9 no son iguales, lo que provoca tener que elegir entre ajustarnos a las probabilidades acumuladas con el método alternativo o a las probabilidades marginales con el método anterior. Para una mejor interpretación de este problema, en el Apéndice 3 hemos resuelto un ejemplo significativo donde se observa perfectamente esta discordancia.

Así pues, los problemas de este enfoque son: (i) fuerte ajuste sobre los elementos de la diagonal y (ii) desajuste cada vez mayor entre las probabilidades de insolvencia (implícitas o acumuladas, según elijamos) con las que se muestran el mercado, provocando que llegado el momento, el algoritmo deje de ser estable, resultando en probabilidades de transición fuera del rango entre 0 y 1. En el siguiente capítulo analizaremos cuándo estos problemas aparecen y cuáles deben ser las medidas necesarias para evitar que nos puedan afectar en la valoración de un préstamo.

3.3.2. Kijima y Komoribayashi (1998)

Estos dos autores parten de los mismos fundamentos que JLT salvo que el parámetro $\pi_i(t)$ de la ecuación 3.8 pasa a ser un cociente entre probabilidades de supervivencia. Además no se ajusta sobre el término diagonal si no sobre el vector de probabilidades insolvencia. Dada la expresión para $\pi_i(t)$, la probabilidad de insolvencia de la matriz transformada será la que se observa en el mercado, obteniendo lo mismo que en JLT. Así pues, el algoritmo de KK es el siguiente:

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t) \cdot q_{i,j} \quad \forall i, j, j \neq K \quad (3.12)$$

$$1 - \tilde{q}_{i,K}(t, t+1) = \pi_i(t) \cdot (1 - q_{i,K}) \quad (3.13)$$

donde el parámetro $\pi_i(t)$ se despeja de la ecuación 3.13. **El método de KK resulta más estable que JLT** puesto que no carga sobre un elemento diagonal todo el peso del exceso o reducción de probabilidad tras la transformación. Sin embargo, tiene una menor interpretación económica. Esto es debido a que si hay una ganancia de probabilidad de insolvencia, los elementos de la matriz de supervivencia se reducen todos ponderadamente. No obstante, cabe esperar que si hay ganancia de probabilidad respecto de la histórica en el caso de impago, también la haya para las degradaciones de rating, intentando restarla en las mejoras de rating para que la suma siga siendo la unidad. En este caso no tenemos otra opción que evaluar el trade-off entre una mayor estabilidad en el cálculo de matrices o una mayor interpretación económica del ajuste. En cualquier caso, la aplicación de las transformaciones en el Capítulo 4 nos saca de dudas.

3.3.3. Lando y Mortensen (2005)

En 2005, Lando y Mortensen [13] intentan esclarecer si existe una valoración correcta de los bonos *step-up* que emitían las empresas de telecomunicaciones europeas. Estas empresas tenían su origen en privatizaciones de empresas estatales, siendo en aquella época habitual que los propios gobiernos fueran los máximos accionistas. Esta alta participación accionarial unido al hecho de que fueran 'demasiado grandes para caer' hacían que tuvieran un riesgo de insolvencia pequeño. Sin embargo, eran empresas cuyos requerimientos financieros eran muy elevados, sobre todo para

poder pagar las elevadas licencias para operar con móviles de tercera generación. Además, el pinchazo de la burbuja tecnológica unos pocos años antes todavía se mantenía en el recuerdo, con lo que la financiación en los mercados resultaba muy complicada.

Para intentar sobreponerse a todos estos problemas, las empresas de telecomunicaciones comenzaron a emitir bonos cuyos pagos vinieran condicionados al rating de la empresa en cuestión, siendo conocidos como bonos *step-up*. De esta manera conseguirían atraer a un número mayor de inversores, aunque asumiendo una mayor incertidumbre en los pagos que la empresa debía realizar por los bonos. En este sentido, Lando y Mortensen estudian si los precios de estos bonos en el mercado son adecuados, comparando los resultados con un modelo de valoración de bonos con una cláusula de *rating grid* a través de un enfoque basado en matrices de transición. Obsérvese como estos bonos *step-up* son iguales a un préstamo cuya única cláusula fuese que el precio dependiera del rating. Por tanto el método que Lando y Mortensen utilizan para transformar las matrices a su versión neutral al riesgo puede ser muy interesante de aplicar.

Los fundamentos de la transformación KK son económicos, es decir, se basan en el equilibrio entre oferta y demanda que se da el mercado, suponiendo una función de utilidad y un coeficiente de aversión igual para todos los agentes. En este caso se emplea la función de utilidad potencial, $u(w) = \frac{w^{1-\theta}}{1-\theta}$, siendo θ el coeficiente de aversión relativa al riesgo y w el consumo de riqueza. Además se supone que los únicos activos comercializables son el bono libre de riesgo y el bono arriesgado, ambos sin cupones. Suponemos un tipo de interés constante, r , y un spread de crédito también constante para cada rating i , s_i . Por tanto, el valor del bono arriesgado cupón-cero es $V_j(T) = e^{-(r+s_j)T}$. Al final del periodo de tiempo T , el estado de la naturaleza será j con una probabilidad real de ocurrir de p_{ij} , para todo j desde 1 hasta K .

La condición de primer orden que maximiza las preferencias es una ecuación de Euler tal que el ratio entre precios Arrow-Debreu sea proporcional a la utilidad marginal dada una inversión óptima. Así pues esta condición es:

$$\frac{q_{ij}}{p_{ij}} = \kappa u'(w_j(t+1)) = \frac{u'(w_j(t+1))}{\sum_{k=1}^K p_{ik} u'(w_k(t+1))} \quad (3.14)$$

para todo $j=1, \dots, K$, donde el consumo de riqueza en el estado j en el tiempo $t+1$ viene dado por

$$w_j(t+1) = a w_i(t) \frac{V_j(t+1)}{V_i(t)} + (1-a) w_i(t) e^r \quad (3.15)$$

donde a es la fracción óptima de riqueza que se ha invertido en el activo arriesgado. Sustituyendo 3.15 en 3.14, llegamos a la expresión que nos dará el cociente entre la probabilidad real y la probabilidad riesgo neutral para cada par de elementos de matriz (i, j) , es decir, la derivada de Radon-Nikodym, que será independiente de la riqueza inicial y de los tipos de interés:

$$\frac{q_{ij}}{p_{ij}} = \frac{[1 - a(1 - e^{s_j + (s_i - s_j)T})]^{-\theta}}{\sum_{k=1}^K p_{ik} [1 - a(1 - e^{s_k + (s_i - s_k)T})]^{-\theta}} \quad (3.16)$$

La expresión 3.16 es la expresión que Lando y Mortensen aplican para transformar la matriz histórica a una riesgo-neutro. Obsérvese que 3.16 es sensible al spread de crédito para cada rating (s_i), al tiempo hasta el vencimiento del bono (T), a las probabilidades de transición históricas (p_{ik}), a la fracción de riqueza que se destina a bonos arriesgados (a) y al coeficiente relativo de aversión al riesgo (θ). Los autores realizan ciertas pruebas con el algoritmo y se dan cuenta de que el coeficiente de probabilidades no es muy sensible ni al periodo hasta el vencimiento ni a la fracción de riqueza invertida en activo arriesgado. Por esta razón, aproximan 3.16 con $T = 5$ y $a = 0.5$,

que son unos valores promedio característicos. Así pues, la expresión que nosotros emplearemos o algoritmo LM será:

$$\frac{q_{ij}(t, t+1)}{p_{ij}(t, t+1)} = \frac{[1 + e^{s_j + 5(s_i - s_j)}]^{-\theta_t}}{\sum_{k=1}^K p_{ik}(t, t+1) [1 + e^{s_k + 5(s_i - s_k)}]^{-\theta_t}} \quad (3.17)$$

donde hemos incluido el hecho de que las probabilidades cambian con el tiempo, incluso las reales, pudiéndose aplicar hasta para casos en el que no se suponga la propiedad markoviana. Debemos recordar que han sido necesario numerosos supuestos sobre la economía para llegar a 3.16 y 3.17. Unos supuestos más realistas hubieran sido permitir un continuo de estados de la naturaleza, agentes con preferencias heterogéneas, más activos arriesgados donde invertir o tipos de interés y spreads de crédito estocásticos. Además, debemos de estimar un spread de crédito para el estado de insolvencia, cuyo pago en el siguiente periodo es con toda seguridad la tasa de recuperación. Este spread a su vez es necesario para estimar cual es el parámetro de aversión al riesgo en cada periodo, θ_t . Para dicha estimación se debe recurrir a un método de optimización tal que la parte derecha de 3.17 sea igual al cociente de probabilidades de insolvencia que conocemos de antemano. Este hecho, unido al de tener que estimar K veces para t periodos diferentes este coeficiente, convierte el algoritmo en un procedimiento costoso en tiempo, computacionalmente hablando.

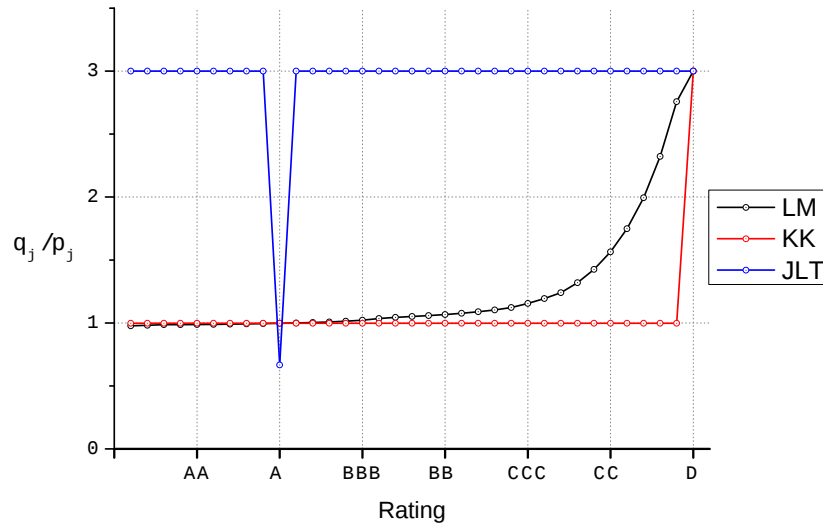


Figura 3.4: Transformación de las probabilidades de transición para un rating A para cada enfoque. En el eje de ordenadas, ratio de probabilidad riesgo neutral partido de probabilidad histórica.

Como observamos para un rating inicial A en la Figura 3.4, si las probabilidades de insolvencia de mercado son mayores que las históricas, es lógico que la probabilidad de bajada de rating se incremente y la de subida disminuya. Esto es lo que sucede en el enfoque LM, donde se procura que suban más aquellas probabilidades más cercanas a la de insolvencia y se reduzcan las que sean una mejora respecto de la posición inicial. En el caso del algoritmo KK, se ajusta la probabilidad de insolvencia y se reduce/amplían las probabilidades de insolvencia en el sentido contrario. Este hecho hace que el coeficiente por el cual se multiplica dichas probabilidades sea muy cercano a la unidad, estando por debajo de uno si el ratio de probabilidades q_j/p_j (PD riesgo neutral partido

de histórica) es mayor que uno y por encima si es menor que uno. En el caso de la Figura 3.4, el ajuste de las probabilidades de supervivencia es menor que uno, aunque muy próximo ($\simeq 0,996$). Por último, en el caso de JLT todas las probabilidades tanto de supervivencia como de insolvencia se multiplican por el mismo coeficiente de ajuste, excepto el correspondiente a la diagonal de la matriz de transición. En el caso de la Figura 3.4, se multiplica el elemento diagonal de la matriz histórica por aproximadamente dos tercios para así transformarlo a su versión riesgo-neutro, lo que provoca una reducción muy grande de la probabilidad de mantener de rating.

Hasta aquí hemos revisado los tres algoritmos más importantes dentro de la literatura. Con estos algoritmos conseguiremos obtener una aproximación para la matriz de transición neutral al riesgo aunque nunca conseguiremos la exacta. Cada método tiene sus ventajas e inconvenientes, **siendo necesaria que haya tanto estabilidad para las matrices de cada periodo como concordancia entre las probabilidades marginales y acumuladas**. A la hora de elegir qué método emplear también se debe tener en cuenta el coste computacional del modelo además de si su aplicación en la valoración de un préstamo da como resultado un valor sensato. En el siguiente capítulo vamos a realizar una serie de análisis empíricos con matrices históricas reales y veremos cuales son las ventajas y los problemas que obtenemos. Haremos un estudio de la estabilidad de cada algoritmo además de observar si las matrices resultantes son coherentes con lo que esperamos financieramente hablando. Ahora continuaremos con la implementación del modelo, centrándonos en cómo se ha de realizar el proceso de valoración una vez tenemos todos los ingredientes.

3.4. Valoración del préstamo

Con las probabilidades neutrales al riesgo ya calculadas y el rating inicial ya asignado, comenzaremos a descontar el valor del préstamo desde el vencimiento. En la Figura 3.5 mostramos un diagrama del artículo original de Benzschawel et al. (2012)[2] donde se muestran como las probabilidades de migración se propagan hacia adelante desde la fecha de valoración y como la propagación de los precios se hace hacia atrás desde el vencimiento. El valor de cada nodo fuera de la insolvencia es el precio del préstamo descontado más el cupón correspondiente.

