

CÁLCULO EFICIENTE DEL CVA PARA CARTERAS REALES DE RENTA FIJA

Samuel A. Jiménez Jiménez

Trabajo de investigación 008/015

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Álvaro Montealegre
Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha



MÁSTER EN BANCA Y FINANZAS CUANTITATIVAS

TESINA FINAL DE MÁSTER

**Cálculo eficiente del CVA para carteras
reales de Renta Fija**

Autor:

SAMUEL A. JIMÉNEZ JIMÉNEZ

Tutores:

ÁLVARO MONTEALEGRE

MANUEL MORENO

Julio de 2015

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer la exhaustiva, desinteresada y excelente atención que he recibido por parte de Álvaro Montealegre durante el desarrollo de este trabajo, sin su estrecha colaboración no hubiese sido posible finalizar esta tesina. Por otro lado, quiero agradecer a mi también tutor Manuel Moreno, por sus comentarios y contribución al desarrollo del mismo.

Me gustaría también agradecer a todo el equipo de CRF las facilidades y apoyo que desde un inicio me brindaron, gracias a los cuales el día a día de este trabajo resultó más sencillo. Así mismo, quiero reconocer la predisposición mostrada por el equipo de Validación de Modelos del Banco Santander para tratar de resolver los posibles problemas y/o cuestiones que surgieran durante el desarrollo del trabajo.

Quiero dar las gracias a Mayte por su incondicional apoyo desde el inicio de este máster en septiembre de 2013. Sus palabras de aliento en los momentos más difíciles han sido fundamentales para poder llegar a concluir este trabajo. Finalmente, a mis padres los cuales desde un inicio se han centrado en hacer la vida más sencilla a sus hijos para que estos fuesen capaces de llegar lo más lejos posible. Este trabajo fin de máster es el fruto de tantos años de esfuerzo y dedicación por su parte.

A todos los nombrados aquí, como a los que no lo han sido pero han estado presentes durante todo este tiempo, simplemente gracias.

Índice

1. Introducción	8
2. Nuevo Marco de Valoración de activos	12
2.1. Procedimientos de Valoración. Pre y Post Credit Crunch	13
2.1.1. Procedimiento de Valoración Pre-Crisis	13
2.1.2. Procedimiento de Valoración Post-Crisis	14
2.2. Valoración de productos bajo el nuevo marco	16
2.2.1. Definición de las curvas forwards	16
2.2.2. Forward Rate Agreement - FRA	16
2.2.3. Swap (Fijo - Flotante)	17
2.2.4. Swap/Basis Swap (Flotante - Flotante)	18
2.2.5. Cross Currency Swap - CCS	19
3. Riesgo de contrapartida. CVA	21
3.1. Derivación matemática CVA	23
3.1.1. Fórmula general de valoración para CCR Unilateral	24
3.2. Cálculo del (U)CVA	27
4. Thin Out	30
4.1. Notación Previa	30
4.1.1. Esquema de pagos	31
4.1.2. Pagos variables	31
4.1.3. Operador valor actual	33
4.2. Procedimiento 'Thin Out'. Optimización de flujos	33
4.3. Súper Productos	35
4.3.1. Súper Swap	35
4.3.2. Súper Cross Currency Swaps	35
4.4. Valoración de portfolios de Swaps/CCS de gran tamaño	36
4.4.1. Valoración Full PS	36
4.4.2. Valoración Thin-Out PS	37
5. Diseño y construcción de la herramienta	39
5.1. Descripción de la herramienta	39
5.2. Procesos de desarrollo	40

5.2.1.	Requisitos del Usuario - RU	41
5.2.2.	Requisitos del Software - RS	43
5.2.3.	Diseño Arquitectónico - DA	44
5.2.4.	Diseño Detallado y Producción - DD	44
6.	Calculadora de CVA	47
6.1.	Portfolio	47
6.2.	CVA	50
6.3.	Curves y Volatility cube (EUR - GBP)	51
6.4.	CDS	53
7.	Resultados	54
7.1.	CVA	54
7.2.	Eficiencia computacional de la valoración	58
7.2.1.	Cartera mixta (Swaps/CCS)	60
7.2.2.	Cartera de Swaps	61
7.2.3.	Distribuciones de futuros precios	63
7.3.	Sensibilidades	64
8.	Conclusiones	68
9.	Anexo I: Modelo Hull & White de un factor	75
9.1.	Definición del modelo	75
9.2.	Derivación de bonos cupón cero	75
9.3.	Derivación del Factor de Descuento Estocástico	78
9.4.	Derivación del modelo Hull & White Multi-Divisa	79
9.5.	Valoración de productos en el entorno Hull & White	80
9.5.1.	Valoración de Swaps	81
9.5.2.	Valoración de CCS	82
9.5.3.	Valoración de Swaptions	83
10.	Anexo II: Calibrado del modelo Hull & White.	87
10.1.	Supuestos paramétricos del modelo.	87
10.2.	Proceso de calibración.	89
11.	Anexo III: Valoración de Swaption - Black'76	92

12. Anexo IV: Calibración de Probabilidades de Default	93
12.1. Credit Default Swap - CDS	93
12.2. Forward CDS.	94
12.3. Modelización del evento de default	94
12.4. Valoración de CDS	95
12.5. Relación $\lambda_t - s(t)$	96
12.6. Prima CDS Forward	96
12.7. Proceso de calibración	97
13. Anexo V: Conceptos básicos de Ingeniería del Software	99
13.1. Procesos de Desarrollo	99
13.2. Ciclos de vida del Software	100

Índice de figuras

1.	Basis Spread.	13
2.	Tres tipos de riesgo.	21
3.	Casos de uso. Datos y Calibración.	42
4.	Casos de uso. Calcular Exposición.	42
5.	Casos de uso. CVA.	43
6.	Arquitectura Aplicación.	44
7.	Diagrama de clases. Calibración.	45
8.	Diagrama de clases. Valoración.	46
9.	Diagrama de clases. CVA.	46
10.	Aplicación. Pestañas.	47
11.	Aplicación. Cartera	48
12.	Aplicación. CVA	50
13.	Aplicación. Curvas y Calibrado.	52
14.	Aplicación. Cubo de volatilidad.	53
15.	Aplicación. Curva de CDS.	53
16.	Perfil de Exposición Swap (Par).	54
17.	Perfil de Exposición CCS.	55
18.	Cartera de Swaps.	56
19.	Cartera de CCS.	56
20.	Cartera Mixta.	56
21.	Intensidades de Default.	57
22.	Probabilidades de Supervivencia.	57
23.	Intensidades de Default. (+50 BPS).	58
24.	Probabilidades de Supervivencia (+50 BPS).	58
25.	Relación de optimización entre métodos.	63
26.	Distribución de precios futuros. Cartera 100 Swaps/CCS.	64
27.	Distribución de precios futuros. Cartera 1000 Swaps/CCS.	64
28.	Cartera.	66
29.	Sensibilidades.	67
30.	Diagrama de flujos del Calibrado.	90
31.	Función de volatilidad - EUR.	91
32.	Función de volatilidad - GBP.	91

33.	Ciclos de vida. Clásico o en cascada.	100
34.	Ciclos de vida. Aproximación incremental.	101
35.	Ciclos de vida. Aproximación Evolutiva.	101
36.	Ciclos de vida. Basado en Componentes.	102

Índice de cuadros

1.	Efectividad del acuerdo de netting.	57
2.	CVA para una cartera 100 Swaps/CCS.	60
3.	CVA para una cartera 1000 Swaps/CCS.	61
4.	CVA para una cartera 100 Swaps.	61
5.	CVA para una cartera 1000 Swaps.	61
6.	CVA para una cartera 100 Swaps. Igual fecha de inicio.	62
7.	ICVA.	66
8.	Ciclos de vida del Software.	102

1. Introducción

Durante la pasada crisis financiera que empezó en 2007, la quiebra de grandes entidades hizo reflexionar al sector acerca del riesgo de crédito implícito que se asumía en cada operación, sobre todo el relacionado con las grandes entidades que hasta el momento eran consideradas libres de riesgo. Esto provocó la necesidad de replantearse las clásicas teorías de valoración, dando por insuficientes los supuestos que en estas se asumían. Este nuevo planteamiento tuvo principalmente dos consecuencias:

- La primera de ellas hace referencia a la pura valoración de derivados de renta fija. Los profesionales del sector acordaron, basándose en un enfoque empírico, una nueva teoría de valoración de estos activos fundamentada en la creación de tantas curvas de tipos de interés como tenors posibles hubiesen en el mercado, todo ello bajo unos criterios de homogeneidad: En primer lugar, todo derivado de tipos de interés debería ser valorado y cubierto usando instrumentos plain vanilla¹ cuyo tenor subyacente fuese el mismo. Finalmente, todo flujo de caja futuro generado a partir de cualquier curva de tipos debería ser descontado utilizando una única e independiente curva de tipos de interés, llamada curva de descuento. Con lo cual, se pasó de tener una única curva para valorar y descontar a tener múltiples curvas para valorar y una única para descontar, hecho que hizo más compleja la teoría de valoración.
- La segunda, sin embargo, está relacionada con la teoría general de valoración de derivados, independientemente del activo subyacente con el que se negocie. Históricamente, el tipo de interés al cual las grandes entidades prestaban y pedían prestado dinero fue considerado libre de riesgo, lo que resultó del llamado concepto 'too big to fail', que se refiere al hecho de que este tipo de contrapartidas se consideraban demasiado importantes como para quebrar. No obstante, como se pudo comprobar con la relevante quiebra de Lehman Brothers, tal teoría fue al menos imprudente. Esta nueva situación, caracterizada por el constatado hecho de ausencia de contrapartidas libres de riesgo, llevó al sector a introducir el valor del riesgo de crédito asumido en la operativa de derivados como un ajuste en el precio de los mismos, contemplando de esta manera la posible pérdida esperada en caso de que la contrapartida con la que se cierra un determinado contrato quiebre. Este ajuste, por lo tanto, debe tener en cuenta el precio esperado de tal activo en el momento de default de la empresa, así como el porcentaje del valor del mismo

¹Intrumento Plain Vanilla: Activo derivado sencillo cuyo subyacente, en renta fija, es el tipo de interés. Un swap es un intrumento plain vanilla.

que es recuperado y, por último, la probabilidad de que este evento de crédito suceda. Este nuevo ajuste incorporado a la valoración fue llamado Credit Value Adjustment, CVA. Adicionalmente a esto, se desarrollaron diversas prácticas con el único objetivo de mitigar este nuevo riesgo que, de repente, empezó a ser analizado, medido y gestionado. Una de ellas es el llamado acuerdo de netting a través del cual dos contrapartidas dadas se comprometían a, en caso de que una de ellas hiciese default, valorar las posiciones abiertas en ese momento entre ambas y compensarlas. De esta forma, la exposición y la consecuente pérdida se verían reducidas. Un amplio desarrollo de este nuevo marco de valoración, sobre diferentes clases de activos, está expuesto con alto nivel de detalle en .

Por lo tanto, el mercado de activos derivados de renta fija pasó en muy poco margen temporal de una valoración sencilla, utilizando una única curva de tipos de interés, la cual no era ajustada debido a que las contrapartidas con la que se negociaban se consideraban libres de riesgo, a un mercado complejo en el cual los precios dependían no sólo del tenor que subyacía al producto, sino también de la contraparte con la que se cerraba. La consecuencia directa de esto fue una reducción del volumen de negociación de productos exóticos y un aumento de la liquidez de los activos plain vanilla sobre tipos de interés.

Esta nueva problemática de cómo el nuevo marco de valoración multicurva se ha incorporado a la valoración del riesgo de contrapartida ha motivado muchas investigaciones. Por ejemplo, varios estudios de cómo se modela este entorno de valoración de renta fija son presentados en [6], [7], [14] y [15]. Adicionalmente, para profundizar más en todo lo que envuelve al riesgo de contrapartida los libros [4] y [5] exponen el tema de una manera gradual, comenzando por los conceptos básicos en los que se fundamenta el riesgo de contrapartida, y abarcando toda la situación generada a partir de este.

Por otro lado, es un hecho que las grandes entidades financieras mantienen en sus carteras una gran cantidad de activos, los cuales han sido cerrados, en muchos casos, con la misma contrapartida. Además, también es una realidad la dificultad que esto supone para su valoración ya que existen relevantes limitaciones tecnológicas para llevar a cabo los procedimientos de valoración que idealmente requiere tal cantidad de productos financieros. Esta situación lleva a los equipos de pricing a tomar ciertas decisiones, como pueden ser relajar y/o eliminar determinados supuestos de los modelos y/o disminuir la precisión de los cálculos, entre otras, tratando de reducir así el alto coste computacional de las mismas. Es por ello que el eficiente desarrollo e implementación de las metodologías de valoración se vuelve indispensable para

la correcta medición y gestión de los diferentes riesgos que cualquier entidad mantiene, por deseo o no, en cartera.

En este contexto se enmarca este trabajo, el cual trata de valorar el riesgo de contrapartida (CCR) de una cartera de productos de renta fija de una manera eficiente, contemplando el nuevo paradigma de valoración adoptado por el sector tras el credit crunch del pasado 2007. El objetivo de este trabajo es diseñar y desarrollar una herramienta capaz de calcular el CVA de carteras de instrumentos derivados plain vanilla de tipos de interés de una manera computacionalmente óptima, la cual sea intuitiva, de fácil implementación y aporte al usuario de la misma una gran flexibilidad para la inserción y modificación de datos, creación de carteras, cómputo de CVA y de ciertas medidas de sensibilidad de este ajuste a la valoración con respecto a los parámetros que lo definen. Además, la herramienta ha sido diseñada para que sea totalmente autosuficiente, entendiéndose como la capacidad de la propia aplicación para calibrar los parámetros necesitados por los modelos que subyacen a la misma utilizando, para ello, datos de mercado.

El motor de simulación y valoración desarrollado se basa en el algoritmo publicado en [1]. Este algoritmo trata de calcular la exposición de una cartera de gran tamaño de swaps de una manera computacionalmente eficiente, proyectando los constantes flujos de caja de la misma sobre unos vértices menos frecuentes, obteniendo así una reducción de los flujos utilizados para la valoración del portfolio. En este trabajo este procedimiento es aplicado sobre los esquemas de pagos generados por swaps y cross currency swaps. Debido a que la valoración de este último depende de dos divisas y de su tipo de cambio (FX) la librería de valoración es capaz de trabajar con dos monedas distintas, así como con la dinámica que define. Este motor, además, implementa dos modelos Hull & White de un factor de tipos de interés para modelizar el comportamiento de cada una de las divisas. La elección de este modelo de tipos se fundamenta en que se ajusta perfectamente² a la curvas observadas en el mercado y es un modelo cuya calibración de parámetros no presenta gran complejidad.

En las dos primeras secciones de este documento se puede encontrar una descripción de la problemática generada a partir de 2007 y cuáles fueron las medidas adoptadas por el sector, tanto en lo que a la pura valoración de instrumentos de renta fija se refiere, en la sección

²Por perfectamente se entiende que es capaz de replicar la curva de bonos actual del mercado, motivo por el que permite recuperar los precios de swaps y swaptions cotizados en ese instante.

(2), como a la correcta valoración de derivados considerando el riesgo de incumplimiento real implícito a cualquier contraparte, en la sección (3). Estas medidas también han sido contempladas en este trabajo. Posteriormente, en la sección (4) se define el algoritmo utilizado para implementar un motor de valoración computacionalmente eficiente. En las secciones (5) y (6) se puede encontrar el proceso seguido para el diseño y construcción de la herramienta, así como la funcionalidad e interfaz que proporciona al usuario. Finalmente, en la sección (7) se analizan los resultados desde un punto de vista financiero, mostrando diferentes perfiles de exposición, la importancia del concepto de netting en la mitigación del CCR, etc; y desde el punto de vista de la eficiencia computacional generando grandes carteras de productos y midiendo el tiempo requerido en la valoración del CCR de las mismas. Adicionalmente, se incluye una serie de anexos en los cuales se detalla en profundidad la obtención de las fórmulas de valoración de los bonos cupón cero, para ambas divisas, en el entorno Hull & White (Anexo I), el algoritmo utilizado para calibrar los parámetros de estos modelos utilizando datos de mercado (Anexo II), la valoración de swaptions cotizados en el mercado (Anexo III), el proceso de calibración de las intensidades de default a partir de los CDS de mercado de una contraparte (Anexo IV) y, por último, se definen algunos conceptos de ingeniería del software utilizados para la construcción de la herramienta (Anexo V). Para profundizar y obtener una mayor comprensión de lo expuesto en los Anexos II y III puede ser consultado [2], y [13] para el Anexo (IV).

2. Nuevo Marco de Valoración de activos

Hasta la crisis de liquidez y crédito de 2007, las cotizaciones en el mercado de tipos de interés seguían las clásicas reglas de no arbitraje. Por ejemplo, los bonos con cupón variable cuyo pago del cupón era in arrears³ cotizaban a la par al inicio de la vida del bono, independientemente del tenor que subyacía al bono. Otro ejemplo se podía ver en los forward rate agreements (FRA's), el cual tiene un payoff que podía ser replicado con una posición larga y otra corta en dos depósitos, cuyo tipo de interés forward implícito difería ligeramente del correspondiente obtenido con la curva Overnight Indexed Swap (OIS)⁴.

Estas consistencias entre tipos de interés permitían construir una curva cupón cero bien definida, usando tanto las conocidas técnicas de bootstrapping como diferentes métodos de interpolación. Las diferencias entre tipos de interés similares siempre han estado presentes, pero hasta entonces eran consideradas despreciables. Por ejemplo, diferentes swaps con el mismo vencimiento, pero basados en tenors de tipos de interés variables diferentes (Euribor 3M y Euribor 6M, por ejemplo) eran negociados en el mercado con un spread positivo pero despreciable. la exposición

Tras el 2007 estas diferencias aumentaron drásticamente. De repente, los tipos de interés de mercado que habían sido consistentes con las clásicas teorías de valoración presentaron grandes inconsistencias, que requirieron una reformulación más compleja de las metodologías de valoración. Un ejemplo de este crecimiento repentino fue la cotización de los Basis Swap Spread (BSS). Este BSS se define dentro del contexto de valoración de swaps, más específicamente en la valoración de swaps en los que ambas patas pagan cupones variables. Hasta 2007 la diferencia de valoración entre una pata cuyo pago está condicionado a la evolución del Euribor3M y otra en la que el pago está condicionado a la evolución del Euribor12M, por ejemplo, eran despreciables. El Basis Swap es precisamente el spread adicional que es necesario añadir a una de las patas (generalmente a la de menor frecuencia de pagos) para que ambas posiciones sean equivalentes. A partir del 2007 este spread creció de manera explosiva siendo necesario abandonar la idea de despreciarlo en la valoración, lo cual hizo inviable continuar con la teoría de valoración tal y como se conocía hasta ese momento.. Este hecho se interpretó en términos de que cada tenor de la curva Euribor lleva asociado una prima por liquidez y riesgo de crédito.

³In arrears: Pago de cupón al inicio del periodo de devengo y no al final.

⁴OIS: Swap que intercambia una pata fija contra una pata variable asociada a un tenor diario.

El valor que alcanzó esta diferencia se puede ver con claridad en la siguiente gráfica.

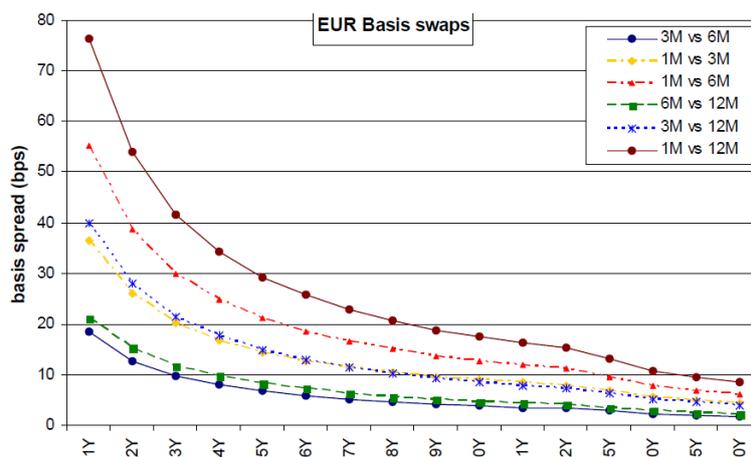


Figura 1: Basis Spread.

2.1. Procedimientos de Valoración. Pre y Post Credit Crunch

El sector acordó, basándose en un enfoque empírico, la construcción de tantas curvas de tipos de interés como tenors diferentes hubieran, típicamente 1M, 3M, 6M y 12M, bajo unos criterios de homogeneidad. Estos criterios son, entre otros, que derivados de tipos de interés con un tenor dado debían ser valorados y cubiertos usando instrumentos vanilla (sencillos) de mercado con el mismo tenor subyacente.

Los flujos de caja futuros debían ser generados utilizando la curva asociada al subyacente del derivado y posteriormente descontados utilizando otra curva que no dependa del tipo ni del subyacente ni del derivado. Asumir diferentes curvas para diferentes tenors cuestionó inmediatamente la teoría clásica de valoración, cuyo supuesto de una única y completa curva de tipos de interés utilizada para generar y descontar flujos de caja se había demostrado insuficiente.

2.1.1. Procedimiento de Valoración Pre-Crisis

El procedimiento de valoración y cobertura estándar utilizado previo a la crisis se puede resumir de la siguiente forma:

1. Seleccionar un conjunto (conveniente y líquido) finito de derivados vanilla de tipos de interés, negociados en tiempo real en el mercado con vencimientos crecientes. Una elección común en el mercado europeo era una combinación de: depósitos denominados en

EUR para el plazo más corto, para el medio plazo se elegían futuros sobre el Euribor 3M y para el largo plazo se seleccionaban swaps sobre el Euribor6M.

2. Construir una curva de tipos a partir de estos instrumentos seleccionados, utilizando típicamente el procedimiento de bootstrapping y diferentes métodos de interpolación.
3. A partir de esta estructura de tipos de interés, la cual viene definida por $C^d(r^d, t)$, generar una curva de factores de descuento asociados a esta. Los cuales siguen la siguiente relación.

$$P^d(t, T) = \frac{1}{1 + r^d(t, T)\tau_{t,T}}$$

Siendo $\tau_{t,T}$ el periodo, medido en fracción de año, entre los instantes de tiempo t y T , r^d un vector con los tipos de interés inferidos de los instrumentos de mercado y t el vector de periodos de devengo de estos tipos de interés medidos en fracción de año.

4. Calcular sobre la misma curva generada los tipos forwards implícitos a partir del precio de los bonos obtenidos.

$$F^d(t; T_1, T_2) = \frac{P^d(t, T_1) - P^d(t, T_2)}{\tau_{1,2}P^d(t, T_2)}$$

5. Utilizar estos tipos implícitos para calcular flujos de caja futuros.

$$c_i^d = \pi(F^d(t; T_1, T_2))$$

Donde π es una función que depende del tipo de interés forward.

6. Obtener el valor presente de ese flujo de caja utilizando la misma curva utilizada para generarlo.

$$PV(c_i^d) = P^d(t, T_2)c_i^d$$

Este procedimiento no contempla las fricciones de mercado ya comentadas, así como muchas otras. Como respuesta a la crisis nace la necesidad de tener en cuenta aspectos como la liquidez o el crédito. Es por esto que surge una nueva metodología de valoración.

2.1.2. Procedimiento de Valoración Post-Crisis

El nuevo marco de valoración se puede resumir en los siguientes puntos.

1. Construir una curva de descuento (colateralizada o no colateralizada) a partir de instrumentos de mercado seleccionados, utilizando típicamente el procedimiento de bootstrapping y métodos de interpolación.

2. Seleccionar múltiples conjuntos de activos negociados en tiempo real en el mercado con vencimientos crecientes. Cada conjunto de instrumentos debe ser homogéneo en cuanto al tenor subyacente de los derivados. Los tenores utilizados son típicamente 1M, 3M, 6M y 12M.
3. Calcular una curva de tipos de interés para cada conjunto de instrumentos seleccionados, utilizando el procedimiento de bootstrapping así como métodos de interpolación. Estas curvas son llamadas curvas de estimación.
4. A partir de estas estructuras de tipos de interés construir tantas curvas de precios de bonos asociados a estas como tenores subyacentes existan en el mercado.

$$P^x(t, T) = \frac{1}{1 + r^x(t, T)\tau_{t,T}}$$

Donde x puede hacer referencia a cualquier curva de estimación, esto es $x \in [1, 2, \dots, N]$. Además de la curva de precios de bonos utilizada para descontar flujos futuros generada a través de la estructura tipos de interés obtenida en 1.

$$P^d(t, T) = \frac{1}{1 + r^d(t, T)\tau_{t,T}}$$

5. Calcular sobre cada curva de estimación los tipos de interés forward a partir de precios de bonos.

$$F^x(t; T_1, T_2) = \frac{P^x(t, T_1) - P^x(t, T_2)}{\tau_{1,2}P^x(t, T_2)}$$

6. Utilizar estos tipos implícitos estimados para calcular flujos de caja futuros.

$$c_i^x = \pi(F^x(t; T_1, T_2))$$

7. Obtener el valor presente de ese flujo de caja utilizando la curva de descuento generada. Curva que, posiblemente, es diferente a la utilizada para obtener estos flujos.

$$PV(c_i^x) = P^d(t, T_2)c_i^x$$

La nueva metodología de valoración tiene en cuenta la segmentación del mercado de tipos de interés en sub-áreas, principalmente correspondiente a los tenores ya mencionados de 1M, 3M, 6M y 12M. Éstos están caracterizados, en principio, por diferentes dinámicas, liquidez y prima de riesgo de crédito, reflejando los diferentes puntos de vista e intereses de los agentes del mercado. Bajo este nuevo marco surge un nuevo procedimiento de valoración expuesto con detalle a continuación.

2.2. Valoración de productos bajo el nuevo marco

Antes de describir la valoración de los instrumentos derivados necesitamos introducir una serie de elementos sobre los cuales se construye la estructura de valoración en los mercados de renta fija.

2.2.1. Definición de las curvas forwards

Se va a suponer que existen N diferentes tenors de tipos de interés, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ a partir de los cuales se construyen curvas de tipos con su correspondiente estructura temporal. Denotamos como $P^i(t_0, T)$ al factor de descuento obtenido a partir de la curva i , siendo t_0 la fecha de referencia (actual o spot). Por otro lado, $P^i(t, T)$ indica el precio en el instante de tiempo t de un bono cupón cero cuyo vencimiento es T , con $t_0 \leq t \leq T$, de manera que se cumple que $P^i(T, T) = 1$. Asumiendo, también, que existe una curva de descuento $P^d(t, T)$ independiente utilizada para descontar flujos de caja futuros.

Sabemos que se debe cumplir la siguiente relación de no arbitraje para cada curva $x \in [1, 2, \dots, N, d]$.

$$P^x(t, T_2) = P^x(t, T_1)P^x(t, T_1, T_2) \quad (1)$$

para todo $t_0 \leq t \leq T_1 < T_2$, donde $P^x(t, T_1, T_2)$ denota el factor de descuento forward entre las fechas T_2 y T_1 establecido en el instante de tiempo t . Los tipos de interés forwards, denotados por $F^x(t; T_1, T_2)$ puede ser utilizado para obtener la expresión de valoración de este factor de descuento forward:

$$P^x(t, T_1, T_2) = \frac{P^x(t, T_2)}{P^x(t, T_1)} = \frac{1}{1 + F^x(t; T_1, T_2)\tau_{1,2}^x} \quad (2)$$

A partir de la ecuación (2) podemos derivar la siguiente relación de no arbitraje:

$$F^x(t; T_1, T_2) = \frac{1}{\tau_{1,2}^x} \left[\frac{P^x(t, T_1)}{P^x(t, T_2)} - 1 \right] \quad (3)$$

2.2.2. Forward Rate Agreement - FRA

Este es un producto financiero cuyo payoff viene dado por la siguiente expresión:

$$FRA(t; T_1, T_2, K, N) = NP^d(t, T_2)\tau_{1,2}^x \left\{ \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_d^{T_2}} [F^x(T_1; T_1, T_2)] - K \right\} \quad (4)$$

Definiendo el tipo de interés forward modificado como

$$\tilde{F}^x(t; T_1, T_2) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_d^{T_2}} [F^x(T_1; T_1, T_2)], \quad (5)$$

Por lo que se obtiene la siguiente fórmula de valoración final del FRA:

$$FRA(t; T_1, T_2, K, N) = NP^d(t, T_2)\tau_{1,2}^x \left[\tilde{F}^x(t; T_1, T_2) - K \right] \quad (6)$$

Donde $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_d^{T_2}}[\cdot]$ denota el valor esperado en el instante de tiempo t bajo la medida de probabilidad $\mathbb{Q}_d^{T_2}$ y condicionado a la filtración F_t . En la teoría clásica de valoración en la que se usaba una sola curva ($x \equiv d$), el tipo de interés forward $F^x(t; T_1, T_2)$ es martingala bajo la medida $T_2 - Forward$ (coincidiendo con $\mathbb{Q}_d^{T_2}$). Por lo tanto, se cumplía la siguiente relación:

$$\tilde{F}^x(t; T_1, T_2) = F^x(t; T_1, T_2)$$

Sin embargo, esto no sucede en el marco de valoración actual, por lo que el tipo de interés forward inferido a través de la valoración de FRA's introduce un ajuste ya que éste no es martingala bajo la medida $\mathbb{Q}_d^{T_2}$.

