PRODUCTOS SOBRE CESTAS. APROXIMACION AL RIESGO DE MODELO

Marta Salvador Mas

Trabajo de investigación 017/015

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dra. Raquel Bujalance
Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

www.finanzascuantitativas.com

PRODUCTOS SOBRE CESTAS.

APROXIMACIÓN AL RIESGO DE MODELO

Marta Salvador Mas

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas.

Tutor: Dra. Raquel Bujalance

Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

El objetivo de este trabajo es demostrar al lector las implicaciones que tiene la elección de un modelo para calcular una aproximación de los precios reales de ciertos productos. Nosotros nos hemos basado en productos sobre una cesta de activos para realizar dicha demostración.

En el mercado podemos encontrar muchos modelos, pero no todos son válidos para trabajar con ellos. Unos son demasiados simples y pueden dar malas aproximaciones, mientras que otros pueden ser demasiado complejos para poder llevarlos a cabo. Así que la cuestión está en encontrar el equilibrio.

Durante este trabajo compararemos tres modelos diferentes de correlación y observaremos cuál de ellos podría considerarse el más adecuado para trabajar con él en distintas situaciones del mercado.

Índice

1. Introducción:

Previamente a la aparición de los derivados, la única forma de poseer un activo en un momento futuro, era comprarlo directamente en el mercado, cuyo precio estipulado no estaba determinado, ni por la volatilidad, ni por su posible correlación con el resto de activos del mercado.

En el momento que en el mercado se empezó a trabajar con productos derivados, como por ejemplo las Opciones Europeas, y se trato de valorarlos analíticamente, se puso de manifiesto que su precio, no solo depende del valor actual del subyacente, su strike y el tiempo a vencimiento, sino que también lo hace de la volatilidad implícita del activo.

La aparición de estos nuevos productos en el mercado suscitaron numerosos estudios sobre cómo valorarlos, como por ejemplo Lintner (1965), Samuelson y Merton (1969), Chen y Andrew (1970)…, hasta que el modelo de Black-Scholes se convirtió en un referente de como valorarlos, en el que se asume que el precio del activo sigue un movimiento Browniano, cuya ecuación diferencial estocástica (EDE) encontraremos a continuación:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Donde:

- μ es la rentabilidad esperada, constante, del activo.
- σ es la volatilidad, constante, del activo.
- W_t es un movimiento browniano estándar.

Pero el modelo de Black-Scholes aunque trataba de representar los movimientos reales del mercado se basa en supuestos que los datos empíricos pronto demostraron que no eran realistas. Por ejemplo, el modelo asumía una volatilidad constante para opciones con el mismo vencimiento y distinto strike, pero la volatilidad implícita de las opciones suele tener una estructura en strike habitualmente en forma de sonrisa o mueca, lo que comúnmente se conoce "el smile de volatilidad". Por tanto, con el objetivo de poder resolver las incongruencias que se daban entre el mercado y la valoración obtenida mediante Black-Scholes, se llegó a la conclusión que para poder ajustar mejor a la realidad, debería de relajarse el supuesto de volatilidad constante; tal y como podemos observar en los artículos Heston(1993) y Demeterfi (1999).

A partir de aquí, coexisten dos vertientes distintas sobre cómo modelar la volatilidad. Un enfoque se basa en considerar la volatilidad local y el otro en considerarla como una variable estocástica.

Hasta el momento hemos considerado que estamos trabajando con un único activo, por tanto la relevancia de la correlación de éste con el resto de mercado es irrelevante a la hora, tanto de valorarlo, como de valorar opciones sobre él. Este parámetro pasará a ser de vital importancia al trabajar con carteras compuestas por más de un activo o al intentar valorar opciones que dependan de más de un subyacente.

Al estudiar el valor de distintos subyacentes a lo largo del tiempo, podemos encontrar evidencia empírica contraria a la hipótesis de que la correlación entre dos o más activos es constante a lo largo del tiempo. Asimismo existen numerosos estudios que reflejan el carácter variable de la correlación de cualquier activo a lo largo del tiempo. Destacaremos el estudio realizado por Driesen, Maenhout y Vikov (2005).

Ha quedado demostrado, que en momentos de crisis la mayoría de los activos tendrán tendencias bajistas lo que implicará que al tener todos ellos movimientos en la misma dirección aumentará la correlación existente entre los activos, siendo normalmente todas positivas, sin importar la correlación existente entre ellos en periodos anteriores a la crisis financiera. Encontramos evidencia de esta afirmación en los artículos de Erb, Harvey y Viskanta (1994) y en Andersen (2001).

Por lo que corresponde al modelado de la correlación, también encontramos dos enfoques distintos para ajustar a la realidad. Uno de ellos es la vertiente que considera que la correlación puede modelizarse como local, al estilo de la volatilidad local. La otra vertiente conjetura que la correlación existente entre los distintos activos del mercado sigue un proceso estocástico. Este enfoque aunque más realista tiene unos costes computacionales y de calibración superiores al anterior.

Tal y como hemos comentado con anterioridad, suponer que la correlación entre dos activos es local, facilita el manejo de aquellos que trabajan con correlaciones. Considerar un modelo de correlación sea local implica que durante un periodo de tiempo infinitesimal los activos se comportan de acuerdo a una matriz de correlación que depende del estado del sistema en el instante que trabajamos y que generalmente varía de un momento de tiempo a otro. Dos de los autores cuyos artículos siguen estas directrices son Lagnau (2010) y Regnai. Ambos se fundamentan en el trabajo de Dupire (1994), el cuál extendió el modelo de Black-Scholes para poder considerar la posibilidad de volatilidades locales y así dar una mejora aproximación de los resultados observados en la vida real, mediante los resultados teóricos obtenidos con el nuevo modelo.

Si nos adentramos un poco más en los dos modelos de correlación local comentados con anterioridad, podemos considerar que tienen a grandes rasgos muchos puntos en común, puesto que podría considerarse que el trabajo de Reghai es una extensión del trabajo realizado con anterioridad por Lagnau. Aunque en cada uno de los modelos el autor ha especificado una variable distinta para poder especificar la matriz de correlación instantánea correspondiente. El modelo de Reghai permite valorar mejor opciones worst-of y establecer estrategias de cobertura. En el lado de los modelos de correlación estocástica uno de los primeros trabajos es el Fonseca (2008), basándose en el trabajo realizado por Heston (1993) cuyo modelo permitía dar precio a las opciones europeas sobre activos con volatilidades estocásticas. El modelo desarrollado por Fonseca en su artículo, considera un mercado en el que tanto las varianzas como las covarianzas del mercado de distribuyen de forma estocástica. Distinguimos de este modelo la posibilidad de obtener precios de las opciones vanilla consistentes con los efectos de la sonrisa de volatilidad y el skew observados en el mercado, y la aptitud de detectar y cuantificar el riesgo de correlación de una cartera de múltiples activos.

