

# **ANALISIS DINAMICO DE CARTERAS DE MINIMA VARIANZA Y LOWER PARTIAL MOMENTS**

**Ausias Fuster**

Trabajo de investigación 005/015

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Ángel León  
Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

# ANALISIS DINAMICO DE CARTERAS DE MINIMA VARIANZA Y LOWER PARTIAL MOMENTS

---

Ausias Fuster

**Tutores:**

Angel Leon & Manuel Moreno

Master in Banking and  
Quantitative Finances



MASTER EN BANCA Y  
FINANZAS CUANTITATIVAS

# INDICE

---

1. INTRODUCCIÓN .....	3
2. DATOS Y ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS.....	4
3. METODOLOGIA.....	7
3.1. Modelos de Volatilidad .....	8
GARCH (1,1).....	8
AGARCH (1,1): .....	9
GJR-GARCH (1,1):.....	9
3.1.1. Distribuciones Univariantes: .....	11
3.1.2. Análisis de los resultados .....	14
3.1.3. Validación de los modelos.....	17
3.2. DCC Cópula-GARCH .....	18
3.2.1 Cópulas .....	20
3.2.2. Análisis de los resultados .....	27
4. CREACION DE CARTERAS.....	30
4.1. Carteras de Mínima Varianza (MV) .....	30
4.2. Cartera de Mínimo momento parcial inferior (LPM) .....	32
4.3. Comparación entre CMV y CLPM .....	33
4.4. Extensión: Carteras LPM de orden 1 y 3 .....	42
5. CONCLUSIONES .....	45
6. APENDICE .....	47
7. BIBLIOGRAFIA .....	51

# 1. INTRODUCCIÓN

---

Este trabajo tiene por objetivo principal analizar el comportamiento de carteras formadas bajo el criterio común de mínima varianza- Harry M. Markowitz (1959) - y mínimo momento parcial inferior - David N. Nawrocki (1991). Estos criterios se aplicaran a una cartera compuesta por renta variable, renta fija y oro, tal y como proponen Craig Rowland & J.M Lawson (2012).

La creación de carteras con los activos propuestos se fundamenta en los supuestos establecidos en la publicación "The Permanent Portfolio" de Craig Rowland & J.M Lawson (2012). Estos autores proponen invertir a partes iguales en renta fija de largo plazo, renta fija de muy corto plazo, renta variable y oro (como activo refugio) con el propósito de obtener una rentabilidad estable y de baja volatilidad en cualquier momento del ciclo económico: prosperidad, inflación, escasez de dinero y deflación. Por otro lado, mantener la misma ponderación de cada activo en la cartera lleva a incurrir, continuamente, en costes de transacción por lo que los autores proponen rebalancear la cartera cada cierto tiempo.

En este trabajo se van a formar carteras compuestas por los activos propuestos por Craig Rowland & J.M Lawson (2012) con la excepción de la renta fija de muy corto plazo. Ello se debe a dos motivos:

1. Al tener una baja duración, no son tan sensibles a cambios en los tipos de interés. Por tanto, a la hora de analizar las correlaciones cambiantes en el tiempo es preferible observar estas cuando involucran a activos de distinta naturaleza y, obviamente, los títulos de renta fija de muy corto plazo están menos afectados por los tipos de interés que los de muy largo plazo.
2. Por otro lado, los títulos de renta fija a muy corto plazo suelen tener muy baja volatilidad en comparación con los demás activos por lo que, presumiblemente, ponderarían en un porcentaje muy alto tanto en la cartera de MV como en la de LPM.

A continuación se muestra un breve resumen de los apartados de este estudio: En el apartado dos, datos y estadísticos muestrales, se exponen los datos utilizados, se hace un estudio de su autocorrelación y se hace explícito el proceso que siguen las rentabilidades. El tercer apartado se subdivide en dos apartados, en el primero de ellos se estudian distintos modelos de volatilidad con el objetivo de seleccionar aquel que modela de forma más verosímil la varianza condicional de las innovaciones de los activos propuestos. En el segundo subapartado se modelan las correlaciones condicionales entre los activos a partir de un modelo DCC-GARCH haciendo uso de cópulas. En el apartado cuarto se forman, con los activos propuestos, carteras dinámicas de mínima varianza y de mínimo momento parcial inferior, adicionalmente, se construyen las carteras de ponderaciones constantes bajo ambos criterios. Por último, se establece una comparación entre ellas junto con una cartera equiponderada y un índice de renta variable. Las conclusiones de este trabajo de investigación se muestran en el apartado cinco.

## 2. DATOS Y ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS

---

A continuación, y conforme a lo expuesto en el punto anterior, se van a concretar los activos que se han utilizado para el estudio:

Renta Fija: Para el caso de la renta fija se ha utilizado el tipo de interés “US TREASURY CONST MAT 30 YEAR”. A partir del mismo se ha derivado el precio de un bono teórico cupón cero a 30 años con un valor nominal de 100\$. De esta manera tenemos una serie temporal para el activo de renta fija con la mayor sensibilidad posible a tipos de interés, dado que es el vencimiento más largo de la ETTI en US.

Renta Variable: Para Renta Variable se ha utilizado como activo el índice S&P500 por ser el más conocido del mercado US (S&P 500 COMPOSITE - PRICE INDEX (U\$)). Dicho Índice será utilizado posteriormente, como una cartera de renta variable con la que comparar las carteras de mínima varianza y mínimo momento parcial inferior.

Activo Refugio: En el caso del activo refugio no hay lugar a dudas de que el Oro es el más representativo. Para el estudio se ha utilizado el precio de la onza de Oro (Gold Bullion LBM U\$/Troy Ounce).

Qué todos los activos pertenezcan al mercado de EE.UU. permite disponer de series temporales más largas, lo cual posibilita observar en un horizonte mayor la evolución y desempeño de las carteras, así como de las correlaciones entre los diferentes activos que las componen.

Por otro lado, las series temporales se basan en datos semanales desde el 16/2/1977 hasta el 10/12/2014. Se ha elegido esta frecuencia para eliminar el “ruido” redundante de una serie temporal diaria y para poder disponer de una cantidad suficiente de datos frente a lo que supondría escoger una frecuencia mensual. Sin embargo, las carteras se rebalanciarán mensualmente para minimizar el efecto de los costes de transacción, si bien, estos no se han tenido en cuenta ya que el objetivo principal de este estudio es la comparación entre los criterios de mínima varianza y mínimo momento parcial inferior.

Con los datos obtenidos se calculan las rentabilidades logarítmicas de las tres series temporales y se observa el grado de correlación lineal y de rangos (Kendall y Spearman) que existe entre ellos para tener una primera impresión de la correlación existente entre los activos que formaran la cartera:

	C.Lineal	C. Kendall	C. Spearman
S&P 500 - Oro	0,06047	0,01948	0,02908
S&P 500 - Bono 30y	0,10301	0,07987	0,11401
Bono 30y - Oro	0,04942	-0,00043	-0,00052

Tabla 1

Las correlaciones calculadas en la Tabla 1 muestran que la correlación entre los activos es muy baja, lo que se podría esperar dada la distinta naturaleza de los activos analizados. Esto nos indica que una cartera formada por los mismos estaría bien diversificada.

A continuación, para una óptima modelización de las varianzas y correlaciones cambiantes en el tiempo, se va a analizar la existencia, o no, de autocorrelación parcial en rentabilidades y rentabilidades al cuadrado.

El estudio de la autocorrelación parcial de las rentabilidades y rentabilidades al cuadrado nos permitirá determinar si la distribución de rentabilidades es dependiente en el tiempo:

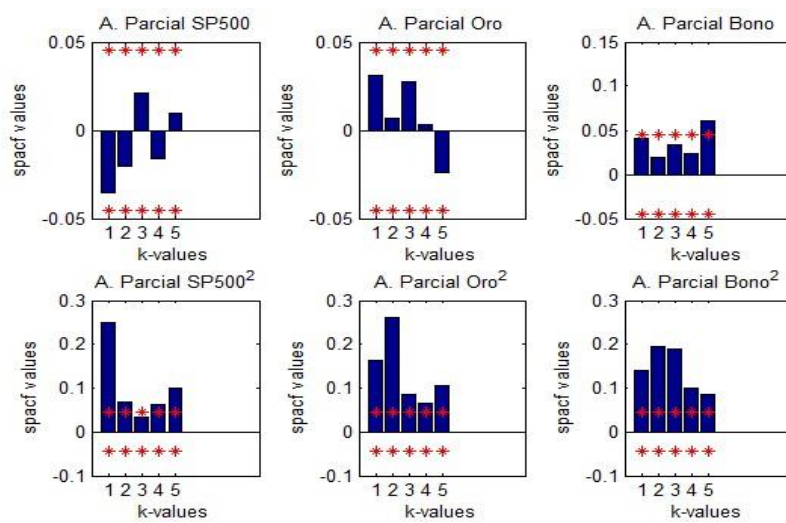


Figura 1

De la Figura 1 se puede afirmar que tanto las rentabilidades del S&P500 como las del Oro no muestran dependencia en el tiempo, mientras que el Bono 30y muestra autocorrelación parcial en el quinto retardo. Sin embargo, para la modelización de la rentabilidad supondremos que dicho retardo no influye.

En cuanto a las rentabilidades al cuadrado, se observan retardos significativos en los tres activos, lo que sugiere la existencia de dependencia en la evolución temporal de la varianza. Es decir, la distribución de probabilidad de las rentabilidades es dependiente en el tiempo a través de sus segundos momentos, lo que significa que no es constante en el tiempo.

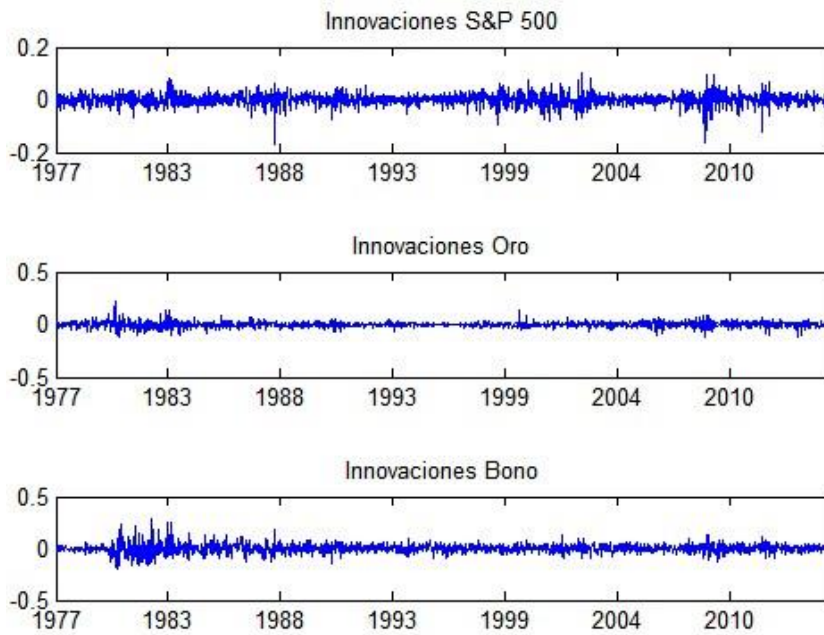


Figura 2

Observando la Figura 2 podemos concluir que efectivamente la volatilidad no es constante en el tiempo y que tanto en el S&P 500, como en el Oro y el Bono 30y, se alternan periodos de alta volatilidad con periodos de menor volatilidad. Dicho esto, queda justificado el uso de la modelización de la volatilidad como un estadístico que cambia en el tiempo. Por otra parte, y a tenor de lo que muestran los gráficos, sí que podemos afirmar que la media muestral de las rentabilidades de los tres activos es un estadístico constante a lo largo del tiempo.

Con todo lo dicho anteriormente concluimos que las rentabilidades de los tres activos (S&P500, Oro y el Bono teórico a 30 años) se determinan mediante el siguiente proceso al tener, todos ellos, retardos no significativos en la frecuencia temporal objeto de estudio (semanal):

$$r_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$$

Donde la innovación:

$$\varepsilon_{it} = z_{it}\sigma_{it}$$

### 3. METODOLOGIA

---

En este apartado se van a construir las series temporales de varianzas y correlaciones condicionales. En el caso de las varianzas condicionales se aplicaran y compararan tres modelos GARCH comúnmente utilizados: El modelo GARCH introducido por Bollerslev (1986), el modelo GARCH asimétrico, AGARCH, introducido por Engle (1990) y el modelo GJR-GARCH introducido por Glosten, Jagannathan and Runkle (1993). En cada uno de ellos se utilizaran las siguientes distribuciones estadísticas: Normal, t-Student, t-Student asimétrica y una mixtura de dos normales. Posteriormente, estandarizaremos las innovaciones con las series temporales de varianza condicional obtenidas a partir del modelo de volatilidad que mayores valores alcance en la función de log-verosimilitud y menores valores en los estadísticos AIC y BIC.

Una vez obtenidas las varianzas condicionales de cada uno de los tres activos, y por tanto, las innovaciones estandarizadas, se pasa a calcular las correlaciones condicionales, dos a dos. Para ello, se va a utilizar un modelo DCC Cópula-GARCH, en el que se mantiene la estructura de covarianzas condicionales de un DCC-GARCH, tal y como propone Engle (2002), pero maximizando la log-verosimilitud de una densidad de cópula.

**Método de estimación:** Como hemos visto, la obtención de varianzas condicionales y correlaciones condicionales se realiza por etapas. En la primera de ellas, se estiman los parámetros de los GARCH univariantes junto con los de la función de distribución de cada innovación. Estos parámetros se han estimado separadamente de los parámetros del DCC Cópula-GARCH, tal y como se propone en el estudio de Claudia Czado, Ran Zhang and Aleskey Min (2009). Esto es lo que se conoce como Inferencia en el Margen (IFM). Es decir, la estimación se realiza por etapas: En la primera se hallan las varianzas condicionales mientras que en la segunda se obtienen las correlaciones condicionales.

$$ETAPA 1 \quad \hat{\theta}_i = \arg \max \ell_{marginal}(\theta_i; \varepsilon_i)$$

Donde  $\varepsilon_i$  son las innovaciones y  $\theta_i$  son los parámetros del modelo GARCH (AGARCH o GJR-GARCH) univariante y de la función de distribución de las innovaciones, los cuales, han sido estimados simultáneamente mediante maximización de la función de log-verosimilitud.

Seguidamente se realiza la segunda etapa, de donde se estimaran los parámetros de la cópula y del DCC GARCH ( $\theta_{ij}$ ) simultáneamente, maximizando la función de log-verosimilitud de densidad de cópula:

$$ETAPA 2 \quad \hat{\theta}_{ij} = \arg \max \ell_{copula}(\theta_{ij}; z_i, z_j)$$

Donde " $z_i$ " y " $z_j$ " son las innovaciones estandarizadas.



### 3.1. Modelos de Volatilidad

---

Antes de modelar la volatilidad se debe hacer un supuesto acerca de la función de distribución que sigue cada innovación. En este trabajo, al igual que en el estudio de Carol Alexander and Emese Lazar (2004), se ha estudiado el desempeño de tres modelos de volatilidad (GARCH, AGARCH Y GJR-GARCH) en los que en cada uno de ellos se ha supuesto cuatro distribuciones distintas (Normal Estándar, t-Student, t-Student Asimétrica y Mixtura de Normales).

En dicho trabajo se ponían a prueba combinaciones de estas distribuciones y modelos de volatilidad sobre las innovaciones, en frecuencia diaria, de varios índices bursátiles. Los resultados mostraban que, en base al criterio de log-verosimilitud, la distribución que mejor se adaptaba a los datos era la mixtura de normales seguida de la t-Student asimétrica. Por otro lado, se demostraba la superioridad de los modelos GARCH asimétricos (AGARCH y GJR-GARCH) frente al modelo GARCH.