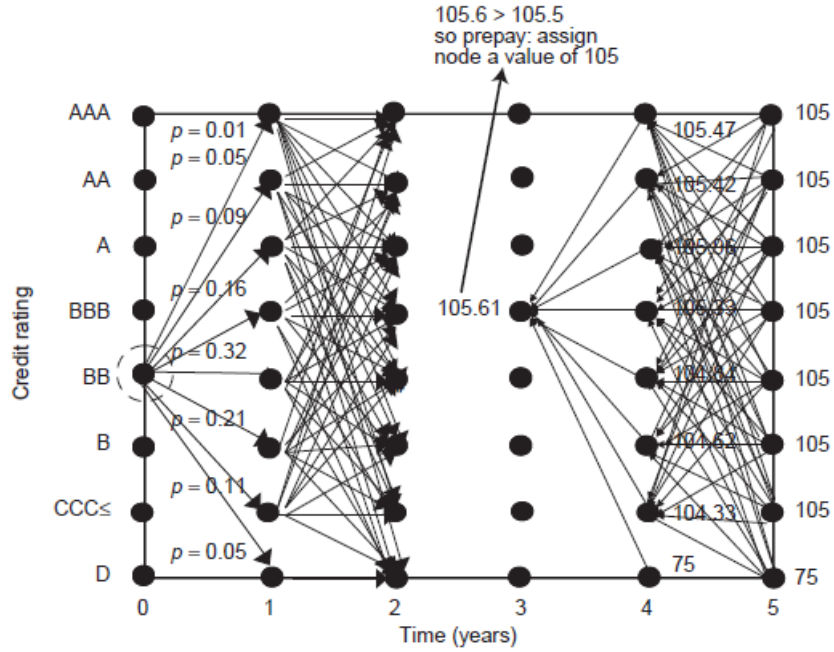


Figura 3.5: Propagación hacia adelante de las probabilidades de transición desde un rating BB y propagación hacia atrás de los precios desde el vencimiento. Se muestra también un caso donde se ejerce la opción de prepago. Fuente: Benzschawel et al. (2012)

Además del valor del flujo descontado y del cupón, en cada nodo se debe evaluar si se ejerce alguna de las cláusulas del contrato. En la Figura 3.5 también observamos un ejemplo de ejercicio de la opción de prepago. En este caso la penalización por cancelación anticipada es de un 0.5 % sobre el nominal, al que añadir el pago del cupón correspondiente. Si el pago del nodo es mayor que el valor del prepago, el prestatario ejercerá la opción y el precio del nodo será el valor de prepago. Matemáticamente, podemos escribir esta opción de prepago como:

$$v_{t,j} = \min \left\{ e^{-\frac{1}{4} f_{t,t+1}} \sum_{k=D}^{AAA} (\tilde{q}_{j,k,t} \cdot v_{t+1,k}) + c_t, K_t \right\} \quad (3.18)$$

donde $\tilde{q}_{j,k,t}$ es la probabilidad de migrar al estado j desde k entre el tiempo t y $t+1$, $f_{t,t+1}$ es el LIBOR implícito para dicho período que se observa en el momento de la valoración, K_t es el valor de prepago del préstamo para cada momento y $v_{t,j}$ es el nominal más el cupón del último periodo. Así pues, en cada nodo (t, j) el valor descontado se calcula y se compara con el valor de prepago K_t y el valor del nodo, $v_{t,j}$ es el menor de ambos. Si el valor toca un nodo correspondiente a la insolvencia, el préstamo termina y se paga la tasa de recuperación.

Al igual que la opción de prepago, se puede añadir el resto de cláusulas del préstamo. En el caso del *rating grid*, la ecuación 3.18 se modificaría tal que el cupón dependiese también del rating, es decir, $c_{t,j}$. Si trabajáramos con líneas de crédito con opción de disposición, tendríamos que el cupón dependería además de la proporción de dinero retirada. Así pues, el cupón sería $u \cdot c_{t,j}^R + (1 - u) \cdot c_{t,j}^{NR}$, donde u es la proporción de los fondos empleada por el prestatario, $c_{t,j}^R$ es el cupón que se paga por la proporción retirada, $1 - u$ es la proporción no empleada y $c_{t,j}^{NR}$ es el cupón cargado por la proporción no empleada.

Se puede añadir todo tipo de cláusulas mientras puedan traducirse en una expresión matemática como 3.18. Esta facilidad de añadir cláusulas es la gran ventaja de este enfoque, y es por esta

razón por la que hemos iniciado este trabajo de investigación. Como hemos visto, el proceso de valoración es bastante sencillo siendo el único obstáculo a superar la transformación de las matrices.

En este capítulo hemos detallado los cuatro pasos básicos que se deben llevar a cabo para la implementación del modelo basado en matrices de transición de Benzschawel et al. (2012). Nos hemos centrado sobre todo en la transformación de las matrices, **contribuyendo con dos nuevos enfoques no empleados hasta el momento en la literatura**. En el siguiente capítulo vamos aplicar la metodología a un caso de estudio, analizando los resultados de la valoración y llegando a diversas conclusiones.

Capítulo 4

Aplicación del modelo en la valoración

En este capítulo vamos a probar el modelo que hemos presentado a lo largo de la tesina con una serie de ejemplos extraídos del mundo financiero. En primer lugar presentaremos los datos empleados en el procedimiento. Seguidamente vamos a analizar cual es la mejor transformación neutral al riesgo de las matrices, haciendo especial hincapié en la estabilidad. Seguidamente emplearemos los resultados en la valoración de un préstamo corporativo donde hemos añadido una cláusula de prepago. Compararemos los resultados con otro método de valoración, en este caso, el BDT presentado en el Capítulo 2. Para terminar analizaremos los resultados más significativos del capítulo.

4.1. Datos

Las matrices de transición que hemos empleado provienen de la escala larga de la agencia Standard & Poor's, es decir, habrá 22 ratings y el default. En este caso tenemos matrices anuales que van desde el 2008 hasta el 2012, calculadas como media anual de los últimos 20 años. Al ser de este tamaño el intervalo de muestreo, estamos expuestos a un menor error de estimación, no obstante, no somos tan sensibles al punto del ciclo económico en el que se encuentra en cada año.

Por otro lado, los spread de crédito para cada rating son los que muestra Markit para una muestra diaria ponderada a nivel global (todos los sectores de todo el mundo) de cotizaciones de CDS desde 2006. Tenemos spreads para contratos a 1, 3, 5 y 10 años, pudiendo así dar cuenta de la forma de la estructura temporal. Además de para la transformación de las matrices, usaremos estas series para calcular la volatilidad histórica que se emplea en el BDT, además de la serie del iTraxx para un periodo similar. Los tipos de interés que hemos empleado para crear la ETTI son el tipo a 3 y 12 meses para los depósitos bancarios en euros y el tipo swap a 5 años, también en euros.

En las siguientes secciones hemos trabajado con los spreads de crédito y los tipos de interés observados el 31 de julio de 2012. En la Figura 4.7 podemos ver los datos para los spreads de crédito.

4.2. Transformación de matrices a la versión neutral al riesgo

Antes de valorar propiamente un préstamo, vamos a pararnos por un momento en analizar que

sucede con las matrices de transición neutrales al riesgo que obtenemos en este caso de estudio. En el capítulo anterior hemos realizado una amplia explicación de las características más importantes de uno y otro, recalcando el hecho de la necesidad de estabilidad en las sucesivas matrices trimestrales que vamos calculando. A continuación mostraremos cuales de ellas arrojan mejores resultados en este aspecto y elegiremos un algoritmo para la posterior valoración.

Matrices con JLT

Comenzaremos aplicando el algoritmo JLT para la matriz de transición de S&P para el año 2012. Recordemos que esta matriz de transición es el promedio anual recogido durante los veinte años anteriores a 2012. La expresión del algoritmo se encuentra en la sección 3.1 del Capítulo 3, optando tanto por el enfoque principal como el alternativo, es decir, ajustando primero las matrices para que cuadren con la probabilidad implícita y luego empleando la alternativa de calcular las matrices cuadrando las probabilidades acumuladas de insolvencia. En la Figura 4.1 (Izqda) mostramos lo que sucede con el vector de probabilidades de insolvencia de cada matriz de transición hasta los 20 trimestres (5 años). Cada línea representa la evolución temporal de la PD marginal o implícita para cada rating. Obsérvese como el método comienza a dar resultados fuera de lo normal a partir del octavo trimestre (2 años) para el rating más bajo, CC-. El proceso que sigue la Figura 4.1 (Izqda) siempre es igual: la PD para el rating más bajo comienza a crecer hasta que justamente después de alcanzar el máximo cae a niveles negativos, continuando el proceso con el siguiente rating más bajo. Resulta como si una vez la inestabilidad comenzase, se propagara a los demás vecinos.

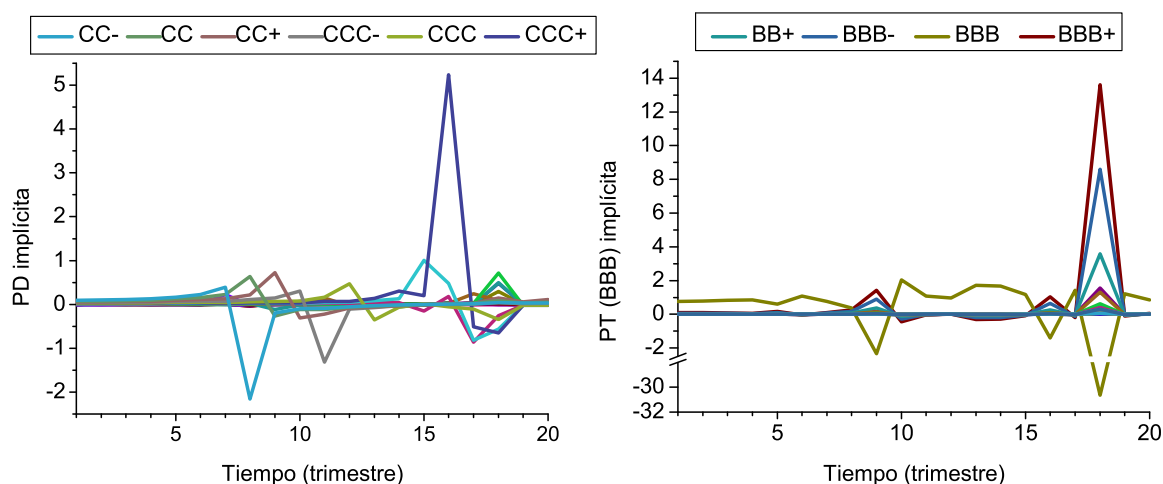


Figura 4.1: (Izqda) Evolución temporal de la PD implícita trimestral para cada rating con el algoritmo JLT - ajuste a la acumulada. (Dcha) Evolución temporal de la probabilidad de transición implícita trimestral desde el BBB para el algoritmo JLT - ajuste a la acumulada.

Siguiendo con el análisis, vamos a ver que le sucede a las probabilidades de transición desde un determinado rating. En esta caso hemos escogido el BBB como ejemplo significativo de lo que sucede en el resto. En la Figura 4.1 (Dcha.) mostramos la evolución de los distintas probabilidades de cambiar de rating. Vamos a fijarnos en la evolución de la probabilidad de mantenerse en BBB (verde). Al principio esta probabilidad se mantiene alta, hasta que a partir del octavo trimestre comienza a descender pasando a ser negativa en el noveno. Tal y como ya explicamos, JLT es muy agresivo con las probabilidades de mantener el rating, favoreciendo los ratings vecinos. En la figura se observa como la probabilidad de subir a BBB+ (rojo) y de bajar a BBB- (azul oscuro) o BB+

(azul claro) suben ya en el octavo trimestre aunque mucho más en el noveno, iniciándose así la inestabilidad.

Como sabemos, la distribución de la probabilidad de transición desde un rating es muy picuda con el máximo en la probabilidad de mantenerse, disminuyendo de forma pronunciada conforme nos alejamos de dicha probabilidad. Puesto que JLT multiplica por un factor todos los elementos de “transición” y ajusta en la probabilidad de “mantenerse”, son las probabilidades vecinas las que sufren un mayor cambio, al ser mayores que el resto de “transiciones”. Cuando el factor multiplicativo es muy alto, como sucede para ratings muy buenos, la inestabilidad comienza aún antes. Por ejemplo, para el rating AAA de la primera matriz que calculamos el ajuste multiplicativo es de 80, es decir, la PD de mercado es 80 veces superior a la PD histórica. Al multiplicar los elementos de “transición” y restar en la probabilidad de “mantenerse” obtenemos que esta última probabilidad es de -1.1, y la de migrar al AA+ es 1.3. Y todo esto en la primera matriz de transición que calculamos. Podríamos haber representado la Figura 4.2 (Dcha.) para el rating AAA y zanjar la discusión sobre la disponibilidad del método, pero con el rating BBB se muestra mejor la explicación del severo ajuste de probabilidades de mantenerse y de migrar a los vecinos.

Ahora bien, en el desarrollo anterior hemos empleado JLT con ajuste a la probabilidad acumulada de insolvencia, es decir, el cociente entre PD implícitas de mercado e histórica es tal que la PD acumulada es la de mercado. Como dijimos, este procedimiento hace que la PD implícita de mercado calculada no sea igual a la implícita de mercado. Dejaremos de lado el método alternativo hasta ahora empleado y vamos a realizar el algoritmo tal que la PD implícita neutral al riesgo sea la de mercado. En la Figura 4.2 mostramos dos gráficas con los resultados más importantes.