Pero este autor no ha sido el único que ha trabajado con enfoque estocástico. Otros trabajos destacables de dicho enfoque serán los estudios realizados por Boortz (2008), Zetocha (2014) y Ma (2009). Cuyos modelos asumen como proceso generador de la correlación un proceso de Jacobi. El modelo de Zetocha supone que la correlación existente entre los procesos generadores de los precios de los activos y el proceso de la correlación es constante a lo largo del tiempo e independiente del activo con el que estemos tratando. Mientras que la correlación existente entre todos los activos del mercado aunque estocástica es la misma para todos los pares de activos. Si relajamos el primero de los supuestos nos encontraríamos con el modelo que expone Ma en su artículo. Ambos tienen en común considerar la correlación entre los activos equivalente para todas las parejas de activos, pero sin embargo en este modelo la correlación existente entre el proceso de la correlación y el de los precios aunque siga siendo constante a lo largo de todo el periodo deja de ser independiente de los activos. Es decir, cada activo tiene una correlación entre el proceso generador de sus precios y el proceso de la correlación que se mantendrá constante. Y por último y más genérico, encontramos el modelo de Boortz. En su artículo el autor no considera, como en el caso anterior, un único proceso de correlación entre los activos. En este caso, encontramos que cada uno de los activos tiene un proceso de correlación entre el activo y el mercado distinto al resto, lo que implica tener tantos procesos de correlación como activos en el mercado. Pero tal y como hemos comentado, estos procesos no nos dan información sobre la correlación existente entre dos activos, para conseguir esa información deberíamos calcular el producto de las correspondientes correlaciones de los activos con el mercado. Así pues podemos destacar que este modelo se diferencia con el resto en que tanto las correlaciones entre activos, y entre mercado y activos son dependientes de los activos. Pero sigue manteniendo del modelo de Ma, el supuesto de correlación constante y específica del activo entre el proceso generador de precios y el de la correlación.

Para finalizar hemos de comentar que los estudios sobre los modelos de correlación tanto con enfoque local, como con enfoque estocástico no han finalizado. Cada año encontramos artículos que exponen nuevos modelos que nos permiten modelizar la correlación y autores que exponen sus propias mejoras a los modelos ya existentes. Un ejemplo sería el nuevo artículo Zetocha (2015), donde el autor expone como mejorar el modelo creado por el mismo en el año 2014 añadiéndole la posibilidad de que la correlación sufra saltos, con el fin de poder reflejar mejor el smile de volatilidad que se observa en las opciones sobre cestas.

En este trabajo nos basaremos en el modelo de Boortz para crear escenarios de mercado. A continuación calibraremos de los datos obtenidos mediante Boortz los parámetros de los modelos de Ma y de Zetocha para poder obtener precios de distintas opciones mediante los tres métodos y poder comparar los resultados obtenidos, y así observar que modelo se ajusta mejor a los escenarios creados con el modelo de Boortz. Añadiremos también los datos obtenidos mediante el modelo de Black-Scholes para comparar los precios obtenidos con este modelo, con los precios calculados anteriormente.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente forma. En el segundo apartado podemos encontrar una leve explicación del contexto histórico y de la evolución de la importancia que han dado históricamente los mercados a la correlación, en el siguiente punto encontraremos los modelos que serán utilizados a lo largo del trabajo. En el cuarto punto explicaremos las problemas de implementación a los que nos hemos enfrentado a lo largo de la realización de este trabajo. Más tarde especificaremos los escenarios en los que vamos a trabajar. El punto cinco contendrá una explicación de los procedimientos de calibración, existentes y los que hemos utilizado. El punto seis contendrá los precios de las opciones que hemos valorado con cada uno de los modelos. Y por último encontraremos una descripción de las conclusiones a las que hemos llegado al finalizar el trabajo.

2. Contexto Histórico

- **Evolución de la correlación entre activos de equity en el Mercado financiero**

Los mercados destinados a la comercialización de activos que guardan relación con la correlación han sufrido un enorme aumento durante los últimos 15 años. Este incremento ha venido principalmente causado por la demanda de opciones exóticas.

En el pasado más reciente el tratamiento de la correlación se hacía desde un enfoque simple, ya que habitualmente se suponía que la correlación era constante y se obtenía partir de datos históricos, el inicio de la crisis en el 2008 puso de relieve la importancia de modelizar adecuadamente la correlación, e impulso una gestión más activa de las carteras de correlación favoreciendo la aparición de productos derivados relacionados con ella.

Foresi y Wu 2005 muestran que en todos los mercados analizados la volatilidad de los índices mostraban un comportamiento similar para diferentes strikes, siendo los opciones put más caras que las opciones call para un mismo strike, especialmente para opciones "out-of-the-money".

La volatilidad del índice se conforma tanto por las volatilidades de los subyacentes que la componen como de la correlación entre ellos. Los resultados muestran que la distribución riesgo-neutral de los rendimientos de los índices es asimétrica respecto al strike, lo que es consistente con cierto riesgo sistemático observado en el mercado que hace que en las épocas de crisis sea difícil la diversificación por el aumento de todas las correlaciones.

- Productos que existen en el Mercado

Actualmente existen diversos productos sobre cesta comercializados OTC, algunos de los productos que más se suelen comercializar son:

- **Worst-of option:** Una opción worst-of tiene como subyacente el activo con peor rentabilidad de una cesta de activos. Puede comercializarse tanto como opción vanilla como opción digital.
- **Best-of option:** Podemos considerar que las opciones Best-of son parecidas a las opciones Worst-of comentadas con anterioridad. En este caso el activo subyacente será el activo con mayor rentabilidad de la cesta. Igual que ocurre en el caso de la opción Worst-of, podemos distinguir la opción Best of digital, en la que el pago es fijo siempre que se cumpla la condición, y la opción Best-of vanilla, en la que el pago depende de cuánto esté por encima la rentabilidad del mejor activo respecto del strike.
- **Index dispersion trade:** Esta opción compara una opción vanilla del índice de mercado con opciones vanilla de cada uno de los componentes de este.
- **Basket dispersion trade:** opción similar a Índex dispersion trade, pero en lugar de trabajar con índice en esta ocasión trabajamos con una cesta de activos.
- **Correlation Swaps:** Podemos defininir los swaps de correlación, como un contrato forward donde, en un instante futuro T estipulado en el momento de la compra del producto, el tenedor de dicha opción recibe la correlación realizada por los subyacentes de una cartera compuesta por un número finito de activos. Definiremos dicha correlación realizada en el

intervalo de tiempo [0,T], como ρ_R. A cambio, deberá pagar un precio fijado en el momento de la compra K_{corr} .

- **Everest:** Esta es una opción cuyo vencimiento suele ser a largo plazo, y depende de una cesta de activos, normalmente entorno a 10 activos subyacentes. Esta opción se caracteriza por realizar un único pago a vencimiento, compuesto por el 100% del valor nominal de la cesta más una opción Worst- of sobre la cesta.
- **Altiplano:** La opción altiplano es una opción a largo plazo y depende de un conjunto de subyacentes, se diferencia de la opción Everest en el Payoff. En este caso el payoff de la opción Altiplano, podemos diferenciar dos casos. En el caso en que la rentabilidad del peor activo sea siempre superior a un strike impuesto, el pago que efectuaría la opción sería del un porcentaje del valor de la cartera, en el caso en que el suceso anterior no se diera la opción se transformaría en una opción call vanilla de cada uno de los subyacentes que componen la cesta.
- **Kilimanjaro:** Esta opción puede considerarse de largo plazo. Dependerá de un conjunto 10 subyacentes, aunque el número puede cambiar dependiendo de las necesidades del cliente. La opción Kilimanjaro se caracteriza por proporcionar al tenedor un cupón anual, siempre y cuando la rentabilidad de todos los activos que componen la cartera no sobrepasen una barrera. En el caso de que esto ocurra el activo quedaría eliminado de la cartera y la opción se convertiría en una opción call vanilla de cada uno de los subyacentes restantes.
- **Atlas:** La opción Atlas tiene como subyacentes un conjunto de activos y un vencimiento a largo plazo. Esta opción proporciona a su tenedor un único pago a vencimiento. Llegado el momento de vencimiento la opción elimina los n activos con mayor rentabilidad y los n activos con menor rentabilidad, quedándonos con una cartera compuesta por el resto activos intermedios. El pago de la opción se corresponderá al 100%+x% del valor de la nueva cartera, siendo x un porcentaje estipulado en el momento de la compra de la opción.
- **Himalaya:** Es una opción sobre una cesta de activos, la cesta se conforma a partir de una cesta inicial, en cada fecha de selección se selecciona un activo dependiendo de una condición (usualmente el que haya tenido hasta ese instante la mejor o peor revalorización). A vencimiento se paga una opción sobre la cesta compuesta por los activos seleccionados en las fechas anteriores

• Medición de la correlación

En este apartado describimos las diferentes metodologías que tenemos a nuestro alcance para calcular el nivel de relación que guardan dos variables aleatorias.