En este trabajo, se analizarán estos modelos con respecto a los tres activos que forman la cartera: S&P500, Oro y Bono a 30 años. Sin embargo, aquí se han utilizado datos en frecuencia semanal por lo que el objetivo en este apartado es doble: Por un lado se hallarán los mejores modelos, de entre los ya citados, que mejor se adaptan a nuestros activos a la vez que se verifica si los resultados obtenidos por Carol Alexander and Emese Lazar (2004) son aplicables a datos en frecuencia semanal, es decir, si la curtosis y asimetría de los datos diarios que tan bien recoge la mixtura de normales está presente en datos de frecuencia semanal.

A continuación se detallan los modelos utilizados:

**GARCH (1,1):** Este modelo (Generalized AutoRegressive Condiitonal Heteroskedasticity), introducido por Bollerslev (1986) determina la varianza condicional a partir de la innovación previa y la propia varianza condicional del periodo anterior. Además, permite que la varianza condicional revierta a un valor de largo plazo.

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha\varepsilon_t^2$$

El parámetro  $\beta$  mide la incidencia de las varianzas condicionales previas en la varianza condicional del periodo actual. Por otro lado, el parámetro  $\alpha$  mide la influencia de los shocks pasados en la volatilidad condicional del periodo actual. Por último, el parámetro  $\omega_i = \gamma_i \sigma_{i,LP}^2$  se compone de la varianza de largo plazo a la que revierte la varianza condicional y de su coeficiente de ponderación.

En un modelo GARCH, para que la varianza condicional sea positiva se requiere de las siguientes restricciones:

$$\omega > 0; \quad \alpha > 0; \quad \beta \geq 0; \quad \beta + \alpha < 1.$$

A partir de la estimación de los parámetros  $\alpha, \beta, \omega$  se obtiene la varianza de largo plazo ( $\sigma_{LP}^2$ ) a la que revierte la varianza condicional así como su coeficiente ( $\gamma$ ).

$$\omega = \gamma \sigma_{LP}^2$$

$$\gamma = (1 - \beta - \alpha)$$

$$\sigma_{LP}^2 = \frac{\omega}{(1 - \beta - \alpha)}$$

**AGARCH (1,1):** El modelo AGARCH, introducido por Engle (1990) es la versión asimétrica del modelo anterior. Su peculiaridad reside en la intención de recoger de un modo más apropiado la asimetría de las innovaciones mediante el parámetro  $\lambda$ . Cuando dicho parámetro es igual a cero este modelo es igual al anterior.

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta \sigma_t^2 + \alpha (\varepsilon_t - \lambda)^2$$

Con respecto al modelo anterior, el modelo AGARCH incluye el parámetro  $\lambda$ . Si este parámetro toma valores positivos significa que la volatilidad futura será más elevada ante shocks (innovaciones) negativos que positivos, ambos de la misma proporción.

En este modelo las restricciones para que la varianza condicional sea positiva son las mismas:

$$\omega > 0; \quad \alpha > 0; \quad \beta \geq 0; \quad \beta + \alpha < 1$$

Sin embargo, la varianza de largo plazo se calcula de manera diferente:

$$\omega = \gamma \sigma_{LP}^2 - \alpha \lambda^2$$

$$\gamma = (1 - \beta - \alpha)$$

$$\sigma_{LP}^2 = \frac{\omega + \alpha \lambda^2}{(1 - \beta - \alpha)}$$

**GJR-GARCH (1,1):** Por último, el modelo GARCH de Glosten, Jagannathan and Runkle (1993), permite una respuesta de la volatilidad distinta según si los shocks son negativos o positivos. Es decir, la varianza condicional responde de manera diferente según si las innovaciones pasadas han sido positivas o negativas. Dicha diferencia se encuentra determinada por el parámetro  $\lambda$ . Este modelo, al igual que el anterior, incluye como caso particular el modelo GARCH cuando  $\lambda = 0$ .

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha\varepsilon_t^2 + \lambda\varepsilon_t^2 d_t^-$$

$$d_t^- = \begin{cases} 1, & \varepsilon_t < 0 \\ 0, & \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

De igual manera a los modelos anteriores se imponen las siguientes restricciones:

$$\omega > 0; \quad \alpha > 0; \quad \beta \geq 0; \quad \beta + \alpha < 1.$$

En este caso, la varianza incondicional es:

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma o_{LP}^2 \\ \gamma &= \left(1 - \beta - \alpha - \frac{\lambda}{2}\right) \\ o_{LP}^2 &= \frac{\omega}{\left(1 - \beta - \alpha - \frac{\lambda}{2}\right)} \end{aligned}$$

En este modelo el significado del parámetro  $\lambda$  tiene la misma interpretación que en el modelo anterior, es decir, cuando este parámetro toma valores positivos los shocks negativos hacen incrementar la varianza condicional en mayor proporción que los shocks positivos.

Notar que en cada uno de los modelos de volatilidad, para iniciar el proceso, se ha tomado como primera observación de la varianza condicional la varianza muestral. Es decir,  $\sigma_{i1}^2 = Var(\varepsilon_i)$

Para la estimación de los parámetros de cada modelo se ha utilizado el procedimiento de maximización de la función de log-verosimilitud de la función de densidad. Como se ha expuesto anteriormente, se han utilizada en cada modelo de volatilidad las siguientes distribuciones: Normal estandarizada, t-Student, t-Student asimétrica y Mixtura de Normales.

### 3.1.1. Distribuciones Univariantes:

A continuación se exponen las distribuciones utilizadas así como las funciones de log-verosimilitud que se han maximizado respectivamente:

**Normal Estandarizada:** La distribución normal estandarizada es la más comúnmente utilizada en los modelos de volatilidad GARCH. Sin embargo, no recoge la leptocurtosis que las series temporales de rendimientos suelen tener, sobretodo, en altas frecuencias.

Función de densidad:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}$$

$$z = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Función de log-verosimilitud:

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln[2\pi] + \ln[\sigma_t^2] + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right)$$

**t-Student:** La distribución t-Student permite recoger el efecto de colas pesadas (leptocurtosis) que la distribución normal no permite recoger. Este efecto se determina por el valor del parámetro  $\nu$  (grados de libertad), un valor menor de este parámetro significa que las colas de la distribución son más pesadas. Cuando este parámetro tiende a infinito se obtiene la distribución normal.

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\nu-2)\sigma^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}$$

Función de log-verosimilitud:

$$\ln L = \ln \left[ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \right] - \ln \left[ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right] - 0.5 \ln [\pi(\nu-2)] - 0.5 \left( \sum_{t=1}^T \ln[\sigma_t^2] + (\nu+1) \ln \left[ 1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2(\nu-2)} \right] \right)$$

Donde  $\Gamma$  es la función gamma y  $\nu$  son los grados de libertad. Este último parámetro queda restringido por los siguientes valores:

$$2 < \nu \leq \infty$$

**t-Student Asimétrica:** La versión asimétrica de la distribución t-Student, introducida por Hansen (1994), considera la asimetría de las series financieras. Dicha asimetría queda recogida por el parámetro  $\lambda$ , de manera que si  $\lambda > 0$  existe asimetría hacia la derecha y viceversa, cuando  $\lambda < 0$  la variable es asimétrica por la izquierda.

Función de densidad:

$$f(z) = \begin{cases} bc \left( 1 + \frac{1}{v-2} \left( \frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} & z < -\frac{a}{b} \\ bc \left( 1 + \frac{1}{v-2} \left( \frac{bz+a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} & z \geq -\frac{a}{b} \end{cases}$$

$$z = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$a = 4\lambda c \left( \frac{v-2}{v-1} \right)$$

$$b^2 = 1 + 3\lambda^2 + a^2$$

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{\pi(v-2)}}$$

Función de log-verosimilitud:

$$\ln L = \sum_{i=1}^I \left( \ln[b] + \ln[c] - \left(\frac{v+1}{2}\right) \ln \left[ 1 + \left(\frac{1}{v-2}\right) \left(\frac{bz_i+a}{1+\lambda}\right)^2 \right] \right) \\ + \sum_{j=1}^J \left( \ln[b] + \ln[c] - \left(\frac{v+1}{2}\right) \ln \left[ 1 + \left(\frac{1}{v-2}\right) \left(\frac{bz_j+a}{1-\lambda}\right)^2 \right] \right) - 0.5 \sum_{t=1}^T \ln[\sigma_t^2]$$

$$z = \begin{cases} z_i, & z_t \geq -a/b \\ z_j, & z_t < -a/b \end{cases}$$

Donde  $\Gamma$  es la función gamma y  $v$  son los grados de libertad. Los grados de libertad están acotados por los mismos valores que en el caso de la t-Student:

$$2 < v \leq \infty$$

Por otra parte,  $\lambda$  es el parámetro de asimetría y cuando este toma un valor igual a 0 se obtiene la distribución t-Student simétrica.

**Mixtura de Normales:** Al igual que la distribución anterior, la mixtura de normales trata de recoger altos grados de asimetría y curtosis (por encima de lo que una distribución t-Student permite recoger). En este trabajo se ha utilizado una mixtura de dos distribuciones normales.

Función de densidad:

$$f(x) = p f_1(x; \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - p) f_2(x; \mu_2, \sigma_2^2)$$

Donde  $p$  es el parámetro de probabilidad de la mixtura y  $f_i(x; \mu_i, \sigma_i^2)$  es una función de densidad Normal:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Función de log-verosimilitud:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln \left( p \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1t}^2}} \right) \cdot \exp\left\{-0.5 \left( \frac{\varepsilon_t - \mu_1}{\sigma_{1t}^2} \right)^2\right\} + (1 - p) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2t}^2}} \right) \cdot \exp\left\{-0.5 \left( \frac{\varepsilon_t - \mu_2}{\sigma_{2t}^2} \right)^2\right\} \right)$$

Donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son la media de cada una de las dos distribuciones normales que componen la mixtura y,  $\sigma_{1t}^2$  y  $\sigma_{2t}^2$  son las varianzas condicionales de cada una de las dos distribuciones normales que componen la mixtura. Es decir, bajo esta distribución se calculan las varianzas condicionales  $\sigma_{1t}^2$  y  $\sigma_{2t}^2$  a partir de un modelo de volatilidad para cada una de ellas (GARCH, AGARCH o GJR-GARCH). Finalmente, la varianza condicional total de la mixtura de normales queda definida por la siguiente ecuación (Véase Carol Alexander and Emese Lazar (2004)):

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^2 p_i \sigma_{it}^2 + \sum_{i=1}^2 p_i \mu_i^2$$

Donde cada  $\sigma_{it}^2$  sigue un modelo de volatilidad como los anteriormente propuestos

A partir de la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidad utilizados determinamos la serie temporal de varianzas condicionales de cada activo. Ello nos permite estandarizar las innovaciones ( $z_{it} = \varepsilon_{it}/\sigma_{it}$ ), lo cual será necesario para el cálculo posterior de la correlación.

### 3.1.2. Análisis de los resultados

	S&P 500			Oro			Bono 30y		
	<i>LL</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>LL</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>LL</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
<b><i>GARCH-T</i></b>	6648.4	-13288.9	-13266.5	6484.6	-12961.3	-12938.9	5543.0	-11078.0	-11055.7
<b><i>GARCH-N</i></b>	4834.3	-9662.7	-9645.9	4660.6	-9315.3	-9298.5	3733.6	-7461.3	-7444.5
<b><i>GARCH-MIX</i></b>	3084.5	-6150.9	-6100.7	2953.9	-5889.8	-5839.6	1949.0	-3880.0	-3829.7
<b><i>GARCH-sT</i></b>	4924.7	-9839.3	-9811.4	4764.6	-9519.1	-9491.2	3757.3	-7504.5	-7476.6
<b><i>AGARCH-T</i></b>	6716.0	-13421.9	-13394.0	6517.4	-13024.7	-12996.8	5558.1	-11106.2	-11078.2
<b><i>AGARCH</i></b>	4906.5	-9804.9	-9782.6	4702.3	-9396.5	-9374.2	3749.4	-7490.8	-7468.5
<b><i>AGARCH-MIX</i></b>	3157.9	-6293.9	-6232.4	2946.0	-5870.0	-5808.6	1949.6	-3877.2	-3815.8
<b><i>AGARCH-sT</i></b>	4965.7	-9919.4	-9885.8	4788.4	-9564.8	-9531.3	3768.0	-7524.0	-7490.5
<b><i>GJR-GARCH-T</i></b>	6711.9	-13413.8	-13385.8	6511.4	-13012.8	-12984.9	5558.2	-11106.5	-11078.6
<b><i>GJR-GARCH</i></b>	4902.5	-9797.0	-9774.6	4696.7	-9385.4	-9363.1	3749.6	-7491.2	-7468.8
<b><i>GJR-GARCH-MIX</i></b>	3138.1	-6254.2	-6192.7	2967.4	-5912.7	-5851.3	1950.0	-3878.0	-3816.6
<b><i>GJR-GARCH-sT</i></b>	4960.2	-9908.3	-9874.8	4778.6	-9545.1	-9511.6	3767.8	-7523.7	-7490.1

Tabla 2

La tabla anterior tiene por objetivo determinar cuál de los modelos de volatilidad empleados es el que mejor se ajusta a la naturaleza de los datos. Para ello, se han los siguientes criterios: El valor de la función de log-verosimilitud, el estadístico AIC y el estadístico BIC. Tanto en el estadístico AIC como en el BIC se tienen en cuenta todos los parámetros estimados, es decir, los correspondientes al modelo de volatilidad (GARCH, AGARCH y GJR-GARCH) y los de la distribución estadística empleada.

A continuación se enumeran las conclusiones:

1. De entre los modelos de volatilidad empleados, el que peor se ajusta a los datos es el GARCH, de lo que se asume que ello se debe a que este modelo no permite recoger la asimetría inherente a los datos financieros. Por otro lado, en términos generales el modelo AGARCH parece ajustarse mejor a los datos que el modelo GJR-GARCH, sin embargo, ello depende de la distribución elegida y del activo en cuestión.

2. La mixtura de normales es, con diferencia, la distribución que peor se ajusta los tres modelos de volatilidad empleados, al contrario de las conclusiones que se extraen en el trabajo de Carol Alexander and Emese Lazar (2004). La diferencia entre ambos trabajos reside, además de los activos utilizados, en la frecuencia en la que los datos han sido registrados. Mientras que en dicho estudio la frecuencia de los datos es diaria, en este estudio se ha trabajado sobre datos de frecuencia semanal, lo que redundo en una menor asimetría y curtosis, por lo que presumiblemente este sea el motivo por el cual la mixtura de normales proporciona resultados tan decepcionantes a la hora de modelar las innovaciones estandarizadas.

3. En cualquiera de los modelos de volatilidad, se observa una gran superioridad de la distribución t-Student frente a las demás distribuciones, por lo que esta será la distribución elegida para modelar las innovaciones estandarizadas. Seguida de ella se encuentra la distribución t-Student Asimétrica y a poca distancia la distribución Normal Estandarizada. De ello concluimos que, en frecuencia semanal, los datos no tienen excesiva asimetría ni curtosis, de lo contrario, distribuciones como la t-Student Asimétrica o la Mixtura de Normales obtendrían mejores resultados en base a los criterios elegidos para determinar cuál de todas las distribuciones modela de forma más verosímil los datos.

4. Finalmente, observamos que tanto para el S&P 500 como para el Oro, el modelo de volatilidad que mejor modela sus innovaciones estandarizadas es el AGARCH con distribución t-Student. Se observa, que este modelo de volatilidad es el que obtiene un mayor valor de la función de log-verosimilitud y un menor valor en los estadísticos AIC y BIC. En el caso del Bono a 30 años, el modelo con mejor desempeño es el GJR-GARCH con distribución t-Student (notar que el modelo AGARCH t-Student obtiene resultados muy similares, pero inferiores).