2.2.3. Swap (Fijo - Flotante)

Se define un conjunto de fechas, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, en las cuales la pata fija del swap paga su cupón. Adicionalmente τ_i^{fix} indica el periodo de devengo, medido en fracción de año, entre dos fechas (S_{i-1}, S_i) de pago de la pata fija. Por otro lado, se construye un nuevo conjunto de fechas, $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_m\}$, en las que paga cupón la pata variable del IRS. De la misma manera que se hizo con la pata fija, τ_i^{float} como el periodo de devengo, medido en fracción de año, entre dos fechas $(\tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i)$ de pago de la pata flotante. Atendiendo a estas definiciones se obtiene que el precio de un IRS en un instante de tiempo dado, t , es:

$$Swap(t) = \epsilon \times \left[\underbrace{R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P^d(t, S_i)}_{\text{Pata Fija}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \tau_i^{float} \tilde{F}^x(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) P^d(t, \tilde{S}_i)}_{\text{Pata Flotante}} \right] \times N \quad (7)$$

$$= \epsilon \times \left[RA(t, S) - \sum_{i=1}^m \tau_i^{float} \tilde{F}^x(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) P^d(t, \tilde{S}_i) \right] \times N \quad (8)$$

Donde $[S_0 = \tilde{S}_0]$ y $[S_n = \tilde{S}_m]$ indican el inicio y vencimiento del swap respectivamente, $RA(t, S) = \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P^d(t, S_i)$ es el annuity proporcionado por la curva d y que la frecuencia de pago de las patas del swap puede ser distinta, R es el tipo de interés fijo pagado por la pata fija y N el nominal del contrato. Finalmente, $\epsilon \in [1, -1]$ señala la manera en la cual se entra en este producto.

- Si $\epsilon = 1$ el swap es *receiver*.

- Si $\epsilon = -1$ el swap es *payer*.

Payer y *Receiver* hacen referencia a la pata fija del swap. El primer término indica que el comprador del swap paga la pata fija y el segundo que este recibe la pata fija.

El swap que cotiza en el mercado es aquel cuyo tipo de interés fijo R , es aquel que hace que al inicio del mismo su valor sea cero. Este tipo de interés, denominado *tipo Par Swap*, viene dado por la siguiente expresión:

$$R(t_0, \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}) = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i^{float} \tilde{F}^x(t_0; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) P^d(t_0, \tilde{S}_i)}{A(t_0, S)} \quad (9)$$

Estos swaps son denominados swaps At The Money (ATM).

2.2.4. Swap/Basis Swap (Flotante - Flotante)

Se consideran en este caso dos conjuntos de fechas de pago, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ y $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_m\}$ que definen las fechas de pago de ambas patas del swap, en las que ambas tienen pagos variables pero asociados a dos curvas o tenor diferentes, por ejemplo *Euribor3M* y *Euribor6M*. Se definen τ_i^x y τ_i^y como los periodos de devengo de cupón, medidos en fracción de año, de cada pata del swap. Por otro lado, se asume que las fechas de pago de la pata de menor frecuencia están incluidas en las fechas de de pago de la otra parte del swap, esto es, $S \subset \tilde{S}$. Al igual que se supuso en la sección anterior, se asume que se respeta la siguiente relación entre las fechas de inicio y vencimiento del swap: $[S_0 = \tilde{S}_0]$ y $[S_n = \tilde{S}_m]$. Atendiendo a lo comentado anteriormente se puede derivar la expresión de valoración de un Basis Swap.

$$BSw(t; \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}, Z) = N \sum_{i=1}^n \tau_i^x \left(\tilde{F}^x(t; S_{i-1}, S_i) + Z(t; \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}) \right) P^d(t, \tilde{S}_i) \quad (10)$$

$$- N \sum_{i=1}^m \tau_i^y \tilde{F}^y(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) P^d(t, \tilde{S}_i) \quad (11)$$

Donde $Z(t; \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}})$ es el ya descrito basis swap spread involucrado en la valoración de un swap flotante-flotante. Este $Z(t; \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}})$ es consecuencia directa del nuevo marco de valoración generado a partir de 2007.

Es interesante resaltar que en el marco de valoración antiguo, en el cual solo existía una curva de tipos de interés ($d \equiv x \equiv y$), en el que se satisfacía $\tilde{F}^x(t; S_{i-i}, S_i) = F^x(t; S_{i-i}, S_i)$ y

$\tilde{F}^y(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) = F^y(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i)$, se cumple que:

$$Z(t_0; \mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}) = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i^x F^x(t_0; S_{i-1}, S_i) P^d(t, S_i) - \sum_{i=1}^m \tau_i^y F^y(t_0; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i) P^d(t, \tilde{S}_i)}{\sum_{i=1}^n P^d(t, S_i)} \quad (12)$$

$$= \frac{[P^d(t, S_1) - P^d(t, S_n)] - [P^d(t, \tilde{S}_1) - P^d(t, \tilde{S}_n)]}{\sum_{i=1}^n P^d(t, S_i)} = 0 \quad (13)$$

2.2.5. Cross Currency Swap - CCS

Un Cross Currency Swap es un producto en el cual ambas patas pagan tipos de interés variables, de manera análoga al *BSw* pero denominados en distintas divisas. Existen dos tipos de CCS:

- No Reseteable: En el cual los nominales involucrados en el contrato se fijan al inicio, según esté en dicho momento el tipo de cambio, y no se modifican a lo largo de la vida del contrato.
- Reseteable: En el cual los nominales pueden variar en cada fecha de pago según el valor cotizado del tipo de cambio.

Pos simplicidad en este trabajo se utilizará el primer tipo de CCS.

En primer lugar, se definen C_1 y C_2 como dos divisas cualesquiera, por ejemplo *GBP* y *EUR*; $X(t) = \frac{C_2(t)}{C_1(t)}$ como el tipo de cambio que relaciona ambas divisas y \mathbf{S} como un conjunto de fechas, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, en las cuales ambas patas variables pagan cupón.

Atendiendo a estas definiciones obtenemos que el precio de un CCS en un instante de tiempo dado, t , es:

$$CCS^C(t) = NRFL1^C(t) - NRFL2^C(t) \quad (14)$$

Siendo:

- NRFL1: Pata flotante no reseteable en la divisa 1.
- NRFL2: Pata flotante no reseteable en la divisa 2.

$$NRFL1^C(t) = \left[-N^{C_1} P^{d,C_1}(t, S_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_1} [\tilde{F}^{x,C_1}(t; S_{i-1}, S_i) - B(t; \mathbf{S})] \tau_i^{C_1} P^{d,C_1}(t, S_i) + N^{C_1} P^{d,C_1}(t, T_n) \right] \times X_1(t)$$

$$NRFL2^C(t) = \left[-N^{C_2} P^{d,C_2}(t, S_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_2} [\tilde{F}^{x,C_2}(t; S_{i-1}, S_i)] \tau_i^{C_2} P^{d,C_2}(t, S_i) + N^{C_2} P^{d,C_2}(t, T_n) \right] \times X_2(t)$$

Siendo N^{C_1} el nominal del contrato denominado en la divisa 1, N^{C_2} el nominal del contrato denominado en la divisa 2 y:

$$X_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_1(t) \\ \frac{C_1(t)}{C_2(t)} & \text{si } C = C_2(t) \end{cases}$$

$$X_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_2(t) \\ \frac{C_2(t)}{C_1(t)} & \text{si } C = C_1(t) \end{cases}$$

Donde $\tilde{F}^{x,C_1}(t, S_{i-1}, S_i)$ y $\tilde{F}^{x,C_2}(t, S_{i-1}, S_i)$ son los dos tipos de interés forward, denominados en la divisa correspondiente y obtenidos a partir de la curva de estimación pertinente.

Finalmente, $B(t; \mathbf{S})$ es el llamado Cross Currency Basis Swap, el cual al igual que el Basis Swap Spread determina el valor a añadir (o restar) a una de las patas tal que hace que el valor del *CCS* sea cero al inicio del mismo. Este spread también puede ser interpretado como un indicador de liquidez y calidad crediticia asociado a cada mercado (foráneo y local).

Para el desarrollo de este trabajo se va a suponer, por simplicidad, que este $B(t; \mathbf{S}) = 0$, sin olvidar que es un elemento más en la valoración de este tipo de derivados.

3. Riesgo de contrapartida. CVA

Muchos de los grandes avances en la industria financiera han tenido lugar en tiempos de crisis o desastres económicos. Sistemas que se pensaban que eran válidos comenzaban a fallar, y se demostraba que en muchas ocasiones no reflejaban la realidad. Uno de los mayores avances de la industria tras la pasada crisis de 2007 se debe a que muchas instituciones han revisado y cambiado la forma de medir y valorar el riesgo de crédito, y especialmente el riesgo de contrapartida. Con el objetivo de entender mejor el desarrollo histórico del riesgo de contraparte van a ser explicados tres tipos de riesgos y cómo se relacionan entre ellos.

- Riesgo de mercado (RM): Se define como el riesgo de obtener pérdidas por movimientos en el precio de mercado de los activos. Se centra en los factores que afectan al mercado financiero como un todo y no en precios específicos.
- Riesgo de crédito (RC): Se define como el riesgo de perder dinero a través del incumplimiento de una obligación por parte de la contraparte de un contrato negociado.
- Riesgo de contraparte (CCR): Este está estrechamente relacionado con el riesgo de crédito, pero no pertenece estrictamente a tal categoría. Se define como el riesgo de que la contraparte quiebre antes de que pueda cumplir con sus compromisos. Esta definición es muy similar a la dada para el riesgo de crédito pero, a diferencia de este, el CCR cubre además de préstamos, acuerdos de recompra (Repo), y lo que es más importante, derivados OTC. Una característica importante del CCR es que involucra ambos tipos de riesgo, riesgo de crédito y riesgo de mercado. Es por esto que tratar con riesgo de contraparte no es una tarea sencilla así como entender las sinergias entre ellos.

El siguiente gráfico representa los tres tipos de riesgos descritos.

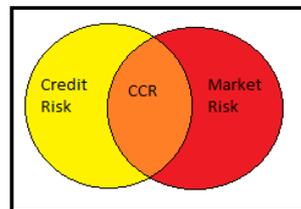


Figura 2: Tres tipos de riesgo.

Históricamente el tipo de interés al que se prestaban y pedían prestado muchas grandes instituciones financieras fue considerado libre de riesgo. Esto era debido a que por norma general estas contrapartes eran consideradas demasiado grandes e importantes como para

quebrar, concepto llamado 'too big to fail'. Sin embargo, asumir que existían contrapartidas libres de riesgo fue una práctica desacertada, como pudo comprobarse durante la pasada crisis del 2007. Por lo tanto, lo que el mercado de derivados necesitaba era una nueva medida de riesgo para permitir la fijación de precios justos incluyendo CCR. La nueva medida, CVA, fue introducida con el objetivo de ajustar el riesgo que aparece cuando se cierran derivados con cualquier contraparte.

Esta medida de riesgo se define como la diferencia de valor entre una cartera de derivados libre de riesgo y su verdadero valor, es decir, teniendo en cuenta la posibilidad de que empeore la calidad crediticia de la contraparte con la que se cierra el portfolio (o derivado). Más específicamente el valor de la cartera se calcula utilizando dos componentes:

1. Se asume, por un lado, que la contraparte es libre de riesgo y se calcula el precio del derivado en consecuencia. Obtenemos π_t^{rf} .
2. Se añade un ajuste a la valoración que recoge el riesgo de crédito adquirido en la operación.

Matemáticamente:

$$\pi_t(\text{Portfolio}) = \pi_t^{rf}(\text{Portfolio}) - \text{ajuste}_t \quad (15)$$

En el contexto del CCR existen diferentes conceptos cuyo entendimiento resulta indispensable para gestionar el riesgo de contraparte.

Uno de ellos es el llamado acuerdo de netting el cual permite a ambas partes, dado un evento de crédito, cerrar todos los contratos que estuviesen vivos hasta el momento y compensar el valor de los mismos, es decir; permite que el conjunto de activos sea visto como uno solo, de forma que los pagos a realizar puedan ser compensados y así reducir la pérdida asociada a dicho incumplimiento. A continuación se muestra un ejemplo sencillo para entender perfectamente cómo afecta la existencia de este acuerdo.

Dado un activo i , la exposición de una determinada entidad que posee ese activo en un instante de tiempo es: $\max(\pi_t^i, 0)$, ya que lo que dicha entidad puede perder si su contraparte quiebra es el valor del activo, en caso de que fuera positivo, o nada si el valor del mismo es 0 o negativo. Si en lugar de un activo la entidad en cuestión ha cerrado más de uno con la contraparte, la exposición sería:

$$\sum_i \max(\pi_t^i, 0) \geq \max\left(\sum_i \pi_t^i, 0\right) \quad (16)$$

Donde en el lado izquierdo de la expresión se tiene la exposición si no se cuenta con un acuerdo de netting, y en el lado derecho la exposición en el caso contrario. Como se puede ver, este acuerdo reduce la exposición ante un posible incumplimiento por parte de nuestra contraparte.

Otro concepto importante es el de colateralización, el cual se refiere a un acuerdo a través del cual ambas contrapartes, si es bilateral, o una de las partes, si es unilateral, se comprometen a intercambiar unas garantías que pueden ser monetarias o no, que dependen de la evolución que haya seguido durante un periodo determinado el activo (o activos) sobre el que recae este acuerdo. Para profundizar más en el tema se puede consultar [8].

3.1. Derivación matemática CVA

Una vez se ha puesto en contexto la necesidad de ajustar la valoración de derivados, de dónde nace y por qué, se va obtener matemáticamente la expresión de valoración del mismo. Sin embargo, antes es necesario introducir algunos conceptos desde un punto de vista matemático.

Exposición - E

La exposición de un contrato, por definición, es la cantidad que se puede perder ante un incumplimiento de la contraparte del contrato. La exposición depende de si el contrato es un activo o una obligación. La exposición es igual al valor presente del contrato, si es positivo, o cero en cualquier otro caso.

$$E_t = \max(\pi_t, 0) \quad (17)$$

Siendo π_t el valor de un derivado en el instante de tiempo t .

Probabilidad de Default - PD

La probabilidad de default es un término financiero que describe la calidad crediticia de una contraparte dada. Explica la verosimilitud con la que una contraparte puede incumplir un contrato durante un horizonte temporal. Esta es expresada como una función de densidad de probabilidad (PDF), la cual asigna masas de probabilidad a instantes concretos del tiempo de acuerdo con una función de probabilidad acumulada (CDF). Esta probabilidad de default no depende sólo de la calidad crediticia del deudor, también depende del entorno macroeconómico y del grado con que éste afecte a la entidad deudora. En el apéndice IV se ilustra de qué manera estas probabilidades riesgo neutrales pueden ser inferidas a partir de los precios de los CDS de mercado.

Loss Given Defalut - LGD

Existe un amplio interés del mercado en la desagregación de los componentes del riesgo de crédito. Uno de los mayores componentes es la LGD. Esta es el porcentaje de pérdidas sobre el total cuando la contraparte de un contrato cae en default.

Exposición en Default - EAD

La exposición en default no es más que el valor de la exposición en el instante de incumplimiento de la contraparte.

$$EAD = \max(\pi_\tau, 0) \quad (18)$$

Siendo τ el instante de tiempo en el que se produce el default.

3.1.1. Fórmula general de valoración para CCR Unilateral

Se denota T como el vencimiento final del payoff que va a ser evaluado. Generalmente un contrato involucra a dos partes: una será denotada B y la otra C. Se van a desarrollar los cálculos desde el punto de vista de la contraparte B, típicamente un banco. Se trabajará en el caso unilateral, por lo tanto se considera que la entidad B es libre de riesgo, y su contraparte 'C' lo acepta.

Antes de proceder hay que hacer un breve análisis sobre los flujos de caja futuros relacionándolos con el default de la contrapartida.

- Si $\tau > T$ no existe default durante la vida del producto y la contraparte no tiene problemas en pagar a sus inversores.
- Al contrario, si $\tau \leq T$ la contraparte no puede cumplir con sus obligaciones y sucede lo siguiente: En τ el valor presente (PV) del payoff es calculado, si es negativo para B este se paga completamente a C, y se cierra el contrato. Si es positivo para el inversor, solo se recuperará un porcentaje del valor actual del contrato.

Siendo τ el instante de tiempo en el que la contraparte hace default.

Antes de comenzar es importante especificar que todos los valores esperados (\mathbb{E}), utilizados como parte del desarrollo matemático, serán calculados bajo la medida de probabilidad riesgo neutral (\mathbb{Q}).

Se define $\pi(u, s)$ como el valor neto del conjunto de flujos de caja de un contrato visto desde el punto de vista de la entidad B, negociado con una hipotética contraparte libre de riesgo, entre el tiempo u y el tiempo s . En otras palabras, este es el contrato libre de riesgo entre dos contrapartes B y C antes de incluir ningún ajuste por el riesgo de contraparte. Posteriormente, se define $NPV^{rf}(t) = E[\pi(t, T)]$.

Se denota $\bar{\pi}(t, T)$ = al mismo pago futuro, pero teniendo en cuenta el posible incumplimiento de la contraparte. Se obtiene, por tanto:

$$\bar{\pi}(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\pi(t, T) + \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} [\pi(t, \tau) + P(t, \tau) (RR(NPV(\tau))^+ - (-NPV(\tau))^+)] \quad (19)$$

La ecuación anterior es la expresión general de valoración de un payoff futuro teniendo en cuenta el riesgo de contraparte. De hecho se puede observar que si la contraparte no incumple, la expresión anterior se reduce a:

$$\bar{\pi}(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}\pi(t, T)$$

y en caso de que se produzca el default:

- Los pagos producidos por el contrato previo al momento de default son/han sido pagados:

$$\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}}\pi(t, \tau)$$

y posteriormente

- Si el $NPV(\tau)$ residual es positivo, solo un porcentaje del mismo será recuperado. Este porcentaje es el llamado Recovery Rate (RR), el cual indica la tasa de recuperación asociada a la entidad C:

$$\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}}RR(NPV(\tau))^+$$

- Mientras que si este $NPV(\tau)$ tiene un valor negativo, se paga completamente su valor:

$$-(-NPV(\tau))^+ \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}}$$

Se puede probar que:

En el momento de valoración t , siempre y cuando la contraparte no haya hecho default anteriormente, el precio del payoff futuro con vencimiento T , teniendo en cuenta el riesgo de

contraparte, es:

$$\mathbb{E}_t [\bar{\pi}(t, T) | F_t] = \mathbb{E}_t [\pi(t, T) | F_t] - \underbrace{\mathbb{E}_t [LGD \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} P(t, \tau) (NPV(\tau))^+ | F_t]}_{\text{Ajuste positivo por CCR}} \quad (20)$$

$$\mathbb{E}_t [\bar{\pi}(t, T) | F_t] = \mathbb{E}_t [\pi(t, T) | F_t] - UCVA(t, T) \quad (21)$$

con

$$\begin{aligned} UCVA(t, T) &= \mathbb{E}_t [LGD \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} P(t, \tau) (NPV(\tau))^+ | F_t] \\ &= \mathbb{E}_t [LGD \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} P(t, \tau) E(\tau) | F_t] \\ &= \mathbb{E}_t [LGD \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} P(t, \tau) EAD | F_t] \end{aligned}$$

Donde se va a asumir que la LGD es siempre determinista, y que su relación con RR viene dada por la siguiente expresión: $LGD = 1 - RR$. Por otro lado, en esta expresión se da por supuesto que las contrapartidas asumen la *Risk free closeout*, la cual define que en el momento de default de la contraparte el valor del derivado es el que tendría si esta fuese libre de riesgo. Por contraposición, la *Risky closeout* especifica que el valor del derivado es el valor que tiene en el momento de default, el cual debe incluir el CVA que correspondiente a ese momento. Cabe destacar que la ISDA⁵ no se pone de acuerdo sobre qué cláusula es la que debe establecerse en los contratos.

Parece claro que el valor de un contrato, teniendo en cuenta el riesgo de crédito asumido, es la suma del correspondiente valor libre de riesgo menos un ajuste positivo. Este ajuste positivo es el denominado ajuste de valoración por riesgo de crédito (**U**)CVA, y viene dado por una opción (con strike igual a cero) sobre el NPV residual en el momento de default. El riesgo de contraparte, por tanto, añade un nivel de opcionalidad al payoff inicial. Esto convierte el valor real de un activo en un determinado momento, entendiéndose por real que se tiene en cuenta el CCR, en dependiente del modelo de valoración, incluso cuando el payoff original no lo era. Un ejemplo de esto se puede ver en la valoración de swaps, mientras que la valoración de éstos sin CCR no requiere de una dinámica del subyacente para ser valorados, basta con las curvas forwards de tipos de interés, al incluir el CCR en la valoración se necesita de un modelo para los tipos de interés subyacentes, bajo el cual seamos capaces de valorar esa opción descrita. Esto implica que incluir este CCR en la valoración no sea una tarea sencilla.

⁵ISDA: International Swaps and Derivatives Association.

La expresión anterior puede ser aproximada de la siguiente forma. Por simplicidad se supone que $t = 0$. Por otro lado, se discretiza el tiempo de manera que $t = T_0, T_1, \dots, T_n = T$. Atendiendo a esta discretización se puede escribir la expresión (6) como sigue:

$$\mathbb{E} [\bar{\pi}(0, T_n)] = \mathbb{E} [\pi(0, T_n)] - LGD \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T_{j-1} < \tau \leq T_j\}} P(0, \tau) (E_{\tau} [\pi(\tau, T_n)])^+ \right] \quad (22)$$

$$\approx \underbrace{\mathbb{E} [\pi(0, T_n)] - LGD \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T_{j-1} < \tau \leq T_j\}} P(0, T_j) (\mathbb{E}_{T_j} [\pi(T_j, T_n)])^+ \right]}_{\text{Ajuste por CCR positivo aproximado}} \quad (23)$$

Donde la aproximación consiste en posponer el instante de default al siguiente T_j . De la expresión (8), bajo independencia entre el instante de default τ y el valor del derivado π , se puede extraer un factor de la esperanza y expresar el sumatorio como producto de probabilidades de default y precio del derivado en el tiempo. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\bar{\pi}(0, T_n)] &\approx \mathbb{E} [\pi(0, T_n)] \\ &\quad - LGD \sum_{j=1}^n \mathbb{Q} \left[\mathbb{1}_{\{T_{j-1} < \tau \leq T_j\}} \right] \mathbb{E}_{T_j} \left[P(0, T_j) (\mathbb{E}_{T_j} [\pi(T_j, T_n)])^+ \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Donde finalmente queda definido el ajuste UCVA como:

$$UCVA(0, T) \approx LGD \sum_{j=1}^n \mathbb{Q} \left[\mathbb{1}_{\{T_{j-1} < \tau \leq T_j\}} \right] \mathbb{E}_{T_j} \left[P(0, T_j) (\mathbb{E}_{T_j} [\pi(T_j, T_n)])^+ \right] \quad (25)$$

De esta manera, no sería necesario un modelo que defina el instante de default, bastaría con disponer de las probabilidades de supervivencia para cada instante T_j y de un modelo de mercado para obtener el precio del derivado negociado en cuestión (π). Esto es solo posible para el caso que se ha planteado, es decir, en el que los tipos de interés y el instante de default no están correlacionados. Si no fuera así no sería posible descomponer la esperanza del producto en producto de esperanzas, por lo que se necesitaría un modelo para el instante de default.

En este trabajo se va a suponer independencia entre el instante de default y el tipo de interés que nos proporciona el Mark to Market de los derivados considerados.

3.2. Cálculo del (U)CVA

Como se ha ilustrado en (3.1.1) el cálculo de CVA requiere de la obtención de la exposición esperada futura de un derivado, el cual es una variable aleatoria. En esta sección se va a mostrar el procedimiento de simulación por Monte Carlo a seguir para obtener la exposición esperada de un derivado cualquiera, siendo fácilmente extensible a una cartera.

Se asume que el (U)CVA va a ser calculado sobre n fechas de observación. Por lo que es necesario generar m simulaciones de precios en los n instantes de tiempo. Matricialmente se obtiene:

$$\pi_{m,n} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \cdots & \pi_{1,n} \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \cdots & \pi_{2,n} \\ \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \cdots & \pi_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m,1} & \pi_{m,2} & \pi_{m,3} & \cdots & \pi_{m,n} \end{pmatrix}$$

Siendo $\pi_{m,n}$ la simulación m precio del derivado en la fecha de observación n .

Adicionalmente a esto, se requiere calcular el factor de descuento asociado a cada simulación m y cada fecha n , porque como se ha podido ver el (U)CVA se calcula a partir de la exposición futura descontada hasta la fecha actual de valoración. El factor de descuento es, también, una variable aleatoria por lo que se genera la matriz correspondiente a estos:

$$P_m(0, n) = \begin{pmatrix} P_1(0, 1) & P_1(0, 2) & P_1(0, 3) & \cdots & P_1(0, n) \\ P_2(0, 1) & P_2(0, 2) & P_2(0, 3) & \cdots & P_2(0, n) \\ P_3(0, 1) & P_3(0, 2) & P_3(0, 3) & \cdots & P_3(0, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m(0, 1) & P_m(0, 2) & P_m(0, 3) & \cdots & P_m(0, n) \end{pmatrix}$$

Siendo $P_m(0, n)$ la simulación m del factor de descuento desde la fecha actual hasta la fecha de observación n .

Por lo que el valor del derivado descontado es:

$$\pi_{m,n} \otimes P_m(0, n) = \begin{pmatrix} \pi_{1,1}P_1(0, 1) & \pi_{1,2}P_1(0, 2) & \pi_{1,3}P_1(0, 3) & \cdots & \pi_{1,n}P_1(0, n) \\ \pi_{2,1}P_2(0, 1) & \pi_{2,2}P_2(0, 2) & \pi_{2,3}P_2(0, 3) & \cdots & \pi_{2,n}P_2(0, n) \\ \pi_{3,1}P_3(0, 1) & \pi_{3,2}P_3(0, 2) & \pi_{3,3}P_3(0, 3) & \cdots & \pi_{3,n}P_3(0, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m,1}P_m(0, 1) & \pi_{m,2}P_m(0, 2) & \pi_{m,3}P_m(0, 3) & \cdots & \pi_{m,n}P_m(0, n) \end{pmatrix}$$

Donde \otimes indica la multiplicación elemento a elemento entre dos matrices.

Finalmente, la exposición esperada (EE) para cada instante de tiempo i se obtiene promediando las simulaciones del valor descontado del derivado:

$$EE_i = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \max(\pi_{j,i} P_j(0, i), 0) \right) \quad (26)$$

Una vez calibradas las probabilidades de default asociadas a una contraparte dada, es trivial calcular el CVA de un derivado. Utilizando el desarrollo matemático descrito en (3.1.1) y el matricial mostrado arriba se obtiene la expresión del ajuste unilateral de valoración por riesgo de crédito:

$$(U)CVA_0(\pi, C) = LGD \sum_{i=1}^n EE_i \times PD_C(i-1, i) \quad (27)$$

Donde:

- $(U)CVA_0(\pi, C)$ indica el valor del (U)CVA en la fecha de hoy(0), asociado al derivado π cerrado con la contraparte C .
- $PD_C(i-1, i)$ indica la probabilidad de que la contraparte C incumpla sus obligaciones entre las fechas $i-1$ e i .
- LGD indica la pérdida asociada al default de C .

4. Thin Out

Una problemática real de las grandes entidades financieras es el gran volumen de contratos que tienen que gestionar. Esto provoca problemas computacionales en las valoraciones de los productos que tienen en cartera. Sin embargo, este problema puede ser reducido si se trata de la forma adecuada.

Esta sección centra su esfuerzo en describir el proceso de optimización utilizado en el cómputo del CVA de un gran portfolio de swaps vanillas⁶ y cross currency swaps, que una entidad A podría tener cerrado con otra entidad B. Para ello, se implementa un algoritmo basado en proyectar flujos de caja futuros deterministas sobre unos vértices determinados descrito en [1]. Cabe destacar que este algoritmo es independiente del modelo de tipos de interés que subyace a la valoración de los productos, pues se basa únicamente en los flujos de caja. Es importante resaltar también que este algoritmo es perfectamente válido para realizar el mismo procedimiento sobre productos más complejos como pueden ser Swaps Amortizables, Forwards FX, etc. El único inconveniente es que no puede ser utilizado para productos que requerían ajustes de convexidad como, por ejemplo, son los denominados swaps in arrears.