En primer lugar, describiremos el coeficiente de correlación lineal de Pearson:

Sean X e Y dos variables aleatorias incluidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos la correlación existente entre ambas variables como:

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Donde $Cov(X,Y)$ representa la covarianza existente entre las variables X e Y, y $Var(\cdot)$ la respectiva varianza la variable.

Este coeficiente está basado en los siguientes supuestos:

- El coeficiente de correlación entre variables no estacionarias puede estar muy próximo a 1, sin que ello refleje la verdadera relación entre las variables. A este efecto es conocido como Correlación Espúrea.
- El coeficiente de correlación no es invariante bajo transformaciones no lineales.
- Los valores que toma el coeficiente de correlación dependen de las distribuciones marginales de las variables aleatorias.
- Solo en el caso de que las variables aleatorias sigan conjuntamente una distribución normal bivariante, un coeficiente de correlación lineal igual a 0 implica independencia.

Acto seguido se desarrollan distintas aplicaciones prácticas del coeficiente de correlación lineal de Pearson:

Coeficiente de correlación realizada entre pares de activos:

Podemos definir la correlación realizada entre los activos S_t^1 y S_t^2durante un periodo de tiempo específico [0,T] como:

$$\rho_R(S^1,S^2) = \frac{1}{\mathrm{N}} \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \left(\log\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}^1}{\mathrm{S}_{\mathrm{t_{i-1}}}^1} - \overline{\mathrm{S}^1}\right)\left(\log\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}^2}{\mathrm{S}_{\mathrm{t_{i-1}}}^2} - \overline{\mathrm{S}^2}\right)}{\sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \left(\log\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}^1}{\mathrm{S}_{\mathrm{t_{i-1}}}^1} - \overline{\mathrm{S}^1}\right)^2 \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \left(\log\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}^2}{\mathrm{S}_{\mathrm{t_{i-1}}}^2} - \overline{\mathrm{S}^2}\right)^2}}$$

Donde hemos supuesto que los vectores que contienen los precios instantáneos de cada uno de los activos serán representados por $\left(S_{t_0},\dots,S_{t_n}\right)$ y el precio medio de cada uno de los activos durante todo el periodo de estudio será calculado apoyándonos en la siguiente fórmula:

$$\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} log\,\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

Coeficiente de correlación media en una cesta equipondera:

Podemos definir la correlación realizada en una cesta compuesta por n activos, que siguen un proceso estocástico cada uno de ellos, durante un periodo de tiempo [0,T] como:

$$\rho_R = \frac{2}{n^2 - n}\sum_{i\neq j}^{n} \rho_R(S^i,S^j)$$

Podemos observar que durante todo el proceso estamos utilizando las rentabilidades logarítmicas de los activos para calcular las correlaciones realizadas.

Anteriormente a exponer las definiciones de correlación en los modelos de mercados financieros, necesitaremos una serie de detalles comunes y necesarios para todas las definiciones posteriores.

Las próximas definiciones estarán centradas en un mercado compuesto por n activos arriesgados, cuyo precio evoluciona de forma continua en el tiempo acorde al siguiente proceso:

$$dS_t^i = \mu^i \cdot S_t^i \cdot dt + S_t^i \cdot \sigma^i \cdot dW_t^i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Donde $(W_t^1, \dots, W_t^n)$ es un vector n-dimensional compuesto por brownianos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$, donde los vectores que contienen las derivas y las volatilidades de todos los activos se pueden considerar procesos adaptados. Y con esto acabamos de definir que los activos S_t^i siguen procesos de Itô.

Ahora ya podemos pasar a las definiciones de las correlaciones que encontramos en los modelos de mercados financieros.

Correlación en los procesos de Itô:

Sean $S_t^1, \dots, S_t^n$ n activos que se distribuyen mediante un proceso de Itô, como el descrito anteriormente, que se encuentran en el espacio de probabilidad filtrada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Así pues podemos definir como la correlación instantánea entre los activos $S_t^i \; y \; S_t^j$ en el instante t como:

$$\rho_t^{ij} := \frac{d\langle \log(S^i), \log(S^j) \rangle_t}{\sigma_t^i \sigma_t^j}$$

Correlación instantánea en una cesta:

Podemos considerar que la correlación instantánea sobre una cesta compuesta por los mismos activos descritos en la definición anterior se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\bar{\rho}_t := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} \rho_t^{ij}$$

Correlación realizada entre activos implícita en el modelo:

La correlación realizada entre los activos $S_t^i \; y \; S_t^j$ implícita en el modelo durante el periodo [0,T] se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{\gamma}_{0,T}^{ij} \coloneqq \frac{1}{T} \frac{\langle \log(S^i), \log(S^j) \rangle_t}{\sqrt{\int_0^T \left(\sigma_t^i\right)^2 dt} \sqrt{\int_0^T \left(\sigma_t^j\right)^2 dt}}$$

Correlación realizada en una cesta implícita en el modelo:

La correlación realizada en una cesta implícita en el modelo durante el periodo [0,T] se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\gamma_{0,T} := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} \bar{\gamma}_{0,T}^{ij}$$

Notamos que la definición de correlación instantánea entre dos activos es una versión del coeficiente de Pearson, definido anteriormente, en tiempo continuo. Cabe recalcar también, que durante las definiciones anteriores estamos utilizando el coeficiente de la covarianza cuadrática entre $log(S^i)\ y\ log(S^j)$ como una extensión en tiempo continuo de la covarianza entre las respectivas variables aleatorias.

Nuestra pregunta después de las definiciones es, cómo añadir la correlación existente entre las variables en los procesos generadores de precios o de rentabilidades. Una de las posibles maneras de hacerlo, y la que utilizaremos a lo largo del trabajo, es asumir que los movimientos brownianos que componen los procesos generadores de rentabilidades están correlados de la siguiente forma:

$$d\langle W^i, W^j\rangle_t = \rho_t^{ij}\, dt \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Advertir, que los incrementos en los brownianos $W^i\ y\ W^j$, siguen una distribución normal con media cero y varianza equivalente al incremento en el tiempo que existe entre cada una de las simulaciones.

Finalmente exponemos los coeficientes de correlación de rangos. Se trata de medidas no paramétricas de dependencia basadas en rangos. Dentro de este subgrupo de coeficientes de correlación encontramos:

Coeficiente de correlación de Spearman, el cual se aplica a dos conjuntos de datos de igual tamaño que guarden cierta ordenación, de modo que pueda hablarse de pares (S_t^i, S_t^j). Cuando tenemos los pares anteriores con rangos $(d_{S_t^i}, d_{S_t^j})$ calculamos las diferencias de rangos $d_i = d_{S_t^i} - d_{S_t^j}$, y la suma de sus cuadrados $D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$.