En Figura 3 se observa la evolución de la volatilidad condicional de los tres activos en base al modelo de volatilidad escogido:



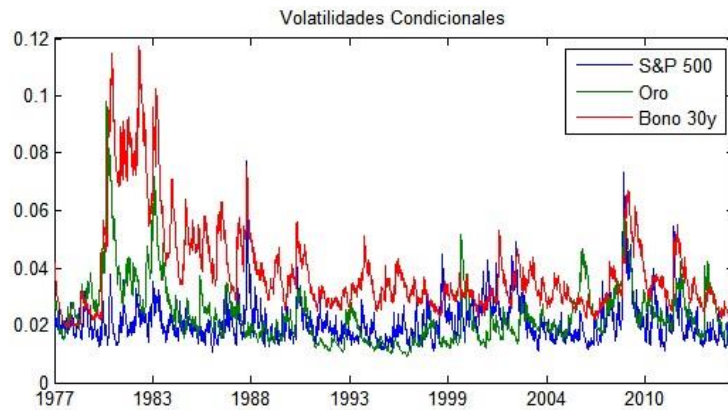


Figura 3

Sorprendentemente el activo con una mayor volatilidad condicional, a lo largo del horizonte temporal estudiado, es el activo de renta fija, es decir, el Bono a 30 años. El hecho de que sea un bono con un vencimiento tan largo, y por ende, con una alta duración (muy sensible a las variaciones en los tipos de interés) debe ser la causa de su alta volatilidad.

Los parámetros estimados de los modelos de volatilidad empleados quedan recogidos en la Tabla 3, la cual se muestra a continuación:

Parámetros	S&P500	Oro	Bono 30y
$\alpha$	0.136046***	0,104713***	0,084383***
$\beta$	0.768341***	0,881178***	0,895064***
$\omega$	0.000016***	0,000007***	0,000025***
$\lambda$	0.015074***	-0,006622***	0,013027***
$\nu$	300	104,4	300,0
$\gamma$	0.095612	0,014108	0,01404
$\sigma_{LP}^2$	0.00049	0,00079	0,00176

\*: Indica la significatividad del parámetro en base al p-valor del estadístico t. \* Parámetro significativo al 1% ; \*\* Parámetro significativo al 5%; \*\*\* Parametro significativo al 10%

Tabla 3

En la estimación del parámetro  $\nu$  se ha impuesto una cota superior, la cual se satura tanto en el caso del S&P 500 como en el Bono a 30 años, probablemente esta sea la razón tras la cual resulta no ser significativo dicho parámetro. A pesar de ello, la distribución t-Student es la que proporciona valores mayores en la función de log-verosimilitud y menores valores de los estadísticos AIC y BIC. Como se ha comentado anteriormente, cuando  $\nu \rightarrow \infty$  la distribución t-Student converge a la distribución Normal, por lo que se puede presuponer que el valor tan alto del parámetro 'grados de libertad' se debe a la escasa curtosis de las series temporales analizadas. Por otro lado, en base a los valores de los parámetros estimados, se observa como la varianza condicional de la renta variable (S&P500) converge más rápidamente a su varianza de largo plazo. Además, es la varianza condicional del S&P500 la que más afectada esta por los shocks ocurridos en periodos anteriores. Por el contrario, es la varianza condicional del Bono a 30 años la que más lentamente converge a su varianza de largo plazo así como la menos afectada por los shocks pasados.

### 3.1.3. Validación de los modelos

Una vez obtenidas las varianzas condicionales se ha de validar si han sido modeladas correctamente por los modelos de volatilidad seleccionados para cada activo. Para ello, se ha utilizado el estadístico Ljung-Box.

Puesto que hemos pretendido recoger los cambios en volatilidad a lo largo del tiempo no debería existir autocorrelación entre las innovaciones estandarizadas al cuadrado, ya que al corregir las innovaciones del efecto de la volatilidad la autocorrelación debería desaparecer.

La validación consiste en afirmar que los modelos seleccionados recogen de manera correcta la evolución de la varianza, para lo que se hará uso del contraste Ljung-Box, el cual, se define a continuación:

$$q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\rho_k^2}{n - k}$$

$H_0$ : Datos se distribuyen independientemente

$H_1$ : Los datos no se distribuyen de manera independiente

Donde "n" es el tamaño de la muestra y " $\rho_k$ " es la autocorrelación de la muestra en el retardo k, y "h" es el número de retardos.

Aplicando este estadístico a las innovaciones estandarizadas al cuadrado obtenemos el resultado esperado, es decir, se cumple la hipótesis nula en los modelos de volatilidad empleados: AGARCH-T y GJR-GARCH-T.

Un procedimiento adicional para comprobar que la modelización de la varianza condicional ha sido correcta consiste en observar directamente los autocorrelogramas de las innovaciones estandarizadas al cuadrado, tal y como se muestra a continuación:

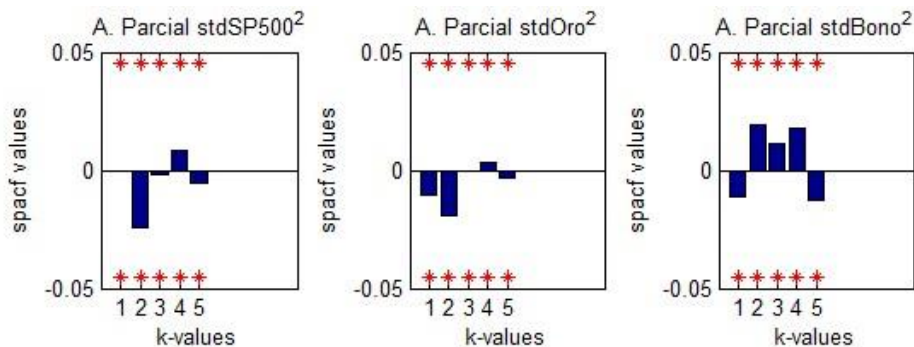


Figura 4

De esta manera se reafirma el resultado obtenido por el estadístico Ljung-Box. Es decir, las innovaciones estandarizadas al cuadrado no muestran retardos significativos en base a los autocorrelogramas mostrados (los datos se distribuyen independientemente).

## 3.2. DCC Cópula-GARCH

---

Una vez obtenidas las varianzas condicionales pasamos a calcular las correlaciones cambiantes en el tiempo mediante un modelo DCC Cópula-GARCH. En la literatura financiera existen varias alternativas para el cálculo de la correlación condicional. El DCC-GARCH propuesto por Engle (2002) supone una distribución elíptica multivariante, como por ejemplo una distribución normal o t-Student. Valdesogo (2008) propone utilizar el modelo DCC-GARCH con cópulas, obteniendo el parámetro de la cópula a partir de la correlación condicional mediante su relación con el tau de kendall. Sin embargo, este método presenta problemas en el uso de cópulas dependientes de más de un parámetro o en las cópulas sin relación directa entre el parámetro y el tau de kendall. Patton (2006) propone modelar el parámetro de cópula cambiante en el tiempo. No obstante, para obtener la correlación condicional mediante el parámetro de cópula se incurren en los mismos problemas que en el método propuesto por Valdesogo (2008).

Aquí se propone un modelo DCC Cópula-GARCH, en el que la matriz de covarianzas y la correlación condicional se determinan de la misma manera a la propuesta por Engle (2002). Sin embargo, aquí utilizamos densidades de cópulas estáticas en el sentido de que el parámetro de la cópula no cambia en el tiempo, al contrario de lo que sugieren Engle (2002), Valdesogo (2008) y Patton (2006). Ello nos permite obtener la correlación condicional entre activos haciendo uso de cópulas, tanto implícitas como arquimedias.

Cabe señalar que la determinación de las correlaciones cambiantes en el tiempo a través del modelo propuesto es un proceso por etapas:

1. En una primera etapa, se calculan las varianzas condicionales en el tiempo mediante un modelo de volatilidad (GARCH, AGARCH, GJR-GARCH), tal y como se ha realizado en el apartado “3.1. Modelos de Volatilidad” de este trabajo.
2. En la segunda etapa, se calculan las correlaciones cambiantes en el tiempo mediante el modelo DCC Cópula-GARCH. En esta etapa se estiman, conjuntamente, los parámetros del DCC-GARCH ( $\alpha, \beta, \rho_{ij,LP}$ ) junto con los parámetros de cópula.

Al haber estandarizado las innovaciones, estas tendrán media igual a cero y varianza igual a uno, por lo que la covarianza condicional entre las innovaciones estandarizadas ( $z_{it}$  y  $z_{jt}$ ) coincide con la correlación condicional de las innovaciones:

$$E_t(z_{i,t+1}z_{j,t+1}) = E_t\left(\frac{\varepsilon_{i,t+1}\varepsilon_{j,t+1}}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}}\right) = \frac{E_t(\varepsilon_{i,t+1}\varepsilon_{j,t+1})}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}} = \frac{\sigma_{ij,t+1}}{\sigma_{i,t+1}\sigma_{j,t+1}} = \rho_{ij,t+1}$$

Para calcular la correlación condicional mediante DCC Cópula-GARCH debemos hacer uso de las innovaciones estandarizadas calculadas previamente ( $z_{i,t}$ ), así como de las variables

auxiliares  $q_{ij,t+1}$ , las cuales juegan el papel de varianzas y covarianzas condicionales de las innovaciones estandarizadas. Este modelo queda formalizado de la siguiente manera:

$$q_{ij,t+1} = \rho_{ij,LP} + \beta(q_{ij,t} - \rho_{ij,LP}) + \alpha(z_{i,t}z_{j,t} - \rho_{ij,LP}) \quad \forall t = 0, \dots, n$$

Anteriormente, se ha expuesto que la covarianza de las innovaciones estandarizadas ( $q_{ij,t}$ ) coincide con la correlación condicional de las innovaciones ( $\rho_{ij,t}$ ). Sin embargo, para poder garantizar que dicha correlación se encuentre en el intervalo (-1,1) se debe calcular adicionalmente las varianzas condicionales de las innovaciones estandarizadas:

$$q_{ii,t+1} = 1 + \beta(q_{ii,t} - 1) + \alpha(z_{ii,t}^2 - 1) \quad \forall t = 0, \dots, n$$

Donde se ha supuesto  $\rho_{ii,LP} = \rho_{jj,LP} = \rho_{ii,0} = \rho_{jj,0} = Var(z_i) = 1$ . Es decir, tanto la varianza de largo plazo al que revierten las varianzas condicionales de las innovaciones estandarizadas, como la primera observación de las mismas, se ha supuesto que es igual a la varianza muestral (la varianza muestral de las innovaciones estandarizadas es igual a uno).

De igual manera, se ha tomado como primera observación de la covarianza condicional, la covarianza muestral de las innovaciones estandarizadas:  $q_{ji,0} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (z_{i,n} z_{j,n})$ .

Este procedimiento, al igual que en la modelación de las volatilidades condicionales del apartado anterior, nos permite iniciar el modelo desde la primera observación sin necesidad de incurrir en el uso de ventanas móviles. Sin embargo, si se ha estimado el parámetro de correlación de largo plazo ( $\rho_{ij,LP}$ ) al que revierte la propia covarianza condicional.

Por tanto, con las varianzas y covarianzas condicionales de las innovaciones estandarizadas obtenemos las correlaciones condicionales de las innovaciones originales, tal y como se ha explicado anteriormente:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\sqrt{q_{ii,t+1}q_{jj,t+1}}}$$

La estimación de los parámetros del DCC-GARCH se suele realizar a partir de la maximización de la función de log-verosimilitud de una distribución normal bivalente. Sin embargo, en este trabajo se utilizan copulas para determinar cuál de ellas recoge de manera más verosímil la pauta de dependencia entre los activos.

Las cópulas utilizadas se han tomado como estáticas. Es decir, el parámetro de la cópula es estático y no cambiante en el tiempo, por lo que este determina la pauta de dependencia de toda la serie temporal en su conjunto, mientras que la matriz de covarianzas generada por el modelo DCC-GARCH determina la correlación condicional de las series financieras.

Las copulas, tal y como se explican en el siguiente apartado, dependen de al menos un parámetro para determinar la dependencia entre las variables introducidas en ellas. Por tanto, se ha procedido a estimar los parámetros del DCC-GARCH simultáneamente junto con los de la cópula empleada mediante la maximización de la función de log-verosimilitud de la propia densidad cópula.

### 3.2.1 Cópulas

En el modelo empleado, DCC Cópula-GARCH, tanto los parámetros de la cópula como los del DCC-GARCH serán estimados, simultáneamente, mediante la maximización de la función de log-verosimilitud de densidad de cópula.

Si bien las innovaciones estandarizadas son las que se introducen en el DCC-GARCH, en la función de cópula deberemos transformar dichas innovaciones de una u otra manera según la cópula empleada sea Implícita o Arquimediana:

En ambos tipos de cópula las innovaciones estandarizadas se transforman en números uniformes (0,1) mediante la aplicación de la función de distribución empírica. De igual manera se podría haber utilizado la función de distribución marginal, es decir, la distribución t-Student. En las cópulas Arquimedianas son estos números uniformes los que se introducen en las mismas.

$$u_i = G_{Empirica}(z_i)$$

Si la cópula es Implícita, a los números uniformes anteriores se les aplica la función inversa de la distribución a partir de la cual se ha obtenido la cópula. En este trabajo, como cópulas Implícitas se han utilizado la Normal (0,1) y la t-Student, por tanto se aplica  $\epsilon_i = \Phi^{-1}(u_i)$  para la distribución Normal y  $\epsilon_i = T_v^{-1}(u_i)$  para la distribución t-Student.

A continuación se muestran las funciones de densidad de las cópulas, tanto Implícitas como Arquimedianas, que han sido probadas para modelar la correlación condicional entre los tres activos objeto de estudio:

**Normal:** La cópula normal es la cópula implícita de una distribución normal bivalente. Además, se caracteriza por ser elíptica y simétrica.

$$c_n(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 \epsilon_1^2 - 2\rho \epsilon_1 \epsilon_2 + \rho^2 \epsilon_2^2}{2(1 - \rho^2)}\right)$$

$$\rho \in (-1, 1)$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\epsilon_i = \Phi^{-1}(u_i)$$

$$\tau_{kendall} = \arcsen(\rho) \frac{2}{\pi}$$

La cópula normal tiene dependencia en ambas colas igual a cero:

$$\lambda^U = \lambda^L = 0$$

**T-Student:** La cópula t-Student comparte con la cópula normal ser elíptica y simétrica. De igual manera a la cópula anterior, esta cópula recoge la dependencia asociada a la distribución t-Student bivalente.

$$c_t(u_1, u_2; v, \rho) = K \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ 1 + \frac{\epsilon_1^2 - 2\rho\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2}{v(1-\rho^2)} \right]^{-\frac{v+2}{2}} \left[ (1+v^{-1}\epsilon_1^2)(1+v^{-1}\epsilon_2^2) \right]^{\frac{v+1}{2}}$$

$$K = \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)$$

$$\rho \in (-1,1)$$

Cuando el parámetro grados de libertad tiende a infinito,  $v \rightarrow \infty$ , la distribución t-Student converge a una distribución Normal.

$$2 < v \leq \infty$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\epsilon_i = T_v^{-1}(u_i)$$

$$\tau_{kendall} = \arcsen(\rho) \frac{2}{\pi}$$

La cópula t-Student tiene dependencia simétrica en las colas:

$$\lambda^U = \lambda^L = 2 t_{v+1} \left( -\sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$$

Tanto en la cópula Normal como en la cópula t-Student, ambas cópulas Implícitas, el parámetro  $\rho$  es estático, es decir, es diferente de la correlación condicional en el modelo DCC-GARCH.