Este algoritmo supone que las contrapartidas implicadas en el contrato cierran en el momento de su firma un acuerdo de netting, por el cual el riesgo de contrapartida es mitigado.

Como ya se ha mencionado en este trabajo se han utilizado dos productos de renta fija, swaps y cross currency swaps, para los cuales el algoritmo de optimización no es el mismo, aunque sí muy similar. En esta sección se describen ambos detalladamente.

4.1. Notación Previa

Es necesario introducir previamente algunas definiciones utilizadas en la especificación del algoritmo. Como se ha podido ver en la sección (2) de este documento, tanto un swap como un cross currency swap pueden ser descompuestos en una sucesión de flujos, fijos y variables, futuros. En este apartado será especificada la notación asociada a los pagos deterministas así como la manera en la que poder convertir una estructura de pagos variables en pagos fijos. Un swap estándar será utilizado a modo de ejemplo con el objetivo de clarificar la notación.

⁶Según un informe publicado por la ISDA la negociación de swaps vanillas supone aproximadamente el 60% de los activos negociados en el mundo durante el pasado año 2014. Este dato puede ser consultado en [16].

4.1.1. Esquema de pagos

Dada una sucesión de pagos fijos en unas determinadas fechas se define:

$$S_{\mathbf{t}, \mathbf{A}}$$

como una secuencia de pagos arbitrarios $\mathbf{A} = \{A_i\}$ en $\mathbf{t} = \{t_i\}$ (Un vector de cantidades será especificado en negrita). Siendo t_i el instante de tiempo donde A_i es pagado, medido en fracción de año. Esta secuencia de pagos cumple las siguientes propiedades:

- $\alpha S_{\mathbf{t}, \mathbf{A}} = S_{\mathbf{t}, \alpha \mathbf{A}}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $S_{\mathbf{t}^1, \mathbf{A}^1} + S_{\mathbf{t}^2, \mathbf{A}^2} = S_{\mathbf{t}', \mathbf{A}'}$, donde \mathbf{t}' es la unión ordenada de \mathbf{t}^1 y \mathbf{t}^2 y \mathbf{A}' el correspondiente conjunto de pagos calculados de la siguiente manera:

si $t_i \in \{\mathbf{t}^1 \cap \mathbf{t}^2\}$ la correspondiente cantidad asociada es la suma $A'_i = A_i^1 + A_i^2$.

en caso contrario $A'_i = A_j^{1,2}$ para $t'_i = t_j^{1,2}$. Donde el súper-índice indica el esquema de pagos y el sub-índice el pago al que se hace referencia.

Como bien es sabido un pago independiente de la pata fija de un swap estándar tiene la forma $R_i \tau_i^{fix} N$, donde

- R_i es el tipo de interés fijo pagado en la fecha t_i .
- τ_i^{fix} es el periodo de devengo del cupón fijo.
- N es el nominal del contrato.

Dada esta definición es trivial, por tanto, especificar la pata fija del swap utilizando la notación descrita anteriormente:

$$\text{Fix Leg}(t) \equiv S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}$$

siendo

- El conjunto de todas las fechas de pago: $\mathbf{t}_{fix} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- El conjunto de todos los cupones pagados: $\mathbf{A}_{fix} = \{R_1 \tau_1^{fix} N, R_2 \tau_2^{fix} N, \dots, R_n \tau_n^{fix} N\}$

4.1.2. Pagos variables

Atendiendo a las expresiones de valoración de un swap y CCS, detalladas en la sección (2), se cumple que dadas las siguientes tres fechas:

- Fecha de fijación del tipo de interés variable: T_1
- Fecha de pago del cupón: T_2
- Fecha de observación t .

Donde las fechas mantienen la siguiente relación: $t \leq T_1 < T_2$.

Se puede expresar el valor de un cupón arbitrario de la pata variable de un swap, a partir de precios de bonos cupón cero, de la siguiente manera.

$$\tilde{F}^x(t; T_1, T_2) = \left[\frac{P^x(t, T_1)}{P^x(t, T_2)} - 1 \right] N$$

Donde como es bien sabido $P^x(t, \cdot)$ indica el precio de un bono cupón cero obtenido a partir la curva de estimación pertinente y N el nominal del contrato. Por otro lado, se puede obtener el valor actual de este pago utilizando el bono cupón cero pertinente obtenido a partir de la curva de descuento correspondiente:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{disc}^x(t; T_1, T_2) &= \left[\frac{P^x(t, T_1)}{P^x(t, T_2)} - 1 \right] P^d(t, T_2) \\ &= [P^x(t, T_1) - P^x(t, T_2)] \frac{P^d(t, T_2)}{P^x(t, T_2)} \end{aligned}$$

Definiendo $C^{d,x}(t, T_2) = \frac{P^d(t, T_2)}{P^x(t, T_2)}$ como un cociente que relaciona las curvas de estimación y descuento dados los instantes de tiempo t y T_2 :

$$\tilde{F}_{disc}^x(t; T_1, T_2) = [P^x(t, T_1) - P^x(t, T_2)] C^{d,x}(t, T_2) \quad (28)$$

Es importante resaltar que si la relación entre fechas anteriormente comentada no se cumple y la estructura es, por tanto, $T_1 < t < T_2$ se obtiene el cupón variable a partir de la siguiente aproximación:

$$\tilde{F}_{disc}^x(t; T_1, T_2) \simeq \left[\frac{1}{P^x(T_1, t)} - P^x(t, T_2) \right] C^{d,x}(t, T_2) \quad (29)$$

La cual debido a lo cortos que suelen ser los periodos de devengo, habitualmente 3M y 6M, es razonablemente robusta.

Se puede demostrar que el valor actual del pago recibido en la ecuación (28) puede ser replicado mediante una cartera de dos activos cuyos pagos son deterministas:

- Activo 1: Paga $1 \times C^{d,x}(t, T_2)$ en el instante de tiempo T_1 .
- Activo 2: Paga $-1 \times C^{d,x}(t, T_2)$ en el instante de tiempo T_2 .

Descontados con la curva de estimación pertinente. De esta forma, el valor actual de un cupón variable puede ser expresado como un esquema de pagos fijo.

Utilizando la notación definida para ello se obtiene:

$$\tilde{F}_{disc}^x(t; T_1, T_2) \cong C^{d,x}(t, T_2) S_{\{T_1, T_2\}, \{1, -1\}} \quad (30)$$

Una vez definido el pago de un único cupón variable de una pata flotante de un swap, es trivial extender el razonamiento a toda la estructura. Suponiendo que dicha pata tiene un total de m pagos, se obtiene:

$$\boxed{\text{Floating Leg}(t) \cong S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}}$$

siendo

- El conjunto de todas las fechas de pago: $\mathbf{t}_{float} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$
- El conjunto de todos los cupones pagados:
 $\mathbf{A}_{float} = \{C^{d,x}(t, T_2), -C^{d,x}(t, T_2) + C^{d,x}(t, T_3), \dots, -C^{d,x}(t, T_m)\}$

4.1.3. Operador valor actual

Se define, a partir de un esquema de pagos arbitrario $S_{\mathbf{t}, \mathbf{A}}$, el operador que calcula el valor actual de este.

$$V_A(t, S_{\mathbf{t}, \mathbf{A}}) = \sum_{t_i \geq t}^M A_i P^{d,x}(t, t_i) \quad (31)$$

Donde el precio del bono cupón cero puede ser obtenido a partir de la curva de descuento, para aquellos pagos que provengan de la pata fija del swap, o a partir de la correspondiente curva de estimación para aquellos pagos fijos inferidos de la pata variable y el sub-índice hace referencia a los pagos sobre los que el operador actúa.

4.2. Procedimiento 'Thin Out'. Optimización de flujos

Este consiste en reducir la cantidad de flujos futuros calculados a partir de un esquema de pagos. Es necesario destacar que este procedimiento se realiza sobre flujos de caja fijos, es decir, cuya cantidad A_i pagada en t_i es conocida en el instante de valoración. El objetivo de este procedimiento es construir un esquema de pagos mucho menos denso que el inicial. Para ello se parte de un conjunto de fechas, $\mathbf{T} = \{T_j\}$, que son menos frecuentes que las iniciales pero contienen a todas estas, y de los flujos futuros a pagar. La idea básica de este procedimiento es dividir un cierto pago $\{A_i\}$ en dos, pertenecientes cada uno de estos nuevos

flujos dos fechas $\{T_1\}$ y $\{T_2\}$ adyacentes a $\{t_i\}$ cumpliendo la relación: $T_1 < t_i < T_2$.

Para explicar este algoritmo se empieza suponiendo un único flujo futuro $A_i = 1$ en t , que va a ser dividido en dos fechas adyacentes tales que $T_1 < t < T_2$:

$$1 = \begin{cases} \frac{D(t)}{D(T_1)} \frac{T_2-t}{T_2-T_1} & \text{en } T_1 \\ \frac{D(t)}{D(T_2)} \frac{t-T_1}{T_2-T_1} & \text{en } T_2 \end{cases}$$

Donde esta relación corresponde a una interpolación lineal libre de arbitraje del precio de un bono cupón cero $P(\tau, t)$, con $\tau < T_1$:

$$P(\tau, t) = P(\tau, T_1) \frac{D(t)}{D(T_1)} \frac{T_2-t}{T_2-T_1} + P(\tau, T_2) \frac{D(t)}{D(T_2)} \frac{t-T_1}{T_2-T_1}$$

Nota: $D(t)$ indica el factor de descuento determinista que corresponde a $P^d(0, t)$.

Esto puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$1 = \begin{cases} B_1 = 1 \frac{D(t)}{D(T_1)} \frac{T_2-t}{T_2-T_1} & \text{en } T_1 \\ B_2 = 1 \frac{D(t)}{D(T_2)} \frac{t-T_1}{T_2-T_1} & \text{en } T_2 \end{cases}$$

Generalizando este resultado se tiene que para un flujo de caja arbitrario, $S_{t,A}$, se obtiene un nuevo conjunto de flujos reducido, $S_{T,B}$, será:

$$\begin{aligned} B_0 &= \sum_i 1_{\{t_i < T_0\}} A_i \frac{D(t)}{D(T_0)} \\ B_j &= \sum_i 1_{\{T_j < t_i \leq T_{j+1}\}} A_i \frac{D(t_i)}{D(T_j)} \frac{T_{j+1} - t_i}{T_{j+1} - T_j} + \\ &\quad \sum_i 1_{\{T_{j-1} < t_i \leq T_j\}} A_i \frac{D(t_i)}{D(T_j)} \frac{t_i - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}} \forall j \in [1, N-1] \\ B_N &= \sum_i 1_{\{t_i \geq T_N\}} A_i \frac{D(t_i)}{D(T_N)} \end{aligned}$$

Es importante resaltar que este procedimiento mantiene el valor actual (presente) de este flujo de pagos arbitrario en el instante de tiempo inicial, es decir, cuando $t = 0$. Es trivial de demostrar que se cumple:

$$V_A(0, S_{t,A}) = \sum_i A_i D(t_i) = \sum_j B_j D(T_j)$$

Por último, ya que el procedimiento de cálculo de las cantidades B_j es independiente del modelo de tipos de interés, se puede decir que algoritmo es independiente del modelo.

4.3. Súper Productos

Un procedimiento natural para una cartera de swaps y/o cross currency swaps es la agregación de todos los pagos generados por estos en un único swap/CCS, llamado Súper Swap/CCS. Debido a las características individuales de los productos utilizados cada cartera de activos de una misma clase genera uno que los engloba a todos ellos. Este producto es llamado Súper Swap o Súper CCS dependiendo de qué tipo de productos lo hayan generado. A continuación se describe cómo se crean y cómo se valoran este tipo de productos.

4.3.1. Súper Swap

Para detallar el proceso de construcción se va a suponer que la cartera consta de un número arbitrario N de swaps subyacentes. En primer lugar, se deben agregar los pagos de las N patas fijas de la cartera. Fue demostrado en (4.1.1) que la pata fija de un único swap puede ser expresada en términos de $S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}$, lo que implica que la agregación de todas estas puede obtenerse de la siguiente manera:

$$S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{B}_{fix}} = S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^1 + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^2 + \dots + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^N$$

En segundo lugar, se agregan todos los pagos flotantes pertenecientes a cada swap. Por lo tanto, se obtiene que la estructura variable del súper swap es:

$$S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{B}_{float}} = S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^1 + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^2 + \dots + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^N$$

Que da lugar a un esquema de pago 'máster' que define el súper swap:

$$\text{Súper Swap} \equiv S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{B}_{fix}} + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{B}_{float}} \quad (32)$$

4.3.2. Súper Cross Currency Swaps

En este segundo caso se procede de manera análoga a la establecida para una cartera de swaps. Primeramente, se supone una cartera de N CCS. En segundo lugar, atendiendo a la expresión de valoración de un CCS en un instante determinado (t), así como a las definiciones previas, se calcula:

- Un esquema de pagos determinista que corresponde a los intercambios de nominales producidos entre las partes, teniendo en cuenta el tipo de cambio. Esto es:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{B}_{fix}}^C &= \left(S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_1} + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_2} + \dots + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_N} \right) \times X_1(t) \\ &+ \left(S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_2} + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_1} + \dots + S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{fix}}^{C_N} \right) \times X_2(t) \end{aligned}$$

- Un conjunto de pagos variables, que involucran ambas patas variables de los CCS, que vienen dados por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{B}_{float}}^C &= \left(S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^{C_1} + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^{C_2} + \dots + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^{C_N} \right) \times X_1(t) \\
&+ \left(S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{A}_{float}}^{C_2} + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^{C_2} + \dots + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{A}_{float}}^{C_N} \right) \times X_2(t)
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la estructura de pagos futuros que define el producto agregado:

$$\text{Súper CCS}^C \equiv S_{\mathbf{t}_{fix}, \mathbf{B}_{fix}}^C + S_{\mathbf{t}_{float}, \mathbf{B}_{float}}^C \quad (33)$$

Donde C_1 y C_2 indican las divisas que intervienen en el contrato y

$$X_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_1(t) \\ \frac{C_1(t)}{C_2(t)} & \text{si } C = C_2(t) \end{cases}$$

$$X_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_2(t) \\ \frac{C_2(t)}{C_1(t)} & \text{si } C = C_1(t) \end{cases}$$

4.4. Valoración de portfolios de Swaps/CCS de gran tamaño

Dadas las definiciones de los productos agregados, a través de su estructura de pagos, es posible obtener un precio en un instante de valoración arbitrario. Esta valoración puede hacerse de dos maneras diferentes, que serán descritas a continuación utilizando la notación especificada para esquemas de pagos fijos.

4.4.1. Valoración Full PS

Para un Súper Swap/ Súper CCS dado se tiene una 'master' estructura de pagos como la indicada en las expresiones (31) y (32), donde se dispone de pagos fijos en dos esquemas de pagos. Es importante hacer esta distinción ya que la parte de los súper productos que proviene de estructuras variables debe ser gestionada cuidadosamente. Esto se debe, principalmente, a que es necesario tener en cuenta en la valoración de la pata variable del producto tanto aquellas fechas de pago de cupón que son posteriores a la fecha de valoración, como aquellas fechas de fijación emparejadas con la fecha de pago especificada. Esta situación es la tratada algebraicamente en la ecuación (28)

Dada una fecha de valoración arbitraria, τ , el primer paso para valorar estos productos es calcular el valor actual de los flujos futuros, utilizando para ello el operador definido para tal fin en (4.1.3). De esta manera se tiene:

$$V_{\{Swap, CCS\}}(\tau) = V_{B_{fix}}(\tau) + V_{B_{float}}(\tau) \quad (34)$$

Posteriormente, es posible que existan fechas de pago de cupón variable cuya fecha de fijación es anterior a la fecha de valoración y su fecha de pago posterior. Para resolver esto se genera otro esquema de pagos, pero este hace referencia sólo a aquellas fechas de inicio de devengo de cupón variable cuya fecha de finalización de periodo sea posterior a la fecha de valoración y ya haya sido contemplado este pago en la ecuación (33). Esta problemática se tiene en cuenta de la siguiente forma:

$$V_{\{Swap, CCS\}}(\tau) \simeq V_{\{Swap, CCS\}}(\tau) + \sum_i 1_{T_{i-1} < \tau \leq T_i} B_{i, float} \frac{1}{Px(T_i, \tau)}$$

Donde el índice i recorre toda la estructura de fechas de pago variable tratando de hallar la situación que cumple $T_{i-1} < \tau \leq T_i$ y, de esta forma, valorar el producto adecuadamente.

La ventaja computacional principal de este método se encuentra en que al agregar todo el conjunto de pagos se eliminan duplicidades de cálculos (generar precios de bonos para una misma fecha) computacionalmente exigentes.

4.4.2. Valoración Thin-Out PS

Este procedimiento comienza por fijar el conjunto de fechas $\mathbf{T} = \{T_i\}$ que cubren el intervalo de fechas de pago futuras, con $(T_0 \geq \tau)$, del súper producto creado. Estas fechas deben ser menos frecuentes que las que definen el esquema de pagos. Un ejemplo típico de este conjunto pueden ser fechas anualmente equiespaciadas.

Para valorar la cartera se parte del resultado generado por el método anterior. En este se obtienen tres esquemas de pago, dos que contienen a todos los pagos posteriores (pertenecientes tanto a la pata fija como a la variable del producto agregado en cuestión) y otro que pertenece a los flujos de caja de pertenecientes a cupones variables cuyas fechas de pago son posteriores a la fecha de valoración pero la fecha de inicio de devengo no.

El primer paso para valorar el portfolio de swaps siguiendo este método es aplicar el procedimiento descrito en la sección (4.2) al primer y segundo esquema de pagos, utilizando

el esquema de fechas $\mathbf{T} = \{T_i\}$. De esta forma se tiene:

$$S_{\mathbf{T}, \mathbf{D}_{fix, float}}$$

Donde

- \mathbf{T} es el conjunto de fechas sobre las cuales se ha proyectado los pagos de los esquemas.
- \mathbf{D} es el vector con los nuevos pagos proyectados sobre los vértices \mathbf{T} .

Finalmente, el último paso es definir un nuevo conjunto de fechas $\mathbf{T}' = \{T'_i\}$ para poder aplicar el procedimiento Thin-Out al tercer esquema de pagos. Estas fechas, al igual que las anteriores, deben cubrir a todas estas fechas involucradas. Como resultado se obtiene:

$$S_{\mathbf{T}', \mathbf{D}'_{float}}$$

Por tanto, la expresión de valoración queda:

$$V_{\{Swap, CCS\}}(\tau) \simeq V_{D_{fix}}(\tau) + V_{D_{float}}(\tau) + \sum_i 1_{T_{i-1} < \tau \leq T_i} D'_{i, float} \frac{1}{P^x(T_{i-1}, \tau)} \quad (35)$$

Este método de valoración presenta un menor coste computacional a la hora de hacer los cálculos, ya que evita hacer muchos cálculos vectoriales al trabajar con un número menor simulaciones de bonos (Hull & White o generados por otro modelo) futuros, lo cual reduce el tiempo de cálculo del CVA de forma considerable para **portfolios muy grandes de Swaps/CCS**.

5. Diseño y construcción de la herramienta

En esta sección del documento se va a describir, primeramente, el proceso seguido en el diseño y construcción de la herramienta que calcula el CVA de un portfolío de swaps y cross currency swaps. Lo hará centrándose principalmente en el aspecto tecnológico de la implementación más que en el financiero. Finalmente, se mostrará el producto final alcanzado tras pasar por la etapas que serán descritas a continuación.

Con el fin de obtener una mayor comprensión de lo descrito en esta sección se puede consultar el anexo V, el cual define unos conceptos básicos de ingeniería del software utilizados en el desarrollo de este trabajo.

5.1. Descripción de la herramienta

Antes de definir el proceso seguido es importante describir detalladamente el producto final para que el proceso de diseño, que aquí se expone, pueda ser seguido con facilidad. Esta sección describe en profundidad qué características debe alcanzar la herramienta en base al objetivo final de la misma.

La herramienta debe ser capaz de calcular el ajuste de valoración por riesgo de crédito asumido en una operación entre dos contrapartes. Esta operación constará de una cartera de swaps y/o cross currency swaps, los cuales han sido definidos con alto nivel de detalle en el apéndice I, sobre la cual existirá un acuerdo de netting con el objetivo de mitigar este riesgo de contraparte. Además, no existirán límites en cuanto al tamaño de la cartera, por lo que la herramienta debe ser capaz de obtener los resultados de una forma computacionalmente eficiente, tratando así de paliar una problemática real de las grandes entidades, las cuales tienen serias dificultades en recalcular sus posiciones, debido al gran tamaño de las mismas y las limitaciones tecnológicas existentes. Todo esto debe ser posible utilizando únicamente información de mercado, es decir, la aplicación debe ser capaz mediante diferentes métodos de calibración, explicados en profundidad en los apéndices II y III, de estimar los parámetros de nuestros modelos implícitos en los datos de mercado. Finalmente, con toda la información calculada, se podrán obtener diferentes sensibilidades del CVA ante variaciones en los componentes que lo determinan. Estas sensibilidades serán medidas ante variaciones de las curvas de tipos de interés, de los cubos de volatilidad, los spread de CDS de mercado y en el porcentaje de recuperación. Así mismo, el usuario debe tener la capacidad de modificar en

cualquier instante los datos del sistema, desde aquellos que afectan a la cartera de valoración, como las fechas implicadas en la valoración, como aquellos que son relevantes en los procesos de calibración.

De esta forma se identifican cuatro etapas claramente diferenciadas e independientes en el proceso de obtención del CVA de una cartera dada.

1. Calibración de los modelos: Previo a cualquier cómputo se deben calibrar tanto los modelos Hull & White subyacentes (uno para cada divisa), así como el modelo de intensidades de default. Este proceso de calibración recuperará los datos de mercado de la aplicación y devolverá al sistema los modelos preparados para la valoración.
2. Valoración de productos: Utilizando el resultado de la etapa anterior, calculará el precio de los productos financieros utilizados, atendiendo a los métodos de valoración descritos en los anexos de este documento.
3. Uno de los objetivos de este trabajo es aplicar el algoritmo de optimización de flujos de carteras de swaps descrito en la sección (4) al portfolio constituido por el usuario, de forma que el tiempo de cómputo pueda ser reducido. Esta opción aunque forma parte de la etapa de valoración, se trata de forma independiente por su propia idiosincrasia, ya que forma una capa intermedia entre la cartera y la valoración. Debe estar explícitamente disponible para el usuario en la aplicación.
4. Cálculo del CVA: Una vez la cartera ha sido valorada, utilizando el método de simulación de Monte Carlo, el usuario debe tener la opción de calcular el ajuste de valoración por riesgo de crédito de la cartera definida.

Se infiere a partir de lo comentado anteriormente que la herramienta debe tener una gran flexibilidad para añadir, borrar y/o modificar una gran cantidad de datos, así como la opción de generarlos (los que no sean de mercado propiamente) de forma automática siendo capaz de tratar por igual a ambos tipos de datos.

5.2. Procesos de desarrollo

Como bien se ha comentado anteriormente se ha seguido el modelo de aproximación evolutiva para la construcción de esta aplicación. Este paradigma establece que el producto final es consecuencia de un proceso evolutivo en el cual se detallan requisitos, se añaden al sistema

y se obtiene una nueva versión del software.

Con el objetivo de reducir la complejidad del proceso seguido en esta sección se va a mostrar la funcionalidad final alcanzada, como si este proceso hubiese iterado una única vez.

5.2.1. Requisitos del Usuario - RU

En esta sección se van a definir los requisitos de usuario de manera formal. Se utilizarán, además, para ello diferentes diagramas de casos de uso que los ilustrarán.

1. Añadir, modificar y eliminar datos de las diferentes curvas de tipos de interés.
2. Añadir, modificar y eliminar datos de los cubos de volatilidad correspondientes a swaptions cotizados en el mercado.
3. Añadir, modificar y eliminar datos de la cartera utilizada en el cálculo del CVA.
4. Añadir, modificar y eliminar los datos que relacionan ambas divisas. Estos son: las correlaciones entre divisas, el tipo de cambio existente entre las mismas y la volatilidad que se le asume al FX.
5. Calibrar los modelos Hull & White.
6. Calibrar las intensidades de default dada una estructura temporal de primas de CDS de mercado.
7. Calcular exposiciones esperadas en cualquier instantes de tiempo futuro. Utilizando los tres método de valoración descrito anteriormente. Sin optimizar, utilizado la aproximación Full PS y utilizando la aproximación Thin Out PS.
8. Valorar el riesgo de crédito (CVA).
9. Calcular sensibilidades del CVA.

Diagramas de casos de uso:

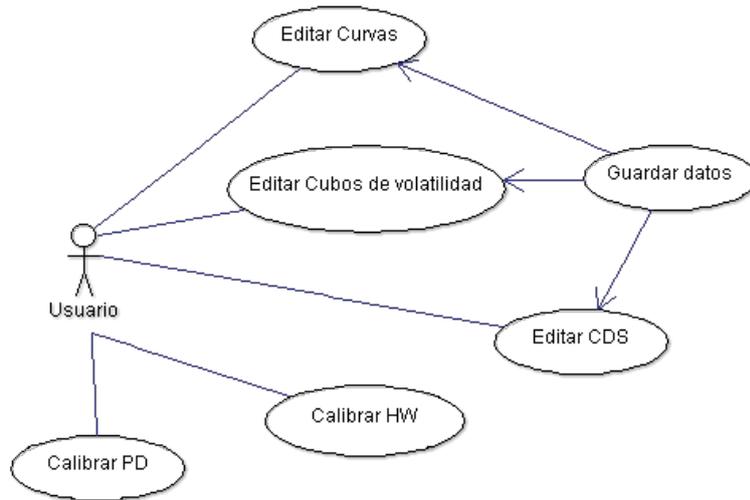


Figura 3: Casos de uso. Datos y Calibración.

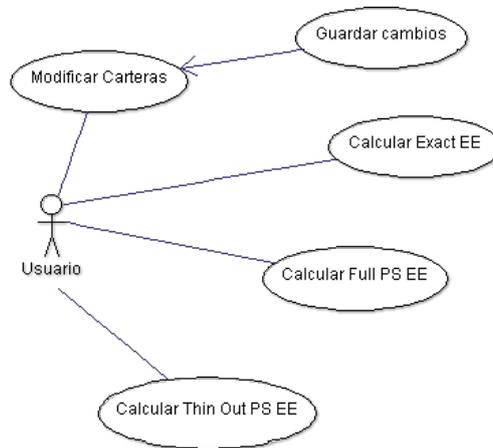


Figura 4: Casos de uso. Calcular Exposición.

Donde:

- Exact EE: Establece que la exposición esperada en un instante futuro se obtiene como:

$$\sum_i^N \max(V_t^i, 0).$$
 Siendo N el número total de activos de la cartera.
- Full PS: Define la valoración de EE utilizando la aproximación Full PS definida en la sección anterior.
- Thin Out PS: Indica que el método utilizado para el cálculo de la EE es el Thin Out descrito anteriormente.

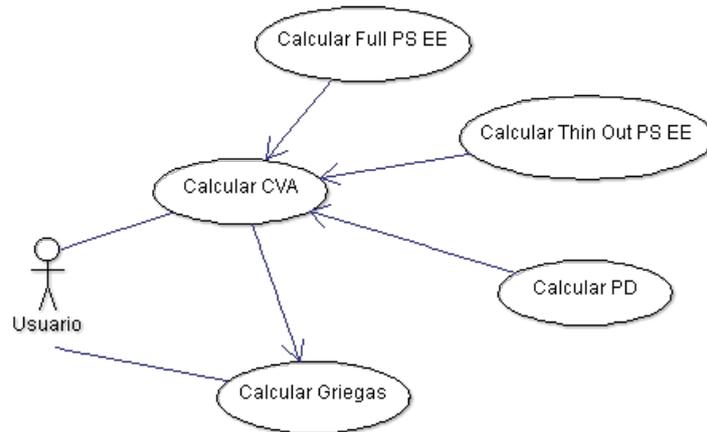


Figura 5: Casos de uso. CVA.

5.2.2. Requisitos del Software - RS

Como se ha podido observar los requisitos del usuario requieren que la aplicación sea muy flexible, tanto en lo que se refiere a la interacción con el usuario como para poder realizar modificaciones por parte del desarrollador. Por otro lado, la aplicación tendrá un gran carga matemática y computacional por lo que se establecen dos componentes claramente diferenciados: Uno que se encarga de la interacción con el usuario, de importar y exportar datos, y otro que se encarga de realizar las operaciones de manera masiva.