El coeficiente de correlación de Spearman es:

$$\rho_s = 1 - \frac{6D}{n(n^2-1)}$$

Coeficiente de correlación de Kendall, donde se consideran los pares de observaciones (S_1^i, S_1^j) y (S_2^i, S_2^j). Decimos que ambos pares son concordantes si $S_1^i - S_2^i$ tienen el mismo signo que $S_1^j - S_2^j$, y son discordantes en caso contrario. Si denotamos por N_c y N_d, respectivamente el número de pares concordantes y discordantes, el coeficiente de correlación de Kendall será:

$$\rho_k = \frac{N_c - N_d}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Todas estas medidas de correlación requieren de datos, con todas las complicaciones que conlleva, para poder cuantificar el nivel de relación entre las variables. Ahora bien, los datos de los que disponemos tienen todos caracteres pretéritos, por lo que la medida de asociación que podamos obtener será siempre sobre el pasado de las variables aleatorias.

Nuestro interés se sitúa la mayoría de las veces alejado del conocimiento de lo que ya ha acaecido (certidumbre) y se centra más en lo que va a suceder (incertidumbre).

Por ello, nuestro trabajo no solo examina la correlación histórica, sino que también la correlación implícita como aproximación futura a la correlación de los distintos activos.

- Correlación histórica versus Correlación Implícita

En este apartado vamos a tratar de desgranar ambos conceptos haciendo hincapié en aquellos detalles que a nuestro parecer son clave para la correcta comprensión de los mismos.

  - Correlación Implícita

La correlación implícita supone una estimación de la correlación futura entre distintas variables aleatorias dos a dos. Su valor se obtiene a partir de las distintas opciones sobre cestas de activos que cotizan en el mercado.

Como bien sabemos, la volatilidad de una cesta o una cartera compuesta por distintos activos guarda la siguiente relación con la correlación entre los activos.

$$\sigma_c = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

En el mercado de derivados, existen tanto opciones sobre un subyacente concreto, como sobre una cesta de subyacentes.

Supongamos que estamos interesados en conocer la correlación futura entre dos activos, los cuales a su vez forman una cesta que actúa como activo subyacente de una opción que cotiza en el mercado. La mejor manera de aproximarnos al nivel de relación futura entre variables será mediante la estimación de la volatilidad que se obtiene al imponer al precio observado en el mercado de dicha opción una expresión teórica de valoración que haga depender el precio de la volatilidad de la cesta, que a su vez depende de la correlación entre los activos que forman la misma. Conociendo las volatilidades implícitas de cada activo, así como los pesos de cada uno en la cartera, seremos capaces de obtener la correlación implícita.

Pero el problema es el número de incógnitas con las que nos encontramos, todos los componentes de la matriz de correlaciones, y solo tenemos una ecuación. Y en el caso de trabajar con un elevado número de activos es habitual no poder discriminar entre las correlaciones entre pares de activos, siendo esto únicamente posible en el caso de tener productos de cestas de dos activos, cosa poco habitual en el mercado donde solo se suele encontrar precios de "dispersion trades" sobre dos índices para los índices más líquidos del mercado. Añadir que en ese caso lo que extraeríamos sería la correlación media de la cartera que igualará la ecuación anterior.

Por ejemplo el CBOE publica diariamente un índice sobre la correlación media implícita en el índice SPX para dos vencimientos. La correlación se calcula como la correlación media implícita en las opciones sobre el índice y las opciones sobre cada uno de los activos que componen el índice.[1]

- Correlación Histórica

La correlación histórica, por el contrario, mira hacia el pasado y se basa exclusivamente en información histórica.

Podemos medir la correlación histórica por medio de los siguientes procedimientos:

a) Ventanas Móviles. Consiste en calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson entre dos variables moviéndose entre submuestras a lo largo de toda una muestra.

Este procedimiento tiene las siguientes desventajas:

i. No está claro qué tamaño *n* deben tener las submuestras. Un número muy reducido tenderá a generar una serie temporal de correlaciones muy errática, mientras que un número elevado de días generará una serie una serie de correlación más suave.
ii. Su naturaleza no es tanto la de anticipar el comportamiento futuro de la correlación, como el de reflejar el comportamiento reciente de la misma. Precisamente por esta razón, es un indicador que va reaccionando con retraso, pues se trata de un promedio de los niveles de correlación de los últimos *n* periodos de mercado.
iii. Pondera por igual cada uno de los *n* periodos utilizados en su cálculo.

b) Modelo de Suavizado Exponencial (EWMA). Suponemos que evolución dinámica de la correlación está guiada por las variables auxiliares $q_{ij,t+1}$, que juegan el papel de covarianzas condicionales, y que se actualizan a partir de valores iniciales mediante:

$$q_{ij,t+1} = (1-\lambda) z_{i,t} z_{j,t} + \lambda q_{ij,t} \; \forall i,j$$

Al ser una covarianza entre rentabilidades estandarizadas $(z_{i,t}, z_{j,t})$, la serie temporal nos proporciona ya una estimación de la correlación condicional entre rentabilidades. Para que el valor quede acotado en el intervalo $[-1,1]$, se emplea la siguiente normalización:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\left(q_{ii,t+1} q_{jj,t+1}\right)^{0.5}}$$

c) Modelo de correlación dinámica GARCH. En este modelo existe reversión a la media, supongamos un GARCH (1,1):

$$q_{ij,t+1} = \rho_{ij} + \alpha\left(z_{i,t} z_{j,t} - \rho_{ij}\right) + \beta\left(q_{ij,t} - \rho_{ij}\right)$$

Utilizando nuevamente la normalización:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{q_{ij,t+1}}{\left(q_{ii,t+1} q_{jj,t+1}\right)^{0.5}}$$

[1] Ver documento del CBOE sobre construcción de los índices ICJ y JCJ

3. Modelos.

Presentamos en este trabajo el análisis de tres modelos de correlacion estocastica, se asemejan al compartir ciertas hipótesis, como que el proceso generador de la correlación es un proceso de Jacobi, además de considerar que los activos con riesgo presentes en la economía siguen un browniano geométrico.

A lo largo de todo el trabajo se considera una economía continua en el intervalo [0,T], donde la incertidumbre inherente a la misma se modela mediante un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Donde Ω representa el conjunto de posibles estados de la naturaleza; $\mathcal{F}$ denota el conjunto de información o σ-álgebra en Ω, y $\mathbb{P}$ denota la medida de probabilidad.

Tanto Boortz, como Zetocha como Ma asumen que los precios de los n activos arriesgados que forman el mercado $S_1, S_2 \dots, S_n$ siguen un movimiento browniano geométrico, cuya ecuación diferencial estocástica lineal viene dada por:

$$dS_t^i = \mu^i \cdot S_t^i \cdot dt + S_t^i \cdot \sigma^i \cdot dW_t^i \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[1]}$$

A su vez el proceso para la rentabilidad instantánea de cada uno de ellos viene dado por:

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu^i dt + \sigma^i dW_t^i \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[2]}$$

Finalmente, tras realizar un cambio de variable e integrando entre distintos instantes de tiempo, obtenemos precio del activo en un instante t:

$$S_t^i = S_0^i e^{\left(\mu^i - \frac{{\sigma^i}^2}{2}\right)t + \sigma^i W_t^i} \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[3]}$$

donde:

- S_0^i: es el precio inicial del activo i.
- μ^i: es una constante que representa una tendencia a crecer.
- σ^i: es la volatilidad.