**Clayton:** Esta cópula, al igual que todas las que se detallaran a continuación, pertenece a la familia de las Arquimedianas. La cópula de Clayton es asimétrica y tiene dependencia positiva en la cola inferior cuando  $\alpha > 0$ . En la estimación, se ha impuesto que dicho parámetro sea mayor a cero para “forzar” la propiedad de dependencia positiva en la cola inferior.

$$c_c(u_1, u_2; \alpha) = (\alpha + 1)(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-(1/\alpha)}(u_1 u_2)^{-\alpha-1}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

$$\lambda^L = 2^{-\frac{1}{\alpha}}; \lambda^U = 0$$

$$\tau_{kendall} = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

**Rotated Clayton:** La versión rotada de la cópula anterior también es asimétrica y tiene dependencia positiva en la cola superior en lugar de en la cola inferior. Para ello el parámetro  $\alpha$  ha de ser superior a cero.

$$c_{rc}(u_1, u_2; \alpha) = c_c(1 - u_1, 1 - u_2, \delta)$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

$$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\alpha}}; \lambda^L = 0$$

$$\tau_{kendall} = \frac{\alpha}{\alpha + 2}$$

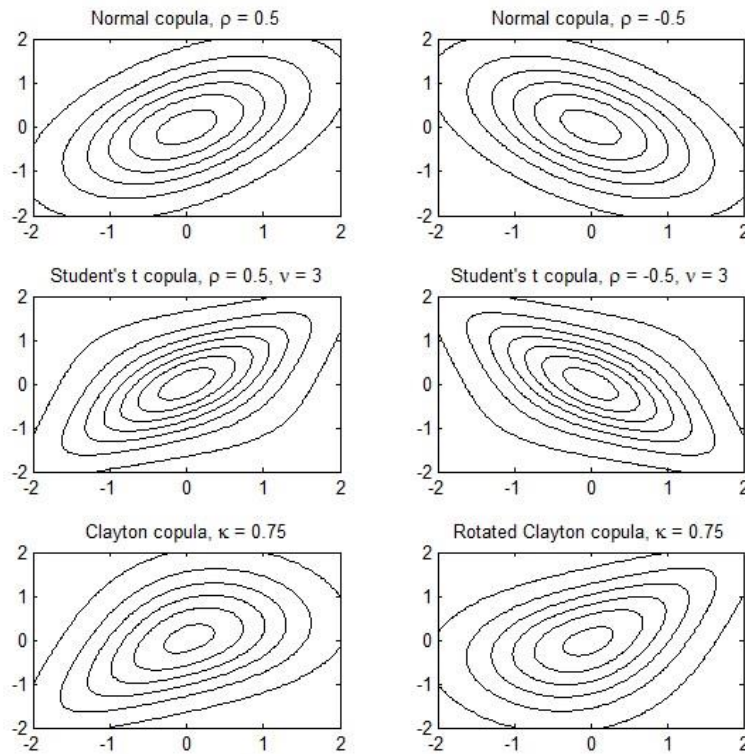


Figura 5

**Gumbel:** Esta cópula es asimétrica y tiene dependencia positiva en la cola superior si  $\delta > 1$ .

$$c_g(u_1, u_2; \delta) = (A + \delta - 1)A^{1-2\delta} \exp(-A)(u_1 u_2)^{-1} (-\ln u_1)^{\delta-1} (-\ln u_2)^{\delta-1}$$

$$A = [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{1/\delta}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\delta \in [1, \infty)$$

$$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}; \lambda^L = 0$$

$$\tau_{kendall} = 1 - \delta^{-1}$$

**Rotated Gumbel:** La versión rotada de la cópula anterior también es asimétrica y tiene dependencia positiva en la cola inferior si  $\delta > 1$ .

$$c_{rg}(u_1, u_2; \delta) = c_g(1 - u_1, 1 - u_2, \delta)$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\delta \in [1, \infty)$$

$$\lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}; \lambda^U = 0$$

$$\tau_{kendall} = 1 - \delta^{-1}$$

**Frank:** La copula de Frank es la única cópula Arquimediana que dibuja una dependencia radial y simétrica. Además, al igual que la cópula normal, no presenta dependencia en las colas.

$$c_f(u_1, u_2; \theta) = \frac{\theta [1 - \exp(-\theta)] \exp(-\theta(u_1 + u_2))}{([1 - \exp(-\theta)] - [1 - \exp(-\theta u_1)][1 - \exp(-\theta u_2)])^2}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$$

$$\lambda^U = \lambda^L = 0$$

$$\tau_{kendall} = 1 - \frac{4(1 - D_1(\theta))}{\theta}$$

Donde  $D_1(\theta)$  es la función de Debye:

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$$



**Plackett:** La cópula de Plackett es simétrica y tampoco muestra dependencia en las colas.

$$c_p(u_1, u_2; \theta) = \frac{\theta [1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2 - 2u_1u_2)]}{((1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2))^2 - 4\theta(\theta - 1)u_1u_2)^{3/2}}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\theta \in [0, \infty) \setminus \{1\}$$

$$\lambda^U = \lambda^L = 0$$

En la cópula de Plackett, la  $\tau$  de Kendall no tiene formula explicita por lo que se imposibilita su cálculo.

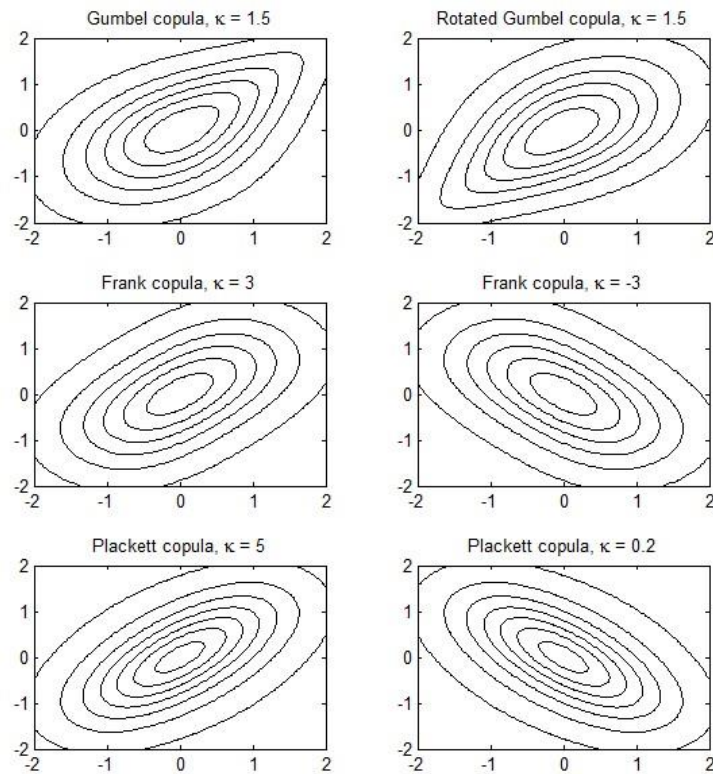


Figura 6

**Ali-Mikhail-Haq:** Esta cópula tiene dependencia en la cola inferior cuando  $\theta = 1$ . Cuando  $\theta < 1$  las colas son asintóticamente independientes, es decir, a menor valor del parámetro, menor dependencia en las colas. (Pranesh Kumar (2009)).

$$c_h(u_1, u_2; \theta) = \frac{1 + \theta [(1 + u_1)(1 + u_2) - 3] + \theta^2(1 - u_1)(1 - u_2)}{(1 - \theta(1 - u_1)(1 - u_2))^3}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\theta \in [-1, 1)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \lambda^L = 0 \quad \forall \theta < 1; \quad \lim_{u \rightarrow 0} \lambda^L = 0,5 \quad \theta = 1$$

$$\tau_{kendall} = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2 \ln(1 - \theta)}{3\theta^2}$$

**Rotated Ali-Mikhail-Haq:** Esta cópula tiene dependencia en la cola superior cuando  $\theta = 1$ . Cuando  $\theta < 1$  las colas son asintóticamente independientes.

$$c_{rh}(u_1, u_2; \theta) = c_h(1 - u_1, 1 - u_2; \theta)$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\theta \in [-1, 1)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \lambda^L = 0 \quad \forall \theta < 1; \quad \lim_{u \rightarrow 1} \lambda^L = 0,5 \quad \theta = 1$$

$$\tau_{kendall} = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2 \ln(1 - \theta)}{3\theta^2}$$

**Joe-Clayton (BB7):** La copula de Joe-Clayton determina la dependencia entre las variables a partir de dos parámetros  $(\theta, \delta)$ . El primero de ellos se relaciona con la dependencia en la cola superior mientras que el segundo se relaciona con la dependencia en la cola inferior.

$$c_{JC}(u_1, u_2; \theta, \delta) = \frac{U^{(\delta-1)} V^{(\delta-1)} \left[ -1 + \theta \left( \delta \left[ -1 + UV^{\frac{1}{\delta}} \right] + UV^{\frac{1}{\delta}} \right) \right] \left[ 1 - UV^{-\frac{1}{\delta}} \right]^{1/\theta} (1 - u_1)^{(\theta-1)} (1 - u_2)^{(\theta-1)}}{\left[ -1 + UV^{\frac{1}{\delta}} \right]^2 [U^\delta + V^\delta - U^\delta V^\delta]^2}$$

$$U = 1 - (1 - u_1)^\theta$$

$$V = 1 - (1 - u_2)^\theta$$

$$UV = -1 + U^{-\delta} + V^{-\delta}$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

$$\lambda^U, \lambda^L \in (0, 1)$$

$$\lambda^U = 2 - 2^{1/\theta}$$

$$\lambda^L = 2^{-1/\delta}$$

$$\tau_{kendall} = 1 - \frac{2}{\delta(2-\theta)} + \frac{4}{\theta^2\delta} B\left(\frac{2-2\theta}{\theta} + 1, \delta + 2\right)$$

Donde  $B(x, y)$  es la función Beta:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

**Symmetric Joe-Clayton:** Al igual que la cópula original de Joe-Clayton, esta cópula depende de dos parámetros, donde cada uno de ellos determina la dependencia en cada una de las colas. Sin embargo, tiene la peculiaridad de ser simétrica cuando  $\lambda^U = \lambda^L$ .

$$c_{SJC}(u_1, u_2; \theta, \delta) = \frac{1}{2} \left( c_{JC}(u_1, u_2; \theta, \delta) + c_{JC}(1-u_1, 1-u_2; \theta, \delta) \right)$$

$$\lambda^U = 2 - 2^{1/\theta}$$

$$\lambda^L = 2^{-1/\delta}$$

$$\lambda^U, \lambda^L \in (0, 1)$$

$$u_i = G_{Emp}(z_i)$$

En esta cópula no existe fórmula cerrada mediante la cual obtener la  $\tau$  de *kendall*

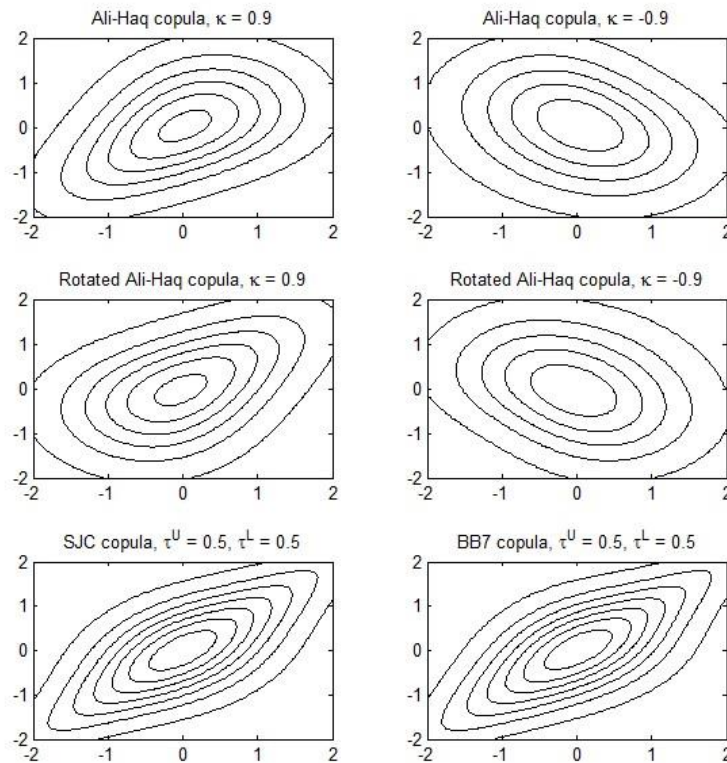


Figura 7

### 3.2.2. Análisis de los resultados

Cópula	S&P 500 - Oro			S&P500 – Bono 30y			Oro – Bono 30y		
	LL	AIC	BIC	LL	AIC	BIC	LL	AIC	BIC
Normal	0.089	1.821	7.409	16.865	-31.731	-26.144	0.001	1.998	7.585
t-Student	4.592	-5.185	5.990	59.652	-115.304	-104.130	4.920	-5.839	5.335
Clayton	0.743	0.514	6.101	20.553	-39.106	-33.519	-0.010	2.020	7.608
Rotated Clayton	0.067	1.865	7.453	18.814	-35.627	-30.040	1.170	-0.341	5.246
Gumbel	0.322	1.356	6.944	25.500	-49.000	-43.413	1.298	-0.596	4.991
Rotated Gumbel	0.645	0.710	6.297	28.734	-55.468	-49.881	0.045	1.910	7.497
Frank	0.149	1.703	7.290	16.777	-31.554	-25.967	0.000	2.000	7.587
Plackett	0.155	1.690	7.277	18.950	-35.901	-30.314	0.073	1.853	7.441
Ali- Haq	0.150	1.701	7.288	16.626	-31.253	-25.666	0.067	1.867	7.454
Rotated Ali- Haq	0.142	1.715	7.302	15.733	-29.467	-23.879	0.070	1.860	7.448
Joe-Clayton (BB7)	-0.111	4.222	15.396	31.225	-58.450	-47.276	-2.647	9.294	20.468
SJC	0.000	3.999	15.174	29.516	-55.032	-43.857	-0.518	5.035	16.210

Tabla 4

Con los resultados obtenidos en la Tabla 4 podemos comparar el desempeño de las distintas cópulas a través del valor alcanzado por la función de log-verosimilitud, así como por los estadísticos BIC y AIC (Criterio de Información Bayesiano y Criterio de Akaike respectivamente), para los cuales se ha tenido en cuenta, únicamente, el número de parámetros que rigen la copula. Esto nos permite observar qué cópula ajusta mejor la dependencia entre las series temporales analizadas.

Con ello, concluimos que la cópula t-Student es la que mejor recoge el grado de dependencia entre los activos estudiados, lo que revela que la dependencia en ambas colas es simétrica. Dicha cópula presenta un mayor valor de la función de log-verosimilitud y un menor valor, tanto en el estadístico AIC como BIC, en las tres combinaciones de activos. Además, estos valores toman una gran diferencia con respecto a los alcanzados por las demás cópulas.

Por tanto, la distribución t-Student parece ser la distribución idónea, de entre las analizadas, para la modelización tanto de las varianzas condicionales como de las correlaciones condicionales.

En el caso concreto de la dependencia entre S&P 500 y el Oro, tras la cópula t-Student se sitúan la cópula de Clayton y la cópula de Gumbel rotada (ambas con dependencia en la cola superior nula). En cuanto a la dependencia entre el S&P 500 y el Bono a 30 años, además de la cópula t-Student, las cópulas Rotated Gumbel, BB7 y SJC parecen explicarla aceptablemente bien. Sin embargo, a diferencia de la dependencia entre el S&P 500 y el Oro, los distintos criterios (LL, AIC y BIC) no coinciden. Por último, las cópulas que mejor recogen la dependencia entre el Oro y el Bono a 30 años, además de la cópula t-Student, son las cópulas de Gumbel y Rotated Clayton, ambas con dependencia en la cola inferior igual a cero.

Teniendo en cuenta esta información, y manteniéndonos al margen de la cópula t-Student, podríamos decir que entre el S&P 500 y el oro existe mayor dependencia en la cola inferior que en la superior. Al contrario sucede con la dependencia entre el Oro y el Bono a 30 años, donde parece haber mayor dependencia en la cola superior que en la inferior.