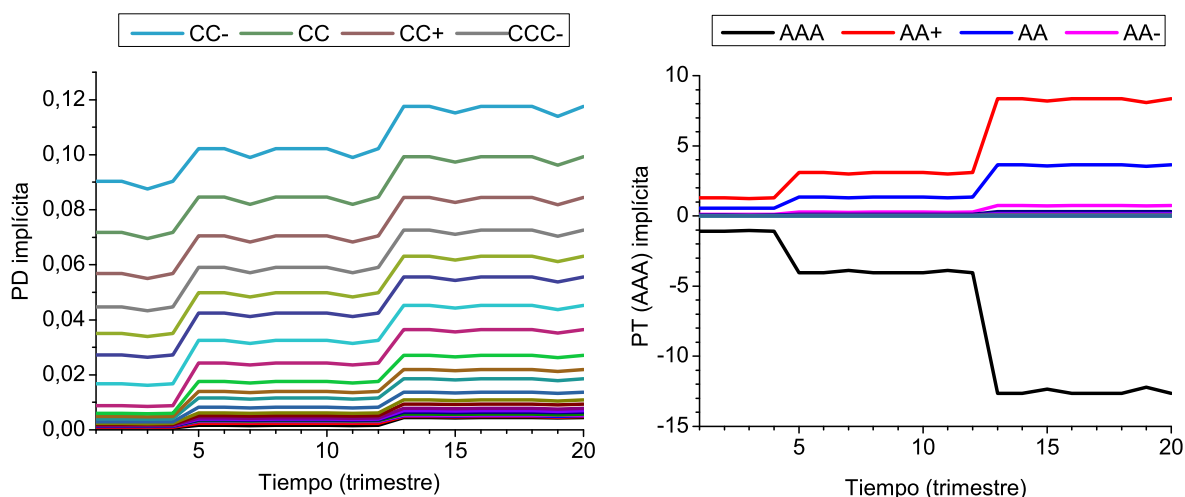


Figura 4.2: (Izqda) Evolución temporal de la probabilidad de insolvencia implícita para cada rating con JLT - ajuste a la implícita. (Dcha) Evolución temporal de la probabilidad de transición implícita trimestral desde el rating AAA con JLT - ajuste a la implícita.

En la parte izquierda de la Figura 4.2 observamos como la PD implícita trimestral que obtenemos es igual que la de mercado, resultado al que pretendíamos llegar con éste método. Cuanto mejor sea el rating menor será la PD implícita, habiendo saltos a los 1 y 3 años. Si ampliáramos la sección a temporal a más allá de los 10 años, veríamos otras discontinuidades en 5 y 10 años. Esto es debido a los supuestos que se hacen para averiguar la estructura temporal de spread de crédito

del mercado. Dado que tengo observaciones de spread para los años mencionados, el supuesto de construcción es que el *hazard rate* entre estos años es constante, lo que es equivalente a que las PD implícitas sean igualmente constantes en los periodos.

Por otro lado, vamos a fijarnos en la evolución de las probabilidades de transición desde AAA de la Figura 4.2 (Dcha). Obsérvese como la probabilidad de mantenerse en AAA es negativa en todo momento. A su vez, las probabilidades de migrar a los vecinos más cercanos (AA+, AA, AA-) son muy elevadas, superando la unidad en la mayoría de casos. De igual manera observamos los saltos en probabilidad, que provienen del hecho de transformar las probabilidades mediante el cociente entre PD neutral al riesgo e histórica. Como la histórica es igual siempre por la propiedad markoviana, si hay un salto en la PD neutral al riesgo entonces se verá reflejado en las probabilidades de transición, tal y como se muestra en la figura.

Como conclusión, sólo una cosa podemos decir: los resultados son como mínimo muy insatisfactorios. Podemos pensar que es un problema debido a la formación de la matriz histórica. Así pues, hemos probado a reducir el número de ratings con la escala corta de S&P o cambiar las matrices de transición por las de otra agencia de calificación, como Moody's. También hemos cambiado la muestra temporal de las matrices, escogiéndolas desde 2008. Los resultados y conclusiones no cambian. Es muy curioso ver como la aplicación de JLT tal y como Benzschawel et al. (2012)[2] propone da unos resultados tan fuera de la realidad. Todo hace pensar que la construcción de las matrices neutras al riesgo que los autores proponen es más sofisticada. Así pues, vamos a probar con otros métodos de la literatura.

Matrices con KK

A continuación vamos a trabajar con el algoritmo de Kijima y Komoribayashi (1998)[10]. Este algoritmo es menos agresivo que JLT aunque pecaba de una menor interpretación económica. El ajuste en las probabilidades se realizan en todos los elementos del vector de probabilidades de supervivencia en vez de solo en el elemento diagonal. Esto hace que para cocientes entre PD neutral al riesgo e históricas muy altos no se produzca inestabilidades como anteriormente narramos.

Al igual que antes, existen dos formas de obtener el cociente entre PDs. Una es averiguando la PD implícita tal que la PD acumulada descontada en el mercado coincida con la PD acumulada mediante matrices riesgo-neutro. La otra es calcular el cociente empleando directamente la PD implícita de mercado, sabiendo la PD acumulada de mercado no será igual que la calculada. Comenzaremos, pues, por el ajuste a la PD acumulada.

En la Figura 4.3 mostramos la evolución temporal de la probabilidades implícitas. En la parte izquierda tenemos la probabilidad de insolvencia obtenidas mediante KK. Obsérvese como para los casos con peor rating la PD se incrementa hasta que para el decimonoveno trimestre se supera la unidad, iniciándose la inestabilidad. En la gráfica no mostramos más allá de este trimestre para que podamos comparar los resultados con el ajuste a la implícita.

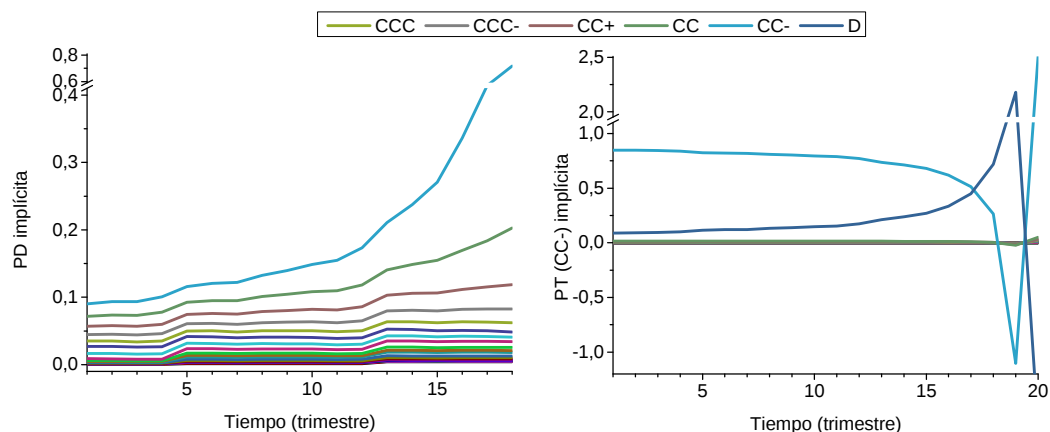


Figura 4.3: (Izqda) Evolución temporal de la probabilidad de insolvencia implícita para cada rating con KK - ajuste a la acumulada. (Dcha) Evolución temporal de la probabilidad de transición implícita trimestral desde el rating CC con KK- ajuste a la acumulada.

Por otro lado, en la parte derecha de la Figura 4.3 mostramos la probabilidad de transición desde el rating CC-. Vemos como la probabilidad de insolvencia va creciendo con el tiempo a la vez que la probabilidad de mantenerse va menguando. Aunque no se vean, el resto de probabilidades también decrecen. Llegado el decimoveno trimestre la PD y la probabilidad de mantenerse salen del rango normal, iniciándose la inestabilidad. Esta es la única probabilidad de transición que sufre esta discontinuidad. El resto de ellas evolucionan dentro del rango normal. No obstante, estos resultados son muy útiles siempre que queramos valorar préstamos que no lleguen a los 5 años o que tengan una probabilidad muy baja de ir al CC-. En estos casos la inestabilidad no afecta o su efecto es despreciable.

Pasemos ahora a ver los resultados para el ajuste a la PD implícita. Con JLT vimos como la probabilidad de mantenerse se hacia negativa para ratings altos, debido al fuerte ajuste en la diagonal de la matriz. En la Figura 4.4 tenemos la evolución de las probabilidades con el tiempo.

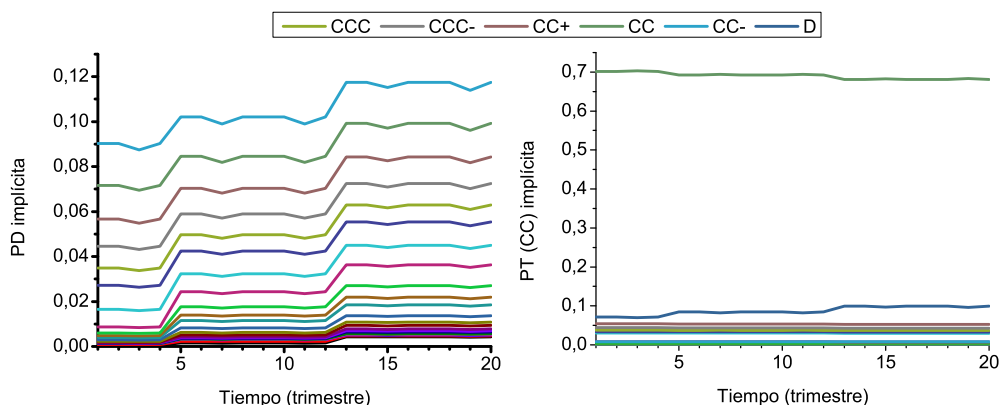


Figura 4.4: (Izqda) Evolución temporal de la probabilidad de insolvencia implícita para cada rating con KK - ajuste a la implícita. (Dcha) Evolución temporal de la probabilidad de transición implícita trimestral desde el rating CC con KK- ajuste a la implícita.

En la parte izquierda vemos como las probabilidades implícitas son iguales que las de la Figura 4.2 que además son las estimadas del mercado. Por otro lado observamos como las probabilidades de transición desde un rating extremo, como es CC, se mantiene aproximadamente constante, con pequeños saltos relacionados con los mismos que se ven en las PD implícitas. Para el resto de ratings el ajuste es menos agresivo y da como resultado una evolución todavía más plana. Al final, las matrices de transición que obtenemos cumplen todas con el hecho de encontrar todos sus elementos entre 0 y 1. Es el único caso de los que llevamos hasta ahora que cumple con esta propiedad, lo que hace al algoritmo KK con ajuste a la PD implícita candidato a generador de matrices riesgo-neutrales para la valoración.

Sin embargo, no debemos de perder de vista otro factor. Sabemos que el resultado es estable, que se ajusta a las probabilidades implícitas de insolvencia y que todos los elementos de matriz se encuentran en el rango entre 0 y 1 con valores sensatos. No obstante, en la Figura 4.5 mostramos el principal problema de este enfoque.

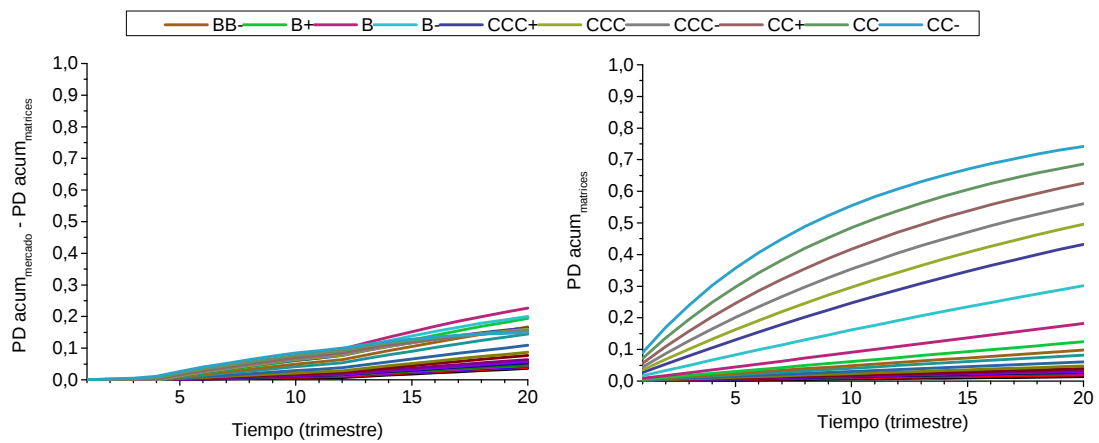


Figura 4.5: (Izqda) Diferencia en función del tiempo de la PD acumulada vista en el mercado y la PD calculada con las matrices KK. (Dcha) Probabilidad de insolvencia acumulada obtenida mediante las matrices de transición calculadas mediante KK - ajuste a la implícita.

La diferencia entre la PD acumulada calculada a través de las matrices y la PD acumulada observada en el mercado mediante los spreads de crédito es muy considerable. La que se calcula mediante matrices es menor que la de mercado y la diferencia crece con el tiempo y disminuye con la calidad crediticia. Para la mayoría de los ratings no especulativos la diferencia no supera los 5 puntos porcentuales de PD acumulada hasta los cinco años. Sin embargo, para los de grado especulativo la diferencia puede llegar a ser de hasta 20 puntos porcentuales, una cantidad no despreciable sin duda.