En este punto, cabe destacar que el objetivo principal de nuestro trabajo es observar cómo afectan los diversos modelos de correlación entre los n activos subyacentes, a los precios de las distintas opciones que se calculan sobre ellos, por tanto sin pérdida de generalidad asumiremos tal y como hacen los autores en sus trabajos que los precios de los activos se distribuyen bajo la medida de probabilidad riesgo neutral $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$. De esta manera los precios de los activos normalizados por el activo libre de riesgo como numerario, se comportan como martingalas. De manera, tras aplicar el Teorema de Girsanov, las expresiones 1, 2 y 3 quedan transformadas en:

$$dS_t^i = r \cdot S_t^i \cdot dt + S_t^i \cdot \sigma^i \cdot dW_t^{i^*} \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[4]}$$

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma^i dW_t^{i^*} \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[5]}$$

$$S_t^i = S_0^i e^{\left(r-\frac{{\sigma^i}^2}{2}\right)t+\sigma^i dW_t^{i^*}} \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad \textbf{[6]}$$

Donde el nuevo diferencial de brownianodW^{i^*}, bajo la medida neutral al riesgo, queda definido como:

$$dW_t^{i^*} = dW_t^i + \frac{\mu^i - r}{\sigma^i} dt \quad \textbf{[7]}$$

Los brownianos que encontramos en cada uno de los procesos de los precios pueden agruparse en un único vector $W_t^* = \left(W_t^{1^*}, \dots, W_t^{n^*}\right)$ que se puede definir como un vector de $\mathbb{Q}$-brownianos, diferentes en cada instante del tiempo.

Esta clase de Brownianos tiene la siguiente distribución:

- $E\left[dW^{i^*}\right] = E\left[dW^i + \frac{\mu^i}{\sigma^i}dt - \frac{r}{\sigma^i}dt\right] = E\left[dW^i\right] + E\left[\frac{\mu^i}{\sigma^i}dt\right] + E\left[\frac{r}{\sigma^i}dt\right] = \frac{1}{\sigma^i}\left(\mu^i - r\right)dt$
- $Var\left[dW^{i^*}\right] = Var\left[dW^i + \frac{\mu^i}{\sigma^i}dt - \frac{r}{\sigma^i}dt\right] = Var\left[dW^i\right] = dt$

Es común por parte de los tres autores analizados el hecho de suponer que los incrementos de browniano bajo la probabilidad riesgo neutral siguen una distribución Normal, con media igual a 0 y varianza igual al incremento del tiempo. De ahora en adelante trabajaremos con dicha clase de brownianos.

Acto seguido, detallamos cada uno de los modelos, haciendo hincapié en las propiedades matemáticas inherentes a cada uno de ellos. Tras esta concienzuda explicación, analizaremos qué implicaciones tiene para cada uno de ellos la elección de parámetros.

MODELO DE BOORTZ:

Tal y como hemos comentado con anterioridad el proceso que seguirán las rentabilidades de los activos arriesgados en este modelo será el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t^1}{S_t^1} = rdt + \sigma^1 dW_t^1 \\ \vdots \\ \dfrac{dS_t^n}{S_t^n} = rdt + \sigma^n dW_t^n \end{cases}$$

Estos procesos no son independientes entre ellos, es decir, existe correlación entre las rentabilidades de los activos dos a dos.

Siguiendo los procesos anteriormente descritos, calcularemos a continuación la covarianza entre dos de ellos, para ver cómo se define la correlación existente:

$$\langle \tfrac{dS_t^i}{S_t^i}, \tfrac{dS_t^j}{S_t^j} \rangle = \langle rdt + \sigma^i dW_t^i, rdt + \sigma^j dW_t^j \rangle = \langle rdt, rdt \rangle + \langle rdt, \sigma^j dW_t^j \rangle + \langle \sigma^i dW_t^i, rdt \rangle + \langle \sigma^i dW_t^i, \sigma^j dW_t^j \rangle = \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \langle dW_t^i, dW_t^j \rangle = \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot d\langle W_t^i, W_t^j \rangle \quad \textbf{[8]}$$

Así pues podemos observar que la correlación entre los procesos de las rentabilidades de dos activos vendrá dada por la correlación existente entre los brownianos de dichos procesos en un instante de tiempo concreto.

Este autor en su trabajo, desarrolla una base ortogonal compuesta por n+1 brownianos $(B_t^1, \dots, B_t^n, \bar{B}_t)$, diferentes e independientes entre sí mismos, con el fin de poder descomponer los brownianos de los activos mediante la siguiente expresión:

$$dW_t^i = \sqrt{1 - \left(\varrho_t^i\right)^2} dB_t^i + \varrho_t^i d\bar{B}_t \quad \textbf{[9]}$$

Donde

- El valor del parámetro $\left|\varrho_t^i\right| \leq 1$, más adelante explicaremos el significado de este parámetro.
- B_t^i es el browniano específico de cada uno de los activos, es decir, el factor ideosincrático.
- $\bar{B}_t$ es el browniano común a todos los activos del mercado para cada instante t.

Si aplicamos la ecuación anterior al proceso de rentabilidades nos quedará la siguiente expresión:

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma^i dW_t^i = rdt + \sigma^i \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\varrho_t^i\right)^2} dB_t^i + \varrho_t^i \bar{B}_t \right)$$

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma^i \sqrt{\left(1 - \left(\varrho_t^i\right)^2\right)} dB_t^i + \sigma^i \varrho_t^i d\bar{B}_t \quad \textbf{[10]}$$

Por tanto si sustituimos las nuevas descomposiciones de los brownianos de los procesos en la fórmula de la covarianza entre las rentabilidades de los activos obtenemos:

$$\langle \frac{\boldsymbol{dS_t^i}}{\boldsymbol{S_t^i}}, \frac{\boldsymbol{dS_t^j}}{\boldsymbol{S_t^j}} \rangle = \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot d\langle W_t^i, W_t^j \rangle =$$

$$\sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \langle \sqrt{1-\left(\varrho_t^i\right)^2} dB_t^i + \varrho_t^i d\bar{B}_t, \sqrt{1-\left(\varrho_t^j\right)^2} dB_t^j + \varrho_t^j d\bar{B}_t \rangle =$$

$$\sigma^i \sigma^j \left(\langle \sqrt{1-\left(\varrho_t^i\right)^2} dB_t^i, \sqrt{1-\left(\varrho_t^j\right)^2} dB_t^j \rangle + \langle \sqrt{1-\left(\varrho_t^i\right)^2} dB_t^i, \varrho_t^j d\bar{B}_t \rangle + \right.$$

$$\left. \langle \varrho_t^i d\bar{B}_t, \sqrt{1-\left(\varrho_t^j\right)^2} d\bar{B}_t \rangle + \langle \varrho_t^i d\bar{B}_t, \varrho_t^j d\bar{B}_t \rangle \right) = \sigma^i \sigma^j \cdot \left(\sqrt{1-\left(\varrho_t^i\right)^2} \cdot \sqrt{1-\left(\varrho_t^j\right)^2} \langle dB_t^i, dB_t^j \rangle + \right.$$

$$\left. \varrho_t^j \sqrt{1-\left(\varrho_t^i\right)^2} \langle dB_t^i, d\bar{B}_t \rangle + \varrho_t^i \sqrt{1-\left(\varrho_t^j\right)^2} \langle d\bar{B}_t, d\bar{B}_t \rangle + \varrho_t^i \varrho_t^j \langle d\bar{B}_t, d\bar{B}_t \rangle \right) = \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot$$

$$\varrho_t^i \varrho_t^j \langle d\bar{B}_t, d\bar{B}_t \rangle = \boldsymbol{\sigma^i \sigma^j \varrho_t^i \varrho_t^j dt = \sigma^i \sigma^j \rho_t^{ij} dt} \quad \textbf{[11]}$$

Para el cálculo anterior nos hemos servido de la información de que todos los brownianos de un mismo instante forman parte de una base ortogonal, con elementos independientes. Y por definición, la correlación entre dos brownianos diferentes será cero.