Los parámetros estimados de la cópula t-Student se muestran en la Tabla 5:

<b>Parámetros</b>	<b>S&amp;P 500 - Oro</b>	<b>S&amp;P 500 - Bono 30y</b>	<b>Oro - Bono 30y</b>
$\alpha$	0.0966***	0.1587***	0.1059***
$\beta$	0.8250***	0.7767***	0.8211***
$\rho_{LP}$	-0.0196***	0.1120***	-0.1826***
$v$	13.3650*	4.3079***	12.3009***
$\rho_{cópula}$	0.0117***	0.1313***	-0.0033***
$\tau_{kendall}$	0.0074	0.0838	-0.0021
$\lambda^U = \lambda^L$	0.0041	0.1262	0.0053

\*: Indica la significatividad del parámetro en base al p-valor del estadístico t. \* Parámetro significativo al 1% ; \*\* Parámetro significativo al 5%; \*\*\* Parametro significativo al 10%

Tabla 5

Como era de esperar, tanto la correlación incondicional ( $\rho_{LP}$ ) como el parámetro de la cópula ( $\rho_{cópula}$ ) alcanzan valores cercanos a cero dada la distinta naturaleza de los activos que forman la cartera. De la misma manera, el tau de kendall muestra bajos valores pues su cálculo se realiza a partir del parámetro anterior.

Por otro lado, la dependencia en las colas también resulta ser baja lo que se debe al mismo motivo, a la diferencia entre los distintos activos. Visualmente, las cópulas t-Student entre los distintos activos son las siguientes:

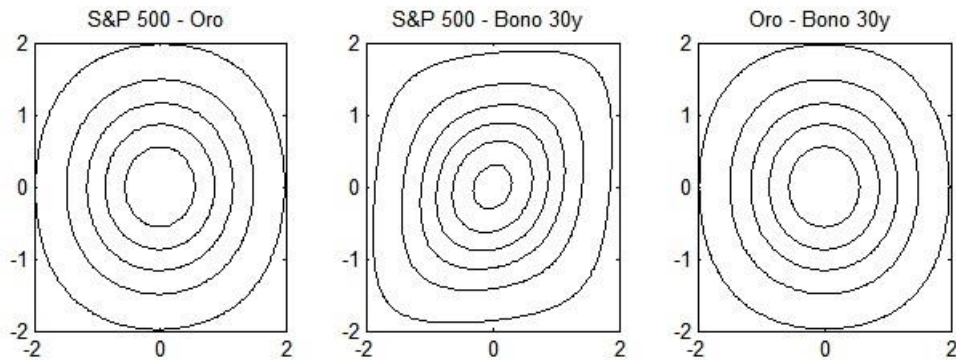


Figura 8

En el gráfico siguiente se muestran las correlaciones condicionales junto con la correlación de largo plazo estimada en el DCC Cópula-GARCH:

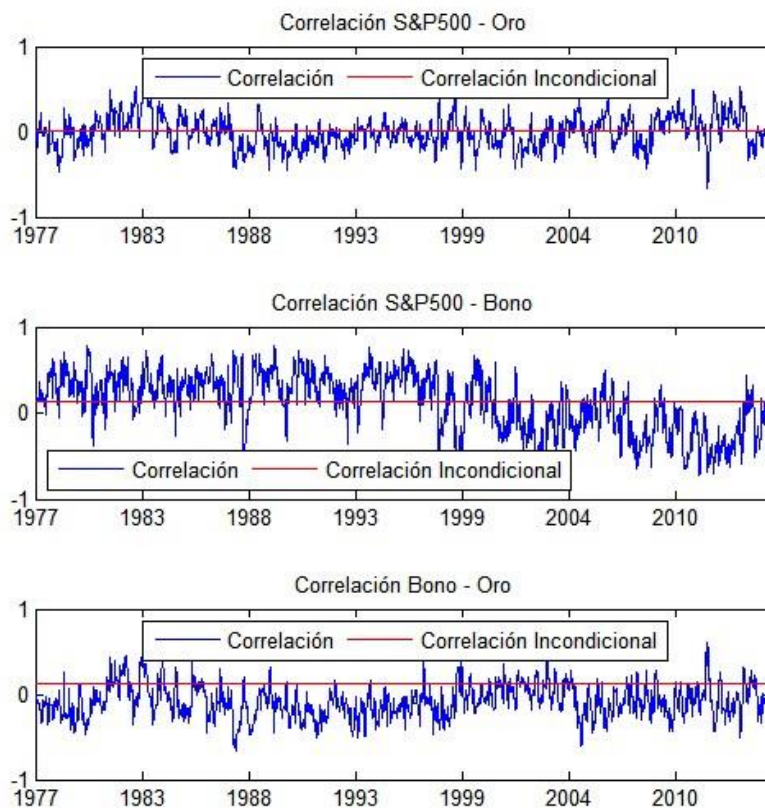


Figura 9

A simple vista se observa como la correlación condicional entre el S&P 500 y el Bono a 30 años toma valores más alejados respecto a la correlación incondicional. Además parece haberse dado un cambio con respecto al signo de la correlación ya que pasa a ser generalmente negativa en los últimos periodos. Por otro lado, las correlaciones que involucran al Oro parecen ser más estables y cercanas a cero durante todo el periodo analizado.

## **4. CREACION DE CARTERAS**

---

En este apartado se van a formar carteras bajo el criterio de mínima varianza y mínimo momento parcial inferior. Bajo cada criterio se construirá la cartera estática, en la que las ponderaciones permanecen constantes a lo largo del periodo estudiado; y la cartera dinámica, en la que las ponderaciones de los activos cambian en el tiempo. Para la construcción de carteras dinámicas se utilizarán las varianzas y correlaciones condicionales calculadas en los apartados anteriores.

Finalmente, una vez formadas las carteras bajo los criterios expuestos, se realizará una comparación entre ambas para observar las implicaciones del uso de un criterio u otro en la construcción de carteras. Adicionalmente, se compararán junto a una cartera que invierta en estos activos equiponderadamente y un índice de renta variable.

### **4.1. Carteras de Mínima Varianza (MV)**

En la construcción de carteras, el criterio de mínima varianza (MV), introducido por Markowitz (1959), tiene por objetivo determinar las ponderaciones de cada activo en la cartera minimizando la varianza total de la cartera. Por tanto, para su utilización será imprescindible utilizar las varianzas y correlaciones condicionales calculadas en los apartados anteriores. Con ellas, se formará la matriz de covarianzas dinámica de los activos a lo largo del periodo estudiado.

Por otra parte, pese a que en los apartados anteriores hemos obtenido las varianzas y correlaciones condicionales en frecuencia semanal, aquí hemos supuesto que el rebalanceo de la cartera, es decir, el cambio de las ponderaciones, se realizará cada cuatro semanas, por lo que construiremos matrices de covarianzas cada cuatro semanas a partir de las varianzas y correlaciones condicionales.

Con las varianzas y correlaciones dinámicas calculadas en los apartados anteriores se van a formar las matrices de covarianzas:

$$\Sigma_t = D_t \Gamma_t D_t$$

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{S,t}^2 & \sigma_{SO,t} & \sigma_{SB,t} \\ \sigma_{OS,t} & \sigma_{O,t}^2 & \sigma_{OB,t} \\ \sigma_{BS,t} & \sigma_{BO,t} & \sigma_{B,t}^2 \end{pmatrix} \quad D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{SP,t} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Oro,t} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Bono,t} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{SO,t} & \rho_{SB,t} \\ \rho_{OS,t} & 1 & \rho_{OB,t} \\ \rho_{BS,t} & \rho_{BO,t} & 1 \end{pmatrix}$$

S = S&P500;    O = Oro;    B = Bono a 30 años

Con ello podremos construir carteras de mínima varianza dinámicas (cambiantes en el tiempo). Para ello hemos empleado el supuesto de que las posiciones cortas no están permitidas, pues debido a la naturaleza de los activos parece más sensato imponer que las carteras se formaran únicamente a partir de posiciones largas en los tres activos. Para la determinación de las ponderaciones de cada activo se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } w_t' \Sigma_t w_t$$

$$s. a: \sum_{i=1}^3 \omega_{it} = 1$$

$$\omega_{it} > 0$$

De esta manera obtenemos una serie temporal de ponderaciones para cada activo. Adicionalmente, hemos obtenido la cartera de mínima varianza estática para todo el periodo, es decir, hemos resuelto el problema de optimización anterior con la matriz de covarianzas incondicionales, por lo que obtenemos unas ponderaciones constantes para todo el periodo.

La matriz de covarianzas incondicionales se construye a partir de las varianzas incondicionales y las correlaciones incondicionales estimadas en los apartados 3.1 y 3.2 de este estudio. Las varianzas incondicionales hacen referencia a las obtenidas a partir de la estimación, del parámetro  $\omega$  de los modelos GARCH (Tabla 3). Las correlaciones incondicionales hacen referencia a las estimadas mediante el modelo DCC Cópula-GARCH (Tabla 5)



## 4.2. Cartera de Mínimo momento parcial inferior (LPM)

Aquí, se va utilizar un criterio distinto al comúnmente utilizado de mínima varianza para determinar las ponderaciones de cada activo. En este apartado se va a utilizar el criterio de minimizar el momento parcial inferior de la cartera como medida alternativa a la volatilidad. Para ello se utilizara la matriz simétrica de co-lower partial moments introducida por David N. Nawrocki (1991).

Los momentos parciales inferiores se definen como sigue:

$$LPM_{i,\delta,\tau} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \max(0, \tau - R_{i,t})^\delta \right\}$$

Donde  $\tau$  se fija arbitrariamente. En este trabajo, se ha supuesto  $\tau = 0$  para una mejor comparación con la cartera de mínima varianza. Sin embargo se podría haber utilizado otro, como por ejemplo, el activo libre de riesgo. Por la misma razón, hemos tomado el LPM de orden 2 ( $\delta = 2$ ) pues nuestro objetivo es minimizar el LPM de la cartera y comparar las ponderaciones y momentos muestrales que de ella se derivan con las obtenidas mediante el criterio de mínima varianza.

Como se observa, los momentos parciales inferiores son momentos muestrales. Sin embargo, en este estudio se pretende formar una cartera con ponderaciones dinámicas, por lo que calculamos un momento parcial inferior dinámico mediante ventanas muestrales. Aquí hemos tomado una ventana de 50 observaciones.

Los elementos de la diagonal de la matriz de CLPM se muestran a continuación:

$$LPM_{ii,2,t+1} = \left( \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \left\{ \max(0, -R_{i,t+1-s})^2 \right\} \right)^{2/2}$$

Donde  $m = 50$  hace referencia a la amplitud de la ventana móvil.

Por otra parte, los co-momentos parciales inferiores de orden dos, análogos a las covarianzas, se definen a continuación:

$$CLPM_{ij,2,t+1} = LPM_{i,t+1}^{1/2} LPM_{j,t+1}^{1/2} \rho_{ij,t+1}$$

Como correlación dinámica entre activos ( $\rho_{ij,t}$ ) se ha utilizado, al igual que en el criterio de mínima varianza, la previamente calculada mediante el modelo DCC Cópula-GARCH.

Una vez descritos los  $LPM_{i,t}$  y  $CLPM_{ij,t}$  se forma la matriz de  $CLPM_t$ :

$$CLPM_t = \begin{pmatrix} LPM_{SS,t} & CLPM_{SO,t} & CLPM_{SB,t} \\ CLPM_{OS,t} & LPM_{OO,t} & CLPM_{OB,t} \\ CLPM_{BS,t} & CLPM_{BO,t} & LPM_{BB,t} \end{pmatrix}$$

S = S&P500; O = Oro; B = Bono a 30 años

Finalmente, de igual manera al criterio de mínima varianza, se procede a resolver el siguiente problema de optimización para la obtención de las ponderaciones de cada activo dentro de la cartera (posiciones cortas no permitidas):

$$\min w_t' CLPM_t w_t$$

$$s. a: \sum_{i=1}^3 \omega_{it} = 1$$

$$\omega_{it} > 0$$

Adicionalmente se calculan las ponderaciones constantes, tomando los LPM muestrales de orden dos. Como correlación incondicional hemos tomado, al igual que en la cartera de mínima varianza, la estimada en el DCC Cópula-GARCH.

### 4.3. Comparación entre CMV y CLPM

Con la resolución de los problemas de optimización de los apartados 4.1 y 4.2 obtenemos las ponderaciones dinámicas de cada activo según minimicemos la varianza de la cartera o el momento parcial inferior de la cartera. En este apartado se va a establecer una comparativa entre dichos criterios, por lo que se analizarán las ponderaciones, varianzas, LPMs y rentabilidades acumuladas bajo ambos criterios. Adicionalmente, se compararán con un Índice de renta variable y con una cartera que invierta en estos activos equiponderadamente. Finalmente, se estudiarán los momentos muestrales de cada una de las carteras formadas.

En la Figura 10 se muestran las ponderaciones dinámicas de cada activo según el criterio utilizado. Se puede observar una alta correlación entre las ponderaciones de cada activo obtenidas bajo los dos criterios especificados. Dicha correlación toma un valor de 0.7016 para las ponderaciones del S&P 500, 0.6935 para las ponderaciones del Oro y un 0.8096 para las ponderaciones del Bono. Por tanto, se puede afirmar que ambos criterios proporcionan unas ponderaciones para los activos notablemente correlacionadas.

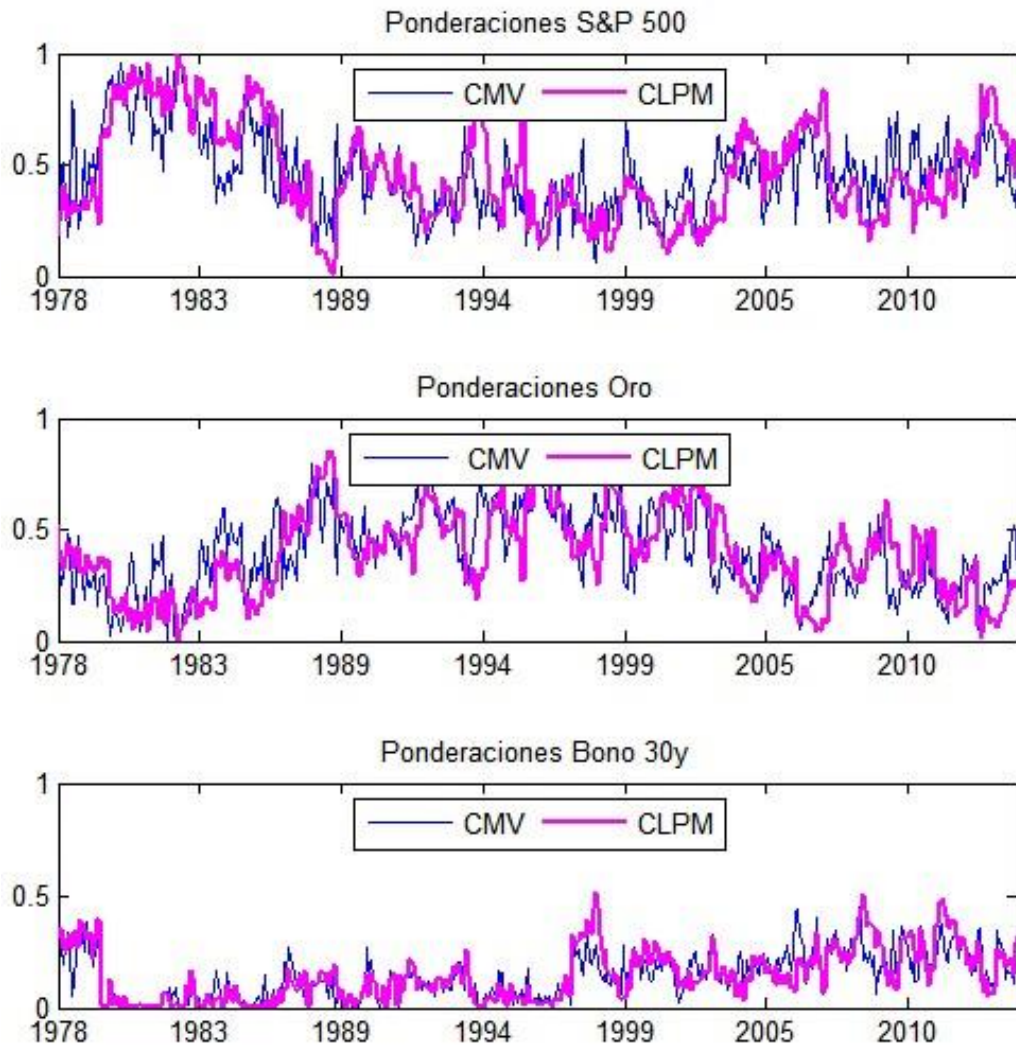


Figura 10

Por otra parte sabemos que la cartera MV, por construcción, es la que tiene una menor varianza. De manera análoga, la cartera LPM es la cartera que minimiza el momento parcial inferior. Sin embargo, resulta interesante comparar la varianza dinámica de la cartera de LPM con la de MV. Ello se muestra en la Figura 11, donde también se compara el momento parcial inferior dinámico de la cartera de MV con el momento parcial inferior dinámico de la cartera LPM.