Los elementos elegidos son:

1. Interfaz de usuario en Microsot office Excel: Permite una gran facilidad para introducir datos así como para interactuar con el usuario de manera sencilla e intuitiva. Además permite modificaciones constantes.
2. Motor de simulación y cómputo en Matlab: Es una potente herramienta de cálculo matemático, cuyo programación orientada a objetos permite la creación de estructuras complejas como las necesarias para llevar a cabo las tareas diseñadas en esta aplicación. Su capacidad para realizar operaciones vectoriales de gran tamaño reduce de manera significativa la complejidad del problema.

Será requisito de la interfaz capturar e informar al usuario del mayor número de errores posible, minimizando así los errores producidos por la librería. Determinados datos, como por ejemplo las fechas, deben tener un formato adecuado, de no ser así es posible que el tratamiento de datos no sea el correcto y la ejecución aborte inesperadamente.

5.2.3. Diseño Arquitectónico - DA

El sistema se compondrá de los siguientes elementos:

1. Usuario
2. Interfaz (Microsoft office Excel)
3. Visual Basic for Applications: Utilizado para diferentes tareas dentro de la interfaz como generar datos automáticamente y capturar posibles errores. Se utilizará también para conectar la interfaz de usuario con el motor de simulación.
4. Matlab
5. Librería desarrollada para cumplir los objetivos de definidos. Esta implementa entre otros el motor de simulación, de optimización de flujos y de valoración.

El siguiente esquema representa el flujo que sigue la información dentro del software, especificando la tecnología usada para canalizarla.

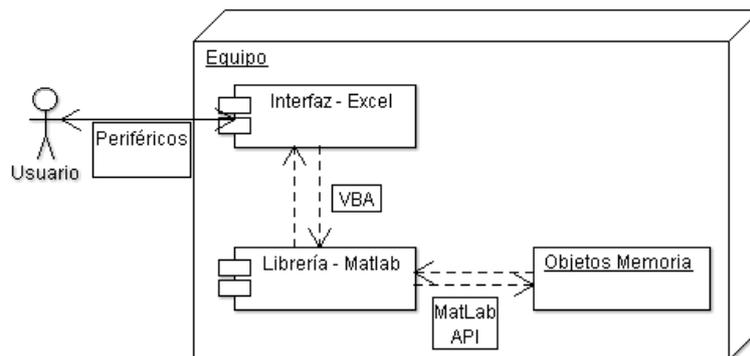


Figura 6: Arquitectura Aplicación.

El usuario interactúa con la aplicación a través de los periféricos del equipo y la interfaz diseñada en Excel. En función de las acciones de este será necesario, o no, la ejecución de alguna tarea en el motor de simulación construido en Matlab, la comunicación entre la interfaz y la librería es a través de VBA. Finalmente, es posible que la librería requiera de objetos almacenados en la memoria del equipo o, por el contrario, necesite almacenar elementos, para ello se usa la API (Application Program Interface) que proporciona Matlab.

5.2.4. Diseño Detallado y Producción - DD

Esta fase se basa en todo lo descrito anteriormente para llevar a cabo la implementación de la herramienta. Se va a utilizar la programación orientada a objetos soportada por Matlab

para crear estructuras complejas que faciliten la producción. La implementación de la librería se va a fundamentar en la clara independencia entre procesos.

El resultado de la implementación se muestra a continuación con unos diagramas que muestran la relación establecida entre los objetos de las distintas clases creadas. Cada objeto se compone de una serie de propiedades y métodos, de los cuales sólo serán especificados los métodos más relevantes.

Calibración de los modelos Hull & White

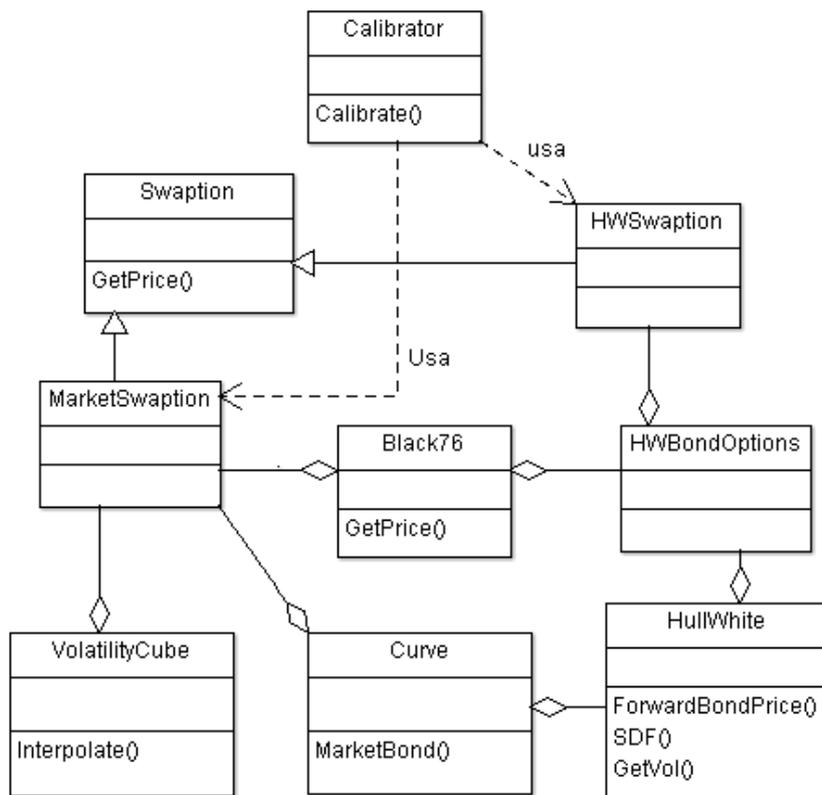


Figura 7: Diagrama de clases. Calibración.

Valoración y Optimización de Flujos

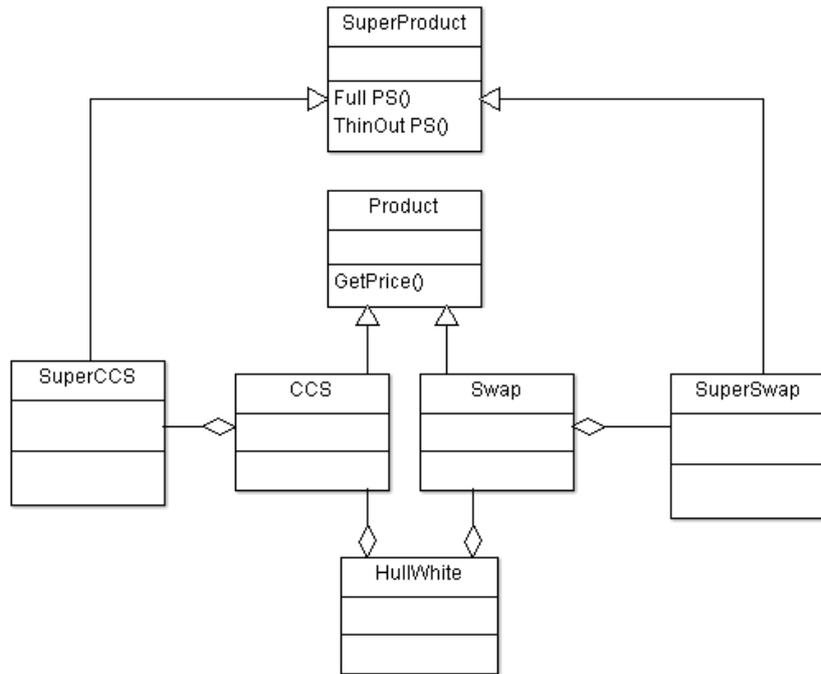


Figura 8: Diagrama de clases. Valoración.

Cálculo de CVA

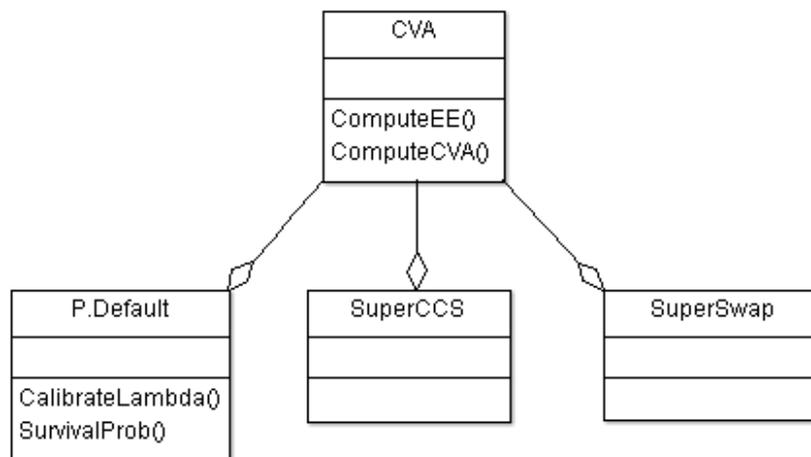


Figura 9: Diagrama de clases. CVA.

Observando las figuras (7) y (8) se puede deducir que es posible cambiar de modelo de tipos de interés, respetando simplemente la comunicación entre clases de objetos. Dicho de otro manera, tanto la valoración de swaps y CCS como el cálculo del CVA son independientes del modelo especificado, los dos únicos aspectos que son realmente importantes son la obtención de los precios de bonos cupón cero (bajo el cualquier modelo) y la forma en que las clases se relacionan.

6. Calculadora de CVA

La aplicación desarrollada consta de siete pestañas de Excel en las que se implementan los requisitos del usuario descritos anteriormente. Estas pestañas son:



Figura 10: Aplicación. Pestañas.

- **Portfolio:** Esta pestaña está diseñada para que el usuario introduzca los productos de renta fija que crea oportuno, pudiendo elegir las características individuales de cada uno. Por otro lado, y con el objetivo de facilitar el cálculo masivo, la aplicación da al usuario la capacidad de generar aleatoriamente una cartera de swaps y CCS de cualquier tamaño, sobre la que poder realizar las modificaciones que este considere. Adicionalmente, calcula la exposición esperada y CVA de la misma usando tres algoritmos diferentes. Finalmente, obtiene el CVA stand-alone de cada uno de los componentes de la cartera.
- **CVA:** Dada la cartera definida en la pestaña anterior y un conjunto de fechas es capaz de calcular el CVA de la cartera utilizando el algoritmo Thin Out PS. Además, da al usuario la posibilidad de calcular diferentes métricas de crédito y sensibilidades.
- **Curves y Volatility cube (EUR - GBP).** Almacena los datos de mercado necesarios para la calibración de nuestros modelos Hull & White en ambas divisas. Ilustra de manera gráfica las curvas y, por último, da al usuario la posibilidad de calibrar estos modelos utilizando los datos ya mencionados.
- **CDS:** Contiene las curvas de CDS de mercado cotizados para una determinada compañía y permite calibrar las intensidades de default de forma que puedan ser obtenidas las curvas de probabilidades de supervivencia.

A continuación se muestra imagen de cada pestaña incluyendo una descripción de la funcionalidad aportada al usuario.

6.1. Portfolio

Hoja de excel utilizada para crear carteras de swaps y/o CCS y valorar tanto su exposición y como su CCR en un instante de tiempo futuro.

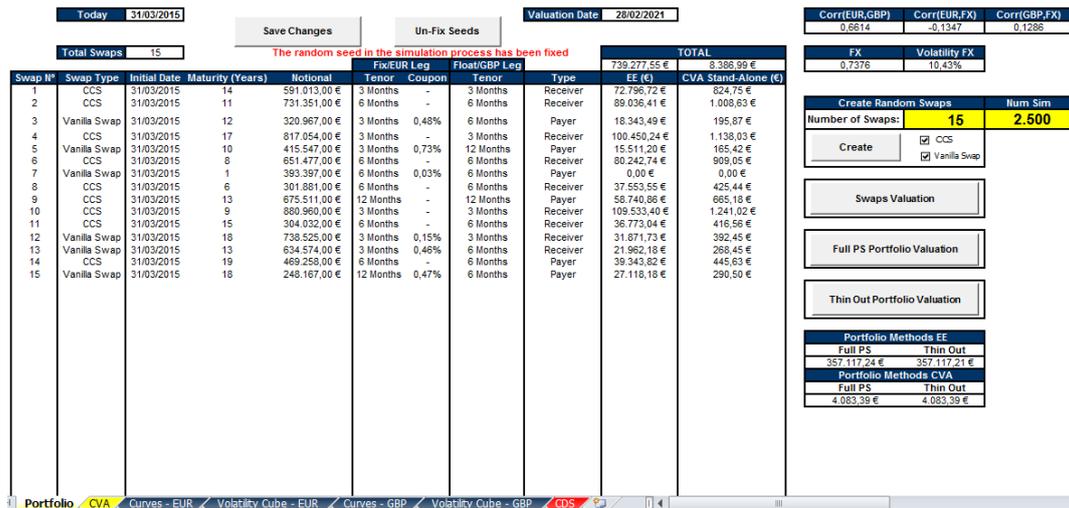


Figura 11: Aplicación. Cartera

En la parte central de imagen se puede observar la cartera creada en momento dado. Como se puede ver la tabla contiene once columnas con la información de los productos de la cartera utilizada en la valoración y del resultado de las diferentes opciones de valoración. Concretamente cada columna contiene:

- Swap N^o: Posición de cada producto dentro de la cartera. Muy útil a la hora de obtener el CVA Incremental de la cartera.
- Swap type: Indica si el activo es un swap vanilla o un cross currency swap.
- Initial date: Fecha de inicio del producto.
- Maturity: Número entero que indica el vencimiento en años del swap.
- Notional: Nominal del contrato.
- Fix/EUR Leg: Información acerca de la pata fija del vanilla swap o de la pata EUR del CCS.

Coupon: Cupón fijo del vanilla swap.

Tenor: Periodicidad del pago de la pata fija/EUR.

- Float/GBP Leg: Información acerca de la pata flotante del vanilla swap o de la pata GBP del CCS.

Tenor: Periodicidad del pago de la pata flotante/GBP.

- **Type:** Indica si el producto definido (Swap o CCS) es payer o receiver. Estos dos conceptos establecen:

Receiver: Indica que el usuario recibe la pata fija/EUR.

Payer: Indica que el usuario paga la pata fija/EUR.

- **EE:** Muestra el resultado del cálculo de la exposición esperada dada una fecha de valoración, indicada en la celda 'L2', cada uno de los swaps/CCS.
- **CVA Stand-Alone:** Indica el resultado del cálculo del ajuste de valoración aplicada a cada producto individualmente.

Adicionalmente en la columna 'TOTALES' se muestra la suma de estas últimas columnas, ilustrando el resultado de **no** aplicar netting como mitigante del CCR al portfolio creado.

La hoja de excel pone a disposición del usuario seis botones con la siguiente funcionalidad:

- **Save Changes:** El usuario tiene la posibilidad de crear una cartera aleatoria, insertar manualmente el producto deseado o de crear una cartera automáticamente y editarla. Este botón almacena los cambios realizados en los dos últimos supuestos. Al crearla de manera aleatoria los cambios son almacenados de manera automática.
- **Un-Fix Seeds:** Fija o no la semilla aleatoria utilizada en la simulación de bonos Hull & White para la valoración de la cartera. En caso de que la semilla esté fijada se muestra un mensaje como el que puede ser observado en la figura (15) avisando de la situación, si no fuera así no se mostraría ningún mensaje informativo.

Fijar la semilla aleatoria significa que se almacenan los elementos necesarios para repetir la secuencia aleatoria generada en un determinado instante de tiempo. De esta forma, los resultados recuperados por la herramienta en cualquier instante de tiempo posterior al momento de fijación serán los mismos que los obtenidos en el momento en que se fijó la semilla.

- **Create:** Crea de manera aleatoria tantos swaps como se le indique en la celda adyacente. El usuario tiene la capacidad de elegir si quiere crear una cartera de vanilla swaps, CCS o de ambos. Dispone de dos checkbox que debe utilizar para indicar su selección.
- **Swaps Valuation:** Obtiene la exposición esperada y el CVA stand-alone de la cartera. Valora la cartera a partir de la valoración individual de cada producto. Es ineficiente aunque da la opción de calcula el CVA individual.

- **Full PS Portfolio Valuation:** Valora la cartera agregando todos los flujos de caja futuros en un súper producto, por conjunto de activos, como se describió en la sección 3. Se asume acuerdo de netting entre las contrapartes.
- **Thin Out Portfolio Valuation:** Valora la cartera agregando todos los flujos de caja futuros en un súper producto, por conjunto de activos, y aplicando el algoritmo Thin Out a cada uno de los esquemas de pago obtenidos. Se asume acuerdo de netting entre las contrapartes.

Es importante recalcar que los tres últimos botones utilizan como dato la celda 'L2' en la que se indica la fecha de valoración. Esta celda puede ser modificada por el usuario arbitrariamente, aunque siendo siempre estas fechas futuras.

En la esquina superior derecha se especifican los datos que relacionan a ambas divisas entre sí y a estas con el tipo de cambio (FX) que las une.

Finalmente, en la hoja Excel se muestra un dato muy importante en la valoración. Este es el número de simulaciones a utilizar en la misma, este dato puede ser modificado por el usuario según sus intereses. Este dato es crucial ya que es posible que el proceso de valoración se interrumpa inesperadamente si el número de simulaciones indicadas por el usuario es demasiado alto. Esto sucede por incapacidad computacional para trabajar con estructuras de datos tan pesadas.

6.2. CVA

Esta pestaña se encarga de calcular el CVA de la cartera especificada en la hoja anterior.

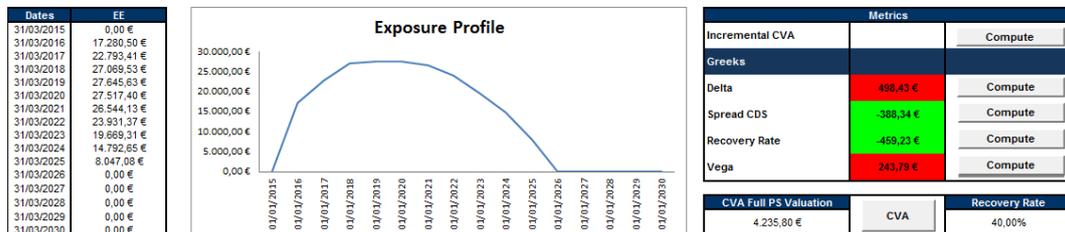


Figura 12: Aplicación. CVA

Para ello se debe especificar en la tabla situada a la izquierda el conjunto de fechas en las que se quiere calcular la exposición. Como resultado se muestra en la gráfica central el perfil

de exposición que dadas las fechas y la cartera se está asumiendo en el momento de cálculo.

Los botones incluidos en esta hoja aportan la siguiente funcionalidad:

- **CVA:** Calcula el CVA de la cartera constituida en la pestaña 'Portfolio'. Es importante especificar que el algoritmo utilizado para este cómputo es el Thin Out, que fue detallado en profundidad en la sección III de este documento. La decisión de usar este procedimiento se fundamenta en que presenta resultados altamente aceptables de una manera computacionalmente eficiente.
- **Incremental CVA - Compute:** Solicita al usuario la posición de uno de los productos de la cartera definidos, lo extrae y recalcula el CVA del portfolio resultante. Muestra la variación del CVA de la cartera en unidades monetarias.
- **Delta - Compute:** Solicita al usuario una variación paralela de las curvas de tipos de interés (en puntos básicos) y recalcula el CVA. Muestra la variación del CVA de la cartera en unidades monetarias.
- **Spread CDS - Compute:** Solicita al usuario una variación paralela de la curva de CDS de mercado (en puntos básicos) y recalcula el CVA. Muestra la variación del CVA de la cartera en unidades monetarias.
- **Recovery Rate - Compute:** Solicita al usuario un nuevo recovery rate (en porcentaje) y recalcula el CVA. Muestra la variación del CVA de la cartera en unidades monetarias.
- **Vega - Compute:** Solicita al usuario que introduzca un desplazamiento del cubo de volatilidad asociado a los swaptions de mercado (en porcentaje) y recalcula el CVA. Muestra la variación del CVA de la cartera en unidades monetarias.

El código de color informa de lo siguiente:

- Verde: El CVA se reduce al aplicar la modificación introducida.
- Rojo: El CVA aumenta al aplicar la modificación introducida.

6.3. Curves y Volatility cube (EUR - GBP)

Estas pestañas, tanto en EUR como GBP almacenan los datos de mercado necesarios en la calibración. Además, como se puede ver en la siguiente imagen la hoja de excel 'Curves - EUR/GBP' muestra al usuario una gráfica de la forma que adquieren las curvas de tipos

utilizadas, que en este caso particular han sido las curvas 3M, 6M y 12M, además de la curva OIS de descuento en cada moneda.

Por otro lado, esta pestaña también da al usuario la posibilidad de recalibrar y almacenar los modelos de tipos de interés subyacentes. Esta calibración puede realizarse de dos maneras diferentes:

- Swaptions ATM: Se puede calibrar calculando a los swaptions ATM. Para ello es necesario primero obtener el tipo par swap (dada la curva actual) y posteriormente interpolar dentro del cubo de volatilidades la volatilidad asociada a éste. De esta manera es necesario realizar una interpolación dentro del cubo teniendo en cuenta dos dimensiones, la del strike y la del vencimiento del swap subyacente.
- Strike dado. También es posible calibrar a un strike fijo, para todos los vencimientos de la opción del swaption, obviando el paso intermedio de calcular el tipo par swap.

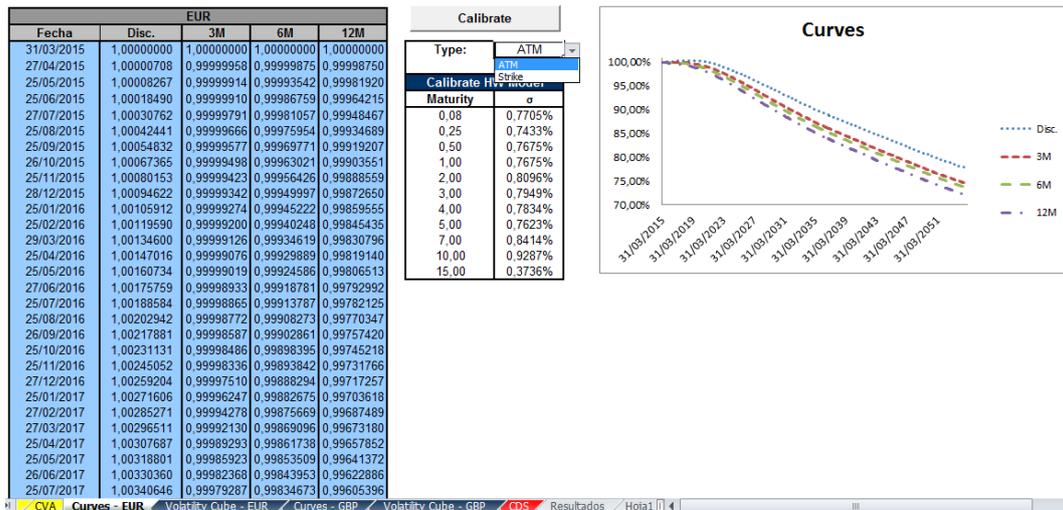


Figura 13: Aplicación. Curvas y Calibrado.

Por otro lado, la pestaña 'Volatility Cube - EUR/GBP' almacena la información de la siguiente manera:

	30-abr-15	30-jun-15	30-sep-15	31-mar-16	31-mar-17	31-mar-18	31-mar-19	31-mar-20	31-mar-22	31-mar-25	31-mar-30	31-mar-35	31-mar-45
0,5	334,32	194,11	97,75	181,51	138,95	194,05	217,40	216,33	162,83	177,15	144,08	108,47	133,95
1	307,41	184,13	92,02	171,12	113,59	147,28	155,78	144,80	132,84	144,08	117,75	91,74	108,12
1,5	292,94	178,05	88,72	168,15	106,49	126,18	136,47	127,32	117,21	131,39	109,68	75,61	94,49
2	283,10	173,65	86,38	166,89	103,68	114,80	125,93	117,11	107,80	116,17	95,39	68,59	85,65
2,5	275,66	170,19	84,57	166,28	102,33	108,11	119,25	110,50	101,38	108,47	88,90	63,83	85,68
3	269,71	167,35	83,09	165,97	101,62	103,81	114,27	105,91	96,74	102,85	84,22	60,41	75,34
3,5	264,76	164,94	81,84	165,83	101,24	100,83	110,32	102,36	93,23	98,54	80,58	57,88	70,88
4	260,52	162,84	80,76	165,78	101,04	98,66	107,12	99,43	90,46	95,14	77,66	55,94	67,85
4,5	256,83	160,99	79,81	165,79	100,95	97,02	104,49	96,96	88,09	92,39	75,28	54,43	65,41
5	253,56	159,33	78,96	165,83	100,93	95,74	102,30	94,86	85,98	90,05	73,30	53,23	63,37
5,5	250,63	157,83	78,20	165,90	100,95	94,72	100,45	93,04	84,10	87,87	71,62	52,22	61,50
6	247,98	156,46	77,50	165,98	101,00	93,89	98,86	91,46	82,40	85,80	70,07	51,23	59,48
6,5	245,56	155,19	76,96	166,07	101,07	93,20	97,50	90,08	80,87	83,83	68,60	50,18	57,32
7	243,33	154,03	76,27	166,17	101,15	92,62	96,31	88,86	79,49	81,96	67,20	49,08	55,10
7,5	241,27	152,94	75,72	166,28	101,24	92,14	95,26	87,79	78,25	80,21	65,85	47,96	52,92
8	239,35	151,93	75,20	166,38	101,34	91,72	94,34	86,82	77,12	78,58	64,57	46,85	50,85
8,5	237,56	150,97	74,72	166,49	101,44	91,36	93,51	85,96	76,09	77,06	63,36	45,76	48,91
9	235,88	150,07	74,27	166,60	101,55	91,04	92,78	85,19	75,16	75,55	62,22	44,70	47,11
9,5	234,30	149,23	73,84	166,71	101,65	90,77	92,11	84,48	74,30	74,34	61,14	43,70	45,46
10	232,81	148,42	73,43	166,82	101,76	90,52	91,51	83,84	73,52	73,13	60,14	42,75	43,95
10,5	231,40	147,66	73,05	166,92	101,86	90,31	90,97	83,26	72,81	72,01	59,20	41,86	42,58
11	230,06	146,93	72,68	167,03	101,96	90,12	90,47	82,73	72,15	70,97	58,32	41,02	41,32
11,5	228,78	146,24	72,33	167,13	102,07	89,95	90,02	82,24	71,54	70,00	57,49	40,23	40,17

Figura 14: Aplicación. Cubo de volatilidad.

En la esquina superior izquierda aparece un número que indica el vencimiento del swap subyacente de un swaption determinado **una vez haya vencido** la opción de este. La matriz situada a la derecha muestra las volatilidades cotizadas en el mercado para un swaption donde las columnas indican vencimiento de la opción y la filas strikes de la opción. Es decir, si nos situamos en la celda (1,1) de la matriz obtenemos la volatilidad de un swaption cuya opción vence en un mes, con strike de 0,5 % y cuyo swap subyacente vence un año después de la opción. Se almacenan tantas matrices como la mostrada en la figura anterior como vencimientos de swaps subyacentes coticen en el mercado. La unión de todas estas matrices construye el cubo de volatilidad asociado a los swaptions de mercado.

6.4. CDS

Almacena la curva de CDS utilizada para calcular el CVA dada una cartera. Además, da al usuario la posibilidad de calibrar a partir de esta curva de spreads de crédito las intensidades de default con las que poder construir la curva de probabilidades de supervivencia. La siguiente imagen ilustra gráficamente el resultado.

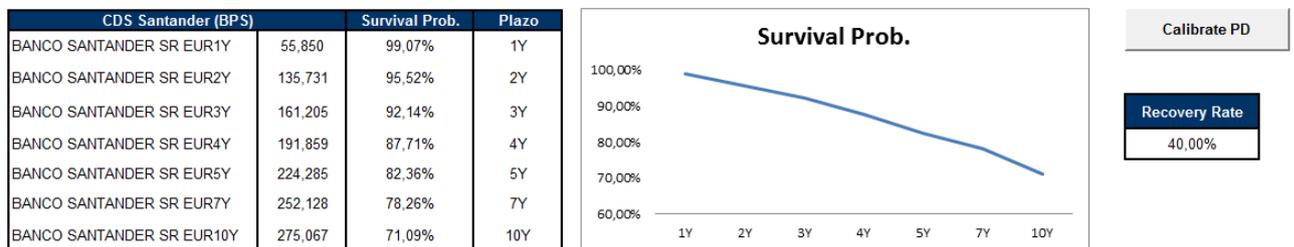


Figura 15: Aplicación. Curva de CDS.