A pesar de que el ajuste a la implícita da probabilidades dentro de rango, su ajuste a la probabilidad acumulada no es adecuado. Sin embargo, el algoritmo ajustado a la probabilidad acumulada da buenos resultados durante una franja de tiempo considerable. Las PD implícitas de la Figura 4.4 y la Figura 4.3 son bastante similares durante un periodo considerable y no existe el problema con las PD acumuladas. Por esta razón, no debemos descartar ninguno de los dos enfoques y será la valoración la que dicte cuál de ambos es mejor emplear.

No obstante, antes de pasar a la valoración vamos a trabajar con nuestro último algoritmo, el propuesto por Lando y Mortensen (2005)[13].

Matrices con LM

Para terminar, vamos trabajar con el algoritmo que propusieron Lando y Mortensen en su artículo de 2005. En dicho artículo tratan de estimar el precio de bonos cuyo pago dependerá de la calidad crediticia del referente. Para ello deducen a través de una economía estilizada una expresión de cual debería ser la transformación para obtener la matriz de transición neutral al riesgo. Igual que en los dos casos anteriores, existen dos maneras de calcular las probabilidades implícitas de transición y por tanto dos cocientes entre PD distintos. Comenzaremos con las PD implícitas que se ajusta a la probabilidad acumulada de insolvencia y terminaremos con su versión ajustada a la PD implícita.

En la Figura 4.6 mostramos las PD implícitas y las probabilidades de transición para el rating CC tras el ajuste a la probabilidad acumulada de insolvencia. En el caso de la PD implícita observamos como las probabilidades crecen hasta alcanzar la unidad en el octavo trimestre para el B-. A partir del noveno trimestre las probabilidades dejan de fluctuar y se comportan como una constante. Algo parecido ocurre en los otros dos métodos mostrados. Las PD implícitas crecen hasta hacer la matriz inestable. Sin embargo, en este caso, una vez se alcanza el umbral, las PD se muestran constantes.

Una de las razones de este crecimiento lo observamos en la segunda figura del Apéndice 4. A partir del octavo trimestre el exponente del algoritmo da un salto hasta situarse en por debajo de -28. A partir de aquí comienza la inestabilidad. Obsérvese como sucede para el exponente del CC-, resultando luego en un pico en la Figura 4.6 (Izqda). Eso es debido a que la diferencia entre la PD implícita de la matriz neutral al riesgo y la histórica se hace tan grande que el exponente tiene que dar ese salto. Posteriormente ese salto desestabiliza el resto de ratings y comienza la inestabilidad.

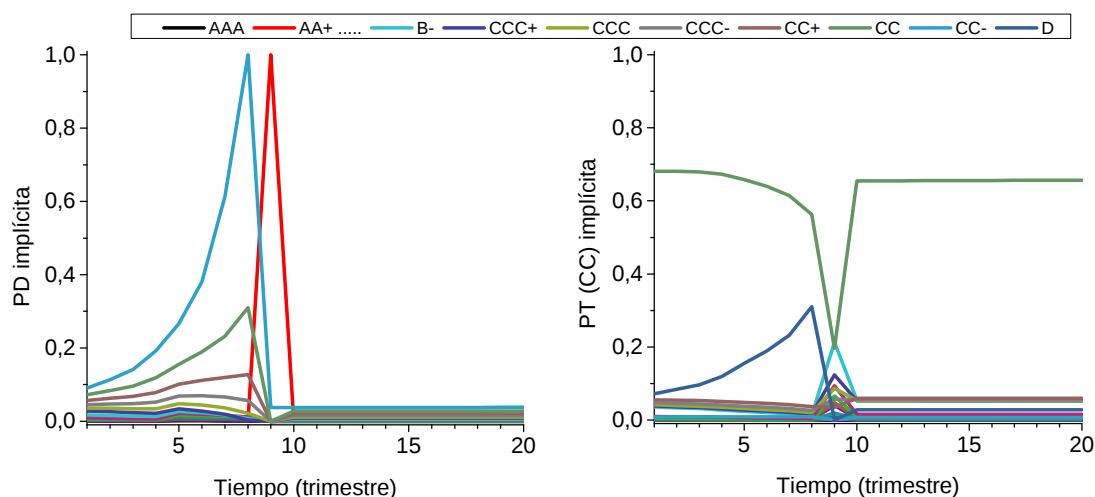


Figura 4.6: (Izqda) Evolución temporal de la probabilidad de insolvencia implícita para cada rating con LM - ajuste a la acumulada. (Dcha) Evolución temporal de la probabilidad de transición implícita trimestral desde el rating CC con LM- ajuste a la acumulada.

En el caso de las probabilidades de transición para la mayoría de los ratings ocurre algo parecido. En la Figura 4.6 (Dcha) mostramos un caso en el que la evolución no es una constante, donde se observa perfectamente el cambio de fase. Obsérvese como la probabilidad de insolvencia va creciendo, disminuyendo el resto de probabilidades, hasta llegar un punto en el cual se estabiliza

para el resto de trimestres. Para ratings superiores, la discontinuidad no es tan abrupta. Al final, depende de la magnitud de dicho pico en las PD implícitas.

Por último, vamos a analizar el resultado del algoritmo LM con ajuste a la PD implícita de mercado. No vamos a enseñar ninguna gráfica puesto que el resultado es prácticamente igual al que obteníamos con KK con ajuste a la PD implícita. En la Figura 4.4 se puede ver la evolución de las probabilidades implícitas trimestrales. Como ya dijimos, el KK con ajuste a la implícita era el mejor método que hemos obtenido hasta el momento, en lo que respecta a cumplir las propiedades básicas de una matriz de transición. Sin embargo, teníamos el problema de que la PD acumulada riesgo-neutral y la acumulada con matrices no eran iguales. Con el LM no nos libramos de este problema, consiguiendo una gráfica muy similar a la Figura 4.5.

Conclusión

En estos tres apartados hemos analizado las matrices transformadas con los algoritmos de JLT, KK y LM. Hemos comprobado como JLT es un método totalmente inoperante para nuestro trabajo. Las probabilidades que obtenemos son defectuosas y su aplicación en la valoración es imposible. Por otro lado, hemos conseguido resultado aceptables con KK y LM, descartando el ajuste a la acumulada de LM. En cuanto al caso del ajuste a la implícita, los resultados son prácticamente iguales y parecen ser buenos candidatos para la valoración. Sin embargo, tenemos el problema del desajuste de las probabilidades acumuladas respecto de las observadas en el mercado (Figura 4.5).

¿Cuál es la razón de este desajuste? Como ya mostramos en el Apéndice 3, las matrices dependen fuertemente del algoritmo. Estos algoritmos suponen una distribución concreta y en base a ella construyen las probabilidades de transición. Al multiplicar dos matrices, la probabilidad acumulada en los dos periodos dependerá de la distribución de probabilidades implícita supuesta. Como no es la distribución “real”, tendremos un error en la PD acumulada. Si multiplicamos varias matrices, el error se irá propagando y aumentando. Por esta razón sacamos la probabilidad implícita del ajuste a partir de las acumuladas.

No obstante, sería lógico pensar que en ese caso cometeríamos un error en la PD implícita que también aumentaría con el tiempo. Y así sucede en la práctica. Si miramos los resultados de JLT y LM para el ajuste a la acumulada observamos como ese error provoca singularidades e inestabilidad, dando como resultado matrices defectuosas. Sin embargo, parece ser que el algoritmo de KK es tal que las PD implícitas estimadas no tienen un error tan grande como en las demás, lo que nos da una estabilidad durante un mayor plazo.

Sin duda estas transformaciones son un tema que necesita todavía más investigación. En este sentido, hay diversos autores que han trabajado el asunto y han conseguido resultados mejores, pagando el precio de una reducción de supuestos. Mucho de ellos dejan de lado el supuesto de homogeneidad de las matrices de transición históricas y tratan de dar cuenta del ciclo económico, que sí viene implícito en las curvas de spread de crédito. De esta manera introducimos una mayor flexibilidad que mejoraría la aplicación de los algoritmos. Por ejemplo, Wei (2003) [22] permite que la matriz de transición real evolucione a lo largo del tiempo, aunque supone que el spread de crédito es constante. Por otro lado, Kodera (2003) [11] va más allá e introduce un proceso estocástico para la evolución de las PD de la matriz de transición.

Estas innovaciones añaden complejidad a la estimación pero logran un adecuación mayor a la realidad. En cualquier caso, Benzschawel et al. (2012) propone JLT para averiguar las matrices y hemos comprobado que es necesario algún método más sofisticado. Nuestra contribución será aplicar otros método a parte de JLT y ver qué resultados obtenemos en la valoración. Así pues,

allá vamos.

4.3. Valoración de un préstamo

En esta sección vamos a trabajar el asunto que da nombre a nuestro trabajo: la valoración de préstamos corporativos con matrices de transición. Como ya comentamos, un préstamo es muy similar a un bono arriesgado excepto por el hecho de que los préstamos tienen cláusulas adicionales. Estas cláusulas suelen depender del rating y por esta razón hemos profundizado en un modelo de valoración basado en dichas matrices.

Comenzaremos valorando el tipo de préstamo más sencillo, es decir, el bono arriesgado. Básicamente el procedimiento es descontar a través de la rejilla de nodos un flujo en el vencimiento, añadiendo los cupones. La mejor manera para hacerlo es a través de un *floating rate note* o bono que paga variable el tipo libre de riesgo implícito, por tanto el precio estaría a la par. Sin embargo, para bonos con riesgo, debemos de añadir un spread por riesgo de crédito. Así pues, el cupón será la suma del libre de riesgo y el spread de cada periodo. Al igual que un *floating rate note*, se pagará justamente el spread que cotiza en el mercado para un producto con el mismo plazo.

En la Figura 4.7 tenemos los spreads de mercado obtenidos de los CDS a diferentes vencimientos. Estos spreads son los empleados para la transformación de matrices de la sección anterior y fueron tomados el 31 de julio de 2012 de una agregación a nivel global que hace Markit.

	1 año	3 años	5 años	10 años
AAA	16	31	60	81
AA+	23	45	72	93
AA	31	59	83	104
AA-	32	61	87	108
A+	32	62	90	113
A	33	67	100	127
A-	36	72	108	136
BBB+	39	80	120	150
BBB	46	96	144	176
BBB-	54	115	169	204
BB+	70	151	216	254
BB	96	212	295	338
BB-	114	255	351	394
B+	143	321	435	480
B	207	446	588	635
B-	397	635	778	823
CCC+	649	877	1013	1057
CCC	837	1057	1188	1230
CCC-	1074	1283	1408	1449
CC+	1372	1569	1686	1724
CC	1748	1929	2037	2072
CC-	2222	2383	2479	2509

Figura 4.7: *Spread anual de crédito a 1, 3, 5 y 10 años para cada rating obtenidos de las cotizaciones ponderadas a nivel global de CDS para el 31 de julio de 2012.*

Con estos spreads formamos la estructura temporal de spreads de crédito para cada rating, con lo que podemos tener spread para productos a cualquier vencimiento y rating. Dicho esto, vamos

a mostrar los resultados de la valoración del bono con plazos de 1, 3 y 5 años. Dado que teníamos dudas sobre qué método de transformación de matrices es mejor, vamos a probarlo con los tres candidatos: KK implícita, KK acumulada y LM implícita.

Comencemos con la valoración de un bono a 1 año. En la Figura 4.8 mostramos cual es precio en puntos básicos de cada bono al descuento tanto con KK como con LM. Hemos también añadido LM ajustada a la acumulada puesto que es estable para el primera año.

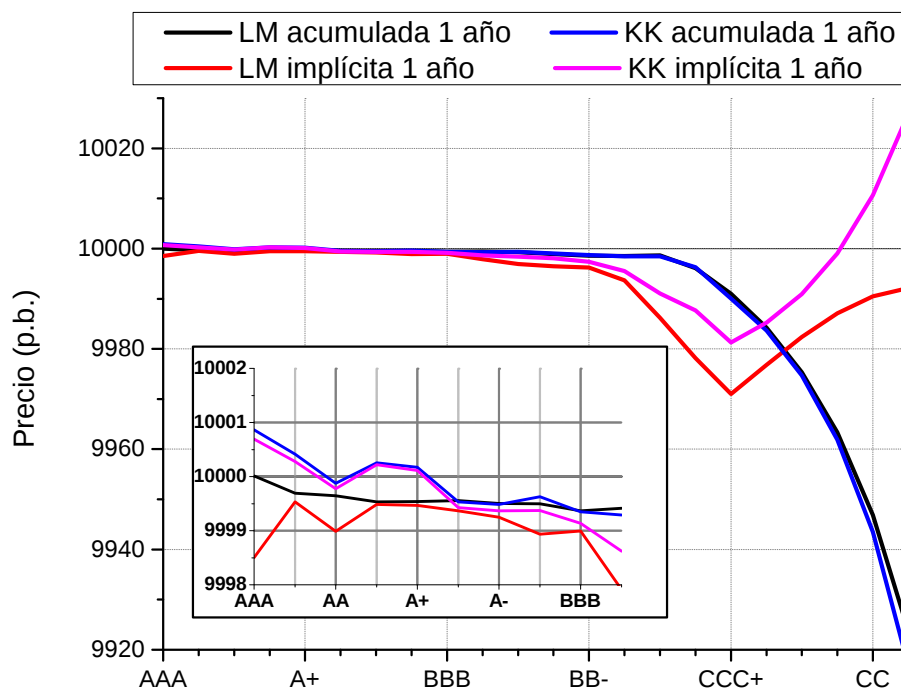


Figura 4.8: Precio en puntos básicos de los bonos a 1 año con pago variable para todos los ratings. En el recuadro interior mostramos un aumento en la escala con únicamente los ratings en grado inversión.