Del resultado anterior extraemos la siguiente definición.

Definimos la correlación entre dos activos del mercado en el instante ‘t’ como:

$$\rho_t^{ij} = \varrho_t^i \varrho_t^j \quad \textbf{[12]}$$

Podemos finalmente definir ϱ_t^i como la correlación existente entre el activo ‘i’ y el mercado en el instante ‘t’.

La pregunta ahora es, ¿Cómo se distribuye la correlación entre los activos y el mercado?

Tal y como hemos comentado anteriormente los modelos con los que vamos a trabajar van a ser, todos, modelos de correlación estocástica.

En el modelo de Boortz la correlación estocástica sigue el siguiente proceso:

$$d\varrho_t^i = \alpha^i\left(m^i - \varrho_t^i\right)dt + \beta^i \sqrt{\left(\varrho_t^i - a\right)\left(b - \varrho_t^i\right)} d\widetilde{W}_t^i \quad \textbf{[13]}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{\alpha}$: Parámetro de reversión a la media de cada una de las correlaciones de los activos.
- $\boldsymbol{\beta}$***:*** Parámetro de ajuste de cada una de las correlaciones de los activos.
- ***m:*** Valor al que tenderá la correlación a largo plazo.
- ***a y b:*** son los valores máximo y mínimo respectivamente que pueden tomar las correlaciones en nuestro modelo.
- $\boldsymbol{dt}$: Distancia existente entre cada una de las simulaciones.

Otro dato a tener en cuenta, es que el proceso de correlación expuesto anteriormente no es independiente de los procesos de las rentabilidades de los activos. Así pues definimos la correlación entre ambos procesos como:

$$d\langle\widetilde{W^i},\bar{B}\rangle_t = \xi^i dt \quad \textbf{[14]}$$

Podemos observar en la fórmula anterior, que el parámetro ξ^i no contiene ningún subíndice que indica en el momento en el que nos encontramos. Por tanto podemos suponer que solo depende del activo i, no del instante t en que nos encontremos. Además al tratarse de una correlación ha de cumplir una serie de restricciones, donde la de mayor importancia es la siguiente:

$$\xi^i \in (-1,1)\ \forall i = \{1,\ldots,n\} \quad \textbf{[15]}$$

Además debemos de tener en cuenta que para que nuestro modelo refleje mejor la realidad el valor de ξ^i debería mantenerse, para la mayoría de los activos, en valores negativos. De esta manera podremos reflejar con el modelo las situaciones de crisis, donde al bajar las rentabilidades de los activos las correlaciones tienden a aumentar.

Si nos fijamos en los pasos realizados con anterioridad, nos damos cuenta que para este caso podemos beneficiarnos de la misma descomposición utilizada para los brownianos de los precios. Utilizaremos la misma base que en el caso anterior, puesto que la base que necesitamos ha de seguir siendo ortogonal y tendrá como mínimo un elemento en común en cada uno de los casos el valor de $d\bar{B}_t$y debemos encontrar n brownianos independientes a éste. Así pues, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la base que utilizaremos para descomponer este browniano será la misma que hemos utilizado con anterioridad.

Aplicado dicha descomposición el browniano quedará de la siguiente forma:

$$d\widetilde{W}_t^i = \sqrt{\left(1-(\xi_t^i)^2\right)}d\tilde{B}_t^i + \xi_t^i d\bar{B}_t \quad \textbf{[16]}$$

Aplicando dicho cambio en el proceso de correlación obtendremos la siguiente fórmula final:

$$d\varrho_t^i = \alpha^i\left(m^i - \varrho_t^i\right)dt + \beta^i\sqrt{\left(\varrho_t^i - a\right)\left(b-\varrho_t^i\right)}\left[\sqrt{\left(1-(\xi_t^i)^2\right)}d\tilde{B}_t^i + \xi_t^i d\bar{B}_t\right]$$

$$d\varrho_t^i =$$
$$\alpha^i\left(m^i - \varrho_t^i\right)dt + \beta^i\sqrt{\left(\varrho_t^i - a\right)\left(b-\varrho_t^i\right)\left(1-(\xi_t^i)^2\right)}d\tilde{B}_t^i + \beta^i\cdot\xi_t^i\cdot\sqrt{\left(\varrho_t^i - a\right)\left(b-\varrho_t^i\right)}d\bar{B}_t$$

[17]

Durante todo este trabajo trataremos con correlaciones, y hemos de constatar que los resultados que obtenemos de nuestros procesos cumplan las condiciones necesarias para que entre ellos formen una matriz semi-definida positiva cuyos valores no se sitúen fuera del intervalo (a, b)

Pero durante todo este proceso no hemos dado valores ni al parámetro a, ni al parámetro b. Así pues, nos disponemos a dárselo en este momento.

El parámetro 'a' representa el valor máximo que pueden tomar las correlaciones y para todos los casos este valor será 1. Pero para el caso de 'b' no será tan sencillo dar un valor en general. El valor que tomará 'b' dependerá del mercado en el que nos encontremos, en particular, dependerá del número de activos existentes en nuestro mercado y en si dicho número es par o impar. Así pues, distinguiremos dos casos:

- Si n es par $\rightarrow b = \frac{-1}{n-1}$
- Si n es impar $\rightarrow b = \frac{-1}{n}$

Pero estas no serán las únicas condiciones que tendrán que cumplir los parámetros de nuestro modelo para poder afirmar que el proceso generado forme una matriz de correlaciones.

Asimismo, los valores de los parámetros que encontramos en el proceso de correlación deben cumplir las condiciones de Feller, mediante las cuales nos aseguraremos que los procesos de las correlaciones de cada uno de los activos no serán problemáticos a la hora de crear las matrices de correlación.

Las condiciones de Feller implican:

$$\frac{2\alpha^i(m^i - a)}{(b - a)} \geq (\beta^i)^2$$

$$\frac{2\alpha^i(b - m^i)}{(b - a)} \geq (\beta^i)^2$$

Los valores de a y b son comunes para todos los activos.