7. Resultados

En esta sección se van a mostrar los resultados obtenidos durante el desarrollo de este trabajo. Estos se dividen en tres categorías diferentes. Primero serán mostrados los resultados obtenidos a nivel de cálculo de exposiciones, CVA, importancia del netting en la mitigación del CCR, etc. En segundo lugar, se muestran algunos resultados desde un punto de vista computacional, es decir, este trabajo ha basado parte de su desarrollo en la implementación de varios algoritmos de valoración, con el objetivo de ser capaces de valorar eficientemente grandes portafolios de activos, este apartado se encarga de ilustrar la optimización lograda con estos procedimientos. Además, dado que se disponen de tres métodos de valoración, es interesante hallar las distribuciones de precios futuros que generan. Por último, serán expuestas las diferentes sensibilidades del CVA que han sido obtenidas, para una cartera dada. Estas sensibilidades serán definidas previamente.

7.1. CVA

Para el cálculo del CVA de una cartera es necesario calcular tanto la exposición esperada como las probabilidades de supervivencia asociadas a la contraparte del contrato. Utilizando las funcionalidades que da la aplicación implementada se van a mostrar unos gráficos que aportan información acerca del riesgo asumido, dado un contrato, y de la probabilidad de que la contraparte incumpla.

Los siguientes gráficos tratan de ilustrar los perfiles de exposición obtenidos para un conjunto heterogéneo de productos, como un Swap (Par), un Cross Currency Swap aleatorios y carteras formadas por estos elementos.

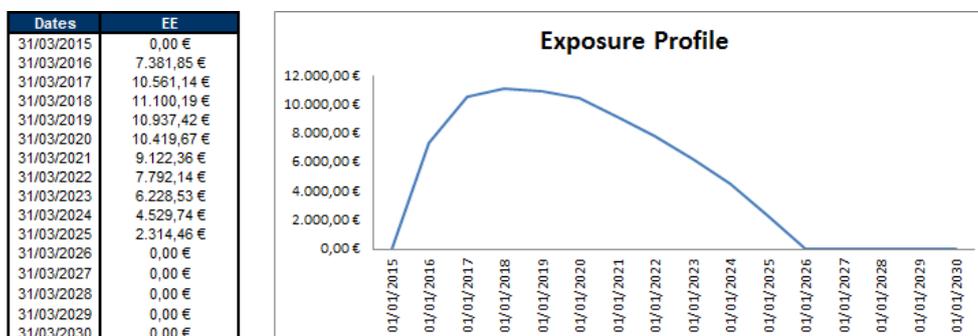


Figura 16: Perfil de Exposición Swap (Par).

Un swap par se caracteriza porque su valor a inicio es cero y, por tanto, su exposición

también.

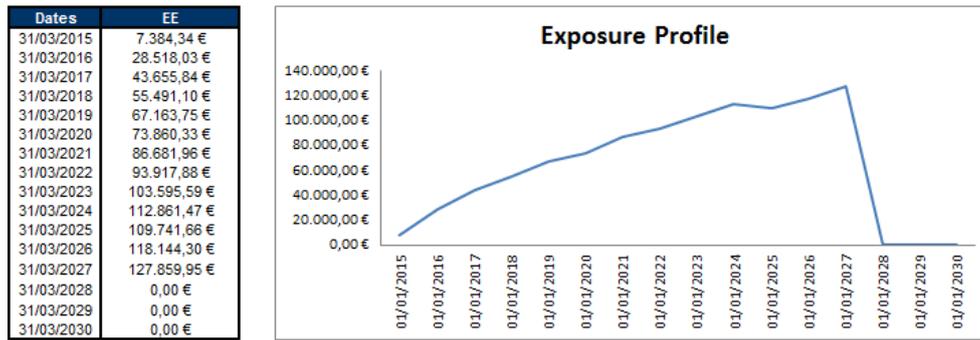


Figura 17: Perfil de Exposición CCS.

Es importante recordar que, por simplicidad, durante este trabajo se ha asumido que el Cross Currency Basis Swap (CCBS) es despreciable. Sin embargo, somos conscientes de que esto no sucede así en el mercado, es sólo una aproximación.

Se observa cómo el perfil de exposición de un CCS es perfectamente creciente, esto es una característica fundamental del riesgo de contraparte para un CCS, la cual se debe principalmente al intercambio de nominales al final del contrato.

Un aspecto muy interesante en el contexto del CCR es la capacidad para mitigar el riesgo que tienen las partes involucradas en un contrato. En las siguientes gráficas se ilustra el efecto que tiene el netting sobre el riesgo de contraparte cuando más de un contrato une a dos determinadas entidades. Recordemos que el netting se fundamenta en la siguiente relación:

$$\sum_i \max(V_t^i, 0) \geq \max\left(\sum_i V_t^i, 0\right)$$

Las tres gráficas que a continuación se muestran corresponden a los perfiles de exposición de una cartera de dos swaps, dos CCS y, finalmente, un CCS y un swap. En ellas se puede observar el perfil de cada elemento individual de la cartera, así como el perfil de la cartera asumiendo o no acuerdo de netting entre las contrapartes.

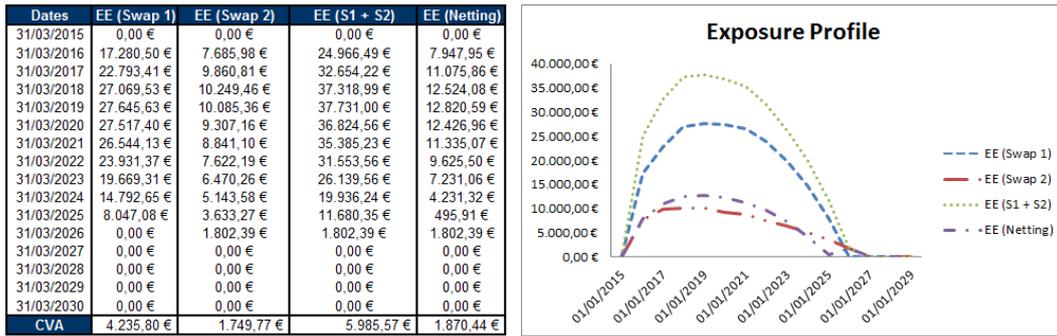


Figura 18: Cartera de Swaps.

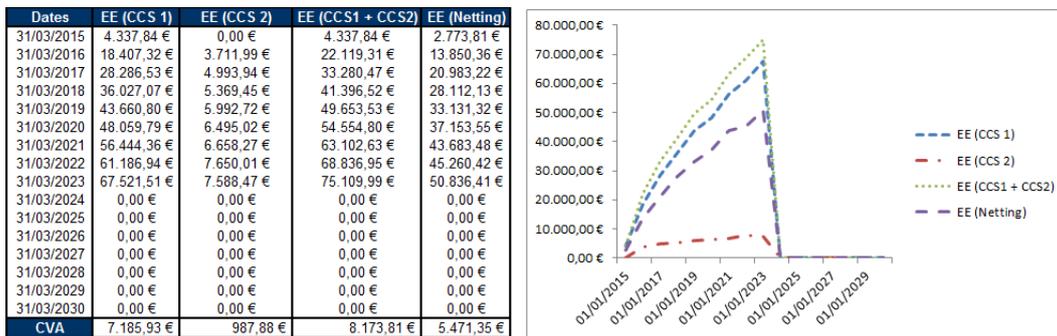


Figura 19: Cartera de CCS.

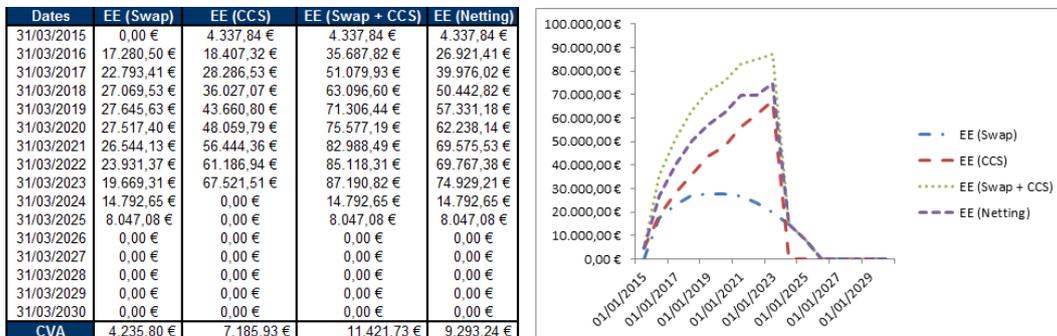


Figura 20: Cartera Mixta.

Se observa claramente cómo se cumple la relación definida arriba. Utilizando el netting para mitigar los riesgos asumidos se consigue reducir el CVA de un portfolio. Cabe destacar que en función de los productos de la cartera este acuerdo puede ser más efectivo, como sucede para la cartera de swaps y/o CCS o menos, como sucede en el último caso. Para medir esta reducción del riesgo aportada por el netting se define el siguiente sencillo ratio:

$$NR = 1 - \frac{Exp_{Netting}}{Exp_{No\ Netting}}$$

El cual aporta información acerca de cuánto se ha reducido la exposición introduciendo el

acuerdo de netting en los contratos, de forma que si $NR = 100\%$ el ratio señala que la reducción del CCR ha sido total o si $NR = 0\%$ indica que no ha habido reducción alguna. En los tres casos anteriores este ratio toma los siguiente valores.

Ratio	Swaps	CCS	Mixta
NR	68,75 %	33,06 %	18,64 %

Cuadro 1: Efectividad del acuerdo de netting.

Por otro lado, utilizando el algoritmo definido en detalle en el anexo IV, somos capaces de obtener tanto las intensidades de default como la curva de probabilidades de supervivencia asociada a un conjunto de CDS cotizados en el mercado, para una determinada contraparte. En este caso hemos asumido que la contraparte es el banco Santander, para el cual se ha calibrado la siguiente función de hazart rates:

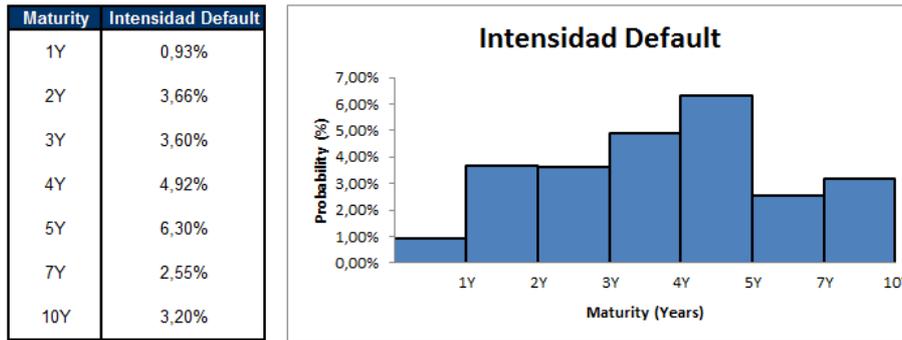


Figura 21: Intensidades de Default.

Donde cada hazart rate indica la probabilidad independiente de hacer default en el intervalo indicado. Estas intensidades de default dan lugar a la curva de probabilidades de supervivencia:

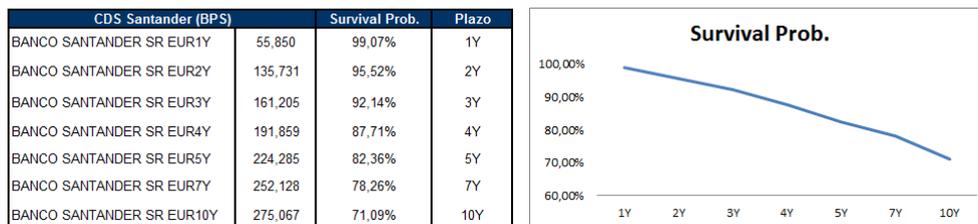


Figura 22: Probabilidades de Supervivencia.

Es importante resaltar que tanto las intensidades de default como la curva de probabi-

lidades de supervivencia son únicas dada una curva de spreads de CDS. Se comprueba que si los CDS de mercado se desplazan hacia arriba las intensidades de default aumentan y las probabilidades de supervivencia a cada periodo disminuyen. Por otro lado, lo contrario sucede si los spreads de crédito caen. Un ejemplo de esto se puede ver en las siguientes imágenes, en las cuales se ha aumentando 50 puntos básicos la curva de CDS de la entidad de referencia.

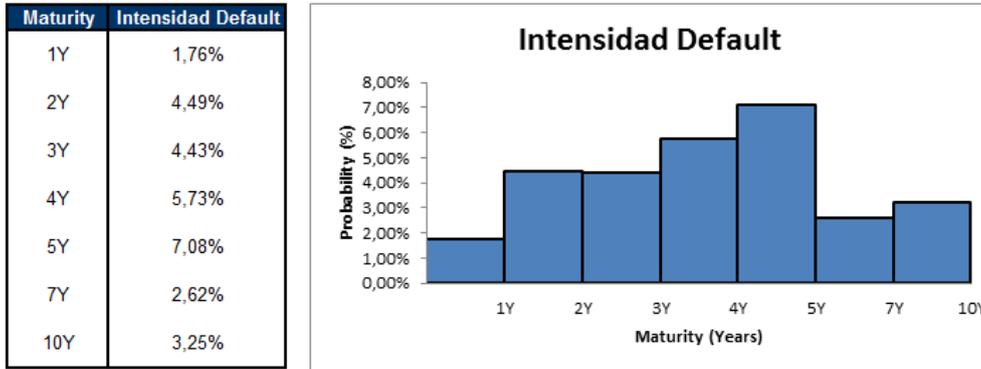


Figura 23: Intensidades de Default. (+50 BPS).

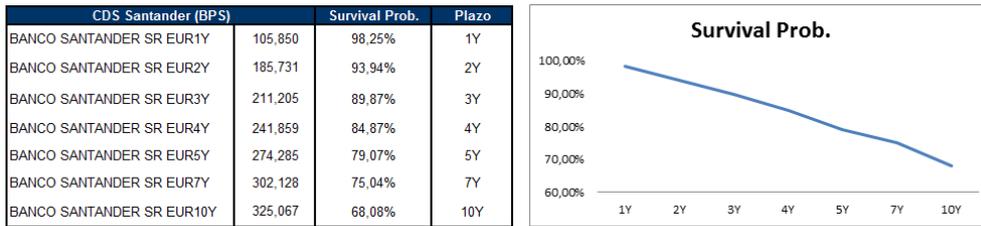


Figura 24: Probabilidades de Supervivencia (+50 BPS).

7.2. Eficiencia computacional de la valoración

A la hora de testear la eficiencia computacional de las simulaciones es necesario tener en cuenta dos factores muy importantes. El primero de ellos es el número de elementos de la cartera. A priori, cuantos más productos sean incluidos en las carteras mayor tiempo llevará su cómputo. El otro elemento a tener en cuenta es el número de caminos generados en cada fecha de observación, como parece lógico, a mayor número de paths generados mayor tiempo de valoración requerido. El aumento del número de caminos tiene la relevante ventaja de que los resultados obtenidos serán más exactos. Esto podrá observarse a través de la disminución de la desviación típica conforme se aumenta el número de simulaciones.

En primer lugar, se mostrarán los resultados correspondientes a una cartera mixta, es decir, en las que haya tanto CCS como swaps. Posteriormente se sitúan aquellos en los que se

ha tenido en cuenta una cartera de swaps únicamente.

Para construir las tablas, mostradas a continuación, se han generado carteras aleatorias atendiendo a los siguientes criterios:

- Tanto el número de swaps como de CCS incluidos en la cartera se genera aleatoriamente.
- Todos los swaps/CSS tienen nominal unitario.
- Todos los productos empiezan en cualquier fecha aleatoria futura, utilizando una ventana temporal de un año, a partir de la fecha actual.
- El vencimiento de cada producto es generado aleatoriamente dentro del intervalo [1Y, 40Y].
- Los tenors de las patas de los CCS/Swaps son generados de manera aleatoria. Pudiendo ser 3M, 6M y 12M.
- Los swap son generados ATM.
- El CVA ha sido calculado utilizando 19 fechas de observación anuales de la exposición a partir de la fecha actual.
- Para el algoritmo Thin Out PS se ha utilizado un conjunto de fechas equiespaciadas temporalmente. Las cuales pueden ser:
 1. Semestrales: [0,5Y, 1Y, 1,5Y, ..., 19Y, 19,5Y, 20Y]
 2. Anuales: [1Y, 2Y, 3Y, ..., 18Y, 19Y, 20Y]
 3. Bi-Anuales: [2Y, 4Y, 6Y, ..., 16Y, 18Y, 20Y]
- Tanto el CVA como el tiempo de cómputo es el resultado de calcular el promedio de 16 ejecuciones. El dato del CVA calculado está acompañado del error Monte Carlo cometido en las simulaciones, el cual viene definido por: $\epsilon = \delta \frac{\mu_{CVA}}{\sqrt{n}}$.
Siendo n el número de simulaciones, μ_{CVA} el promedio de las ejecuciones realizadas y, finalmente, δ el percentil que proporciona el nivel de confianza deseado. En este caso el nivel de confianza seleccionado ha sido del 95 %.
- El tiempo señalado en las tablas ha sido medido en segundos.

Conviene recordar qué tres métodos de valoración pueden ser utilizados para valorar una cartera de activos.

- Exacto: Se valora cada activo del portfolio de manera independiente. La valoración de la cartera es la suma de cada uno de ellos.
- Full PS: Se crea un esquema de pagos general, el cual contiene todos los pagos de los activos de la cartera, y se valora cada flujo de manera independiente. La valoración de la cartera es la suma de cada uno de estos flujos.
- Thin Out PS: Utiliza el algoritmo Thin Out, a través del cual los flujos de caja del esquema de pagos general son proyectados sobre unos vértices dados. La valoración de la cartera es la suma de la valoración de cada uno de estos flujos proyectado.

Se ha calculado el CVA utilizando simulación Monte Carlo usando 2500, 5000 y 10000 paths, así como diferentes semillas aleatorias para cada ejecución.

Es importante recalcar que el tiempo ha sido calculado una vez que el proceso de creación del súper swap/CCS finalizó, es decir, indica estrictamente cuánto tiempo ha sido necesario para valorar la cartera.

7.2.1. Cartera mixta (Swaps/CCS)

Paths	2500		5000		10000	
Método	CVA	Time	CVA	Time	CVA	Time
Exacto	$0,9672 \pm 0,0091$	40,22	$0,9672 \pm 0,0063$	43,42	$0,9665 \pm 0,0048$	47,29
Full PS	$0,9598 \pm 0,0096$	35,55	$0,9689 \pm 0,0060$	36,88	$0,9662 \pm 0,0050$	41,62
Thin Out PS 6M	$0,9699 \pm 0,0099$	8,70	$0,9691 \pm 0,0065$	9,24	$0,9673 \pm 0,0053$	9,61
Thin Out PS 1Y	$0,9663 \pm 0,0103$	7,58	$0,9646 \pm 0,0072$	7,86	$0,9690 \pm 0,0059$	8,15
Thin Out PS 2Y	$0,9694 \pm 0,0110$	7,01	$0,9715 \pm 0,0075$	7,35	$0,9693 \pm 0,0061$	7,58

Cuadro 2: CVA para una cartera 100 Swaps/CCS.

Paths	2500		5000		10000	
Método	CVA	Time	CVA	Time	CVA	Time
Exacto	11,6813 ± 0,0529	445,81	11,7556 ± 0,0422	473,59	11,7487 ± 0,0210	522,80
Full PS	11,7318 ± 0,0561	286,27	11,7715 ± 0,0315	303,38	11,7774 ± 0,0253	328,19
Thin Out PS 6M	11,7508 ± 0,0457	45,53	11,7620 ± 0,0386	45,61	11,7682 ± 0,0376	46,18
Thin Out PS 1Y	11,7473 ± 0,0689	42,15	11,7681 ± 0,0409	42,29	11,7610 ± 0,0266	42,73
Thin Out PS 2Y	11,7610 ± 0,0661	40,81	11,7891 ± 0,0328	41,09	11,8025 ± 0,0306	41,93

Cuadro 3: CVA para una cartera 1000 Swaps/CCS.

7.2.2. Cartera de Swaps

Paths	2500		5000		10000	
Método	CVA	Time	CVA	Time	CVA	Time
Exacto	0,0803 ± 0,0008	32,39	0,0793 ± 0,0005	34,18	0,0797 ± 0,0004	37,84
Full PS	0,0806 ± 0,0011	21,90	0,0800 ± 0,0007	23,62	0,0799 ± 0,0007	27,04
Thin Out PS 6M	0,0795 ± 0,0006	6,45	0,0798 ± 0,0006	6,51	0,0792 ± 0,0005	6,69
Thin Out PS 1Y	0,0799 ± 0,0008	5,88	0,0796 ± 0,0008	5,93	0,0789 ± 0,0007	6,05
Thin Out PS 2Y	0,0782 ± 0,0009	4,78	0,0794 ± 0,0009	5,01	0,0794 ± 0,0005	5,23

Cuadro 4: CVA para una cartera 100 Swaps.

Paths	2500		5000		10000	
Método	CVA	Time	CVA	Time	CVA	Time
Exacto	0,2271 ± 0,0005	287,44	0,2269 ± 0,0004	300,15	0,2275 ± 0,0001	331,92
Full PS	0,2275 ± 0,0006	114,90	0,2276 ± 0,0006	124,70	0,2274 ± 0,0002	142,20
Thin Out PS 6M	0,2235 ± 0,0006	27,56	0,2306 ± 0,0006	28,21	0,2320 ± 0,0005	28,06
Thin Out PS 1Y	0,2355 ± 0,0007	26,57	0,2311 ± 0,0007	27,13	0,2313 ± 0,0006	27,06
Thin Out PS 2Y	0,2260 ± 0,0009	25,05	0,2302 ± 0,0008	25,81	0,2351 ± 0,0007	26,22

Cuadro 5: CVA para una cartera 1000 Swaps.

Un aspecto que es importante puntualizar es que cuando las fechas de inicio de los swaps y/o CCS coincide, el tiempo de cómputo se reduce significativamente en todos los casos, menos en el método exacto. Esto es debido a que cuando se agrupan todos los activos de la cartera los pagos solapados se convierten en uno sólo, lo que hace disminuir la cantidad de flujos a valorar y, por consiguiente, el tiempo de ejecución. Por el contrario, como el método exacto valora cada producto independientemente no ve reducido su tiempo de cálculo. Un claro ejemplo de esta situación puede verse en la siguiente tabla, en la que todos los swaps de la cartera comienzan en la misma fecha.

Paths	2500		5000		10000	
Método	CVA	Time	CVA	Time	CVA	Time
Exacto	$0,0164 \pm 0,0002$	32,39	$0,0167 \pm 0,0001$	34,25	$0,0166 \pm 0,0001$	38,00
Full PS	$0,0165 \pm 0,0002$	1,730	$0,0167 \pm 0,0001$	1,87	$0,0165 \pm 0,0001$	2,13
Thin Out PS 6M	$0,0163 \pm 0,0002$	1,52	$0,0163 \pm 0,0001$	1,61	$0,0167 \pm 0,0001$	1,78
Thin Out PS 1Y	$0,0166 \pm 0,0003$	1,10	$0,0162 \pm 0,0002$	1,16	$0,0167 \pm 0,0001$	1,27
Thin Out PS 2Y	$0,0165 \pm 0,0004$	0,91	$0,0166 \pm 0,0004$	0,94	$0,0165 \pm 0,0002$	1,02

Cuadro 6: CVA para una cartera 100 Swaps. Igual fecha de inicio.

Los resultados que pueden encontrarse en las tablas mostradas anteriormente podrían parecer que no son intuitivos, ya que quizás lo que se esperaría es que cuando los paths utilizados en las simulaciones se doblan el tiempo de cómputo debería hacerlo de forma relativamente proporcional. Sin embargo, esto no es así debido al peso computacional que tiene la arquitectura desarrollada. En matlab las operaciones matriciales están altamente optimizadas lo que le hace especialmente interesante para este tipo de proyecto. Por el contrario, el tratamiento de objetos no lo está tanto, lo que provoca una serie de costes fijos que son tales que impiden apreciar como el tiempo de ejecución aumenta proporcionalmente con el número de simulaciones.

Finalmente, puede observarse en las tablas mostradas anteriormente que el algoritmo Thin Out implementado es cada vez más efectivo conforme se aumenta el tamaño de la cartera. Con el objetivo de demostrar esta relación entre los métodos se muestra la siguiente gráfica, la cual representa el cociente entre el tiempo de cómputo requerido por el algoritmo Thin Out PS 2Y y el Exacto. Adicionalmente, se ilustra en el eje derecho de la gráfica el error relativo

incurrido por el segundo de los métodos.

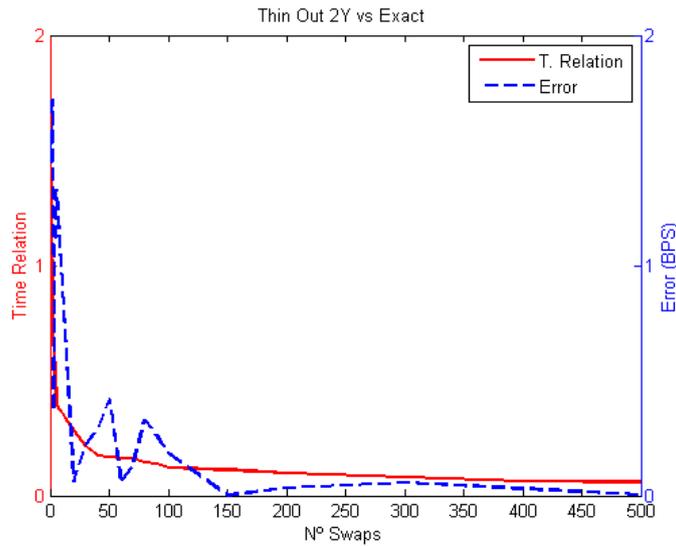


Figura 25: Relación de optimización entre métodos.

Se observa claramente como este cociente disminuye con el tamaño de la cartera, mientras que el error relativo permanece estable por debajo de 1 punto básico.

Es importante recalcar que estos tiempos de cómputo están directamente condicionados a la potencia de cálculo de la máquina con que se calculen. Los datos que en este documento se muestran han sido obtenidos utilizando una máquina de gama media. A priori, si se utilizase un ordenador más reciente y más potente estos tiempos deberían reducirse de manera considerable.

7.2.3. Distribuciones de futuros precios

Es interesante analizar, ya que se dispone de tres alternativas para la valoración de las carteras, las distribuciones de precios futuros que aportan cada una de ellas. En este caso particular estas distribuciones han sido calculadas para las tres fechas utilizadas en el cálculo del CVA, es decir, 5Y, 10Y y 15Y. Estas distribuciones se han obtenido utilizando 10000 caminos en una única simulación y manteniendo fija la semilla que introduce la estocasticidad. Los resultados se pueden observar en la gráficas mostradas a continuación.

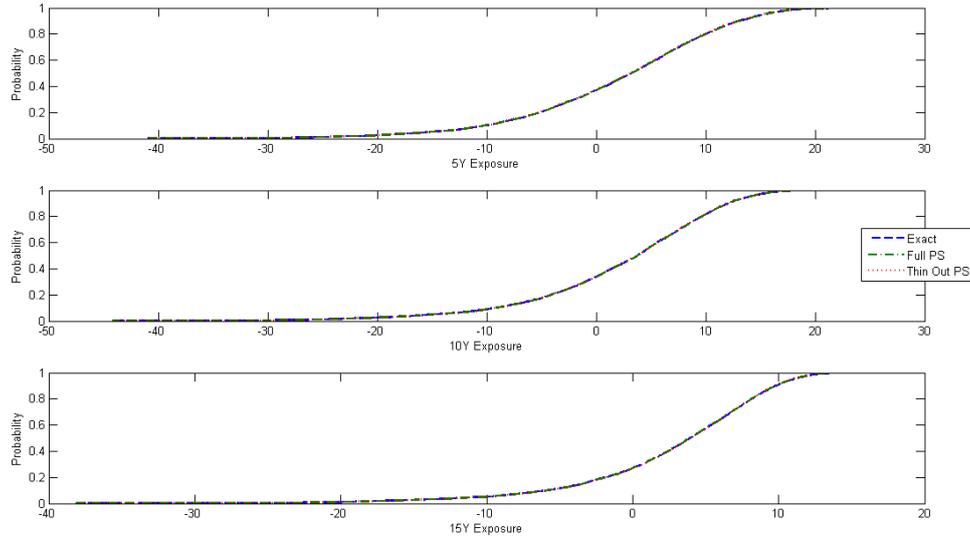


Figura 26: Distribución de precios futuros. Cartera 100 Swaps/CCS.