Como hemos comentado, el precio que se ha de esperar para todos los bonos es de la unidad o, dicho de otra manera, 10000 puntos básicos. Vemos que para la mayoría de los ratings en grado inversión la diferencia con el precio real es menor del punto básico, lo cual es un buen resultado. Sin embargo, cuanto peor es el rating mayor es la discrepancia, siendo en torno a los 15-20 pb para los CCC y de alrededor de 60 pb para los CC. No obstante, llegado el momento, los precios con ajuste a la implícita dejan de divergir y se aproximan cada vez más a la unidad. A pesar de esto, los que se ajustan a la acumulada resultan mejores excepto para los bonos CC.

En conclusión, parece ser que los algoritmos KK y LM con ajuste a la acumulada son la mejor alternativa para valorar bonos a 1 año. Si hubiera que elegir entre los dos, escogeríamos KK dada su mayor sencillez en la implementación.

Continuaremos ahora con la valoración de un bono arriesgado a tres años. Pagará tanto el tipo libre de riesgo como el spread que observamos en la segunda columna de la Figura 4.8 para cada rating.

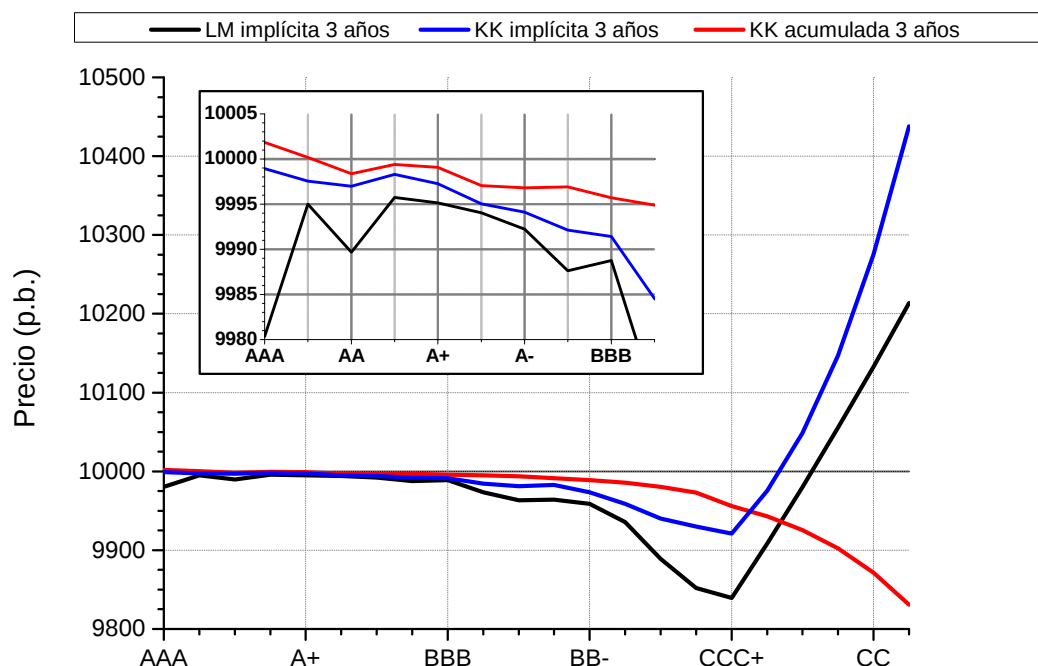


Figura 4.9: Precio en puntos básicos de los bonos a 3 años con pago variable para todos los ratings. En el recuadro interior mostramos un aumento en la escala con únicamente los ratings en grado inversión.

Vemos como el peor de los tres ajustes es el de LM a la implícita, puesto que no es capaz de conseguir un acierto comparable con el resto ni para el caso de bonos en grado inversión. Entre los dos KK, el que mejor resultado tiene es el que ajusta a la PD acumulada.

Por último, vamos a valorar un bono a 5 años. Procederemos igual que antes. En la Figura 4.9 vemos cual el precio del bono para cada rating y los tres métodos diferentes. Al igual que antes, el mejor resultado que obtenemos es el de KK con ajuste a la acumulada. Para los ratings en grado inversión el error de estimación ronda los 10 puntos básicos y a medida que va bajando el rating la diferencia es mayor. Para los bonos CCC la diferencia está sobre un punto porcentual y para los CC se encuentra ya en los 200 puntos básicos.

En conclusión, parece ser que **el método KK de Kijima y Komoribayashi donde se obtiene la PD implícita de las matrices tal que las acumuladas sean la del mercado es el mejor método**. El error que se comete en la valoración de bonos en grado inversión a un año ronda el punto básico, siendo menos de 5 para los que tienen plazo de tres años y de 10 para los de cinco años. Si nos movemos en estos valores, la aplicación del modelo a la valoración de préstamos es plausible. Sobre todo, debemos tener en cuenta que aunque el precio no es tan preciso como otros métodos en la valoración de bonos a la par, si recogerá en principio bastante bien todas las cláusulas relacionadas con rating. En este aspecto tendremos una valoración más precisa y nos compensará el error cometido que proviene de la transformación de las matrices de transición.

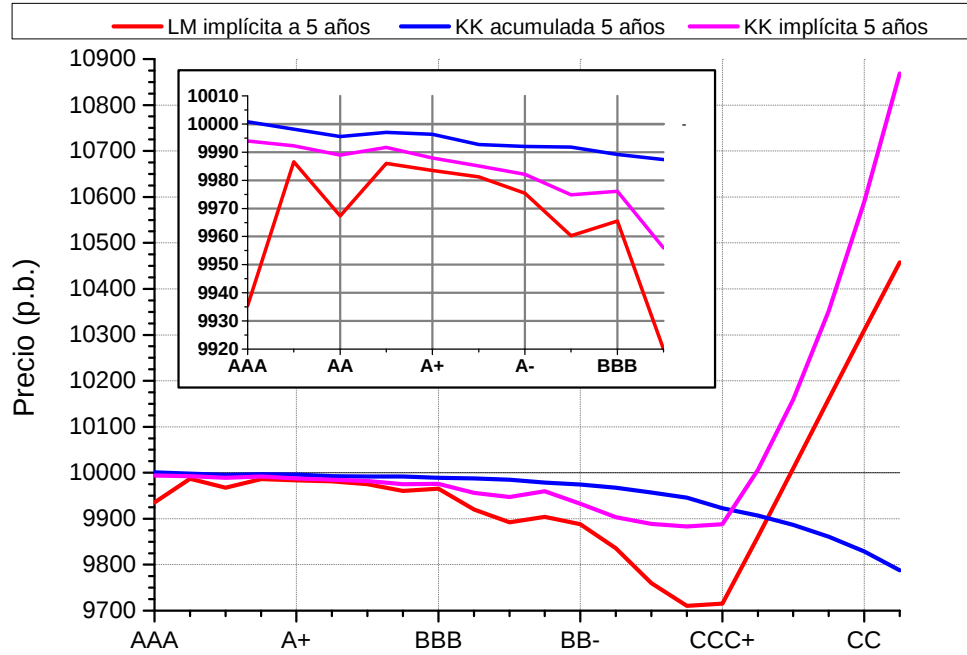


Figura 4.10: Precio en puntos básicos de los bonos a 5 años con pago variable para todos los ratings. En el recuadro interior mostramos un aumento en la escala con únicamente los ratings en grado inversión.

Una vez hemos analizado todos los aspectos necesarios para la valoración de préstamos mediante matrices, al fin vamos a emplear el método en la valoración de un préstamo con cláusula de prepago. Trataremos con una situación que podría darse en el mercado. Supongamos un préstamo a tres años con pagos trimestrales. Estos pagos serán variables tal que sean una tasa libre de riesgo y un spread de crédito. En este caso, el prestatario tendrá rating BBB- a día 31 de julio de 2012, fecha de valoración y de originación del préstamo, así pues, le cargamos el spread de mercado. Mirando en la tabla 4.7 vemos que son 115 pb anuales.

Teniendo todos estos elementos, solo nos faltaría proponer una penalización por prepago. Dado que actualmente nos situamos en momentos de recesión, las mejoras ratings no suelen darse. Por esta razón no suele cargarse esta penalización en la industria. No obstante, en épocas donde el ciclo económico era diferente, esta penalización se solía situar en los 50 pb. Recordemos que únicamente tenemos la opción de prepago, así que en cada nodo tenemos que evaluar la siguiente ecuación:

$$v_{t,j} = \min \left\{ e^{-\frac{1}{4} f_{t,t+1}} \sum_{k=D}^{AAA} (\tilde{q}_{j,k,t} \cdot v_{t+1,k}) + c_t, K_t \right\}$$

Aplicamos el proceso de valoración y obtenemos que el precio del préstamo es de 9994.59 pb, siendo el valor de la opción de únicamente 0.3 pb. Parece un valor extremadamente bajo y más pensando que la posibilidad de subir al menos al BBB desde el BBB- no debería ser tan baja. En cualquier caso, vamos a comprobar este resultado mediante otro modelo de valoración.

En el Capítulo 2 introducimos los modelos más usados dentro de la industria. Entre los más populares vimos que se encontraban los de forma reducida, tal que expresábamos la probabilidad de impago a través de un spread adicional al libre de riesgo. Así pues, la modelización de la dinámica de este spread podría emplearse para valorar productos con opcionalidad implícita. Siguiendo

por este camino, introducimos un modelo muy conocido dentro de la industria y diseñado por los autores Black, Derman y Toy (BDT). El modelo BDT suponía que el logaritmo neperiano del spread tenía una evolución futura tal que su distribución fuera la gaussiana. Puesto que el proceso estocástico en cuestión no tiene solución cerrada, tenemos que recurrir a árboles binomiales (Apéndice 1).

Dicho esto, hemos implementado una serie de funciones para valorar por árboles binomiales la opción de prepago del préstamo de nuestro ejemplo. La separación entre nodos en el árbol es de tres meses, para que coincida con el paso del modelo de matrices. La volatilidad anual que tomamos es la histórica de los dos últimos años desde el momento de la valoración. Se ha elegido esta ventana histórica porque creemos que es adecuada para captar el momento del ciclo económico. La serie que tomamos para averiguar la volatilidad es la del spread equivalente a un BBB disponible en Markit. El resultado es de un 18.5 % anual.

La volatilidad que encontramos parece baja comparada con la que podemos observar en un índice de crédito como el iTraxx. Además el periodo de muestreo (2010-2012) ha sido bastante convulso debido a la crisis de deuda soberana europea. Si tomáramos la volatilidad de los dos últimos años de cotizaciones obtendríamos un valor de volatilidad de 47.4 %, más del doble que la obtenida mediante spreads equivalentes a BBB.

En cualquier caso, los resultados que obtenemos para el precio del préstamos son muy diferentes del caso con matrices de transición. Para una volatilidad del 18.7 % el préstamo cotiza a 9977.4 pb sobre la par, con un precio de la opción de preapago de 21.6 pb. Si empleamos la volatilidad del iTraxx, el precio sería de 9944,1 pb sobre la par, con un precio de la opción de prepago de 55.1 pb.

La diferencia entre la aplicación de un modelo como BDT y otro como el de matrices de transición es enorme. Así pues, para tener una visión más amplia del problema y poder elaborar una explicación coherente a tal diferencia, vamos poner a prueba ambos modelos en diferentes situaciones.

Veamos si esta diferencia en el precio de la opción de prepago depende del rating. Para ello vamos a calcular el precio de la opción para diferentes ratings y para un vencimiento fijo de 3 años. En la Figura 4.11 mostramos los resultados.

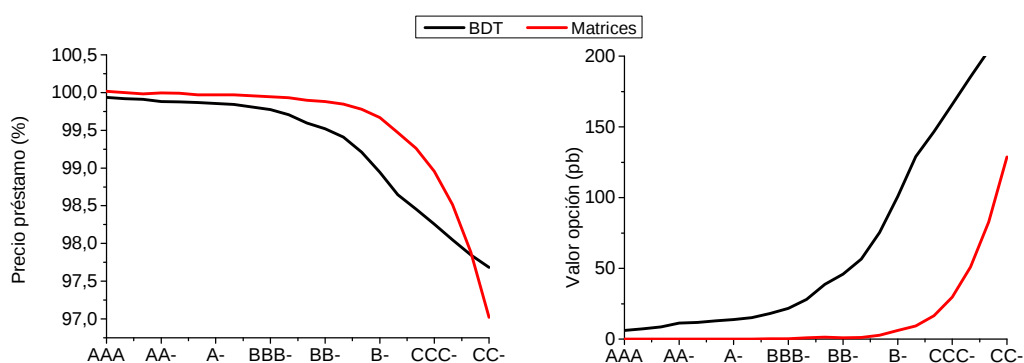


Figura 4.11: (Izqda) Precio de un préstamos a 3 años originado a la par. (Dcha) Valor de la opción para cada rating.