Después de todas las especificaciones anteriores, nos vemos en la situación de poder finalizar la especificación de este modelo, mostrando un ejemplo de cómo quedaría la matriz de correlación de precios en un instante en concreto t.

$$\begin{pmatrix} 1 & \varrho_t^1\varrho_t^2 & \varrho_t^1\varrho_t^3 & \dots & \varrho_t^1\varrho_t^n \\ \varrho_t^1\varrho_t^2 & 1 & \varrho_t^2\varrho_t^3 & \cdots & \varrho_t^2\varrho_t^n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \varrho_t^1\varrho_t^n & \varrho_t^2\varrho_t^n & \dots & \varrho_t^{n-1}\varrho_t^n & 1 \end{pmatrix}_{n\,x\,n}$$

MODELO DE ZETOCHA:

En el caso del modelo estocástico de correlación de Zetocha, el proceso de generación de rentabilidades de los activos es la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t^1}{S_t^1} = rdt + \sigma^1 dW_t^1 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dS_t^n}{S_t^n} = rdt + \sigma^n dW_t^n \end{cases}$$

Este modelo, al igual que el previo, impone una covarianza distinta de 0 entre las rentabilidades de los activos:

$$\langle \frac{\boldsymbol{dS_t^i}}{\boldsymbol{S_t^i}}, \frac{\boldsymbol{dS_t^j}}{\boldsymbol{S_t^j}} \rangle = \langle rdt + \sigma^i dW_t^i, rdt + \sigma^j dW_t^j \rangle = \langle rdt, rdt \rangle + \langle rdt, \sigma^j dW_t^j \rangle + \langle \sigma^i dW_t^i, rdt \rangle +$$
$$\langle \sigma^i dW_t^i, \sigma^j dW_t^j \rangle = \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \langle dW_t^i, dW_t^j \rangle = \boldsymbol{\sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \rho_t dt} \quad [18]$$

Mientras que en el modelo de Boortz, cada pareja de activos tenía una correlación diferente entre ellos para todo instante $t \in [0, T]$, en el modelo de Zetocha, cualquier par de activos tiene el mismo coeficiente de correlación, dependiente de cada instante $t \in [0, T]$.

La correlación en este caso sigue un proceso estocástico que se define como sigue:

$$d\rho_t = \alpha \cdot (\bar{\rho} - \rho_t)dt + \beta \cdot \sqrt{(1-\rho_t)(\rho_t - \rho_{min})} d\widetilde{W}_t \quad \textbf{[19]}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{\alpha}$: es la velocidad de reversión a la media que tiene la correlación.
- $\boldsymbol{\bar{\rho}}$**:** valor al que tiende la correlación a largo plazo
- $\boldsymbol{\beta}$**:** valor de ajuste.
- $\boldsymbol{\rho_{min}}$**:** valor mínimo que puede tomar la correlación.
- $\boldsymbol{dt}$: Distancia existente entre cada una de las simulaciones.

El proceso anterior tampoco es independiente de los procesos de las rentabilidades, y esa correlación viene especificada de la siguiente forma:

$$\langle d\widetilde{W}_t, dW_{t'}^j \rangle = \rho_{CS} dt \quad \textbf{[20]}$$

Dónde:

- $\boldsymbol{\rho_{CS}}$**:** Correlación existente entre el proceso de correlación y los procesos que siguen los precios de los activos. Es constante para todos los activos y dependiente de cada instante $t \in [0, T]$.

Tal y como ocurría en el caso anterior, el rango de valores que debe tomar este parámetro estará compuesto mayoritariamente por valores negativos. Podemos deducir dicha afirmación, mediante el mismo razonamiento utilizado en el caso del modelo anterior.

Recordemos en este punto que la fórmula [19] depende del parámetro ρ_{min}. El cual a su vez depende de ρ_{CS}a través de la siguiente formula:

$$\rho_{min} = \frac{-1 + n \cdot (\rho_{CS})^2}{n-1}$$

Tal y como ocurría en el modelo de Boortz, este modelo se rige también por las condiciones de Feller, las cuales nos garantizarán que los valores de $\rho_t$permanezcan dentro del intervalo de valores de correlación posibles $(\rho_{min}, 1)$.

Estas condiciones son las siguientes:

$$\frac{2\alpha(\bar{\rho} - \rho_{min})}{1 - \rho_{min}} \geq \beta^2$$

$$\frac{2\alpha(1 - \bar{\rho})}{1 - \rho_{min}} \geq \beta^2$$

En el caso del modelo anterior, las condiciones de feller deberían cumplirse para los procesos de correlación de todos los activos. En este caso como únicamente trabajamos con un proceso de correlación solo será necesaria una comprobación inicial.

Finalizamos, mostrando un ejemplo de cómo quedaría la matriz de correlación en un instante en concreto t.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_t & \rho_t & \cdots & \rho_t & \rho_{cs} \\ \rho_t & 1 & \rho_t & \cdots & \rho_t & \rho_{cs} \\ & & & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & \rho_t & \vdots \\ \rho_t & \rho_t & \cdots & \rho_t & 1 & \rho_{cs} \\ \rho_{cs} & \rho_{cs} & \cdots & & \rho_{cs} & 1 \end{pmatrix}_{(n+1)x\,(n+1)}$$

MODELO DE MA:

El proceso que rige las rentabilidades de los activos en el caso del modelo de Ma es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t^1}{S_t^1} = rdt + \sigma^1 dW_t^1 \\ \vdots \\ \dfrac{dS_t^n}{S_t^n} = rdt + \sigma^n dW_t^n \end{cases}$$

Tal y como ocurre en la vida real, los movimientos que sufren los precios de los activos que componen el mercado distan mucho de ser independientes.

El autor considera en este modelo que la correlación entre los procesos de rentabilidades de dos activos distintos es independiente de los activos con los que estemos tratando, es decir, la correlación existente entre los precios de los activos 'i' y 'j' será la misma que la que encontramos en el caso de los activos 'j' y 'z'. Para corroborar dicha afirmación calcularemos el valor de la correlación entre los procesos de dos precios al azar, 'i' y 'j'

$$\langle \frac{\boldsymbol{dS_t^i}}{\boldsymbol{S_t^i}}, \frac{\boldsymbol{dS_t^j}}{\boldsymbol{S_t^j}} \rangle = \langle rdt + \sigma^i dW_t^i, rdt + \sigma^j dW_t^j \rangle = \langle rdt, rdt \rangle + \langle rdt, \sigma^j dW_t^j \rangle + \langle \sigma^i dW_t^i, rdt \rangle + \langle \sigma^i dW_t^i, \sigma^j dW_t^j \rangle = \langle \sigma^i dW_t^i, \sigma^j dW_t^j \rangle = \sigma^i \sigma^j \langle dW_t^i, dW_t^j \rangle = \sigma^i \sigma^j d\langle W_t^i, W_t^j \rangle = \boldsymbol{\sigma^i \sigma^j \rho_t dt}$$

[21]

Podemos concluir de la fórmula anterior que:

$$d\langle W_t^i, W_t^j \rangle = \rho_t dt \quad \textbf{[22]}$$

De esta manera confirmamos la afirmación anterior, y dejamos entrever que la correlación existente entre los brownianos de los activos solo depende del instante del tiempo en el que nos encontremos y no de los activos con los que estamos tratando.

Tal y como hemos podido observar en los dos casos anteriores cada modelo tiene un proceso, aunque similar, diferente entre ellos. En este caso el proceso que sigue la correlación entre activos en cada instante del tiempo es la siguiente:

$$d\rho_t = \alpha(\bar{\rho} - \rho_t)dt + \beta\sqrt{((b - \rho_t)(\rho_t - a)}dW^{n+1} \quad \textbf{[22]}$$

Dónde:

- ***a* y *b*:** Son los valores máximo y mínimo respectivamente que puede tomar la correlación. Estos valores serán calculados de la misma manera que los hemos calculado en el caso del modelo de Boortz.
- $\boldsymbol{\bar{\rho}}$: es el valor a largo plazo que tomará la correlación.
- $\boldsymbol{\alpha}$: Velocidad a la que revierte a la media.
- $\boldsymbol{\beta}$: Volatilidad de la correlación.
- $\boldsymbol{dt}$: Distancia existente entre cada una de las simulaciones.

Podemos observar como al estar en el caso en que la correlación sigue un proceso estocástico, el proceso de esta contiene entre sus componentes un browniano.