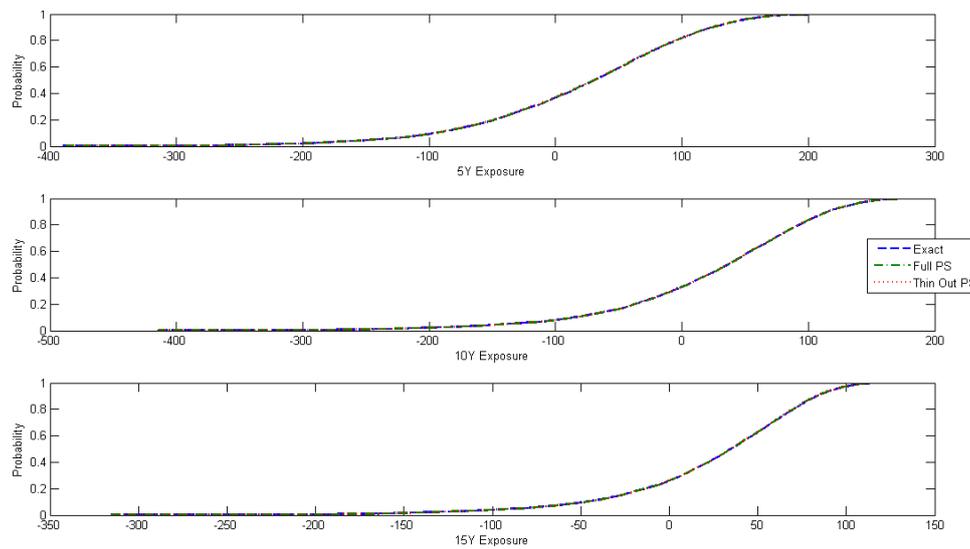


Figura 27: Distribución de precios futuros. Cartera 1000 Swaps/CCS.

7.3. Sensibilidades

Las sensibilidades tratan de cuantificar el efecto que tiene un movimiento en alguno de los parámetros que define el CVA, manteniendo el resto sin alterar, en el cálculo del mismo. Atendiendo a esta descripción la herramienta es capaz de calcular las siguientes sensibilidades:

- Delta: Sensibilidad del cálculo del CVA ante variaciones paralelas las curvas de tipos.

Numéricamente se define como:

$$\frac{\partial CVA}{\partial Curva} = \frac{\Delta CVA}{\Delta Curva}$$

- Vega: Sensibilidad del cálculo del CVA ante variaciones paralelas del cubo de volatilidad asociada a los swaptions de mercado. Numéricamente se define como:

$$\frac{\partial CVA}{\partial \sigma} = \frac{\Delta CVA}{\Delta \sigma}$$

- Recovery Rate: Sensibilidad del cálculo del CVA ante variaciones en el parámetro que mide el porcentaje de recuperación tras el default de la contraparte. Numéricamente se define como:

$$\frac{\partial CVA}{\partial RR} = \frac{\Delta CVA}{\Delta RR}$$

- Spread CDS: Sensibilidad del cálculo del CVA ante variaciones paralelos de la curva de spreads de CDS de mercado. Numéricamente se define como:

$$\frac{\partial CVA}{\partial S} = \frac{\Delta CVA}{\Delta S}$$

Dadas las características de este trabajo, en el cual calibramos todos los modelos subyacentes necesarios para calcular el CVA de una cartera, obtener las dos primeras sensibilidades implican un recalibrado de los modelos Hull & White subyacentes, y las dos últimas requieren un recalibrado de las intensidades de default.

Otra métrica que aporta información relevante es el CVA Incremental (ICVA). Esta mide la contribución al CVA de una cartera de un determinado activo. Esta contribución puede medirse añadiendo un nuevo activo a una cartera ya constituida o, de forma contraria, quitar del portfolio un determinado producto.

Cálculo del ICVA:

- El primer paso es calcular el CVA de la cartera actual. Como ya se especificó anteriormente el algoritmo utilizado para calcular el CVA es el Thin Out. Al aplicar este procedimiento al esquema de pagos, proporcionado por la cartera, obtenemos como output $S_{\{T,B\}}$ que es la estructura de pagos de la cartera proyectada sobre los vértices indicados en T , el CVA de la cartera se calcula sobre esta estructura de flujos de caja.
- En segundo lugar tenemos otro activo 'A' sobre el que queremos obtener el ICVA. El algoritmo Thin Out puede aplicarse, de igual manera, sobre el esquema de pagos que genera este producto. Por lo que se construye otro esquema de pagos, proyectado sobre los mismos vértices T , al cual denotamos por $A_{\{T,B'\}}$.

- El tercer paso es calcular el CVA de la nueva cartera. En este momento disponemos de dos esquemas de pagos, que están proyectados sobre los mismos vértices T , que dan lugar al nuevo esquema sobre el que calcular el CVA: $C_{\{T,B''\}} = S_{\{T,B\}} \pm A_{\{T,B'\}}$, dependiendo de si lo que se quiere es eliminar o añadir un activo.
- Finalmente, se obtiene el ICVA a partir de la siguiente relación:

$$ICVA = CVA_{C_{\{T,B''\}}} - CVA_{S_{\{T,B\}}}$$

Nota: El posible que $ICVA < 0$, esto ocurre si al añadir o eliminar un activo la exposición se ve reducida, con el consecuente menor riesgo asumido.

El CVA Incremental debe cumplir la siguiente relación:

$$ICVA \leq CVA_{A_{\{T,B'\}}}$$

Donde $CVA_{S_{\{T,B\}}}$ indica el cálculo del CVA obteniendo la exposición a partir del esquema de pagos futuros $S_{\{T,B\}}$.

Antes de calcular mostrar las sensibilidades calculadas se debe especificar la cartera sobre la cual se va a trabajar. En este caso particular se va a trabajar con la siguiente cartera generada aleatoriamente.

Swap N°	Swap Type	Initial Date	Maturity (Years)	Notional	Fix/EUR Leg		Float/GBP Leg		Type
					Tenor	Coupon	Tenor		
1	CCS	31/03/2015	8	356.203,00 €	6 Months	-	6 Months		Receiver
2	Vanilla Swap	31/03/2015	1	583.314,00 €	6 Months	0,00%	3 Months		Receiver
3	Vanilla Swap	31/03/2015	5	276.499,00 €	6 Months	0,11%	3 Months		Payer
4	Vanilla Swap	31/03/2015	9	647.493,00 €	3 Months	0,42%	6 Months		Receiver
5	Vanilla Swap	31/03/2015	15	237.474,00 €	12 Months	0,73%	12 Months		Payer
6	CCS	31/03/2015	10	473.591,00 €	3 Months	-	3 Months		Payer

Figura 28: Cartera.

En la siguiente tabla se ilustran los resultados de calcular el ICVA eliminando cada activo de la cartera.

N° de Activo	1	2	3	4	5	6
ICVA	3523,61	0,00	108,90	1643,12	614,70	4246,18
CVA	6193,84	0,00	278,86	2290,33	3341,97	5729,44

Cuadro 7: ICVA.

La primera fila indica la variación el CVA al eliminar de la cartera un activo y la segunda muestra el CVA individual de cada uno. Como se puede observar en todos los casos se cumple la relación anteriormente descrita.

A continuación, se muestran las sensibilidades calculadas utilizando la herramienta, así como las fechas sobre las cuales se obtenido el ICVA y CVA individual de cada activo.

Dates	Metrics	
31/03/2015	Incremental CVA	<input type="button" value="Compute"/>
31/03/2016		
31/03/2017	Greeks	
31/03/2018		
31/03/2019	Delta	34,48 € <input type="button" value="Compute"/>
31/03/2020		
31/03/2021	Spread CDS	-63,40 € <input type="button" value="Compute"/>
31/03/2022		
31/03/2023	Recovery Rate	-643,71 € <input type="button" value="Compute"/>
31/03/2024		
31/03/2025	Vega	59,63 € <input type="button" value="Compute"/>
31/03/2026		
31/03/2027	CVA Full PS Valuation	<input type="button" value="CVA"/> <input type="button" value="Recovery Rate"/>
31/03/2028	2.571,34 €	40,00%
31/03/2029		
31/03/2030		

Figura 29: Sensibilidades.

Donde los cálculos se han obtenido de la siguiente manera:

- Delta: Se han variado todas las curvas de tipos de interés utilizadas desplazándolas paralelamente 10 puntos básicos hacia arriba. La expresión de la delta queda, por tanto: $Delta = \frac{\Delta CVA}{10bps}$.
- Vega: Se ha desplazado el cubo de volatilidades asociado a los swaptions de mercado un 1%. Por lo tanto: $Vega = \frac{\Delta CVA}{1\%}$.
- Recovery Rate: La aplicación permite solicitar al usuario cuánto quiere variar el *RR*. En este caso particular se ha variado un 5%, se obtiene: $Sensibilidad(RR) = \frac{\Delta CVA}{5\%}$.
- Spread CDS: La curva de spreads de crédito se desplazó 20 puntos básicos paralelamente hacia arriba. La expresión queda: $Sensibilidad(CDS) = \frac{\Delta CVA}{20bps}$.

8. Conclusiones

En este trabajo se presenta una herramienta que es capaz de calcular el ajuste de valoración por riesgo de crédito de una cartera de activos, de renta fija, de **forma eficiente**. Esta, además, cumple unos requisitos de facilidad de uso e implementación y, adicionalmente, aporta al usuario de la misma una gran flexibilidad para la gestión de datos, creación de carteras, cómputo de CVA y de ciertas medidas de sensibilidad de este. Internamente la aplicación implementa un motor de simulación y valoración que ha sido optimizado eficientemente utilizando el algoritmo Thin Out. En este caso particular, este método ha sido utilizado para optimizar la valoración de carteras de swaps y cross currency swaps.

Esta aplicación ha sido desarrollada principalmente en dos grandes etapas.

La primera de ellas fue el diseño de la misma, en el cual fueron establecidos los requisitos que debía tener, la estructura de clases necesitada por estos requisitos, las tecnologías a utilizar en la implementación y, por último, la arquitectura que define la comunicación entre los elementos, mostrada en la figura 6.

En la segunda etapa se implementó y probó el diseño establecido, centrándose principalmente en la programación de la estructura de clases diseñada que es mostrada en las figuras (7), (8) y (9). Por otro lado, se ha construido una aplicación que es totalmente independiente de los modelos que subyacen a la valoración. En primer lugar, para el usuario debe ser transparente el modelo usado, él sólo debe saber usar la herramienta e interpretar los resultados obtenidos. Y en segundo lugar, los métodos de valoración de los productos utilizados en este trabajo, ilustrados en (2.2.3) y (2.2.5), también son independientes del modelo de tipos de interés utilizado para obtener el precio de los bonos cupón cero. Esta independencia fue contemplada en la primera etapa del desarrollo de la aplicación. Como se puede ver en las figuras (7) y (8), el modelo de tipos de interés es un objeto utilizado por las clases (Swap/Súper Swap y CCS/Súper CCS) para la valoración de productos. Este hecho da la posibilidad de poder cambiar el modelo de tipos, respetando la comunicación entre los objetos, de forma que esta modificación es transparente para el resto de la estructura de clases y, por consiguiente, también lo es para la herramienta y el usuario final.

Con el fin de obtener una mayor eficiencia en la valoración de carteras surge el algoritmo **Thin Out**. Este optimiza la valoración de portfolios de productos de renta fija (swaps y

CCS), a través de la proyección de los flujos de dichos portfolios sobre unos vértices dados. De este modo, se consigue reducir de manera considerable el número de cálculos a realizar con la consecuente disminución del tiempo de cómputo. Este algoritmo se fundamenta en un proceso previo que consiste en la construcción de dos productos (uno por el conjunto de swap's y otro el conjunto de CCS's) que agregan a todos los activos contenidos en la cartera. Este proceso previo tiene un alto coste computacional al inicio, ya que debe calcular todos los esquemas de pago de cada activo individual y agregarlos en uno solo, la cual no es una tarea trivial, como puede ser visto en la sección (4.3). Sin embargo, presenta una gran ventaja una vez que la estructura global esté creada: el coste que implica añadir un producto más a esta cartera ya constituida es prácticamente despreciable computacionalmente. Este hecho es muy atractivo para las grandes entidades ya que, una vez creada y almacenada la súper estructura, pueden ir agregando deals conforme se van cerrando, a un coste computacional muy reducido, y valorando su exposición global de forma eficiente. El desarrollo de este algoritmo dio lugar a tres métodos diferentes de valoración:

- Exacto: Se valora cada activo del portfolio de manera independiente. La valoración de la cartera es la suma de la valoración de cada uno de ellos.
- Full PS: Se crea un esquema de pagos general, el cual contiene todos los pagos de los activos de la cartera, y se valora cada flujo de manera independiente. La valoración de la cartera es la suma de cada uno de estos flujos valorados.
- Thin Out PS: Utiliza el algoritmo Thin Out, a través del cual los flujos de caja del esquema de pagos general son proyectados sobre unos vértices dados. La valoración de la cartera es la suma de la valoración de cada uno de estos flujos proyectado.

Con el objetivo de verificar el resultado aportado por este algoritmo de optimización se han realizado la siguientes pruebas:

- Se han creado dos carteras de 100 y 1000 generadas aleatoriamente a partir de los swaps y cross currency swaps. Estas han sido valoradas 16 veces obteniendo para cada una de ellas, mediante los tres métodos disponibles, el CVA promedio, el error Monte Carlo cometido y el tiempo promedio de ejecución en cada iteración.
- Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior pero constituyendo las carteras a partir de swaps únicamente.

Es importante remarcar que en cada una de estas ejecuciones la semilla aleatoria no fue fijada.

Como se puede observar en las tablas (2)-(5) tanto el CVA recuperado en los tres casos como el error son muy similares. No obstante, se obtiene que el tiempo de cómputo requerido en cada uno de los tres métodos difiere significativamente, llegando incluso a no ser planteable la ejecución de las pruebas utilizando el método exacto para carteras extremadamente grandes. Simultáneamente, se comprueba que las ejecuciones de carteras mixtas presentan un mayor coste computacional, sin penalizar la exactitud del CVA calculado, debido al hecho de que para valorar un CCS se debe obtener observaciones futuras de:

- Tipo de cambio (FX).
- Precios de bonos (descuento y estimación) en EUR.
- Precios de bonos (descuento y estimación) en GBP.

hecho que requiere la realización de cinco variables aleatorias mediante simulación. Sin embargo, para valorar swaps sólo es necesario instanciar dos variables aleatorias. Las cuales se corresponden con:

- Precios de bonos (descuento y estimación) en EUR.

En las tablas mencionadas se puede observar, también, la relación inversa existente entre precisión (menor error cometido en la simulación de la variable aleatoria) del cálculo del CVA y tiempo de cómputo. Cuando se usa el procedimiento de simulación por Monte Carlo una de las formas de obtener una mayor exactitud en el valor futuro es aumentar el número de paths en cada realización de la variable aleatoria en cuestión. Esto provoca, irremediamente, un aumento del tiempo de ejecución. Está en la necesidad del usuario la elección de priorizar un cálculo rápido o exacto.

Un aspecto muy importante a la hora de evaluar este procedimiento (y cualquier otro) es la distribución de precios futuros que aporta cada método generado. Para ello se han generado carteras mixtas (Swaps y Cross Currency Swaps) de 100 y 1000 productos, y se han valorado en 19 instantes de tiempo futuro mediante cada uno de los tres métodos disponibles, fijando en este caso la semilla aleatoria que genera el motor de simulación. En las figuras (30) y (31) se puede observar claramente como las distribuciones de precio que genera cada método de valoración mantienen una estrecha relación. Este hecho, unido a la exactitud en el cálculo del precio del riesgo de crédito vista en (7.2.1 y 7.2.2), **demuestra la validez del uso del procedimiento Thin Out** para el cálculo de CVA de una cartera de renta fija.

Adicionalmente a estas pruebas, se ha generado una cartera de seis productos, de manera aleatoria también, con el objetivo de mostrar la funcionalidad que da la aplicación para el cálculo de las griegas del CVA y el CVA Incremental de la misma. En la tabla (7) puede observarse como la variación del CVA de la cartera depende en gran medida del elemento que sea eliminado de la cartera. Es trivial observar como se cumple en todos los casos que el CVA Incremental es siempre menor o igual que el CVA individual del producto involucrado. Por otro lado, en la figura (29) se muestra el resultado de las griegas de la cartera, donde se refleja que ante desplazamientos paralelos (hacia arriba) de la curva de spreads de CDS el CVA aumenta. Esto es debido a que las probabilidades de default riesgo neutrales asociadas a la contraparte aumentan. Además, un aumento del recovery rate asociado a la contraparte hace disminuir el CVA del derivado, esta es la consecuencia directa a que el riesgo asumido es menor ya que la pérdida en caso de default es menor. Sin embargo, en el caso de la delta y la vega del CVA no está tan claro a priori, estas sensibilidades dependen enteramente de qué activos formen la cartera y la posición tomada en estos.

Para finalizar, es importante mencionar que este trabajo tiene varias posibles líneas de actuación futuras. En primer lugar, la herramienta ha sido desarrollada para sólo dos tipos de productos de renta fija, una posible extensión sería aumentar el inventario de activos disponibles para la valoración. Estos activos podrían ser de dos clases:

- La primera de ellas sería añadir activos que fuesen de la mismas características que los tratados en este trabajo, es decir, cuyo pago se produce en la fecha natural del mismo. Esto sólo conllevaría implementar los payoffs de los activos en el motor de simulación y posteriormente aplicar el algoritmo Thin Out sobre estos nuevos productos.
- La segunda alternativa podría ser incluir activos cuyos pagos no se producen en la fecha natural, como pueden ser los denominados swaps in arrears. Esto implica un tratamiento distinto del problema, pues habría que adaptar el procedimiento a este tipo de activos. El algoritmo pasaría a ser dependiente del modelo.

Un aspecto que no ha sido contemplado es la introducción de algún método de reducción de varianza con el objetivo de minimizar la dispersión de los resultados proporcionados por la simulación por Monte Carlo implementada. Introducir este tipo de métodos sería otra alternativa válida para continuar este trabajo.

Por otro lado, es posible también calcular diferentes medidas de riesgo como puede ser

el VaR o CVaR históricos sobre este ajuste que proporciona la aplicación, esto acarrea un alto coste computacional ya que es necesario recalibrar todos los modelos internos para cada muestra que se disponga. Por ejemplo, si se calculase el VaR histórico para una muestra de 500 datos pasados habría que realizar 500 recalibraciones de los dos modelos Hull & White.

Por último, existe otra vía disponible para la optimización de la valoración de carteras. Esta consiste en utilizar toda la potencialidad que proporciona una aplicación como Matlab, la cual pasa por utilizar el paquete que incorpora para paralelizar la ejecución de procedimientos. Este toolbox permite la creación de unidades simultáneas de ejecución capaces de valorar independientemente un elemento, utilizando para ello todos los procesadores disponibles del PC. Esta solución acompañada de una potente máquina lograría, a priori, optimizar de una manera altamente efectiva el cálculo de CVA de carteras potencialmente grandes de derivados.

Referencias

- [1] A. Antonov y D. Brecher. *Exposure & CVA for Large Portfolios of Vanilla Swaps: The Thin-Out Optimization*. Numerix Quantitative Research, 2012.
- [2] S. Schlenkrich. *Evaluating Sensitivities of Bermudan Swaptions*. Christ Church College, 2011.
- [3] D. Brigo y F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance, 2007.
- [4] D. Brigo, M. Morini y A. Pallavicini. *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding*. John Wiley & Sons, 2013.
- [5] J. Gregory. *Counterparty Credit Risk*. John Wiley & Sons, 2010.
- [6] M. Bianchetti. *Two curves, one price*. Risk Magazine, 2010.
- [7] F. Mercurio. *Interest Rates and The Credit Crunch: New Formulas and Market Models*, 2009.
- [8] D. Franzén y O. Sjöholm. *Credit Valuation Adjustment. In theory and practice*. KTH - Royal Institute of Tecnology, 2014.
- [9] A. B. Holmgaard. *Pricing of Contingent Interest Rate Claims, Foundations and Application of the Hull-White. Extended Vasicek Term Structure model*. Copenhagen Bussines School, 2013.
- [10] F. Jamshidiam. *An Exact Bond Option Formula*. The Journal of Finance, 1989.
- [11] J. Hull y A. White. *One-Factor Interest-Rates Model and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993.
- [12] OpenGamma. *Interest Rate Instruments and Market Conventions Guide*, 2012.
- [13] F. De Lope, J. García, L. M. García y J. Palomar. *Pricing Derivatives in the New Framework. OIS discounting, CVA, DVA & FVA*. BBVA, 2015.
- [14] M. Kijima, K. Tanaka y T. Wong. *A multi-quality model of interest rates*. Quantitative Finance, 2009.
- [15] C. Kenyon. *Short-rate pricing after the liquidity and credit shocks*. Risk Magazine, 2010.

- [16] ISDA. *BIS Quarterly review*. <http://www.bis.org/statistics/dt1920a.pdf>, 2015.
- [17] D. Brigo y A. Alfonsi. *Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model*. Finance and Stochastics, 2005.

9. Anexo I: Modelo Hull & White de un factor

En esta sección se define el modelo de tipo de interés utilizado en el desarrollo de este trabajo. En primer lugar, se trabajará matemáticamente para obtener las expresiones necesarias para la valoración, bajo el modelo Hull & White, en un entorno de una única divisa. Por último se realizará el proceso análogo para un entorno multi-divisa. En ambos casos se parte de la dinámica que define la evolución del tipo de interés libre de riesgo, $r_t^{f,l}$, obteniendo así la expresión de la cual se extrae tanto el precio de bonos cupón cero como el valor del factor de descuento estocástico.

Es importante resaltar que en este modelo, al igual que en muchos otros, el tipo de interés libre de riesgo se considera el activo subyacente, mientras que los bonos se consideran activos derivados de este r_t .

f y l en $r_t^{f,l}$ indican el tipo de interés en la moneda foránea y local respectivamente y el subíndice t indica instante de tiempo.

9.1. Definición del modelo

La dinámica del tipo de interés, r_t , bajo el modelo Hull & White es:

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t)dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \quad (36)$$

donde θ_t , a_t y σ_t son funciones deterministas del tiempo, t , y se denotan como el coeficiente de reversión, la velocidad de reversión y la volatilidad normal respectivamente.

Una característica importante de este modelo es el hecho de introducir un término de reversión a la media, $(\theta_t - a_t r_t)$. Esto parece razonable ya que es frecuente que los tipos de interés no evolucionen rápida e inestablemente sino de forma moderada a lo largo de tiempo. Además, se puede comprobar empíricamente que los tipos se han mantenido más o menos dentro de unos intervalos estáticos. Por otro lado, este modelo está definido por una única fuente de aleatoriedad que es un proceso de Wiener definido por dW_t , el cual sigue una distribución normal definida por una media de valor 0 y varianza dt .

9.2. Derivación de bonos cupón cero

Una vez el modelo utilizado ha sido definido en la ecuación (36), se muestra a continuación el proceso seguido para hallar la expresión que nos proporciona el precio de un bono cupón cero, en cualquier instante de tiempo futuro.

En primer lugar, se realiza la siguiente definición:

$$X_t = r_t e^{\int_0^t a_s ds}$$

Aplicando el lema de Itô y, posteriormente, un poco de álgebra, se obtiene:

$$dX_t = \theta_t e^{\int_0^t a_s ds} + \sigma_t e^{\int_0^t a_s ds} dW_t^{\mathbb{P}}$$

Llegados a este punto, se definen los siguientes elementos:

$$b_t = e^{-\int_0^t a_s ds}, g_t = \frac{\theta_t}{b_t}, f_t = \frac{\sigma_t}{b_t}$$

Por tanto:

$$dX_t = g_t dt + f_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Teniendo en cuenta la expresión de partida $X_t = r_t e^{\int_0^t a_s ds} \Rightarrow X_t = \frac{r_t}{b_t}$ e integrando sobre ella, resulta:

$$X_t = \frac{r_t}{b_t} = X_0 + \int_0^t g_s ds + \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}}, \text{ con } X_0 = r_0.$$

Pudiendo reescribir la expresión de la siguiente manera:

$$r_t = r_0 b_t + b_t \int_0^t g_s ds + b_t \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}} = \mu_t + b_t \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}}.$$

Donde μ_t viene definido de la siguiente manera:

$$\mu_t = r_0 b_t + b_t \int_0^t g_s ds$$

Una vez que se conoce la definición de r_t , es posible calcular el precio de los bonos. Para cualquier periodo de tiempo arbitrario, T y U con $T \leq U$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_T^U r_t dt &= \int_T^U \mu_t dt + \int_T^U b_t \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}} dt \\ &= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U b_t \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}} dt - \int_0^T b_t \int_0^t f_s dW_s^{\mathbb{P}} dt \end{aligned}$$

Aplicando el teorema estocástico de Fubini [Fubini 01], el cual permite cambiar el orden de integración,

$$\int_T^U r_t dt = \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U f_s \int_s^U b_t dt dW_s^{\mathbb{P}} - \int_0^T f_s \int_s^T b_t dt dW_s^{\mathbb{P}}$$

Aplicando en este punto la siguiente definición, $\beta_t = \int_0^t b_s ds$, y sustituyendo sabiendo que:

$$\int_T^U b_s ds = \int_0^U b_s ds - \int_0^T b_s ds = \beta_U - \beta_T$$

$$\begin{aligned} \int_T^U r_t dt &= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U f_s \int_s^U b_t dt dW_s^{\mathbb{P}} - \int_0^T f_s \int_s^T b_t dt dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} - \int_0^T f_s(\beta_T - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^T f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} + \int_T^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} - \int_0^T f_s(\beta_T - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} \\ &= \int_T^U \mu_t dt + (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} + \int_T^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}} \end{aligned}$$

Con la información obtenida hasta ahora se está en disposición de calcular el precio de bonos cupón cero. Para ello, se parte en primer lugar de la definición:

$$P(0, U) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^U r_s ds} | F_0]$$

Es importante resaltar que $P(\cdot, \cdot)$ indica el precio de bonos cupón cero, y que $P(0, \cdot)$ es **un bono de mercado**.