Existe una diferencia considerable entre ambos métodos. Todo parece indicar que el valor de la opción de prepago es bajísimo para el modelo de matrices. Parece ser que para peores ratings el precio de la opción comienza a subir, sin embargo, si tenemos en cuenta la Figura 4.11, veremos

que la forma del precio del préstamo sin prepago es idéntica a la de la Figura 4.9 con opción de prepago. Dado que el método de matrices falla para ratings bajos, sin duda el hecho de que el valor de la opción que se aleja de cero proviene más de un error en la transformación riesgo-neutral que un efecto de la opcionalidad. En el Apéndice 4 observamos una gráfica con la representación del valor de la opción de prepago para préstamos

Así pues, la opcionalidad con el método de matrices para préstamos originados a la par parece infravalorarse de manera abultada. Ahora bien, ¿qué sucede para préstamos cuyo spread cargado no coincide con el que se observa en el mercado? Lo que vamos a hacer ahora es tomar un préstamo que pague un spread, por ejemplo, como el del BBB- pero que sea descontado por un spread de mercado diferente. En este caso, vamos a descontar por los spreads de la Figura 4.7 para un vencimiento de tres años. En la Figura 4.12 mostramos el precio del préstamo y el valor de la opción de prepago tanto para BDT como para el enfoque de matrices.

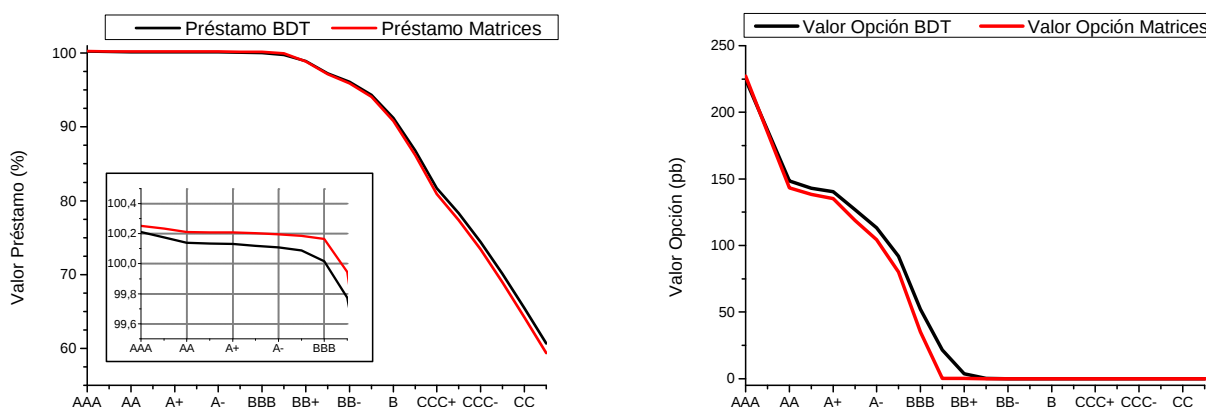


Figura 4.12: (Izqda) Valor de un préstamo que paga como un BBB- pero descontado bajo curvas de spread de crédito de los diferentes ratings. (Dcha) Valor de la opción de prepago de dichos préstamos.

Vemos como ahora si que parece haber un parecido mucho mayor entre los precios de los préstamos y opciones de ambos enfoques. En el caso de los préstamos, la diferencia de precio en el grado inversión ronda el punto básico, situándose en 20 pb para el BBB- y ampliándose hasta alrededor de los 100-150 pb para los peores ratings. Para el valor de la opción, el parecido entre curvas también es muy elevado, sin embargo, tenemos que fijarnos en un detalle importante.

En la Figura 4.13 se muestra la diferencia de precios entre el valor de la opción mediante el BDT y las matrices. Obsérvese como hay un pico justamente cuando descontamos con el mismo spread que se paga en el cupón. A la derecha de este pico, el valor de la opción se hace rápidamente cero puesto que si hay un empeoramiento de rating, más improbable resulta el prepago, acertando ambos en asignarle un valor próximo a cero. Hacia la izquierda del pico la diferencia entre ambos método va cayendo de manera aproximadamente lineal.

Pero bien, centrémonos en el pico. En la figura también hemos representado cual es el valor de la opción para el caso de las matrices. Si nos fijamos veremos que este valor para BBB- es casi nulo, siendo la diferencia prácticamente igual al valor de la opción con BDT. Es decir, para préstamos que se originen a la par y no tengan penalización por prepago, el modelo de matrices asignará un precio casi nulo a esta opción mientras que BDT le asigna un valor no nulo. Y este hecho está directamente relacionado con la distribución de probabilidad de cambiar de estado que asigna cada modelo.

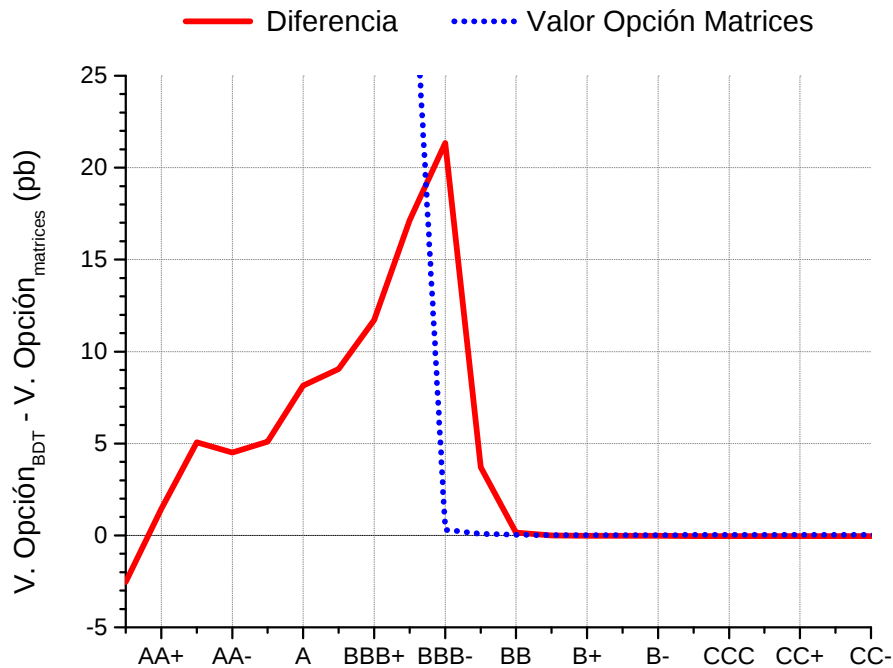


Figura 4.13: Diferencia entre los valores de las opciones de prepago para los diferentes enfoques.

En el BDT suponemos que el spread se distribuye siguiendo una lognormal mientras que en el modelo de matrices no hace falta suponer ninguna distribución: viene implícita en la propia matriz de transición. Como ya comentamos y tal y como se observa en la Figura 4.7, existe una relación de equivalencia entre spreads y rating. Gracias a esta relación podemos pasar de ratings a spreads, por tanto, podemos comparar cual es la distribución que observamos en la matriz de transición. Así pues, vamos a averiguar cuál es la distribución de probabilidad de transición para el rating BBB- de nuestro ejemplo.

La Figura 4.14 muestra la distribución de probabilidad del logaritmo del spread tanto para BDT como la traducción de ratings a spreads del método de matrices. Se ve claramente como existe una diferencia bastante considerable en cuanto a la dispersión de cada una. La distribución para el rating tiene mucha probabilidad concentrada en mantener el mismo spread, ya que estas probabilidades son normalmente superiores al 80 %. En cambio la distribución de probabilidades del BDT es muy achatada, con un pico que no supera el 20 % de probabilidad.

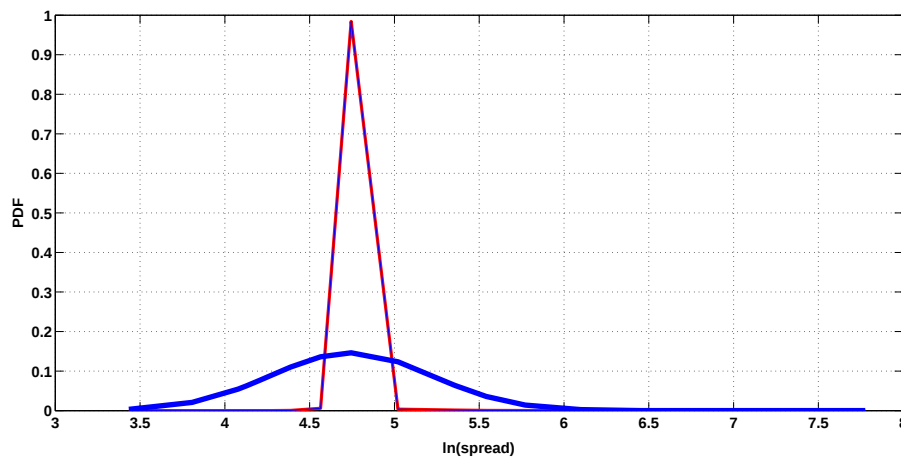


Figura 4.14: Densidad de probabilidad del logaritmo del spread de crédito para las matrices transición (rojo) y para el modelo BDT (azul).

Pero, a pesar de todas las diferencias, ¿por qué hay una parecida tan alto en ambas curvas de la Figura 4.12?. Para responder a esta pregunta debemos recurrir a las probabilidades de prepago en cada uno de los modelos. En la Figura 4.12 estamos mostrando opciones que se encuentran muy *in-the-money* o muy *out-of-the-money*. En estos casos, el valor de la opción no depende apenas de la volatilidad de ratings y spreads. Para BDT la volatilidad es bastante baja si la comparamos con lo que se suele utilizar en la industria, por tanto, para ratings bajos es prácticamente imposible poder hacer una mejora de rating tremenda hasta prepagar. Lo mismo sucede para el caso *in-the-money*, donde la probabilidad de ejercer es prácticamente el 100 %.

En el caso de las matrices de transición ocurre algo muy similar pero aún más pronunciado. Dada la forma leptocúrtica de la distribución de probabilidades, la diferencia entre estar profundamente *in-the-money* y profundamente *out-of-the-money* es mínima. Por ejemplo, la probabilidad de prepagar si paga como un BBB- pero en el mercado se encuentra como un BBB es del 99.3 %. En cambio, si se encuentra a la par, la probabilidad de prepagar baja directamente al 10.0 % y si es de un rating por debajo del par, es decir, BB+, la probabilidad es de 0.6 %. No hay cabida para estados cercanos al *at-the-money*, cosa que sí sucede con el BDT, de ahí la diferencia más abultada que observamos en la Figura 4.13 para ratings cercanos al BBB-.

Por tanto, nuestra conclusión es que en situaciones alejadas del *at-the-money* el modelo de matrices funciona adecuadamente, pero únicamente por el hecho de que la opcionalidad deja de depender prácticamente de la volatilidad y se convierte en una certeza el ejercicio de la opción. Sin embargo, para valorar préstamos originados a la par, que es lo más habitual, el modelo de matrices no es adecuado en absoluto. Provoca una subestimación del precio debido a que la probabilidad de prepago es prácticamente una función escalón de salto unidad: o se prepaga con una probabilidad cercana al 100 % o es prácticamente imposible.

Descartado por el momento el uso de las matrices de transición riesgo-neutrales para la valoración de la opción de prepago, cabe esperar que tengamos un mejor resultado cuando lo apliquemos a otras cláusulas de un préstamo. El problema de la opción de prepago es que depende directamente del spread de crédito y no del rating, siendo posible una reducción del spread que ejecutara el prepago pero no un cambio de rating. En este mismo sentido, si una cláusula dependiera del rating explícitamente, el precio del préstamo con las matrices sería adecuado.

Para ponerlo en contexto, vamos a seguir con nuestro ejemplo de un préstamo BBB- a 3 años y pago variable trimestral. Supongamos que si baja del BBB- al BB+, el spread que pague pasará a ser el que observamos para el BB- en el momento de la bajada. Puesto que tenemos la estructura temporal de spreads de crédito, sabemos cual es la prima cargada por crédito en cada instante y por tanto, podemos valorar con la rejilla de nodos del modelo de matrices. Así pues, la dinámica que nos interesa es la del cambio de rating y puesto que tenemos la estructura de spreads de cada rating, sabemos qué spread se paga en cada momento. Sin embargo, se nos escapa un detalle en todo este razonamiento: ¿permanece la relación entre spreads y ratings igual en el tiempo? La respuesta es que ni mucho menos.

Para verlo vamos a ver la Figura 4.15. En ella representamos la evolución de los ratings durante los últimos años. Obsérvese como lo que a principios de la muestra era un spread AAA de 5 pb se convirtió en plena crisis financiera en un spread más de 100 pb. Por tanto, a pesar de que la estructura de spreads trata de descontar los eventos futuros que puedan suceder, no dice nada acerca de cual será la relación entre spreads y ratings. En otras palabras, **tenemos en cuenta la dinámica sobre el cambio de rating pero también debemos tener en cuenta que existe una dinámica en los spreads**. De no tenerla en cuenta, estaríamos introduciendo el supuesto de que los spreads son fijos en el futuro, lo cual es asumible en periodos de estabilidad económica como sucede en la muestra hasta principios de 2007, pero no en épocas de mucha volatilidad en spreads, como han sido los últimos años.