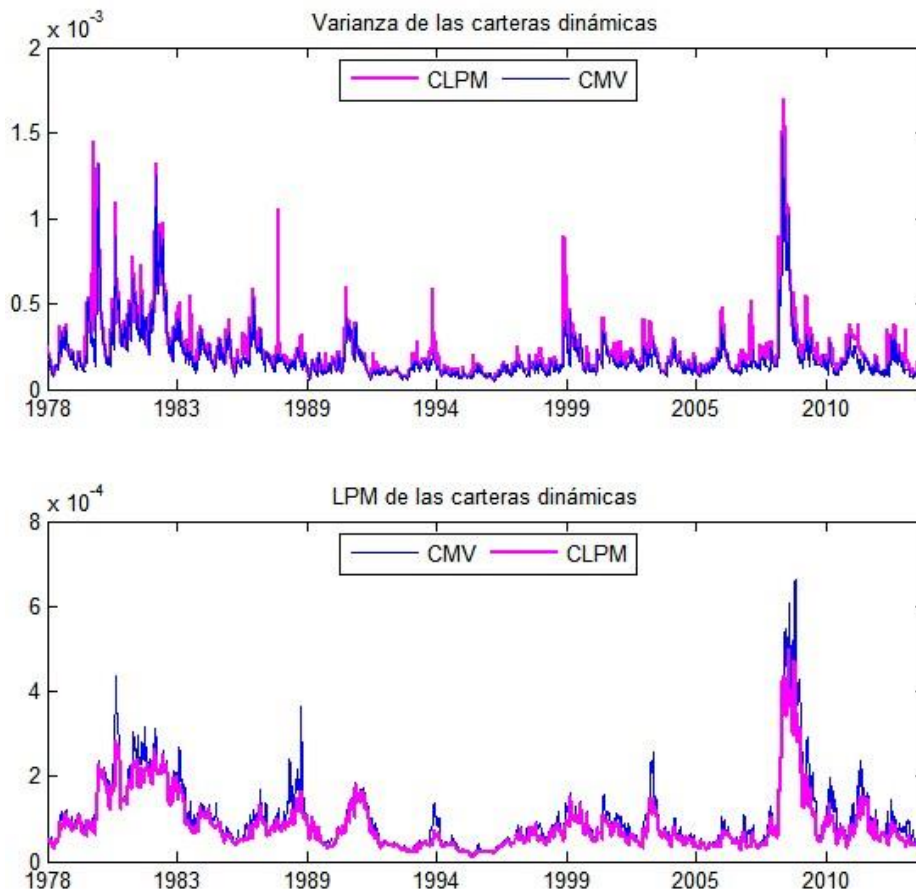


Figura 11

Como era de esperar, la cartera MV tiene una varianza inferior a la cartera LPM. La media de la varianza condicional de la cartera MV y LPM toma unos valores de 0.000188 y 0.000225 respectivamente. Sin embargo, parece haber una relación obvia entre los movimientos de las varianzas condicionales de ambas carteras. Dicha relación puede ser medida mediante la correlación de Pearson, alcanzando un valor de 0.9268. Por tanto, la relación entre la varianza condicional de ambas carteras resulta ser alta, si bien, la varianza condicional media de la cartera LPM es un 19.5% superior a la de la cartera MV.

En cuanto al momento parcial inferior condicional de ambas carteras se observa una media menor en la cartera LPM. En concreto, los valores medios son 0.0000855 y 0.0001015 con respecto las carteras LPM y MV, por lo que el momento parcial inferior medio de la cartera de mínima varianza resulta ser un 18.7% superior. Sin embargo, la correlación lineal entre los momentos parciales condicionales de ambas carteras resulta ser de un 0.7566. Por tanto, pese a que la distancia media entre los momentos parciales condicionales de cada cartera es inferior a la distancia media entre las varianzas condicionales de cada cartera, la correlación entre los momentos parciales inferiores dinámicos de ambas carteras es menor a la correlación entre las varianzas condicionales de ambas carteras.

Tal y como se ha observado en las Figura 10, las ponderaciones resultantes bajo el criterio de MV están muy correlacionadas con las ponderaciones obtenidas como consecuencia de minimizar el momento parcial inferior de la cartera. Además, en la Figura 11 se ha mostrado la gran similitud entre las varianzas condicionales y momentos parciales inferiores condicionales de ambas carteras. De esta manera, parece lógico pensar que la rentabilidad acumulada de ambas carteras será similar. Véase Figura 12.

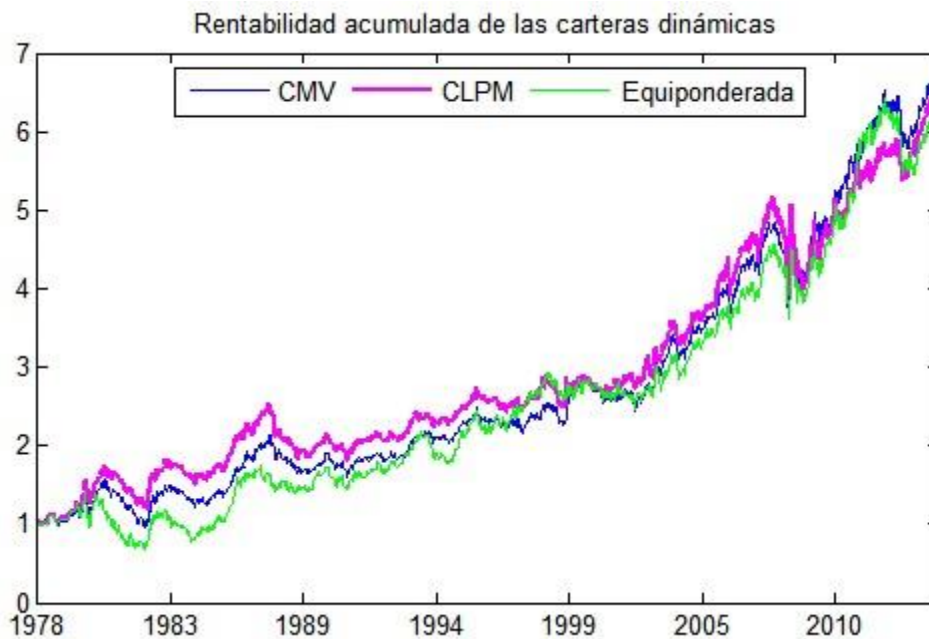


Figura 12

La Figura 12 muestra la similitud en la rentabilidad acumulada de una cartera equiponderada y las carteras de ponderaciones dinámicas de MV y LPM. En todas ellas, la rentabilidad acumulada durante el periodo analizado (36.5 años) es de alrededor del 650%, lo que supone una rentabilidad anual del 5.25% aproximadamente. Sin embargo, tanto la varianza condicional como el momento parcial inferior condicional de la cartera equiponderada son, en media, mayor a la de las carteras de MV y LPM, tanto de ponderaciones dinámicas como estáticas.

En la tabla 6 se muestran los pesos de cada activo en las carteras de ponderaciones estáticas, las cuales se encuentran considerablemente aproximadas, al igual que ocurre en los pesos de los activos en las carteras de ponderaciones dinámicas (Figura 10).

	SP	ORO	BOND
MV	48,04%	36,34%	15,62%
LPM	41,72%	42,27%	16,01%

Tabla 6

En la siguiente figura se observan las varianzas y momentos parciales inferiores de cada periodo de las carteras estáticas. Para su cálculo se han multiplicado los vectores de ponderaciones, constantes a lo largo de toda la muestra, con las matrices dinámicas de covarianzas y co-lower partial moments. De esta manera se obtiene la varianza y el momento parcial inferior de cada cartera a lo largo del periodo. Esto nos permite comprobar el aumento de volatilidad que conlleva no minimizar la varianza y momento parcial inferior de la cartera de manera dinámica.

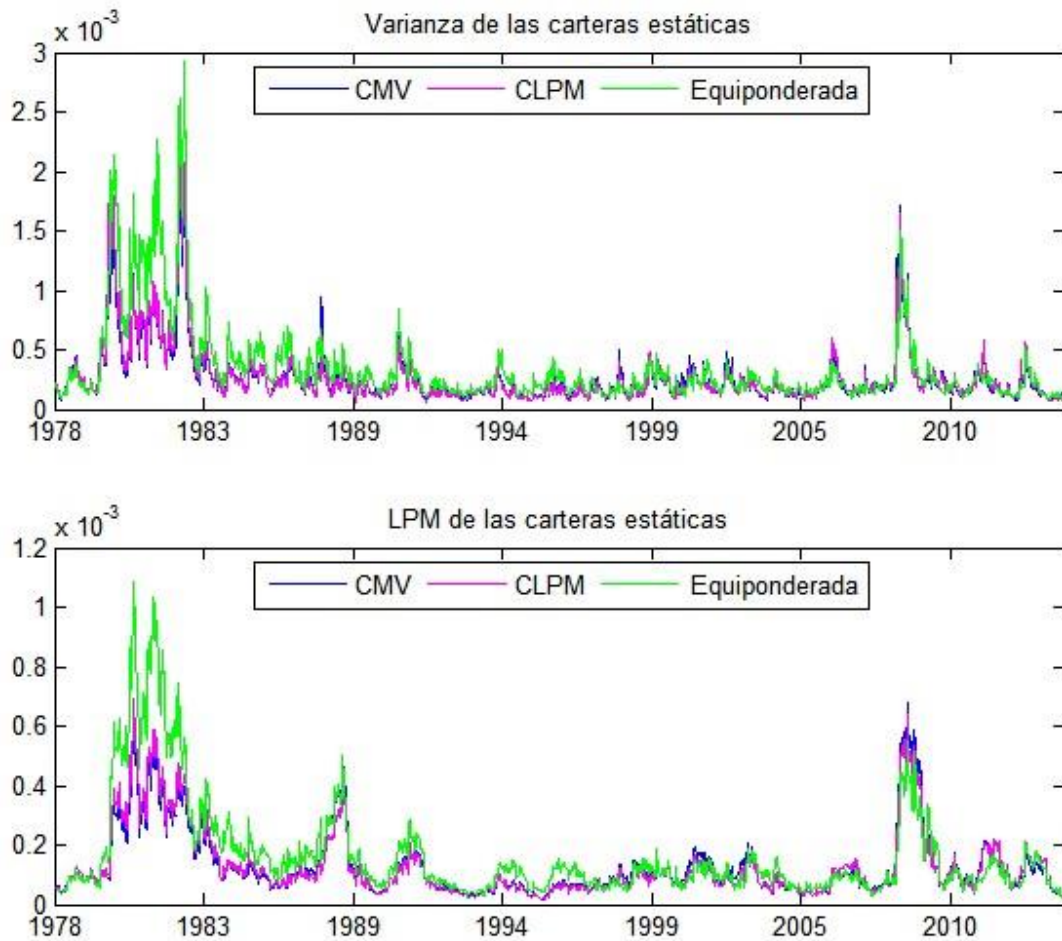


Figura 13

Al contrario de lo que ocurre en las carteras de ponderaciones dinámicas, en las carteras de ponderaciones estáticas el momento parcial inferior es similar en ambas, ya que en media es de 0,0001283 y 0,0001286 para las carteras de LPM y MV respectivamente. De la misma manera, la varianza condicional media es de 0.000266 y 0.000263 respectivamente. Esto se traduce, al igual que en las carteras de ponderaciones dinámicas, en una alta correlación de las varianzas condicionales, 0.9890, y momentos parciales inferiores condicionales, 0.7207. Por tanto, obtenemos resultados muy similares al resolver el problema de mínima varianza y momento parcial inferior para el caso en el que se calculen ponderaciones constantes.

Por otra parte, el momento parcial inferior dinámico medio y la varianza condicional media de la cartera equiponderada alcanza unos valores de 0.000164 y 0.000345 respectivamente. Por ello, se concluye que la cartera equiponderada incurre en un mayor riesgo para obtener una rentabilidad similar a la de las carteras de ponderaciones dinámicas (Figura 12). De la misma manera, tal y como se muestra en la Figura 14, la cartera equiponderada también incurre en un mayor riesgo para obtener una rentabilidad acumulada inferior a la de las carteras de ponderaciones constantes.

Sin embargo, la mayor varianza condicional media y el mayor momento parcial inferior condicional medio de las carteras formadas bajo ponderaciones estáticas (con respecto a las carteras de ponderaciones dinámicas) ofrece una mayor rentabilidad acumulada, tal y como se muestra en la Figura 14 y 15.