Dado que en T_0 la filtración F_0 es conocida, se puede calcular el valor esperado de forma incondicional, por lo que:

$$\begin{aligned} P(0, U) &= \mathbb{E}[e^{-\int_0^U r_s ds} | F_0] \\ &= e^{-[\int_0^U \mu_t dt + \int_0^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}}]} \\ &= e^{-[\int_0^U \mu_t dt + \frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds]} \end{aligned}$$

Nota: El exponente es una variable aleatoria normal, se cumple: $\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$, con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

De la expresión anterior se deduce el siguiente resultado que se utilizará más adelante:

$$e^{-\int_0^U \mu_t dt} = P(0, U) e^{-\frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds} \quad (37)$$

Llegados a este punto podemos obtener el precio de los bonos cupón cero forward, es decir, el precio de un bono cupón cero en T , para $T \geq 0$ (hoy) y que vence en U .

$$\begin{aligned} P(T, U) &= \mathbb{E}[e^{-\int_T^U r_s ds} | F_T] \\ &= \mathbb{E}[e^{-[\int_T^U \mu_t dt + (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} + \int_T^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}}]} | F_T] \\ &= e^{-(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}}} \mathbb{E}[e^{-[\int_T^U \mu_t dt + \int_T^U f_s(\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}}]} | F_T] \end{aligned}$$

Aplicando la misma ley de esperanzas condicionadas, resulta:

$$P(T, U) = e^{-(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}}} e^{-\int_T^U \mu_t dt + \frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds} \quad (38)$$

$$= e^{-\int_T^U \mu_t dt + \frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}}} \quad (39)$$

Es importante observar que:

$$e^{-\int_T^U \mu_t dt} = \frac{e^{-\int_0^U \mu_t dt}}{e^{-\int_0^T \mu_t dt}}$$

Utilizando el resultado obtenido en (37), se obtiene:

$$e^{-\int_T^U \mu_t dt} = \frac{e^{-\int_0^U \mu_t dt}}{e^{-\int_0^T \mu_t dt}} = \frac{P(0, U) e^{-\frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds}}{P(0, T) e^{-\frac{1}{2} \int_0^T f_s^2 (\beta_T - \beta_s)^2 ds}} \quad (40)$$

$$= \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{-\frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T f_s^2 (\beta_T - \beta_s)^2 ds} \quad (41)$$

$$= \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{-\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_T) \int_0^T (\frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s) f_s^2 ds} \quad (42)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (39) se concluye la fórmula que valora un bono forward:

$$\begin{aligned} P(T, U) &= \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{-\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_T) \int_0^T (\frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s) f_s^2 ds} \\ &\quad \cdot e^{+\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}}} \\ &= \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{(\beta_U - \beta_T) [\int_0^T (\frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s) f_s^2 ds + \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}}]} \end{aligned}$$

donde considerando $X_T = \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} \sim N(0, \int_0^T f_s^2 ds)$ se define la expresión de valoración de bonos cupón cero bajo el modelo Hull & White:

$$\boxed{P(T, U) = \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{(\beta_U - \beta_T) [\int_0^T (\frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s) f_s^2 ds + X_T]}} \quad (43)$$

9.3. Derivación del Factor de Descuento Estocástico

Como bien es sabido el factor de descuento estocástico, o SDF por sus siglas en inglés, se define como: $e^{-\int_T^U r_s ds}$. Haciendo uso de la expresión (7) así como de la siguiente:

$$e^{\int_T^U r_s dt} = e^{\int_T^U \mu_t dt + (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} + \int_T^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}}}$$

y aplicando una serie de derivaciones algebraicas resulta:

$$\begin{aligned} e^{-\int_T^U r_s ds} &= \frac{P(0, U)}{P(0, T)} e^{-\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_T) \int_0^T (\frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s) f_s^2 ds} \\ &\quad \cdot e^{-(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} - \int_T^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s^{\mathbb{P}}} \end{aligned}$$

Donde si se calcula este factor de descuento estocástico en $T = 0$ y se desarrolla matemáticamente la fórmula se alcanza la siguiente expresión:

$$e^{-\int_0^T r_s ds} = P(0, T) e^{-\frac{1}{2} \beta_T^2 \int_0^T f_s^2 ds + \beta_T \int_0^T \beta_s f_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^T \beta_s^2 f_s^2 ds - \beta_T \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} + \int_0^T f_s \beta_s dW_s^{\mathbb{P}}}$$

Definiendo $X_T = \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{P}} \sim N(0, \int_0^T f_s^2 ds)$ e $Y_T = \int_0^T f_s \beta_s dW_s^{\mathbb{P}} \sim N(0, \int_0^T \beta_s^2 f_s^2 ds)$ se obtiene la definición del SDF bajo el modelo Hull & White:

$$\boxed{e^{-\int_0^T r_s ds} = P(0, T) e^{-\frac{1}{2} \beta_T^2 \int_0^T f_s^2 ds + \beta_T \int_0^T \beta_s f_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^T \beta_s^2 f_s^2 ds - \beta_T X_T + Y_T}} \quad (44)$$

9.4. Derivación del modelo Hull & White Multi-Divisa

Este procedimiento que va a ser explicado es el denominado Hull & White híbrido. Dado que este producto trabaja sobre dos divisas se debe incluir al modelo de valoración una segunda dinámica, de forma que se tiene:

$$dr_t^l = (\theta_t^l - a_t^l r_t^l)dt + \sigma_t^l dW_l^{\mathbb{P},l} \Rightarrow P^l(T, U) = e^{-\int_T^U r_s^l ds} \quad (45)$$

$$dr_t^f = (\theta_t^f - a_t^f r_t^f)dt + \sigma_t^f dW_f^{\mathbb{P},l} \Rightarrow P^f(T, U) = e^{-\int_T^U r_s^f ds} \quad (46)$$

l indica la moneda local y f la foránea. Adicionalmente, el tipo de cambio que relaciona ambas divisas también evoluciona según su propia dinámica. Esta es:

$$\frac{dS_t}{S} = (r_t^l - r_t^f)dt + \sigma_t^S dW_S^{\mathbb{P},l} \quad (47)$$

Si resolvemos la ecuación anterior, al igual que se hace con la ecuación de Black-Scholes, se obtiene:

$$S_t = S_0 \frac{e^{-\int_0^t r_s^f ds}}{e^{-\int_0^t r_s^l ds}} e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^S + \sigma_s^S dW_S^{\mathbb{P},l}} \quad (48)$$

Sabiendo que los Brownianos de las tres ecuaciones anteriores están correlacionados de la siguiente manera:

	$dW_l^{\mathbb{P},l}$	$dW_f^{\mathbb{P},l}$	$dW_s^{\mathbb{P},l}$
$dW_l^{\mathbb{P},l}$	1	$\rho_{l,f}$	$\rho_{l,s}$
$dW_f^{\mathbb{P},l}$	-	1	$\rho_{f,s}$
$dW_s^{\mathbb{P},l}$	-	-	1

Es importante notar que los Brownianos están medidos bajo la medida que proporciona la moneda local, es lo que se necesita pues el valor del bono se obtendrá en moneda local.

Por otro lado, atendiendo a la ecuación (44) de la sección (3) de este apéndice tenemos que bajo la medida de probabilidad \mathbb{P}^l se cumple:

$$e^{-\int_0^t r_f ds} = A_1(0, t) e^{-\beta_t^f X_t^f + Y_t^f} \quad (49)$$

Donde $A_1(0, t)$ recoge el elemento no estocástico de la expresión.

Sabiendo que debe cumplirse por definición:

$$\mathbb{E}_0^l \left[\frac{S_t P_f(0, t)}{e^{\int_0^t r_s^l ds}} \middle| F_0 \right] = S_0 P_f(0, t)$$

Donde si se resuelve la esperanza, se obtiene:

$$\mathbb{E}_0^l \left[\frac{S_t A_1(0, t) e^{-\beta_t^f X_t^f + Y_t^f}}{e^{\int_0^t r_s^l ds}} \middle| F_0 \right] = S_0 A_1(0, t) e^{-\beta_t^f X_t^f + Y_t^f}$$

Desarrollando algebraicamente la expresión anterior, es posible despejar el valor de $A_1(0, t)$, y de esta manera, obtener el factor de descuento estocástico en la moneda foránea bajo la medida de la moneda local:

$$\boxed{e^{-\int_0^t r_f ds} \Big|_{\mathbb{P}^l} = e^{-\int_0^t r_f ds} \Big|_{\mathbb{P}^f} e^{\rho_{f,s} [\beta_t^f \int_0^t f_f \sigma^s ds - \int_0^t \beta_s^f f_f \sigma^s ds]} \quad (50)}$$

Es posible proceder de forma análoga para obtener el precio de un bono cupón cero foráneo bajo la medida de probabilidad local. En este caso el punto de partida es:

$$B^f(t, T) = A_2(t, T) e^{-(\beta_T^f - \beta_t^f) X_t^f} \quad (51)$$

Donde también $A_2(t, T)$ recoge el elemento determinista de la expresión. Al igual que se procedió anteriormente se tiene que cumplir por definición que:

$$\mathbb{E}_0^l \left[\frac{S_t P_f(t, T)}{e^{\int_0^t r_s^l ds}} \Big| F_0 \right] = S_0 P_f(0, T)$$

Donde si resolvemos se obtiene:

$$\mathbb{E}_0^l \left[\frac{S_t A_2(t, T) e^{-(\beta_T^f - \beta_t^f) X_t^f}}{e^{\int_0^t r_s^l ds}} \Big| F_0 \right] = S_0 A_2(t, T) e^{-(\beta_T^f - \beta_t^f) X_t^f}$$

Resolviendo se obtiene finalmente que:

$$\boxed{P^f(t, T) \Big|_{\mathbb{P}^l} = P^f(t, T) \Big|_{\mathbb{P}^f} e^{\rho_{f,s} [-(\beta_T^f - \beta_t^f) \int_0^t f_f \sigma^s ds]} \quad (52)}$$

Es importante resaltar que en este desarrollo se ha trabajado con dos divisas, pero no por ello se ha perdido generalidad. El procedimiento es extensible de manera análoga a n divisas.

9.5. Valoración de productos en el entorno Hull & White

En esta sección se va a definir el proceso de valoración bajo el modelo Hull & White. Es importante recalcar que el objetivo de este trabajo ha sido obtener la valoración del riesgo de crédito asumido en un contrato. Este precio se obtiene a partir del ya mencionado ajuste CVA, el cual requiere obtener la **exposición esperada** de un producto en uno, o varios, instantes de tiempo futuros. Esta exposición esperada implica calcular el máximo entre un conjunto de posibles valores futuros y cero o, lo que es lo mismo, provoca que el payoff final de la operación sea dependiente del modelo utilizado en la valoración. Es necesario recordar esto ya que si el objetivo final de la herramienta fuera valorar instrumentos de renta fija, bastaría con utilizar las curvas forward de tipos de interés, sin embargo, el objetivo va un paso más allá. Debido a esto, ha sido imprescindible desarrollar un modelo de tipos de interés con el que se sea capaz de simular en diferentes instantes de tiempo precios de bonos cupón cero, que posteriormente serán utilizados en la valoración de los productos definidos a continuación.

9.5.1. Valoración de Swaps

En secciones anteriores ya se describió las características de un swap (fijo - flotante). Atendiendo a esta definición dada se va obtener las ecuación de valoración de éste utilizando precios de bonos cupón cero (HW) en un entorno multi-curva. Por otro lado, se mostrará la relación existente entre éste y un bono con cupón (HW).

Se define un conjunto de fechas, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, en las cuales la pata fija del swap paga su cupón. Adicionalmente τ_i^{fix} indica el periodo de devengo, medido en fracción de año, entre dos fechas (S_{i-1}, S_i) de pago de la pata fija. Por otro lado, se construye un nuevo conjunto de fechas, $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_m\}$, en las que paga cupón la pata variable del IRS. De la misma manera que se hizo con la pata fija, se define τ_i^{float} como el periodo de devengo, medido en fracción de año, entre dos fechas de pago de la pata flotante. Atendiendo a estas definiciones se obtiene que el precio de un IRS en un instante de tiempo dado, t , es:

$$Swap(t) = \left[\underbrace{R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(t, S_i)}_{\text{Pata Fija}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \tau_i^{float} \tilde{F}^x[t, \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i] P_{HW}^d(t, \tilde{S}_i)}_{\text{Pata Flotante}} \right] \times N \quad (53)$$

Donde $[S_0, = \tilde{S}_0]$ y $[S_n = \tilde{S}_m]$ indican el inicio y vencimiento del swap respectivamente, $\tilde{F}^x[t, \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i]$ el tipo de interés forward observado en t entre las fechas $\tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i$ y que la frecuencia de pago de las patas del swap puede ser distinta. Por otro lado, es importante resaltar que $P_{HW}^d(\cdot, \cdot)$ y $P_{HW}^x(\cdot, \cdot)$ indican el precio de un bono bajo el modelo Hull & White utilizando la curva de descuento y de estimación respectivamente. Finalmente, R indica el tipo de interés fijo pagado por la pata fija y N el nominal del contrato.

Aplicando la definición de los tipo de interés forward esta expresión puede ser vista de la siguiente manera:

$$Swap(t) = \left[R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(t, S_i) - \sum_{i=1}^m P_{HW}^d(t, \tilde{S}_i) \left[\frac{P_{HW}^x(t, \tilde{S}_{i-1}) - P_{HW}^x(t, \tilde{S}_i)}{P_{HW}^x(t, \tilde{S}_i)} \right] \right] \times N \quad (54)$$

Es fácil demostrar que si la curva de estimación utilizada es la misma que la curva de descuento, esto es, $P_{HW}^d(\cdot, \cdot) = P_{HW}^x(\cdot, \cdot)$, como se hacía en el obsoleto marco de valoración

previo a la crisis de 2007, se obtiene:

$$Swap(t) = \left[R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(t, S_i) - \sum_{i=1}^m P_{HW}^d(t, \tilde{S}_i) \left[\frac{P_{HW}^x(t, \tilde{S}_{i-1}) - P_{HW}^x(t, \tilde{S}_i)}{P_{HW}^x(t, \tilde{S}_i)} \right] \right] \times N \quad (55)$$

$$= \left[R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(t, S_i) - P_{HW}^d(t, \tilde{S}_0) + P_{HW}^d(t, \tilde{S}_m) \right] \times N \quad (56)$$

Agrupando los términos de la ecuación anterior de la forma adecuada y renombrándolos, un swap puede ser visto como la compra de un bono con cupón forward en el que se paga el valor del nominal descontado hasta el momento \tilde{S}_0 , visto en t , y en el que se reciben los cupones y el nominal en las fechas de pago futuras. Analíticamente:

$$Swap(t) = \left[\underbrace{-P_{HW}^d(t, \tilde{S}_0)}_{\text{Precio Bono}} + \underbrace{R \sum_{i=1}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(t, S_i)}_{\text{Cupones}} + \underbrace{P_{HW}^d(t, \tilde{S}_m)}_{\text{Nominal}} \right] \times N$$

9.5.2. Valoración de CCS

Como ya fue descrito previamente el Cross Currency Swap es un producto en el cual ambas patas pagan tipos de interés variables pero denominados en distintas divisas.

En primer lugar se define C_1 y C_2 como dos divisas cualesquiera, por ejemplo *GBP* y *EUR*; $X(t) = \frac{C_2(t)}{C_1(t)}$ como el tipo de cambio que relaciona ambas divisas y \mathbf{S} como un conjunto de fechas, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, en las cuales ambas patas flotantes denominadas en distintas divisas pagan cupón. Al igual que se hizo en la sección anterior τ_i^C determina el periodo de tiempo, en fracción de año, entre dos fechas de pago.

Atendiendo a estas definiciones se obtiene que el precio de un CCS en un instante de

tiempo dado, t , es:

$$\begin{aligned}
CCS^C(t) &= NRFL1^C(t) - NRFL2^C(t) \\
NRFL1^C(t) &= \left[-N^{C_1} P_{HW}^{d,C_1}(t, T_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_1} [\tilde{F}^{x,C_1}(t, S_{i-1}, S_i)] \tau_i^C P_{HW}^{d,C_1}(t, S_i) \right. \\
&\quad \left. + N^{C_1} P_{HW}^{d,C_1}(t, S_n) \right] \times X_1(t) \\
&= \left[-N^{C_1} P_{HW}^{d,C_1}(t, T_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_1} \left[\frac{P_{HW}^{x,C_1}(t, S_{i-1}) - P_{HW}^{x,C_1}(t, S_i)}{P_{HW}^{x,C_1}(t, S_i)} \right] P_{HW}^{d,C_1}(t, S_i) \right. \\
&\quad \left. + N^{C_1} P_{HW}^{d,C_1}(t, S_n) \right] \times X_1(t) \\
NRFL2^C(t) &= \left[-N^{C_2} P_{HW}^{d,C_2}(t, S_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_2} [\tilde{F}^{x,C_2}(t; S_{i-1}, S_i)] \tau_i^C P_{HW}^{d,C_2}(t, S_i) \right. \\
&\quad \left. + N^{C_2} P_{HW}^{d,C_2}(t, S_n) \right] \times X_2(t) \\
&= \left[-N^{C_2} P_{HW}^{d,C_2}(t, S_0) + \sum_{i=1}^n N^{C_2} \left[\frac{P_{HW}^{x,C_2}(t, S_{i-1}) - P_{HW}^{x,C_2}(t, S_i)}{P_{HW}^{x,C_2}(t, S_i)} \right] P_{HW}^{d,C_2}(t, S_i) \right. \\
&\quad \left. + N^{C_2} P_{HW}^{d,C_2}(t, S_n) \right] \times X_2(t)
\end{aligned}$$

Siendo N^{C_1} el nominal del contrato denominado en la divisa 1, N^{C_2} el nominal del contrato denominado en la divisa 2 y:

$$X_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_1(t) \\ \frac{C_1(t)}{C_2(t)} & \text{si } C = C_2(t) \end{cases}$$

$$X_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = C_2(t) \\ \frac{C_2(t)}{C_1(t)} & \text{si } C = C_1(t) \end{cases}$$

Donde $\tilde{F}^{x,C_1}(t, S_{i-1}, S_i)$ y $\tilde{F}^{x,C_2}(t; \tilde{S}_{i-1}, \tilde{S}_i)$ son los dos tipos de interés forward, denominados en la divisa correspondiente y obtenidos a partir de la curva de estimación pertinente.

9.5.3. Valoración de Swaptions

Un swaption es un producto que da al comprador del mismo el derecho, no la obligación, de entrar en un swap subyacente en el futuro. Este producto proporciona por tanto un pago a vencimiento que corresponde con:

$$Swaption(T) = \max(\epsilon \times Swap(T), 0)$$

Siendo T el vencimiento de la opción del producto.

Anteriormente se demostró que utilizando una única curva para estimar y descontar flujos de caja un swap puede ser interpretado como un bono con cupón. A partir de esta relación se puede obtener:

$$Swaption(T) = \max(\epsilon \times Swap(T), 0) \tag{57}$$

$$= \max \left[\left(\epsilon \times \left[-P_{HW}^d(T, \tilde{S}_0) + R \sum_{i=S_{i_0}}^n \tau_i^{fix} P_{HW}^d(T, S_i) + P_{HW}^d(T, \tilde{S}_m) \right] \times N \right), 0 \right] \tag{58}$$

Donde $\epsilon \in [1, -1]$ indica si se entra en el swap subyacente como payer o receiver e i_0 indica $S_{i_0} = \min_{i=1, \dots, n} \{S_i | S_i \geq T\}$.

Explotando esta expresión se puede interpretar que una opción sobre un swap es equivalente a una opción sobre un bono con cupón. De esta forma se define:

$$Swap(T) = CBO(T)$$

Siendo CBO, Coupon Bond Option.

Dada esta expresión se demuestra en [10] que una opción sobre un bono con cupón se puede descomponer en una cartera de opciones sobre bonos cupón cero. Esta descomposición requiere que establezcamos un cambio de notación. Como se ha podido ver anteriormente, el precio de un bono cupón cero en el entorno Hull & White depende de cuatro parámetros: la fecha de valoración, T , la fecha de vencimiento, U , la fecha de hoy, t y de un elemento estocástico ya mencionado, X_T . Es por esto que esta notación es equivalente: $P_{HW}(t; T, U) \equiv P_{HW}(t; T, U, X_T)$. Este detalle es importante de cara a valorar opciones sobre bonos con cupón. Es importante resaltar que se cumple la siguiente relación temporal: $t \leq T \leq U$.

Siguiendo los siguientes pasos podemos descomponer una opción sobre un bono con cupón, con fecha de vencimiento T y strike K en una cartera de opciones sobre bonos con cupón cero:

1. Se calcula el valor X_T^* tal que cumple la siguiente relación:

$$CB(t; T, \bar{S}, X_T^*) = K$$

En este caso particular se cumple que $K = 0$.

2. Se obtiene los strikes de cada elemento de la cartera de opciones:

$$K_i = B(t; T, S_i, X_T^*)$$

3. Se calcula el precio de la cartera de opciones:

$$CBO(t; T, \bar{S}, \epsilon) = \sum_{i \in \bar{S}_i \geq T} c_i ZCO(t; T, S_i, K_i, \epsilon)$$

Siendo $\bar{S} = \{S_{i_0}, S_{i_0+1}, \dots, S_n\}$ con $S_{i_0} \geq T$, ZCO indica el precio de una opción sobre un bono cupón cero y $c_i \in [-1, R\tau_{i_0}^{fix}, R\tau_{i_0+1}^{fix}, \dots, 1 + R\tau_n^{fix}]$.

Una vez especificado cómo valorar swaptions utilizando la descomposición de Jamshidian, y demostrado que esta depende de la valoración de opciones sobre bonos cupón cero, se va a introducir la expresión de valoración de las ZCO.

Se sabe que bajo la medida natural $P(t, S)$ se cumple que el precio de un bono forward es martingala, esto es: $E^S \left[\frac{P(T, S)}{P(T, T)} \middle| F_0 \right] = \frac{P(0, S)}{P(0, T)}$. Por otro lado, en secciones anteriores se demostró que la varianza de un bono cupón cero forward sigue la siguiente expresión: $\sigma_P^2 = (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T f_s^2 ds$. Además se conoce que bajo la medida S-Forward el precio de un bono se distribuye lognormalmente con $\mu = \frac{P(0, S)}{P(0, T)}$ y $\sigma_P^2 = (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T f_s^2 ds$.

Debido a este resultado se puede utilizar el modelo *Black'76* para valorar una opción sobre un bono cupón cero. Por lo tanto, el valor de una opción (call o put), con fecha de ejercicio T , sobre un bono cupón cero con vencimiento S y strike K es:

$$ZCO(t; T, S, K, \epsilon) = P(t, T) \left[\text{Black}'76 \left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)}, K, \sigma_P, 1, \epsilon \right) \right]$$

Siendo, como es bien sabido:

$$\text{Black}'76(F, K, \sigma_P, T, \epsilon) = \epsilon [F\Phi(\epsilon d_1) - K\Phi(\epsilon d_2)] \text{ con } d_{1,2} = \frac{\log(F/K)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Es fácil extender el análisis a bonos con cupón ya que estos no son más que una suma ponderada de bonos cupón cero. Por lo tanto, la valoración de una opción sobre un bono con cupón se

realiza también mediante *Black'76*. De esta manera es posible obtener la siguiente expresión de valoración de opciones europeas sobre bonos con cupón bajo el entorno Hull & White:

$$CBO(t; T, \bar{S}, \epsilon) = \sum_{i \in \bar{S}_i \geq T} c_i P(t, T) \left[\text{Black'76} \left(\frac{P(t, S_i)}{P(t, T)}, K_i, \sigma_{P_i}, 1, \epsilon \right) \right]$$

con $c_i \in [-1, R\tau_{i_0}^{fix}, R\tau_{i_0+1}^{fix}, \dots, 1 + R\tau_n^{fix}]$.

10. Anexo II: Calibrado del modelo Hull & White.

En esta sección del documento se tratará de definir con claridad el proceso seguido para la calibración de los parámetros del modelo Hull & White definido en profundidad en el Anexo I.

En primer lugar, es necesario explicar qué es y en qué consiste dicho procedimiento. Como es bien sabido, un modelo de tipos de interés trata de explicar el comportamiento a lo largo del tiempo del tipo de interés (instantáneo, por ejemplo) utilizando una dinámica estocástica. Esta dinámica depende de unos parámetros establecidos, el proceso de calibración consiste en, a través de los datos de mercado y de un modelo que valore productos de mercado (Black76, por ejemplo), obtener el valor de los parámetros del modelo en cuestión que iguale los precios aportados por ambas metodologías de valoración.

En este trabajo se ha utilizado el modelo Hull & White. Este modelo depende de dos parámetros, que son a y σ_t . El primero de ellos es fijado a 1 % con el objetivo de garantizar la viabilidad del proceso de calibración, lo que implica que el único parámetro que es necesario calibrar es la volatilidad de los tipos de interés. Los productos de mercado utilizados para la calibración del modelo son swaptions europeos, más concretamente swaptions europeos 'at the money' (ATM). En este trabajo se ha utilizado los ATM porque presentan alta liquidez en el mercado lo que provoca una estabilidad en las cotizaciones del producto en cuestión.

Como los swaptions europeos tienen fórmula analítica de valoración podemos obtener la volatilidad implícita que el mercado asocia al swap subyacente de la opción. Dada estas y las curvas de tipos de interés de una fecha concreta podemos obtener el precio de swaptions de mercado necesitados en el proceso de calibración.

10.1. Supuestos paramétricos del modelo.

En el anexo I se han desarrollado tanto las expresiones del precio de bonos cupón cero en el entorno Hull & White, como la metodología a seguir para valorar swaptions dado el modelo de tipos de interés. Por otro lado, en el anexo III se ha descrito el procedimiento para valorar swaption utilizando los datos de mercado. Finalmente, para poder realizar la calibración es necesario hacer una serie de supuestos acerca de las variables de nuestro modelo. Los supuestos establecidos son los siguientes:

1. $a_t \equiv \text{constant} = 0,01$: La velocidad de reversión a la media del modelo se fija con el fin

de garantizar el calibrado.

2. $\sigma_t \equiv$ Piecewise constant: Es un recurso utilizado típicamente por los profesionales del sector. Permite generar una estructura temporal de volatilidades, que proporcione resultados aceptables, huyendo del tradicional e irreal supuesto de volatilidad constante. Esto es: se define para un intervalo dado una volatilidad constante tal que $\sigma_t = \sigma_j$ si $t \in (t_{j-1}, t_j]$ con $j = 1, 2, \dots, N$.

Ambos supuestos son muy importantes, sin embargo, el segundo de ellos es el que nos permite utilizar la conocida técnica del bootstrap para obtener las volatilidades necesarias para valorar swaps (y swaptions) bajo el modelo Hull & White en cualquier instante futuro.

Como se demostró en el anexo I de este documento, la valoración de swaptions requiere haber obtenido previamente la volatilidad a ese vencimiento concreto, la cual tiene la siguiente estructura: $\sigma_B^2 = (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T \sigma_s^2 e^{2as} ds$. Al tratar esta volatilidad como una función constante a trozos, es posible hacer la siguiente aproximación:

$$\sigma_B^2 = (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T \sigma_s^2 e^{2as} ds \approx \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T e^{2as} ds$$

Donde se puede observar que para calcular la volatilidad a un T (vencimiento de la opción) dado es necesario haber obtenido previamente $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{T-2}, \sigma_{T-1}$.

Por lo tanto, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} ZCO(t; T, S, K, \epsilon) &= B(t, T) \left[Black'76 \left(\frac{B(t, S)}{B(t, T)}, K, \sigma_T, 1, \epsilon \right) \right] \\ &\equiv B(t, T) \left[Black'76 \left(\frac{B(t, S)}{B(t, T)}, K, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T], 1, \epsilon \right) \right] \end{aligned}$$

Siendo $\epsilon \in [1, -1]$ el tipo de swap subyacente.

- Si $\epsilon = 1$ el swap es *receiver*.
- Si $\epsilon = -1$ el swap es *payer*.

Finalmente, esta dependencia de la volatilidad es posible elevarla a la valoración de swaptions:

$$Swaption(t; T, \bar{S}, \epsilon) = CBO(t; T, \bar{S}, \epsilon) = CBO(t; T, \bar{S}, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T], \epsilon)$$

10.2. Proceso de calibración.

La estructura temporal de volatilidades va a ser calculada a partir de los vencimientos de las opciones de los swaptions de mercado. Esto quiere decir que se tendrán tantos periodos de volatilidad constante como maturities utilicemos. En este caso particular se ha calibrado a vencimientos de 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, ..., 20 años, por lo que se obtendrán volatilidades para los periodos $(1m, 3m]$, $(3m, 6m]$, etc. A partir de este vencimiento se supondrá que la volatilidad es plana.

Utilizando la información de la sección anterior, es posible plantear el problema de calibración como un problema de optimización matemático que debe resolver la siguiente ecuación:

$$CBO(t; T_j, \bar{S}, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{T_j}], \epsilon) - MarketSwaption(t; T_j) = 0, \forall j \in [1, 2, \dots, N]$$

con $T_1 = 1m, T_2 = 3m, \dots, T_N = 20Y$. El algoritmo de calibración puede ser descrito de la siguiente manera:

1. Obtener el precio de swaption de mercado, $MarketSwaption(t; T_j)$. El procedimiento para valorar swaptions de mercado está descrito en profundidad en el anexo III.
2. Generar, según un algoritmo numérico de optimización, un posible valor de la volatilidad para ese vencimiento dado, $\tilde{\sigma}_{T_j}$.
3. Calcular en función de esta volatilidad el precio de un swaption utilizando el modelo Hull & White de valoración, $CBO(t; T_j, \bar{S}, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tilde{\sigma}_{T_j}], \epsilon)$.

4. Comprobar si ambos valores son iguales, esto es:

$$CBO(t; T_j, \bar{S}, [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tilde{\sigma}_{T_j}], \epsilon) - MarketSwaption(t; T_j) = 0$$

5. De no ser así volvemos a 2. En caso de que sí lo sea pasamos a calibrar la volatilidad correspondiente al siguiente vencimiento, volvemos a 1.

El siguiente diagrama de flujos trata explicar el algoritmo de otra forma con el objetivo de aclarar el proceso.

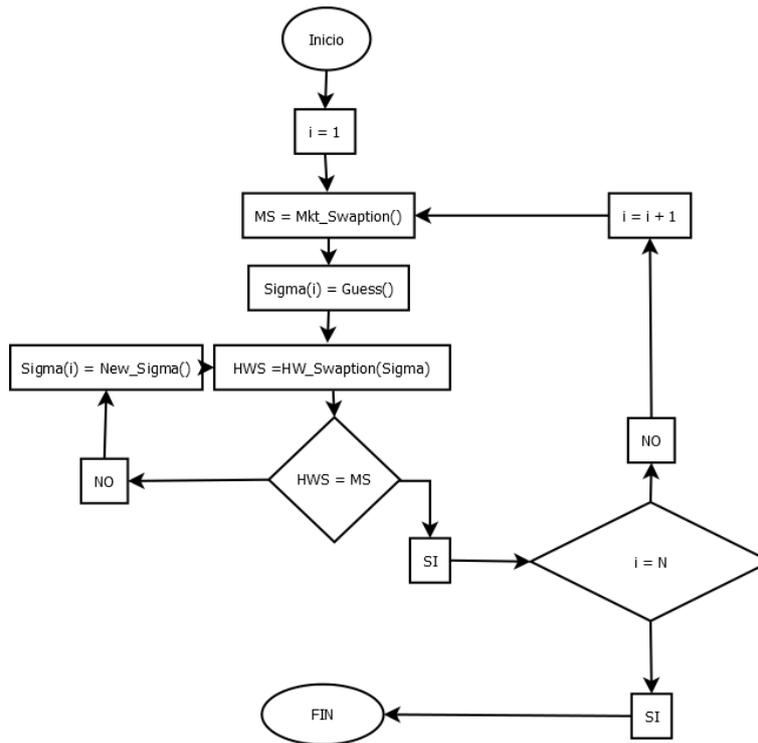


Figura 30: Diagrama de flujos del Calibrado.