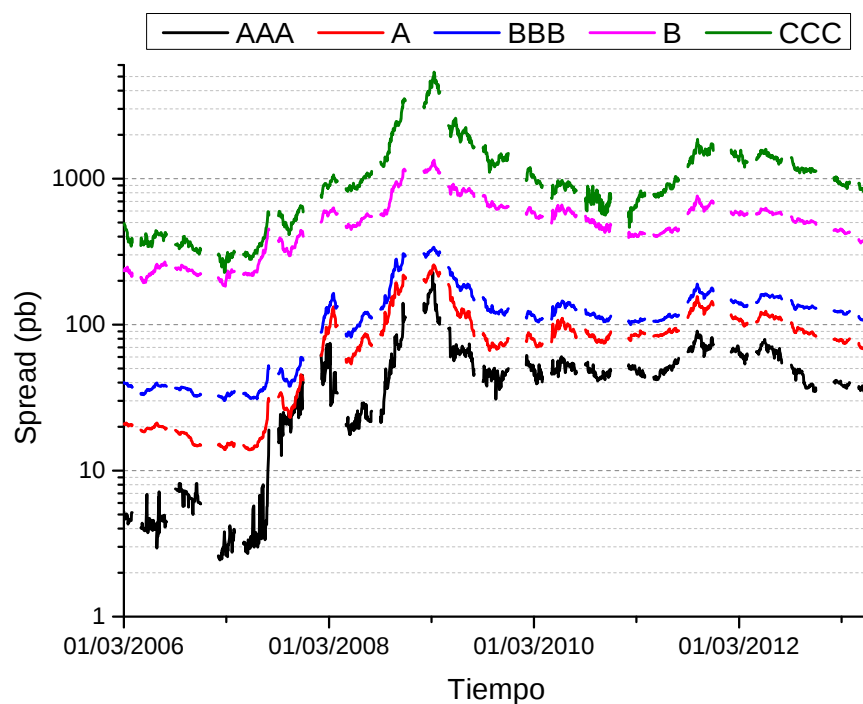


Figura 4.15: Evolución de los spreads de los CDS a nivel global para los ratings AAA, A, BBB, B y CCC. Los tramos en blanco indican que no tenemos observación.

En conclusión, la valoración del resto de cláusulas no deja de ser trivial. De aplicarse debe tenerse en cuenta que estamos introduciendo supuestos que tal vez pensábamos que no incluíamos. La variabilidad en la relación entre spreads y ratings es una cuestión que no solo afecta a este modelo de matrices, si no que afectaría también al BDT si quisiéramos valorar un *rating grid*. En los modelos de forma reducida damos dinámica al spread de crédito pero no decimos nada sobre la

relación spread-rating. Así pues, habría que entrar de nuevo en supuestos sobre evolución, lo cual traslada el problema a otro plano pero no lo resuelve.

Para terminar, vamos a hablar de manera superficial sobre las líneas de crédito. Como ya dijimos, las líneas de crédito consiste en un acuerdo a través del cual el prestatario puede disponer de dinero en el momento que considere oportuno, hasta un límite preestablecido. Por el dinero que disponga pagará una tasa acordada y por la parte no dispuesta tendrá que pagar una penalización por no disposición. Por tanto, la ganancia total de la línea de crédito provendrá tanto de la parte dispuesta como de la no dispuesta, siendo la proporción respecto del total de cada parte lo que no se conoce a priori. No obstante, existen estimaciones de cual es dicho ratio de utilización en función del rating [1] y es aquí donde nuestro modelo entra en acción. A pesar de presentar el problema de no saber cual es la relación rating-spread en el futuro, si tenemos una mayor certeza de cual es el ratio de utilización en función del rating. Puesto que el préstamo es más sensible al ratio de utilización que a las fluctuaciones de la relación rating-spread, obtendremos un valor del préstamo mediante matrices de transición bastante adecuado. Por tanto, parece coherente continuar la investigación por este camino dado el gran potencial de resultados que podemos obtener. Pero dicha investigación la dejamos para el futuro.

Capítulo 5

Conclusiones del trabajo

En este trabajo de fin de máster hemos introducido el asunto de la valoración de préstamos mediante matrices de transición. Con el objetivo de obtener un precio más *mark-to-market* del préstamo, bien para tener una mejor estimación del valor de la cartera de préstamos de un banco o para cubrirla con derivados de crédito en el mercado, hemos motivado la necesidad de conocer mejor el precio de un préstamo. Así pues, en el Capítulo 1 hemos comentado las principales características de un préstamo y hemos introducido las variables de las que depende su valoración, como la probabilidad de insolvencia o el ratio de recuperación. Además, hemos hecho hincapié en la necesidad de separar los conceptos de bono y préstamo. En líneas generales ambos son iguales, sin embargo, los préstamos tienen ciertas cláusulas añadidas para mejorar la situación de prestamista y prestatario. Entre las más populares se encuentran la opción de prepago o el pago de cupón siguiendo un *rating grid*. Muchas de ellas dependen del rating del deudor, de ahí la motivación de emplear un modelo de valoración basado en matrices de transición.

En el artículo de Benzschawel et al. (2012) [2] se propone un método de valoración mediante matrices de transición que han sufrido una transformación riesgo-neutral. De esta manera se conseguiría un precio referenciado al mercado. Así pues, siguiendo el artículo de estos autores implementamos su modelo y tratamos de ver de qué problemas adolece y qué mejoras somos capaces de proponer en este trabajo. No obstante, antes de comenzar con la implementación hacemos en el Capítulo 2 una breve revisión de los modelos alternativos que hay en la literatura. Por un lado nombramos el CrediMark de KMV [1], cuyos fundamentos provienen de un enfoque estructural del riesgo de crédito. Por otro lado, tomamos uno de los posibles modelos de forma reducida y los desarrollamos para la posterior comparación de resultados con el modelo de matrices de Benzschawel et al. (2012). En este caso hemos elegido el modelo de Black, Derman y Toy (1990) [5], cuya modelización se encuentra en el Apéndice 1.

Una vez motivado el tema del trabajo y puesto en perspectiva con otros modelos de la literatura, procedemos a la descripción paso a paso de la implementación del modelo. Este modelo se basa en el desarrollo de una rejilla de nodos, que serán los posibles pagos en función de los estados de la naturaleza, y en el proceso de valoración hacia atrás, igual que en los árboles binomiales. La probabilidad de transición entre cada nodo vendrá dada por una matriz de transición riesgo neutral, producto de una transformación cuya semilla es una matriz de transición histórica. Así pues, en el Capítulo 4 describimos con detalle el modelo, centrándonos sobre todo en la transformación de la matriz histórica. Benzschawel et al. (2012) proponen como transformación el algoritmo de Jarrow, Lando y Turnbull (1995) [9], sin embargo, nosotros vamos a aplicar otros dos modelos de transformación muy conocidos en la literatura. Ésta será una de las contribuciones de nuestro trabajo

de fin de máster. Los dos algoritmos son el de Kijima y Komoribayashi (1998) [10] y el de Lando y Mortensen (2005) [13]. Tras explicar los algoritmos, recalcamos que por cada uno existen dos transformaciones posibles. Una de ellas es hacer que las PD implícita de las matrices resultantes sea la que observamos en el mercado. La otra alternativa es que la PD implícita de la matriz sea tal que la PD acumulada obtenida con las matrices sea la de mercado. Aunque parezca que hayamos dicho lo mismo, demostramos que no es así en el Apéndice 3.

Tras una profunda explicación de los detalles de la transformación de matrices y una vez explicado los pasos de la implementación del modelo, lo aplicamos para casos reales en el Capítulo 4. Comenzamos analizando los resultado de la transformación para los tres algoritmos propuestos, empleando como semilla una matriz de transición de S&P. En primer lugar probamos con JLT y obtenemos unos resultados poco satisfactorios. El algoritmo provoca que las matrices calculadas tengan probabilidades fuera del rango entre 0 y 1. En este punto llamamos la atención sobre lo que Benzschawel et al. (2012) presenta en su artículo. A diferencia de lo que el autor propone, el algoritmo JLT es demasiado agresivo y resulta en matrices absurdas, con lo que su aplicación en la valoración no es posible.

En este punto, es donde entra en juego nuestras nuevas propuestas de transformación. Las alternativas de KK y LM parecen ser menos agresivas con la matriz, resultando en matrices válidas para la valoración de préstamos con vencimiento de hasta 5 años. A partir de aquí volvemos a tener el mismo problema que con JLT, ya que los elementos de las matrices salen fuera del rango habitual. Además de escoger qué método es mejor, llegamos también a la conclusión de que es mejor ajustarnos a la PD acumulada con las matrices que tomar directamente la PD implícita. Así pues, el algoritmo KK con ajuste a la PD acumulada es el mejor candidato para la valoración de préstamos con matrices de transición neutrales al riesgo.

Llegada a esta conclusión, comenzamos con la valoración propiamente dicha. Para probar qué algoritmo es el mejor, hemos puesto precio a préstamos originados a la par. El que ha proporcionado un precio más cercano al 100 % ha sido el que hemos escogido, resultando KK con ajuste a la acumulada. Pues bien, para préstamos con rating en grado inversión las diferencias son muy pequeñas, sin embargo, a medida que nos acercamos a los peores ratings y el plazo aumenta, el precio se va más de la par. Aún así, poder valorar las cláusulas con mayor acierto podría compensarnos este error en la estimación del precio.

Comenzamos con la valoración de la opción de prepago, comparando los resultados con los obtenidos mediante el modelo de Black, Derman y Toy (1990) [5] para spread de crédito. Los resultados fueron ciertamente desconcertantes al ver la tremenda subestimación del precio de la opción de prepago respecto del obtenido con BDT. No obstante, la explicación de este efecto se basa en la poca volatilidad que existe en la probabilidad de migrar a otro rating: la probabilidad de mantenerse en el rating es enorme comparado con la probabilidad de migrar tan solo al rating vecino, siendo el resto de ellas despreciables. Si no hay transición, no hay prepago, de ahí que el precio sea tan sumamente bajo. Así pues, la aplicación a la valoración de opciones de prepago es mejor aplicando modelos como BDT, donde se modeliza el spread, que con uno alternativo de modelización del rating.

No obstante, pensamos que para las cláusulas como *rating grid* puede ser un modelo adecuado, aunque hay que tener en cuenta que la transformación de rating a spread no es constante en el tiempo. Suponerla constante implica periodos de baja volatilidad en el mercado de spread, así que sería útil para valorar en momentos de bonanza económica. Además motivamos su uso para valoración de líneas de crédito, puesto que uno de los parámetros más importante del precio es el ratio de utilización. En la literatura hay estimaciones de dicho ratio en función del rating, como en el

propio artículo sobre CreditMark de KMV [1]. Por tanto, sería plausible una aplicación del modelo de matrices de transición riesgo-neutrales para estos productos, pero lo dejamos pendiente de investigación el futuro.

En conclusión, existe todavía mucho por hacer dentro del mundo de la valoración con matrices de transición. En primer lugar se debe de continuar con la búsqueda de un algoritmo de transformación que nos permita obtener matrices para periodos más allá de los cinco años. Este algoritmo debe tener un fundamento económico consistente, además de poder ajustarse adecuadamente tanto a la probabilidad implícita de mercado como a la acumulada. Esta última característica debe ser fundamental ya que nos permitirá que la valoración de préstamos a la par sea precisa.

Por otro lado, necesitamos restringirnos a una relación de rating-spread única. Una de las ideas es diseñar un sistema de equivalencia entre rating y spread fijo en el tiempo. Por ejemplo, siempre que el spread fuera entre 0 y 30 pb, el rating será AAA. De esta manera nos evitamos fluctuaciones en el tiempo de dicha relación, lo cual provoca una volatilidad que no podemos recoger con el modelo matrices. De ser así, la matriz de transición recogería dicha volatilidad no recogida y la valoración de tanto la opción de prepago como el resto de cláusulas tendrían una mejor estimación. No obstante, ésta es una primera idea cuya implementación puede acarrear problemas a la hora del diseño de la matriz de probabilidades de transición.

Además de esta idea, podemos generalizar más los supuestos de la transformación. En este sentido, el artículo de Koderá (2001) [11] puede resultar interesante de implementar. En él se sustituye la probabilidad de insolvencia por una variable aleatoria que fluctúa con el tiempo. De esta manera daríamos cuenta tanto de la volatilidad en spreads como de la volatilidad en ratings, consiguiendo a priori un mejor desempeño del modelo. Adicionalmente, podemos añadir una tasa de recuperación que sea también aleatoria, tal y como se ha propuesto el artículo de Millossovich (2003) [16].

En cualquier caso, la investigación debe provenir por el lado de la matriz de transición. Ya sea modificando la matriz de transición histórica o a través de otros argumentos, la mejora propondrá por este lado. Una vez que tengamos una matriz de transición riesgo-neutral fiable, la aplicación de la valoración con rejilla de nodos de Benzschawel et al. (2012) podrá aplicarse con mayor éxito.

Bibliografía

- [1] D. Agrawal, I. Korablev, and D. W. Dwyer. Valuation of corporate loans: a credit migration approach. *Moody's Analytics Webpage*, 2008.
- [2] T. Benzschawel, J. DaGraca, and M. Lee. Pricing corporate loans under the risk-neutral measure. *The Journal of Credit Risk*, 8(1):29–62, Spring 2012.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [4] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [5] F. Black, E. Derman, and W. Toy. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, 46(1):33–39, 1990.
- [6] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- [7] R. Israel, J. Rosenthal, and J. Wei. Finding generators for markov chains via empirical transition matrices, with application to credit ratings. *Mathematical Finance*, 11(2):245–265, 2000.
- [8] R. Jarrow and S. Turnbull. Pricing options on derivatives subject to credit risk. *Journal of Finance*, 50(1):53–85, 1995.
- [9] R. Jarrow, D. Lando, and S. Turnbull. A markov model for the term structure of credit risk spreads. *The Review of Financial Studies*, 10(2):481–523, 1997.
- [10] M. Kijima and K. Komoribayashi. A markov chain model for valuing credit risk derivatives. *Journal of Derivatives*, 6-fall:97–108, 1998.
- [11] E. Kodera. A markov chain model with stochastic default rate for valuation of credit spreads. *The Journal of Derivatives*, Summer:8–18, 2001.
- [12] D. Lando. Some elements of rating-based credit risk modelling.
- [13] D. Lando and A. Mortensen. On the pricing of step-up bond in the european telecom sector. *Journal of Credit Risk*, 1(1):71–110, 2005.
- [14] Thompson Reuters LPC. Loan pricing corporation annual, 2013.
- [15] R. C. Merton. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29:449–470, 1974.