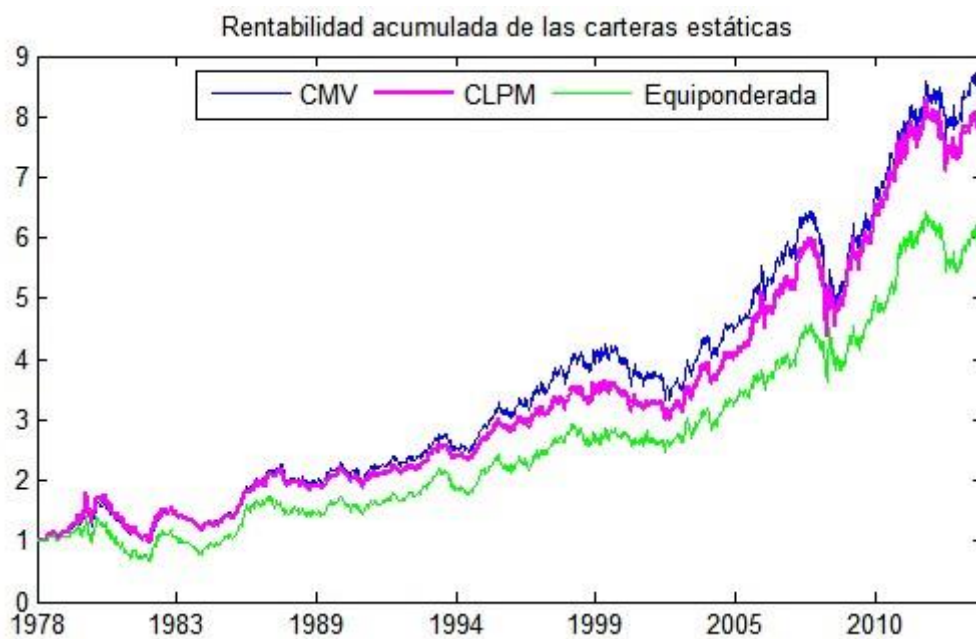


Figura 14

La rentabilidad acumulada a lo largo del periodo analizado en las carteras de ponderaciones estáticas se encuentra alrededor del 830%. En este caso la rentabilidad anual se sitúa en un 6% aproximadamente. No obstante, esta rentabilidad es notablemente inferior a la que podría alcanzar un Índice de renta variable como lo es el S&P 500. En la Figura 15 se muestra visualmente la diferencia entre las carteras de ponderaciones estáticas y el S&P 500:



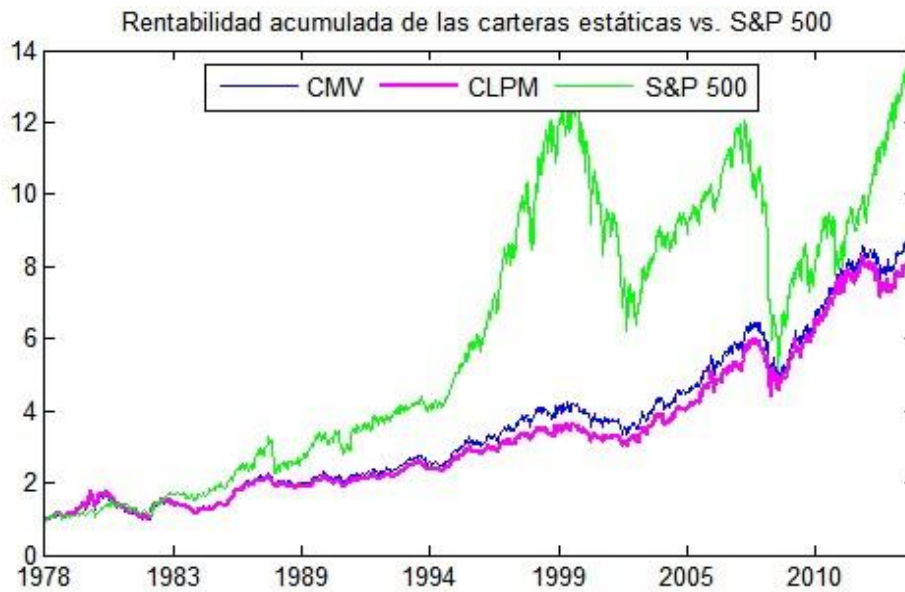


Figura 15

De la figura anterior se observa que, a finales de 2014, la rentabilidad acumulada del S&P 500 es, sin duda, mayor a la de las carteras de MV y LPM. La rentabilidad acumulada total del Índice de renta variable alcanza el 1360%, lo que supone una rentabilidad anual media del 7.4%. No obstante, cabe destacar que en el año 2009 la rentabilidad acumulada fue solo ligeramente superior a la de las carteras MV y LPM.

Por tanto, parece obvio que en una estrategia Buy&Hold de muy largo plazo, la renta variable, en este caso el S&P 500, es el activo que mayor rentabilidad absoluta ofrece. Sin embargo, el momento de la inversión en este activo es clave para determinar la rentabilidad. En la Figura 16, se muestra la situación en la que se hubiera invertido en estas carteras en el año 2000:



Figura 16



Por ello, la cartera que invierte en los activos propuestos por Craig Rowland & J.M Lawson (2012) se considera “segura” en todos los momentos del ciclo económico, ya que su rentabilidad acumulada crece lentamente sin demasiados altibajos. Por otra parte, si analizamos el comportamiento del S&P 500 junto con el de las carteras de ponderaciones constantes desde el año 2010, tenemos que el Índice de renta variable bate a las carteras propuestas a partir de mediados del año 2013:

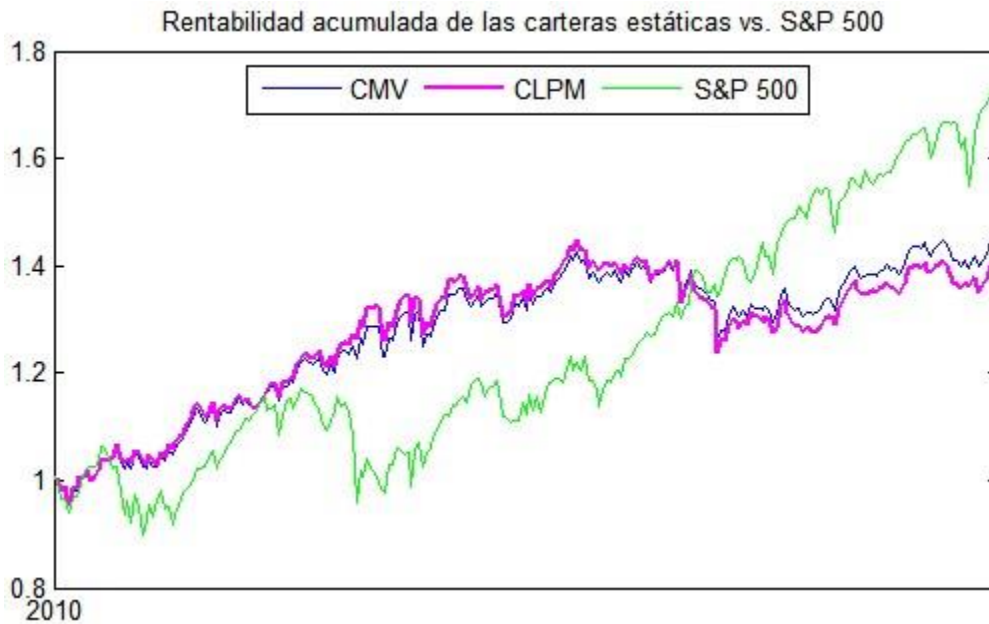


Figura 17

Finalmente, en la Tabla 7, se exponen los momentos muestrales de las carteras que se han comparado en este apartado:

Carteras	Media	D. Tipica	Asimetría	Curtosis	LPM
Equponderada	0,00114	0,01933	0,32239	8,03469	0,00017
S&P 500	0,00162	0,02247	-0,71360	7,94833	0,00026
CMV - Estática	0,00127	0,01684	0,12149	6,62929	0,00013
CLPM - Estática	0,00123	0,01699	0,18965	7,05171	0,00013
CMV - Dinámica	0,00109	0,01520	0,16304	6,89983	0,00010
CLPM - Dinámica	0,00110	0,01550	0,13822	6,88624	0,00011

Tabla 7

Sin duda, el Índice de renta variable es el que alcanza una mayor rentabilidad media. También se observa unos valores mayores en desviación típica, LPM y curtosis a la vez que un menor valor de asimetría con respecto al resto de las carteras (a excepción de la equiponderada). Ello quiere decir que el exceso de rentabilidad sobre el resto de las carteras conlleva un mayor riesgo y por tanto, tal y como se muestra en la Figura 15, 16 y 17 resulta más relevante el momento en el que se invierte en el Índice que en una cartera con los activos propuestos.

#### 4.4. Extensión: Carteras LPM de orden 1 y 3

El objetivo de este apartado es realizar una pequeña comparación entre las carteras dinámicas que se forman a partir de las matrices de CLPM de orden uno, dos y tres. En ellas, los componentes de la matriz de CLPM se definen respectivamente como sigue:

$$LPM_{ii,\delta,t+1} = \left( \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \left\{ \max(0, -R_{i,t+1-s})^\delta \right\} \right)^{2/\delta} \quad \text{para } \delta = 1,3;$$

$$CLPM_{ij,\delta,t+1} = LPM_{i,t+1}^{1/\delta} LPM_{j,t+1}^{1/\delta} \rho_{ij,t+1} \quad \text{para } \delta = 1,3;$$

De esta manera se forman las matrices de CLPM y se resuelve el mismo problema de optimización del apartado 4.2. con lo que se obtienen las ponderaciones cambiantes en el tiempo. Adicionalmente, se resuelve el problema de optimización para toda la muestra, lo que nos proporcionan unas ponderaciones constantes.

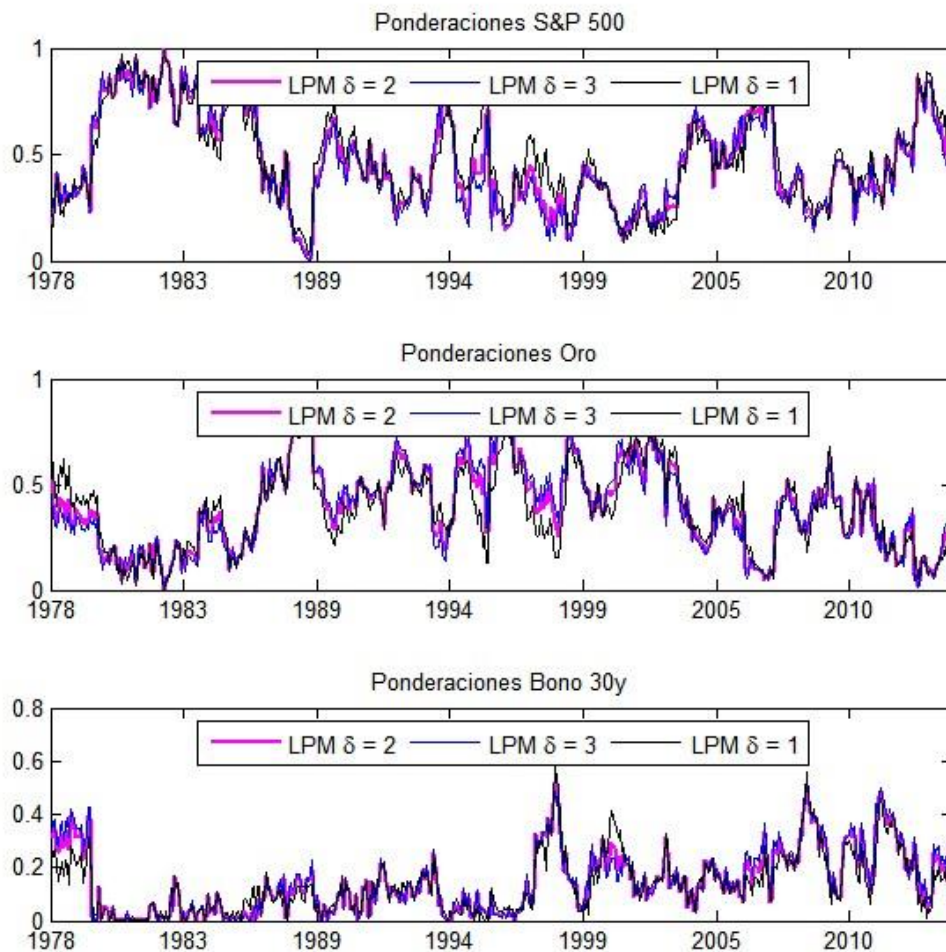


Figura 18

En la Figura 18 se muestran las ponderaciones de cada activo de cada cartera de LPM de orden uno, dos y tres. Se puede observar como las ponderaciones de cada cartera son notablemente similares, lo que conlleva unas altas correlaciones entre ellas.

Correlación Ponderaciones	S&P 500	Oro	Bono 30y
LPM 1 - 2	0,9583	0,9410	0,9495
LPM 2 - 3	0,9917	0,9886	0,9921
LPM 1 - 3	0,9200	0,8858	0,9122

Tabla 8

En la Tabla 8 se observa como las correlaciones entre las ponderaciones de las carteras de orden dos y tres son muy altas, cercanas a uno. Por otro lado, como era de esperar, las correlaciones entre las ponderaciones de las carteras de orden uno y tres son las más bajas si bien siguen siendo altas. Por tanto se podría concluir que minimizar la matriz de co-lower partial moments de orden uno, dos o tres llevar a obtener ponderaciones similares para cada activo. De esta manera, la rentabilidad acumulada de cada una de las carteras tendría un comportamiento similar.

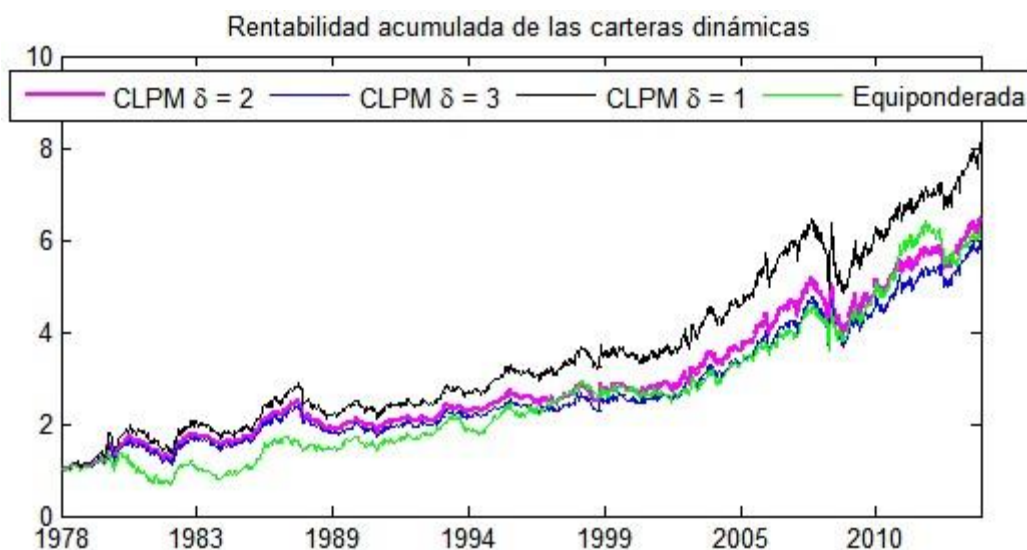


Figura 19

De la Figura 19 se concluye que el comportamiento de las carteras dinámicas de orden dos y tres es muy parejo, si bien la cartera de orden dos tiene una ligera rentabilidad superior. Con respecto la cartera de orden uno, esta tiene una mayor rentabilidad. Sin embargo, tal y como muestra la Tabla 10, la cartera de orden uno tiene un menor valor de asimetría positiva y un mayor valor de desviación típica y de momentos parciales inferiores de orden uno, dos y tres, lo que implica un mayor riesgo.

En cuanto a las carteras de ponderaciones constantes de las carteras de orden uno, dos y tres; estas se muestran en la Tabla 9:

Ponderaciones	S&P 500	Oro	Bono 30y
LPM 1	43,52%	41,65%	14,84%
LPM 2	41,72%	42,27%	16,01%
LPM 3	39,13%	43,46%	17,41%

Tabla 9

Como se puede observar, las ponderaciones constantes de las carteras de orden uno, dos y tres, mantienen unos valores considerablemente aproximados, lo que necesariamente llevara a que las rentabilidades acumuladas de cada una de las tres carteras sean muy próximas.

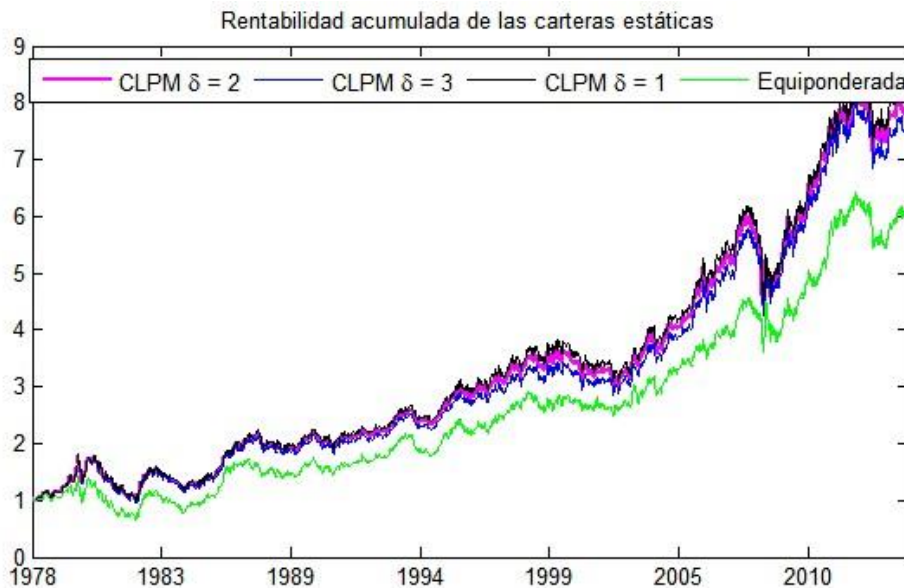


Figura 20

Observando la Figura 19 se tiene que resolviendo el problema de minimización del momento parcial inferior de orden uno, dos o tres, obtenemos ponderaciones, y por tanto, carteras muy similares entre sí.