En las siguientes gráficas se pueden encontrar los resultados obtenidos para la calibración de los modelos Hull & White utilizados en este trabajo. Es importante mencionar que los datos utilizados para poder calibrar han sido:

- Las curvas de tipos de interés correspondientes a diferentes tenor.
- Los cubos de volatilidad para swaptions de mercado.

Ambos pertenecientes al *EUR* y *GBP* el día 31/03/2015.

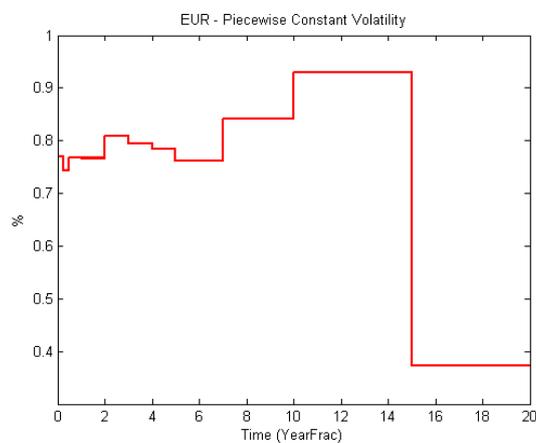


Figura 31: Función de volatilidad - EUR.

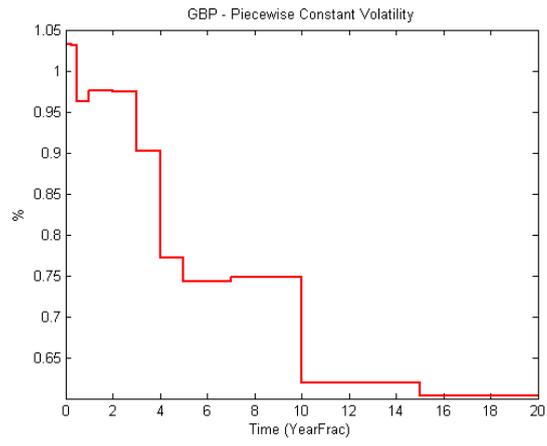


Figura 32: Función de volatilidad - GBP.

11. Anexo III: Valoración de Swaption - Black'76

Como se ha comentado a lo largo del trabajo se ha utilizado el modelo de Black'76 en el proceso de calibrado de parámetros del modelo Hull & White, este anexo III se encarga de presentarlo. El proceso seguido para la obtención de las fórmulas de valoración puede verse en [3]. Como hemos visto el pago del un swaption puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$Swaption(t) = \left(\sum_{i=i_0+1}^M \tau_i P(t, S_i) \right) \left[\epsilon \left(R - \frac{P(t, S_{i_0}) - P(t, S_M)}{\sum_{i=i_0+1}^M \tau_i P(t, S_i)} \right) \right]^+$$

Donde el término *Annuity* viene dado por:

$$Annuity(t) = \sum_{i=i_0+1}^M \tau_i P(t, S_i)$$

Y el tipo par swap (forward) representado por:

$$Y(t) = \frac{P(t, S_{i_0}) - P(t, S_M)}{\sum_{i=i_0+1}^M \tau_i P(t, S_i)}$$

Por lo tanto es posible reescribir la ecuación de valoración:

$$Swaption(t) = Annuity(t) [-\epsilon(Y(t) - R)]^+$$

Se puede interpretar de esta última expresión que un swaption europeo es equivalente a una opción (call si el subyacente es un receiver swap, o put en el caso contrario) sobre el tipo par swap (forward) con strike R (cupón de la pata fija del swap subyacente). De esta forma, un swaption puede ser valorado utilizando la metodología descrita en Black'76.

El modelo de Black'76 asume que, condicional a la información disponible en el momento de valoración, el tipo par swap se distribuye lognormalmente con $\mu = Y(t)$ y $\sigma = \sigma_{B76}$. El precio, por tanto, se puede calcular haciendo uso de:

$$Swaption(t) = Annuity(t) [Black'76(Y(t), R, \sigma_{B76}, T, -\epsilon)]$$

Donde T indica el tiempo al vencimiento medido en fracción de año. Con:

$$Black'76(F, K, \sigma_{B76}, T, \epsilon) = \epsilon [F\Phi(\epsilon d_1) - K\Phi(\epsilon d_2)] \text{ con } d_{1,2} = \frac{\log(F/K)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

12. Anexo IV: Calibración de Probabilidades de Default

Uno de los componentes más importantes a la hora de calcular el CVA es la probabilidad de default que se asocia a una contraparte dada en un horizonte temporal. Esta es, además, compleja de estimar. Esta se puede calcular a partir de las cotizaciones de CDS de una empresa dada. Son las llamadas probabilidades de default riesgo neutral.

Esta sección del documento trata de explicar el procedimiento seguido para calibrar estas probabilidades de default. En ella se explicarán unos conceptos previos necesarios para poder ilustrar el método seguido.

12.1. Credit Default Swap - CDS

Un CDS es un activo derivado cuyo subyacente es el crédito de un entidad de referencia. La finalidad de producto es proteger a una entidad B del incumplimiento de las obligaciones por parte de la entidad de referencia.

- El comprador de este producto se compromete a pagar periódicamente un spread (cupón fijo, s) sobre un notional acordado a la parte vendedora del contrato, mientras la entidad de referencia no incumpla sus obligaciones.
- El vendedor del contrato no realiza ningún pago a la contraparte hasta que la entidad de referencia hace default, si llega a hacerlo. En este caso la parte vendedora se compromete a compensar las pérdidas en las que ha incurrido el comprador. Formalmente, el pago realizado es: $(1 - RR)Notional$.

Por tanto se puede decir que un contrato CDS tiene dos patas, la pata spread y la pata default. El spread inicial es aquel que hace que ambas patas tengan el mismo valor, es decir, que haga que el coste de entrar en un contrato CDS al inicio sea 0. Un contrato CDS depende de:

- La probabilidad de default (PD) esperada de la entidad de referencia en CDS. $\uparrow PD \Rightarrow \uparrow s$.
- La severidad de las pérdidas esperadas incurridas tras el evento de default (LGD). $\uparrow LGD \Rightarrow \uparrow s$.
- El vencimiento del contrato. Los spreads de CDS tienen una estructura temporal, es decir, dependiendo del vencimiento del contrato el spread cotizado varía. Generalmente, aunque puede que en algún momento no sea así, se cumple la siguiente relación: $\uparrow T \Rightarrow \uparrow s$.

12.2. Forward CDS.

Es un instrumento, similar al CDS tradicional, que permite al comprador entrar en un contrato CDS dentro de un determinado tiempo M , vencimiento del forward y durante un determinado periodo T , vencimiento del contrato CDS. El spread de forward CDS es fijado en el momento de la compra, al igual que sucede en forward swap.

En caso de que la entidad de referencia del CDS incumpla antes del vencimiento del forward, el contrato se extingue sin ningún compromiso adquirido por ninguna de las partes.

12.3. Modelización del evento de default

En esta subsección se va a modelar el evento de default de una determinada compañía. Esta modelización es necesaria de cara a poder calibrar las probabilidades de default involucradas en el cálculo del CVA. Con este objetivo se discretiza el tiempo en intervalos infinitesimales dt . Para cada uno de ellos se tiene que:

$$Pr[\tau \leq t + dt | \tau > t] = \lambda_t dt \quad (59)$$

Donde τ es el momento de default, λ_t es la probabilidad de default por unidad de tiempo. Es llamada intensidad de default, generalmente es una función del tiempo que puede ser determinista o estocástica. Esta intensidad de default se puede relacionar con la probabilidad de supervivencia en un determinado horizonte temporal.

Si se define $P(t, T) = Pr[\tau > T | F_t]$ como la probabilidad de que el evento de default sea posterior a T condicionado a la información conocida en el instante t .

Para el horizonte $T + dt$ se tiene:

$$\begin{aligned} P(t, T + dT) &= Pr[\tau > T | F_t] Pr[\tau > T + dT | F_t, \tau > T] = P(t, T)(1 - \lambda_T dT) \Rightarrow \\ dP(t, T) &= -\lambda_T P(t, T) dT \end{aligned}$$

de donde es inmediato obtener:

$$P(t, T) = P(t, t) e^{-\int_0^T \lambda_s ds}$$

Y como $P(t, t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$, se obtiene:

$$P(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^T \lambda_s ds} \quad (60)$$

A partir de estas $P(t, T)$ se puede definir las probabilidades de supervivencia forward:

$$P(t, T, S) = Pr[\tau > S | F_t, \tau > T]$$

Haciendo uso de la siguiente expresión:

$$P(t, S) = Pr[\tau > T|F_t] Pr[\tau > S|F_t, \tau > T] = P(t, T)P(t, T, S)$$

Se cumple que:

$$P(t, T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \frac{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^S \lambda_s ds}}{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^T \lambda_s ds}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_T^S \lambda_s ds} \quad (61)$$

Es sencillo obtener la función de densidad de probabilidad del tiempo de default a partir de la función que define la probabilidad de supervivencia. Se sabe que la función de distribución de probabilidad viene definida por:

$$F(t, T) = Pr[\tau \leq T|F_t] = 1 - Pr[\tau > T|F_t] = 1 - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^T \lambda_s ds}$$

Por lo que la función de densidad es:

$$f(t, T) = \frac{\partial F(t, T)}{\partial T} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \lambda_T e^{-\int_0^T \lambda_s ds} \quad (62)$$

12.4. Valoración de CDS

Para la valoración de de estos productos se van a hacer dos supuestos. En primer lugar que la función de intensidad de default es determinista y está dada. Y en segundo lugar, esta intensidad de default es independiente de los tipos de interés, o lo que es lo mismo, de los precios de los bonos cupón cero. Este es el llamado supuesto de 'separabilidad' el cual es una práctica común de mercado y viene demostrado con detalle en [17].

Se denota $B(t, T)$ como el precio de un bono cupón cero en t que vence en T y $P(t, T)$ la probabilidad de supervivencia al intervalo de tiempo $[t, T]$.

Además se va a valorar un CDS cuya prima s se paga anualmente en las fechas T_1, T_2, \dots, T_n . Todas las fechas son posteriores a la fecha de valoración t . Por tanto el precio de un CDS, desde el punto de vista de un vendedor de protección tiene la siguiente expresión:

$$NPV_{CDS}(t) = \underbrace{s \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i B(t, T_i) P(t, T_i) + \int_t^{T_n} \bar{\alpha}_i B(t, s) f(t, s) ds \right)}_{\text{Pata de la Prima}} - \underbrace{(1 - RR) \int_t^{T_n} B(t, s) f(t, s) ds}_{\text{Pata Default}} \quad (63)$$

Donde α_i indica el periodo de devengo de la prima y $\bar{\alpha}_i$ el tiempo transcurrido en el último periodo de devengo hasta el instante de default.

El término del sumatorio representa los pagos recibidos en caso de supervivencia de la entidad de referencia del CDS, y los otros dos términos los flujos a pagar en caso de que haya incumplimiento.

Por otro lado, se sabe que el precio de un CDS al inicio es 0. Por tanto igualando la expresión anterior es posible obtener el valor de $s(t)_{PAR}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 NPV_{CDS}(t) = 0 = & s(t)_{PAR} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i B(t, T_i) P(t, T_i) + \int_t^{T_n} \bar{\alpha}_i B(t, s) f(t, s) ds \right)}_{DV01} \\
 & - \underbrace{(1 - RR) \int_t^{T_n} B(t, s) f(t, s) ds}_{DL}
 \end{aligned} \tag{64}$$

Donde DL indica la pata default y $DV01$ el valor del annuity teniendo en cuenta el riesgo de crédito.

12.5. Relación $\lambda_t - s(t)$

Con el objetivo de obtener esta relación, que se utilizará más adelante, se realizan los siguientes supuestos.

- Se asume que la prima del CDS se paga continuamente, es decir, para cada instante ds el vendedor del CDS recibe $s_{PAR} ds$.
- Se establece que la función de intensidad de default es constante. Matemáticamente $\lambda_s = \lambda \forall s$.

El precio al inicio de este CDS sigue la siguiente expresión:

$$NPV_{CDS}(t) = 0 = s(t)_{PAR} \int_t^T B(t, s) e^{-\lambda(t-s)} ds - (1 - RR) \int_t^T s(t, s) \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds$$

Fácilmente se comprueba que:

$$\lambda = \frac{s(t)_{PAR}}{1 - RR}$$

12.6. Prima CDS Forward

Se supone que se observan las primas de dos CDS en el mercado que tienen diferentes vencimientos T_1 y T_2 , cada una de estas primas se denotan por $s(t, T_1)$ y $s(t, T_2)$. Si una

entidad compra protección con vencimiento T_1 y vende protección con vencimiento T_2 sobre la misma entidad de referencia y con el mismo notional en el contrato, mantiene una exposición abierta en el intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$. El coste de cubrirse ante el incumplimiento de la misma entidad de referencia es:

$$s(t, T_2)DV01(t, t, T_2) - s(t, T_1)DV01(t, t, T_1) = s(t, T_1, T_2)DV01(t, T_1, T_2)$$

donde $DV01(t, T_1, T_2)$ indica el annuity teniendo en cuenta el riesgo de crédito observado en t , con pagos entre T_1 y T_2 .

Se deduce por tanto:

$$s(t, T_1, T_2) = \frac{s(t, T_2)DV01(t, t, T_2) - s(t, T_1)DV01(t, t, T_1)}{DV01(t, T_1, T_2)}$$

y como: $DV01(t, T_1, T_2) = DV01(t, t, T_2) - DV01(t, t, T_1)$:

$$s(t, T_1, T_2) = \frac{s(t, T_2)DV01(t, t, T_2) - s(t, T_1)DV01(t, t, T_1)}{DV01(t, t, T_2) - DV01(t, t, T_1)} \quad (65)$$

Alternativamente se puede demostrar que existe una relación entre la prima diferencial de un CDS forward y la correspondiente intensidad de default en el intervalo $[T, T + dT]$. La pata pagadora de la prima viene dada por:

$$s(t, T, T + dT)dT$$

Además, como ya se ha visto con anterioridad, en el momento de la compra de este CDS forward instantáneo el valor de esta prima debe ser tal que cumpla la siguiente ecuación:

$$0 = B(t, T)P(t, T)s(t, T, T + dT)dT - (1 - RR)\lambda_T B(t, T)P(t, T)$$

De donde se deduce que:

$$\lambda_T = \frac{s(t, T, T + dT)}{1 - RR} \quad (66)$$

12.7. Proceso de calibración

Como se ha podido ver durante el desarrollo de las expresiones, el parámetro clave cuando se trata de obtener probabilidades de supervivencia, o alternativamente probabilidades de default, es λ_T . Este parámetro, al igual que sucede con la volatilidad del modelo Hull & White, puede ser calibrado mediante un proceso de bootstrap.

Para poder llevar a cabo este proceso es necesario realizar los siguientes supuestos:

1. Se supone que λ_T sigue una función constante a trozos: $\lambda_T = \lambda_j$, $\forall T \in (T_{j-1}, T_j]$.

2. El evento de default sólo puede ocurrir al final de cada periodo de devengo de cupón:

$$\bar{\alpha}_i = 0.$$

3. Recovery Rate constante: $RR_T = RR$, $\forall T \in (T_1, T_N]$.

Dado estos supuestos y utilizando las expresiones (61), (65) y (66) se obtiene:

$$\lambda_{T_j} = \frac{s(t, T_2) \sum_{i=1}^j \alpha_i B(t, T_i) P(t, T_i) - s(t, T_1) \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k B(t, T_k) P(t, T_k)}{(1 - RR) (\sum_{l=1}^j \alpha_l B(t, T_l) P(t, T_l) - \sum_{m=1}^{j-1} \alpha_m B(t, T_m) P(t, T_m))} \quad (67)$$

Donde se observa claramente que el valor de la intensidad de default para un intervalo arbitrario dado, depende de los valores calibrados previamente. De esta forma, y partiendo de la relación inicial $\lambda_1 = \frac{s(t, T_1)}{1 - RR}$ es posible calcular la curva que define a estas intensidades.

Para la calibración de este parámetro se utiliza los spread de CDS cotizados en el mercado, estos cotizan típicamente a vencimientos 1Y, 3Y, 5Y, 7Y y 10Y por lo que $T_j \in [1, 3, 5, 7, 10]$.

13. Anexo V: Conceptos básicos de Ingeniería del Software

Este anexo ha sido escrito con el objetivo de facilitar la comprensión del proceso de diseño y construcción seguido en la implementación de la herramienta. En este se definen una serie de conceptos y procesos descritos por la ingeniería del software, la cual establece unos procedimientos estándares para la correcta construcción de un sistema software.

13.1. Procesos de Desarrollo

La construcción de un producto software es una tarea compleja, tanto por el volumen de trabajo y/o tiempo que requiere como por la dificultad que entraña. Por este motivo, dividir la construcción del mismo en etapas de menor tamaño y complejidad puede facilitar su desarrollo y, lo que es más importante, garantizar su éxito en la entrega del producto. Estas fases, denominadas procesos de desarrollo, son las siguientes:

- Requisitos del Usuario - RU: Se trata de una fase en la que el objetivo principal es **definir** el problema existente. Es un proceso iterativo donde el usuario final debe ser el protagonista. Éste debe indicar a los desarrolladores del producto cuáles son sus necesidades. En esta fase deben quedar claros, entre otros aspectos, el entorno operacional del producto y la interacción usuario-software.
- Requisitos del Software - RS: En esta etapa el objetivo principal es **analizar** el problema de forma que se pueda obtener la definición del software a construir.
- Diseño arquitectónico - DA: El objetivo de esta etapa es **hallar** una solución al problema definido en la etapa anterior, donde debe quedar clara la estructura del sistema software.
- Diseño detallado y producción - DD: Esta fase consiste en **implementar** el software diseñado. Para ello se necesita de todos los elementos obtenidos en fases previas.
- Transferencia - TR: Fase de entrega e instalación del producto desarrollado.
- Operación y Mantenimiento - OM: Consiste en dar soporte a los usuarios del sistema y solucionar cualquier incidencia que pudiera ocasionar el producto entregado.

Estas etapas por las que un software pasa a lo largo de su construcción son llamadas también ciclo de vida del software. En este trabajo nos hemos centrado solo en las cuatro primeras etapas, ya que este producto no ha sido instalado y, por lo tanto, no existe mantenimiento que realizar.

Existen también diferentes maneras de concebir estas etapas dando lugar a modelos de ciclos de vida del software muy diferentes.

13.2. Ciclos de vida del Software

Según la norma *ISO/IEC 12207-1 Guide to Software Life Cycle Processes* este se define como un marco de referencia que contiene los procesos, las actividades y las tareas involucradas en el desarrollo y la vida del sistema, desde la definición de los requisitos hasta la finalización de su uso. Estas alternativas han surgido (y surgirán) como respuesta a problemas afrontados durante la creación de sistemas software. Aquí serán explicadas algunas con el objetivo de ser capaces de hacer una ligera comparativa entre estos modelos y el elegido.

- **Modelo clásico o en cascada:** Es el paradigma más antiguo y ha sido fuente de inspiración para otros modelos de proceso de software. Exige un enfoque sistemático y secuencial. Cada fase se ejecuta una vez, se permiten iteraciones para la corrección de errores, pero debido a los costos de producción y aprobación de documentos, las iteraciones son costosas e implican rehacer el trabajo. Sus principales desventajas son que proporciona poca flexibilidad a los desarrolladores, la naturaleza de los desarrollos no suele ser secuencial y es muy difícil tener los requisitos claros al inicio.

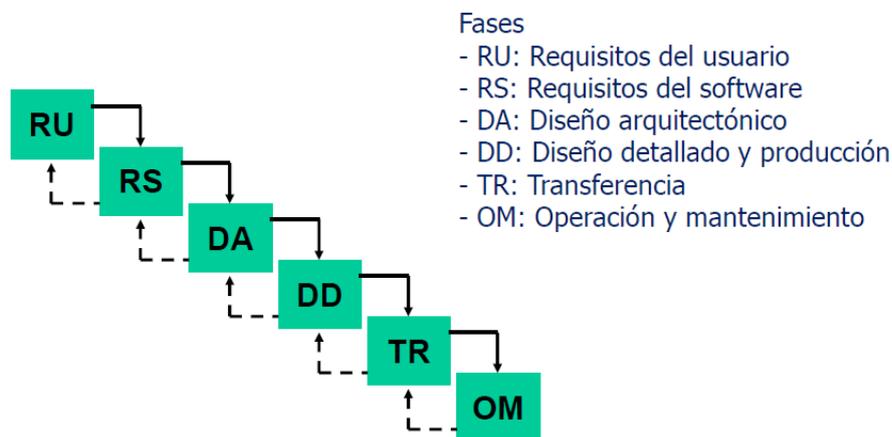


Figura 33: Ciclos de vida. Clásico o en cascada.

- **Aproximación incremental:** Las fases de diseño detallado, transferencia, operación y mantenimiento se dividen en unidades más manejables, se desarrollan múltiples versiones previas del producto final. A menudo la primera versión es el producto esencial ya que dispone de las características básicas del software. Da la posibilidad de implementar

ciertas funciones antes que otras y permite disponer de un equipo de desarrollo más pequeño. Sin embargo, se requieren pruebas de regresión por lo que aumenta el coste del software debido a las pruebas.

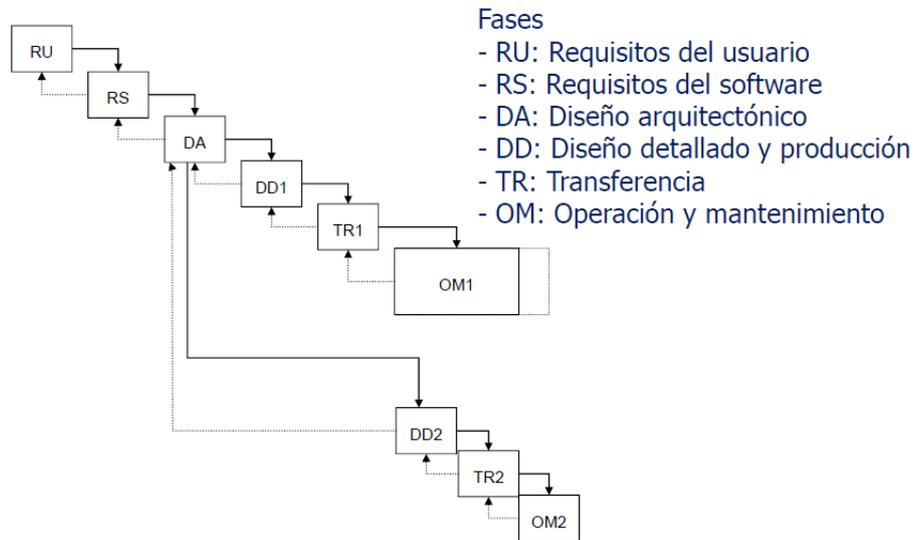


Figura 34: Ciclos de vida. Aproximación incremental.

- **Aproximación evolutiva:** Añade a la aproximación incremental la capacidad para incorporar cambios en los requisitos tanto del usuario como del software. Se desarrollan múltiples versiones donde cada versión incorpora la experiencia de las anteriores. Los requisitos (todos o casi todos) deben conocerse al principio, aunque no tienen que estar todos bien detallados. Bajo este paradigma si los requisitos iniciales están muy incompletos es complicado empezar.

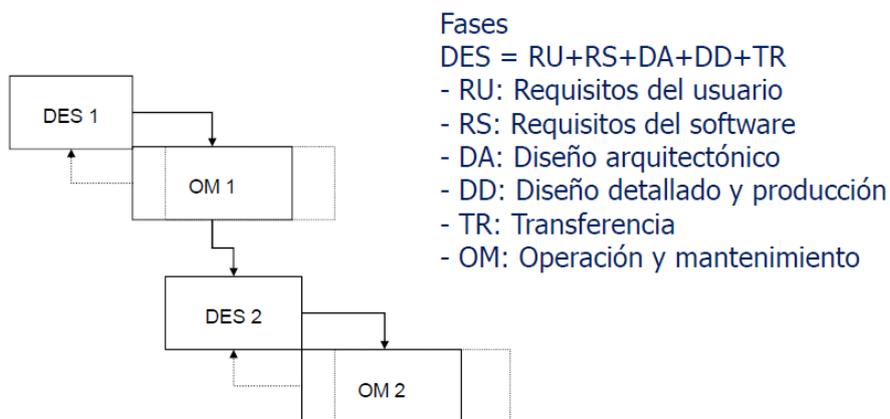


Figura 35: Ciclos de vida. Aproximación Evolutiva.

- **Desarrollo basado en componentes:** Este enfoque se basa en la existencia de un

Modelos	Requisitos y Arquitectura no predefinidos	Produce Software Fiable	Permite Correcciones inmediatas	Visión del producto
Clásico	Bajo	Alto	Bajo	Bajo
A. Incremental	Bajo	Alto	Medio	Alto
A. Evolutiva	Alto	Alto	Medio	Alto
B. Componentes	Medio	Medio	Bajo	Alto

Cuadro 8: Ciclos de vida del Software.

número significativo de componentes reutilizables, el proceso de desarrollo se enfoca más a integrar estos componentes que desarrollarlos desde cero. Conduce a la reutilización del software. Esto implica que se tenga que desarrollar menos software y que la entrega sea más rápida. Sin embargo, cuando aparecen nuevos requisitos puede que la aplicación no pueda añadirlos porque los componentes relacionados están hechos por terceros.

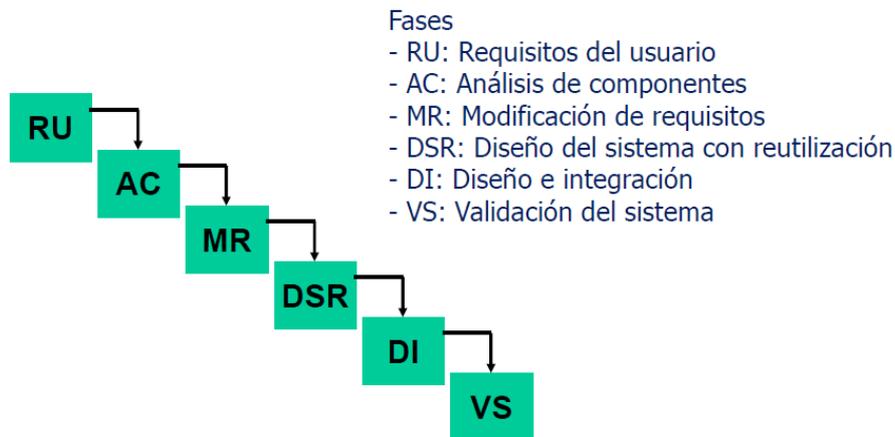


Figura 36: Ciclos de vida. Basado en Componentes.

En la siguiente tabla se muestra el grado de idoneidad de cada una de las diferentes metodologías anteriormente descritas ante una serie de cuestiones a tener en cuenta en el momento de seleccionar cuál se va a utilizar.

Las características iniciales de este proyecto marcaron el paradigma utilizado para su desarrollo. Al inicio se tenía claro cuál debía ser el objetivo final, pero no se tenía tanto nivel de detalle en la definición de los requisitos. Se definió que el objetivo de este trabajo era la construcción de una herramienta que fuese capaz de valorar eficientemente el riesgo de crédito

implícito de una cartera de productos de renta fija, utilizando el modelo Hull & White de tipos de interés. Sin embargo, no estaban claros otros aspectos como podían ser la funcionalidad total que debía dar al usuario final y/o qué tecnologías utilizar, además de qué elementos de renta fija iban ser incluidos en la valoración del portfolio. El modelo de aproximación evolutiva nos permitía empezar a trabajar, definiendo progresivamente los requisitos tanto a nivel de usuario como de software, garantizando un software fiable y sobre el que poder realizar modificaciones sin que esto supusiera un coste inabordable. Otro aspecto importante para la elegir este modelo fue el poder ir generando diferentes versiones, añadiendo funcionalidades en el momento en el que los requisitos se iban detallando.