- [16] P. Millossovich. An extension of the jarow-lando-turnbull model to random recovery rate. *www.defaultrisk.com*, 2003.
- [17] Moody's. Annual default study: Corporate default and recovery rates, 1920-2012, 2013.
- [18] M. Ong, D. Li, and D. Lu. A survey of loan credit default swap pricing models. *The Journal of Credit Risk* (67-96), 8(3):67–96, Fall 2012.
- [19] J-L Prigent, O Renault, and O Scaillet. An empirical investigation into credit spread indices. *The Journal of Risk*, 3(3):27–56, 2001.
- [20] ISDA Market Survey. Isda, 2010.
- [21] O. Vasicek. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, 1977.
- [22] J. Z. Wei. A multi-factor, credit migration model for sovereign and corporate debt. *Journal of International Money and Finance*, 22:709–735, 2003.

Apéndice 1: Construcción del árbol BDT para el spread de crédito.

En este apéndice vamos a explicar como se ajuste nuestro BDT modificado a la curva de spreads de crédito observada en el mercado. Partamos de la ecuación de valoración:

$$d \ln(s) = \theta(t) dt + \sigma dW(t)$$

donde s es el spread de crédito, $\theta(t)$ es el parámetro de la deriva y $W(t)$ es un movimiento browniano. Según Jamshidian (1991), el spread instantáneo $s(t)$ tendría la siguiente expresión:

$$s(t) = U(t) \exp(\sigma z(t))$$

donde $U(t)$ es la mediana de la distribución. Pasemos ahora esta variable a la notación con índices del árbol binomial. En el momento $i = 0$ habrá un sólo estado de la naturaleza que indexaremos por $j=0$. En el momento $i = 1$ habrá dos estados de la naturaleza $j = 1$ y $j = -1$. En general, tendremos tantos estados de naturaleza como pasos haya en el árbol más uno, habiendo entre ellos siempre una separación de dos unidades y comenzando de $j = -i$ para arriba. Dicho esto, la transformación a unidades del árbol de $s(t)$ quedaría como:

$$s_{i,j} = U(i) \exp(\sigma j \sqrt{\Delta t})$$

donde $j \sqrt{\Delta t}$ es la realización del movimiento browniano para cada escenario j . Ahora bien, es necesario calcular $U(i)$ tal que se ajuste a la curva de spread observada. Antes tenemos que suponer que tenemos un conjunto de activos Arrow-Debreu $Q_{i,j}$ tal que sigan la siguiente expresión:

$$Q_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} Q_{i-1,j-1} d_{i-1,j-1} + \frac{1}{2} Q_{i-1,j} d_{i-1,j} & \text{si } j \neq 1, i+1 \\ \frac{1}{2} Q_{i-1,j-1} d_{i-1,j-1} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{1}{2} Q_{i-1,j-1} d_{i-1,j} & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

donde $d_{i,j}$ es como una “función de descuento” para el spread que va entre i y $i+1$ y que se puede definir como:

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + s_{i,j} \Delta t}$$

Esta función de descuento básicamente es básicamente la probabilidad de supervivencia del prestatario y que coincide con la función de descuento en el caso de valorar bonos con tipos de interés. Por tanto, la probabilidad de supervivencia entre $t = i$ y $t = i+1$ se puede definir como:

$$PS(i+1) = \sum_i Q_{i,j} \frac{1}{1 + U(i) \exp(\sigma j \sqrt{\Delta t})}$$

donde $PS(i+1)$ se observa en el mercado. Mediante un algoritmo numérico como Newton-Raphson podemos averiguar $U(i)$ puesto que el resto de variables son conocidas. Una vez tengamos $U(i)$ podemos sustituirlo en la ecuación anterior y tener $s_{i,j}$ tal que se ajuste a la curva observada en el mercado. Siguiendo con el procedimiento tendremos el spread para todo los nodos del árbol binomial. A partir de este árbol podemos calcular un árbol con el valor del préstamo en cada nodo, y en esos mismos nodos se evaluará las diferentes cláusulas del préstamo. En el caso de la opción de prepago, si el spread del nodo mayor que el que se carga en contrato más una penalización, entonces se ejercerá la opción, aunque también podemos verlo a través de los precios del préstamo

en el árbol.

Apéndice 2: Algoritmo para tener elementos fuera de la diagonal mayores que cero.

Cuando averiguamos la matriz generatriz de la matriz de transición tenemos que algunos elementos fuera de la diagonal son menores que cero. Esto no puede suceder ya que para un $t > 0$ lo suficientemente pequeño podemos tener elementos negativos en la matriz de transición. Sin embargo, aunque existan elementos por debajo de cero, éstos son muy pequeños, así que lo que propone Israel et al. (2000) [7] es un algoritmo que suponga estos elementos como cero y reajuste el resto de elementos tal que la suma de cada fila sea igual a cero. El ajuste se llevará ponderando por el valor absoluto de cada elemento de la fila en cuestión.

Para cada fila i vamos a sumar la cantidad de elementos fuera de diagonal que sean negativos, es decir:

$$B_i = \sum_{j \neq i} \max(-\tilde{q}_{i,j}, 0)$$

donde $\tilde{q}_{i,j}$ es el elemento de la matriz (i, j) . Por otro lado, vamos a sumar el valor de todos aquellos elementos positivos y el valor absoluto de la diagonal para la ponderación del exceso recogido en B_i . Esto es:

$$G_i = |\tilde{q}_{i,j}| + \sum_{j \neq i} \max(\tilde{q}_{i,j}, 0)$$

Por tanto, reajustamos sobre los elemento positivos fuera de la diagonal y negativos de la diagonal e igualamos los elementos negativos fuera de la diagonal a cero:

$$\tilde{q}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \tilde{q}_{i,j} < 0 \\ \tilde{q}_{i,j} - B_i |\tilde{q}_{i,j}| / G_i & \text{otherwise si } G_i > 0 \\ \tilde{q}_{i,j} & \text{otherwise si } G_i = 0 \end{cases}$$

Apéndice 3: Diferencia entre PD acumulada y PD implícita en la aplicación de algoritmos de transformación. Caso de JLT.

Supongamos una matriz de transición histórica 3×3 , con dos estados de crédito solvente y uno insolvente, que denominaremos M , donde la primera fila es el rating A , la segunda el B y el tercero la insolvencia, D . De igual manera sucede con las columnas. Así pues, tendríamos la siguiente matriz de transición histórica:

$$M = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que tenemos dos curvas de spreads para los ratings solventes, infiriendo las siguientes probabilidades de ir al estado de insolvencia implícitas entre $t = 0$ y $t = 1$, entre $t = 1$ y t

= 2 y entre $t = 2$ y $t = 3$. Además sabemos las probabilidades de default acumuladas para los tres momentos de tiempo.

PD implícita	t=1	t=2	t=3	PD acumulada	t=1	t=2	t=3
A	0.10	0.08	0.12	A	0.10	0.172	0.271
B	0.15	0.12	0.16	B	0.15	0.252	0.372
D	1	1	1	D	1	1	1

Así pues, podemos calcular mediante la ecuación 3.8 cuál es el cociente entre probabilidades de default, que únicamente la división de la correspondiente PD implícita de mercado con su homólogo histórico.

$\Pi(t)$	t=1	t=2	t=3
A	2	1.6	2.4
B	1.5	1.2	1.6
D	1	1	1

Multiplicamos ahora los elementos fuera de la diagonal por el cociente y ajustamos los de la diagonal tal que la suma de en cada fila sea igual a la unidad. Obtenemos estas matrices:

$$Q(0,1) = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,10 & 0,10 \\ 0,15 & 0,70 & 0,15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q(1,2) = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,08 & 0,08 \\ 0,12 & 0,76 & 0,12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q(2,3) = \begin{bmatrix} 0,76 & 0,12 & 0,12 \\ 0,16 & 0,68 & 0,16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora multiplicaremos las matrices para obtener las acumuladas hasta $t = 2$ y $t = 3$, obteniendo:

$$Q(0,2) = \begin{bmatrix} 0,684 & 0,140 & 0,176 \\ 0,210 & 0,544 & 0,246 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q(0,3) = \begin{bmatrix} 0,544 & 0,177 & 0,281 \\ 0,246 & 0,395 & 0,358 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese como ambas probabilidades acumuladas no son iguales, aunque parecidas. Esta similitud permanece pequeña para los primeros periodos pero comienza a crecer de forma significativa conforme avanza el tiempo.

	t=2	t=2
A	-0.004	0.006
B	-0.009	0.013
D	0	0

Apéndice 4 Otras figuras.

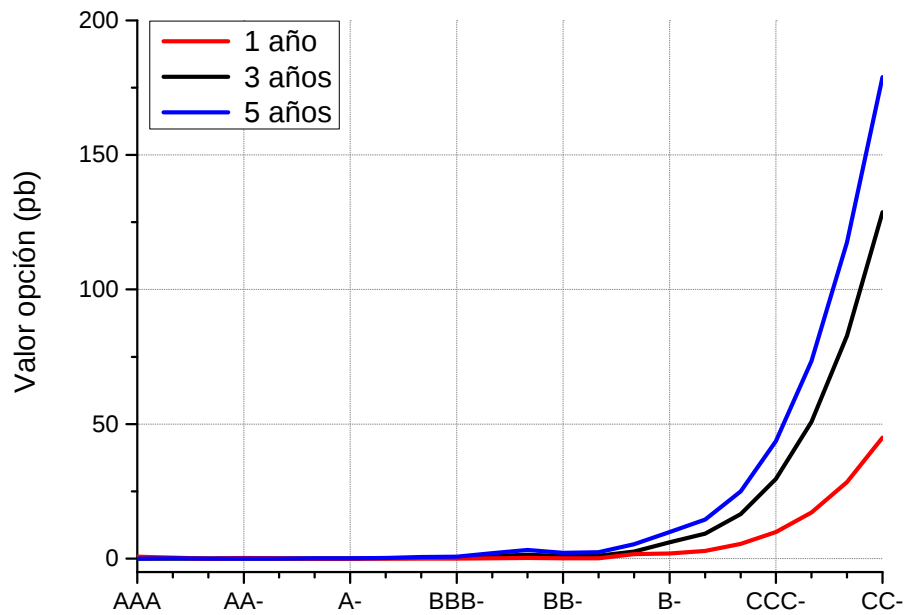


Figura 1: Valor opción en pb para préstamos a 1, 3 y 5 años valorado con el método de las matrices. A mayor vencimiento, mayor es el valor, pero no es debido a una mayor probabilidad de ejercer si no del incremento del error en la transformación de las matrices.

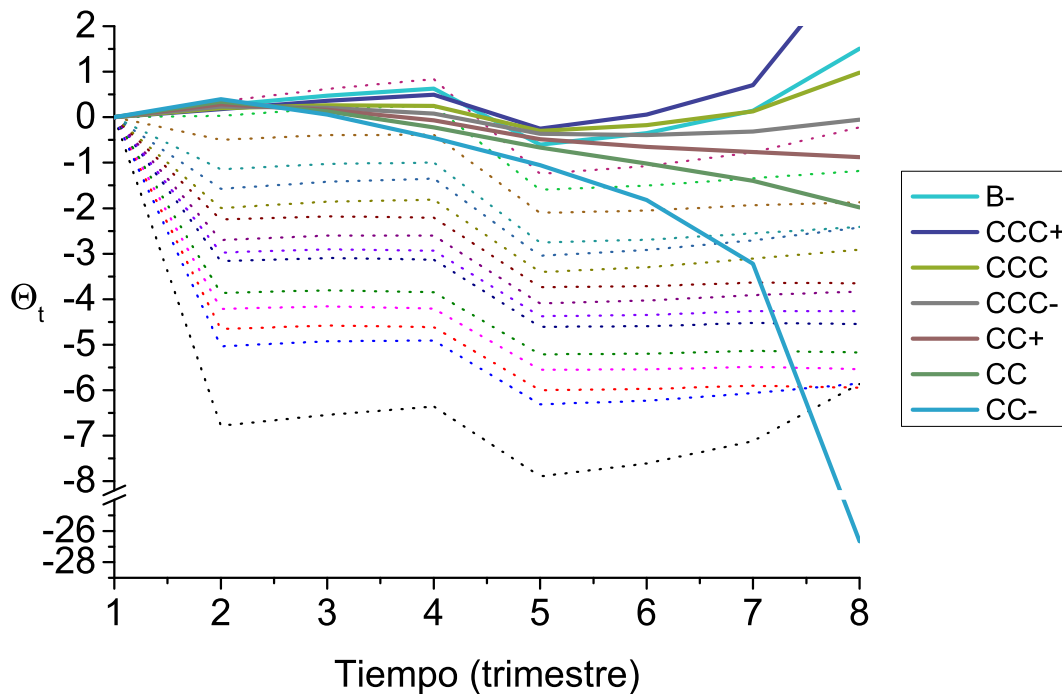


Figura 2: Evolución del exponente del algoritmo LM. Obsérvese la divergencia que se produce para el CC- en el paso de tiempo.