Finalmente, al igual que ocurría entre las carteras de ponderaciones constantes y dinámicas de mínima varianza y mínimo momento parcial inferior de orden dos, las carteras de ponderaciones constantes obtienen una mayor rentabilidad acumulada frente a las carteras de ponderaciones dinámicas. Sin embargo, ese exceso de rentabilidad se ve compensado por mayores valores de desviación típica y momentos parciales inferiores muestrales (Vease Tabla 10). Aunque ello no implica necesariamente menores valores de asimetría y curtosis.

Carteras	Media	D. Típica	Asimetría	Curtosis	LPM1	LPM2	LPM3
Equiponderada	0,0011	0,0193	0,3224	8,0347	0,000000	0,000167	0,000000
CLPM1 Estática	0,0013	0,0168	0,1012	6,5885	0,000030	0,000127	0,000267
CLPM2 Estática	0,0012	0,0170	0,1896	7,0517	0,000031	0,000129	0,000273
CLPM3 Estática	0,0012	0,0172	0,2210	7,2384	0,000031	0,000132	0,000278
CLPM1 Dinámica	0,0012	0,0159	0,1300	6,9088	0,000027	0,000115	0,000240
CLPM2 Dinámica	0,0011	0,0155	0,1382	6,8862	0,000026	0,000109	0,000228
CLPM3 Dinámica	0,0011	0,0155	0,1383	6,9650	0,000026	0,000110	0,000229

*Tabla 10*

Con toda la información proporcionada en este apartado podemos concluir que bajo los activos considerados, no existen grandes diferencias entre las carteras de orden uno, dos y tres cuando consideramos ponderaciones constantes. Por otro lado, si consideramos ponderaciones dinámicas la cartera de orden uno muestra una mayor rentabilidad acumulada frente a las carteras de orden dos y tres, las cuales tienen un comportamiento similar.

## 5. CONCLUSIONES

---

Este estudio tenía por objetivo principal establecer una comparación entre carteras dinámicas de mínima varianza y de mínimo momento parcial inferior de orden dos. Por otro lado, se han estudiado las implicaciones de formar una cartera con los activos propuestos: S&P 500, Oro y un Bono a 30 años. Adicionalmente, se ha establecido una comparación entre las carteras dinámicas de mínimo momento parcial inferior de orden uno, dos y tres.

En el apartado 3.1 se obtuvieron las varianzas condicionales mediante varios modelos de volatilidad y se concluyó que los modelos GARCH asimétricos bajo una distribución t-Student son los que reflejan la varianza condicional de manera más verosímil en datos de frecuencia semanal.

En el siguiente apartado, 3.2, se determinaron las correlaciones condicionales haciendo uso de un modelo DCC Cópula-GARCH en el que se maximizaba la densidad de una cópula de parámetro estático con la finalidad de recoger la pauta de dependencia del todo periodo entre los activos. En este caso, la cópula t-Student es la que mejor refleja las correlaciones condiciones entre los activos.

Por último, en el apartado 4 se ha hecho uso de las varianzas y correlaciones condicionales para formar carteras dinámicas de mínima varianza y mínimo momento parcial inferior de orden dos. En el subapartado 4.3 se realizó una comparación entre ambos criterios, llegando a las siguientes conclusiones

1. Las ponderaciones, tanto dinámicas como constantes, obtenidas bajo ambos criterios son muy similares.

2. La varianza y momento parcial inferior condicionales de las carteras son muy similares, si bien los de las carteras dinámicas son inferiores a los de las carteras de ponderaciones constantes. Por otro lado, y de manera obvia, la cartera de mínima varianza obtiene una menor varianza condicional mientras que la cartera de mínimo momento parcial inferior obtiene un menor momento parcial inferior condicional.

3. Las carteras dinámicas obtienen una menor rentabilidad acumulada con respecto las carteras de ponderaciones constantes. En cuanto a la cartera equiponderada, esta obtiene una rentabilidad similar a las carteras de ponderaciones dinámicas. Sin embargo, el exceso de rentabilidad de las carteras estáticas frente a las carteras de ponderaciones dinámicas se ve compensado por un mayor riesgo. Señalar, que la cartera equiponderada es la que peor resultados ofrece en términos de rentabilidad-riesgo.

4. Comparando las carteras propuestas de ponderaciones estáticas frente a un índice de renta variable (S&P 500) se tiene que el Índice obtiene una mayor rentabilidad acumulada a la vez que se incurre en un mayor riesgo. No obstante, la mayor rentabilidad acumulada está referida al periodo 1978 – 2014. Si consideramos periodos de inversión más recientes la rentabilidad creciente y de baja volatilidad ofrecida por las carteras propuestas lleva a obtener rentabilidades acumuladas similares o superiores. Ello implica una menor dependencia del momento de inversión para obtener rentabilidades positivas frente a lo que se desprende de la inversión, únicamente en renta variable.

Finalmente, en el apartado 4.4 se comparan carteras de mínimo momento parcial inferior de orden uno, dos y tres haciendo uso de los mismos activos propuestos a lo largo del estudio. En dicho apartado se pudo observar como las ponderaciones, tanto constantes como dinámicas de cada cartera son muy similares entre sí, lo que implica comportamientos prácticamente idénticos de las distintas carteras.

## 6. APENDICE

---

**Correlación Lineal:** La correlación lineal puede ser positiva o negativa según la relación lineal entre las dos variables sea positiva o negativa. La correlación lineal es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas.

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

**Correlación de Kendall:** Mide el grado de concordancia entre dos variables. Si consideramos dos observaciones de dos variables,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  diremos que ambos pares son concordantes si  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$  y discordantes en caso contrario

$$\tau_{xy} = \frac{Nc - Nd}{0,5 N(N - 1)}$$

Donde "Nc" y "Nd" son el número de pares concordantes y discordantes respectivamente; N corresponde con el número total de pares.

**Correlación de Spearman:** Mide la correlación de rangos entre series temporales referenciadas al mismo periodo. Para ello, se asigna a cada observación de cada serie temporal el número de orden que ocupa (rango) en la muestra cuando se esta se ordena de mayor a menor. Por tanto, cada par de observaciones  $(x_t, y_t)$  tiene asignado un rango en la muestra  $(d_{x_t}, d_{y_t})$ . De esta manera, se obtiene el coeficiente de correlación de Spearman:

$$\rho_{S,xy} = 1 - \frac{6D}{n(n^2-1)}$$

$$D = \sum_{t=1}^T (d_{x_t} - d_{y_t})^2$$

**Autocorrelación Parcial:** La Autocorrelación Parcial determina en qué medida una observación de una serie temporal está influida por las observaciones anteriores:

$$Y_t = B_{01} + B_{02}Y_{t-1} + u_{1t}$$

$$Y_t = B_{02} + B_{12}Y_{t-1} + B_{22}Y_{t-2} + u_{2t}$$

$$Y_t = B_{03} + B_{13}Y_{t-1} + B_{23}Y_{t-2} + B_{33}Y_{t-3} + u_{3t}$$

Siendo la secuencia de  $B_{11}, B_{22}, B_{33}$  la función de autocorrelación parcial de  $Y_t$ . Donde  $Y_t$  hace referencia a las rentabilidades/innovaciones de una serie financiera.



**Estadísticos AIC y BIC:** El estadístico AIC (Criterio de Información de Akaike) y el estadístico BIC (Criterio Bayesiano de Información) proporcionan la misma información que el valor alcanzado por la función de verosimilitud. Sin embargo, corrigen este valor por el número de parámetros a estimar.

Tanto en el BIC como en el AIC son preferibles valores bajos a valores altos. Ambos criterios se definen a continuación:

$$AIC = 2k - 2 \ln L$$

$$BIC = T^{-1} (k \ln T - 2 \ln L)$$

Donde " $k$ " es el número de parámetros, " $\ln L$ " es el valor de la función de log-verosimilitud y " $T$ " es el número de observaciones.

En este trabajo se han utilizado estos estadísticos para comparar los modelos de volatilidad en la primera etapa (GARCH, AGARCH y GJR-GARCH), así como para comparar las distintas cópulas analizadas en la segunda etapa.

**Cópula Bivariante:** Las cópulas bivariantes son funciones bidimensionales. Todas ellas tienen las siguientes propiedades:

$$C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$$

$$C(u_1, 1) = u_1 ; C(1, u_2) = u_2$$

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(v_1, u_2) - C(u_1, u_2) \quad 1$$

Para todo  $u_i, v_i$  en  $[0,1]$  con  $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$

Donde  $u_1 = F_1(x_1)$  y  $u_2 = F_2(x_2)$  son los números uniformes obtenidos a partir de las funciones de distribución marginales de las dos variables aleatorias  $X_1, X_2$ .

**Teorema de Sklar:** Dada una función de distribución bivalente  $F(x_1, x_2)$  existe una única cópula  $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

La ecuación anterior define una función de distribución bivalente con distribuciones marginales  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$ .

Diferenciando en la expresión anterior con respecto a ambas variables obtenemos la función de densidad de la cópula en términos de las funciones de densidad de las marginales:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1, x_2} = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)} \frac{\partial F_1(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial F_2(x_2)}{\partial x_2}$$

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f(x_1) f(x_2)$$

Por el contrario, si  $x_1$  y  $x_2$  son independientes, entonces:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1) F_2(x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

**Cóputas cota superior e inferior de Fretchet:** Sabemos que  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$  toman valores comprendidos en el rango  $[0,1]$ , es decir, son números uniformes.

Cuando ambas variables tienen dependencia perfecta positiva se formula la Cóputa cota-superior de Fretchet:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Ninguna otra cóputa puede tomar un valor superior al de esta.

Por otro lado, se forma la Cóputa cota-inferior de Fretchet cuando las variables tienen dependencia perfecta negativa.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n; 0)$$

En este caso, ninguna otra cóputa puede tomar un valor inferior a esta.

**Cóputas Implícitas:** Las cóputas implícitas son aquellas que se derivan a partir de una distribución multivariante conocida, como por ejemplo la cóputa gaussiana o la cóputa t-Student. Por ejemplo, la cóputa gaussiana se obtendría como sigue:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Donde  $\Phi_n$  es la función de distribución Normal multivariante.

**Cóputas Arquimedianas:** Al contrario de las cóputas Implícitas, las cóputas Arquimedianas se basan en una función generatriz  $\Psi(u)$ . En estos casos, las cóputas se definen de la siguiente manera:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1), \dots, \Psi(u_n))$$

Como ejemplo de función generatriz, a continuación se muestran las funciones generatrices de dos de las cóputas Arquimedianas más comúnmente utilizadas (Cóputa de Clayton y Cóputa de Gumbel):

$$\Psi(u)_{clayton} = \alpha^{-1}(u^{-\alpha} - 1); \alpha \neq 0$$

$$\Psi(u)_{Gumbel} = -(\ln u)^\delta; \quad \delta \geq 1$$

**Dependencia en las colas:** La dependencia en las colas entre dos variables se obtiene a partir la cópula, por lo tanto, es un valor determinado por la cópula empleada. La dependencia en cada cópula se obtiene a partir de los parámetros que rigen la cópula. Por tanto, dependiendo de la cópula, se determina la dependencia en la cola inferior, en la cola superior, o en ambas colas.

$\lambda_u = 0$  Entonces las variables involucradas en la cópula son asintóticamente independientes en la cola superior, mientras que si  $\lambda_u \in (0,1]$  las variables que componen la cópula son asintóticamente dependientes en la cola superior. De manera análoga, cuando  $\lambda_l = 0$  las variables son asintóticamente independientes en la cola inferior, mientras que si  $\lambda_l \in (0,1]$  las variables son asintóticamente dependientes en la cola inferior

**Función de distribución empírica:** La función de distribución empírica asigna a cada observación de una muestra la frecuencia relativa acumulada. De esta manera se tiene una función de distribución muestral que se aproxima a la función de distribución poblacional:

$$F_n(x) = P(X_i \leq x) = \frac{N(x)}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde  $N(x)$  es el número de observaciones de la muestra que son menores que  $x$

## 7. BIBLIOGRAFIA

---

1. Carlo Alexander and Emese Lazar (2006) "Normal Mixture GARCH(1,1): Applications to exchange rate modeling".
2. Claudia Czado, Ran Zhang and Aleksey Min (2009) "Efficient maximum likelihood estimation of copula based meta t-distributions".
3. Tae-Hwy Lee and Xiangdong Long (2005) "Copula-based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors".
4. Eric Jondeau and Michael Rockinger (2002) "Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model".
5. Markus Haas, Stefan Mittnik and Marc S. Paoletta (2005) "Multivariate Normal Mixture GARCH".
6. Pranesh Kumar (2009) "Probability Distributions and Estimation of Ali-Mikhail-Haq Cópula".
7. Wei Sun, Svetlozar Rachev , Stoyan V. Stoyanov and Frank J. Fabozzi (2006) "Multivariate Skewed Student's t Copula in Analysis of Nonlinear and Asymmetric Dependence in German Equity Market".
8. Christ Church (2012) "The Asymmetric t-Copula with Individual Degrees of Freedom".
9. Arthur Charpentier, Jean-David Fermanian and Olivier Scaillet (2006) "The Estimation of Copulas: Theory and Practice".
10. Mario Cerrato, John Crosby, Minjoo Kim and Yang Zhao (2013) "Modeling Dependence Structure and Forecasting Market Risk with Dynamic Asymmetric Copula".
11. Andrew J. Patton (2006) "Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence".
12. Andrew J. Patton (2004) "On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation".
13. Carol Alexander and Emese Lazar (2004) "The Equity Index Skew, Market Crashes and Asymmetric Normal Mixture GARCH".
14. Tim Bollerslev (2009) "Glossary to ARCH (GARCH)".
15. Per Thastrom (2008) "Dynamic conditional correlation models in a multiple financial asset portfolio".
16. Angel Leon and Manuel Moreno (2015) "Lower Partial Moments under Gram Charlier Distribution: Performance Measures and Efficient Frontiers", Working Paper.
17. Kazim Azam; "Dependency Analysis between Foreign Exchange Rates: A Semi-Parametric Cópula Approach".
18. Claudia Czado, Ulf Schepsmeier and Aleksey Min (2010) "Maximum likelihood estimation of mixed C-vines with application to exchange rates".
19. Marcelo Brutti Righi and Paulo Sergio Ceretta (2012) "Global Risk Evolution and Diversification: A Copula-DCC-GARCH Model Approach".
20. Alexandra Wiesinger (2010) Risk-Adjusted Performance Measurement
21. Jean-Philippe Peters (2001) "Estimating and forecasting volatility of stock indices using asymmetric GARCH models and (Skewed) Student-t".
22. Bruce E. Hansen (1994) "Autoregressive Conditional Density Estimation".
23. Brutti Righi, Marcelo; Ceretta, Paulo Sergio (2012) "Global Risk Evolution and Diversification: A Copula-DCC-GARCH Model Approach".

24. Hans Manner & Olga Reznikova (2009) "A Survey on Time-Varying Copulas: Specification, Simulations and Application"
25. Jianjun Gao, Ke Shou, Duan Li and Xiren Cao (2014) "Dynamic Mean-LPM and Mean-CVaR Portfolio Optimization in Continuous-Time"
26. Harry M. Markowitz (1959) "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments"
27. David N. Nawrocki (1991) "Optimal Algorithms and lower partial moment: ex post results".
28. Craig Rowland & J.M Lawson (2012) "The Permanent Portfolio".