El valor de dicho browniano sigue sin ser independiente del resto de brownianos existentes en los procesos de los rentabilidades de los activos que acontecen en el mismo instante de tiempo.

Si repasamos que correlación tienen entre ambos en los modelos anteriores, encontramos dos enfoques diferentes. En uno de ellos, Zetocha, la correlación existente entre el proceso de correlación y los procesos de los precios es constante e independiente del activo con el que estemos tratando. Mientras que en el caso del modelo de Boortz, esa correlación aunque continua siendo constante a lo largo del tiempo, es diferente para cada uno de los activos. En este caso el modelo de Ma sigue el mismo enfoque que el de Boortz, por tanto la correlación entre los brownianos continúa siendo constante a lo largo del tiempo pero dependiente del activo con el que estemos tratando.

Definimos esa correlación como sigue:

$$\begin{cases} dW^1 dW^{n+1} = \rho^1 dt \\ \vdots \\ dW^n dW^{n+1} = \rho^n dt \end{cases}$$

Realizamos la siguiente observación al lector, la correlación existente entre los procesos de los activos tiene un subíndice donde se indica el momento del tiempo en el que está calculado. Mientras que la correlación existente entre los procesos de los precios y el proceso de correlación índica mediante un superíndice el activo con el que estamos trabajando.

Por el mismo razonamiento utilizado en los casos anteriores el valor de las correlaciones anteriores será mayoritariamente negativo, para poder así recoger de manera más correcta la realidad existente en el mercado.

Ya hemos comentado anteriormente que el valor de la correlación puede oscilar dentro del intervalo [-1,1], pero esto no quiere decir que como hemos visto en cada uno de los modelos para asegurarnos que la matriz de correlación con la que trabajamos en cada instante sea semi-definida positiva no existan otra serie de restricciones para asegurarnos que el resultado cumpla todas las condiciones necesarias.

Así pues definimos el valor de a y b en el modelo de Ma mediante las siguientes fórmulas:

$$\rho_{min} = -\frac{(n+1) + 2\sum_{i=1}^{n} \rho^i}{n(n-1)}$$

$$\rho_{max} = \min\left(1, \frac{(n+1)n - 2\sum_{i=1}^{n} \rho^i}{n(n-1)}\right)$$

De manera equivalente a como ocurre en el resto de modelos, para el modelo de Ma también existen una serie de condiciones de Feller sobre el valor de los parámetros de la correlación, que nos aseguran el buen funcionamiento del modelo.

Para este caso estas restricciones las mismas que utilizamos para el modelo de Zetocha, es decir:

$$\frac{2\alpha(\bar{\rho}-\rho_{min})}{1-\rho_{min}} \geq \beta^2$$

$$\frac{2\alpha(1-\bar{\rho})}{1-\rho_{min}} \geq \beta^2$$

Finalizaremos la especificación del modelo de Ma, exponiendo como resultaría la matriz de correlaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_t & \rho_t & \dots & \rho_t & \rho^1 \\ \rho_t & 1 & \rho_t & \cdots & \rho_t & \rho^2 \\ & & & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & \rho_t & \vdots \\ \rho_t & \rho_t & \dots & \rho_t & 1 & \rho^n \\ \rho^1 & \rho^2 & \dots & & \rho^n & 1 \end{pmatrix}_{(n+1)x\,(n+1)}$$

4. Implementación.

A lo largo de todo el procedimiento nos hemos encontrado con una serie de problemas a la hora de simular los valores de los subyacentes y calcular los precios de las opciones computacionalmente, que hemos ido resolviendo tomando la decisión encontrada más eficiente.

Uno de los problemas a los que nos encontrábamos al simular mediante Matlab una serie de subyacentes con cada uno de los modelos era asegurarnos que las correlaciones que se generaran no tuvieran valores fuera del intervalo de valores válidos para las correlaciones en cada caso. El valor máximo que puede tomar la correlación es común a todos los modelos que hemos tratado y sería 1, sin embargo el valor mínimo que puede tomar variará dependiendo del modelo con el que estemos trabajando en ese momento.

Para asegurarnos el valor que obteníamos no se excedía, teníamos diversas formas de poder realizar la comprobación. Una de ellas sería comprobar uno por uno los valores de correlación que había generado el programa para cada instante y así comprobar que cada uno de ellos cumplía tanto la restricción inferior como la superior. Pero esta solución tiene un coste computacional elevado, y más pensando que en nuestro caso estamos realizando un número elevado de simulaciones de Monte Carlo. La siguiente solución tiene un coste computacional menor que la anterior, puesto que su función es únicamente comprobar que el máximo valor de la correlación en cada uno de los instantes tiene un valor menor que el del máximo establecido. En caso contrario habría que ejercer una serie de cambios que vendrán comentados posteriormente. El caso del mínimo se realizaría análogamente, es decir, en lugar de comprobar uno por uno todos los valores de correlación si cumplen la restricción inferior, simplemente iríamos comprobando que el valor mínimo lo fuera cumpliendo. Y realizaríamos los cambios pertinentes hasta que finalmente tanto el máximo como el mínimo cumplieran las condiciones, puesto que esto equivaldría a que todos los valores las cumplen también. Al hacer un menor número de comprobaciones el coste computacional disminuye en el segundo método si es comparado con el primero.

Seguidamente tenemos que ver como hemos conseguido resolver el problema de aquellos valores que han salido fuera del intervalo de valores posibles, que valor hemos decidido imponerles. Para solucionar este problema hemos encontrado dos vertientes, la primera considera darle un valor fijo para todos los casos. El segundo método para resolver dicho problema sería realizar el método denominado como “espejo”, que implica observar la diferencia entre el valor obtenido y el valor máximo o mínimo, dependiendo del caso que estemos tratando, y restar o sumar al valor máximo o mínimo la cantidad correspondiente. Esta metodología nos permite no fijar un valor fijo y así que tener mayor variedad de valores de correlación, aunque existen diversos estudios que indican que en los resultados obtenidos utilizando ambos métodos no se perciben diferencia. Aún sabiendo que el método utilizado no iba a repercutir a los resultados posteriores decidimos utilizar el método espejo.

Otro de los problemas a los que nos enfrentamos fue decidir la manera más eficiente de discretizar el proceso de la correlación. En el artículo de Boortz encontramos diversos métodos para realizar dicha tarea. Uno de los que más nos llama la atención es el método implícito de discretización para los procesos CIR introducido en el artículo de Alfonsi (2005).

En su artículo el autor considera que si tenemos un proceso CIR Y, definido como:

$$dY_t = k(\mu - Y_t)dt + \nu\sqrt{Y_t}dW_t$$

Cuya condición inicial viene dada por $Y_0 = y_0 \epsilon \mathbb{R}_0^+$ y donde $t\epsilon[0,T], \nu, \mu \geq 0 \; y \; k \in \mathbb{R}$.

Como se índica en el artículo de Alfonsi, la ecuación anterior tiene una única y no negativa solución. Además cabe añadir que el proceso CIR es positivo para todo $t\epsilon[0,T]$ siempre que se cumpla la siguiente condición:

$$k\mu > \frac{\nu^2}{2}, y_o > 0$$

Según el estudio realizado en este artículo, el autor confirmar que si se cumplen las dos ecuaciones anteriores, se puede aplicar el esquema de discretización implícita del proceso CIR. Sin embargo este proceso solamente es eficiente en el caso de tratar con un único proceso de Jacobi, puesto que el esquema que encontramos en el artículo falla al intentar simular un sistema completo de procesos de Jacobi correlacionados. Así pues, aunque este sería un enfoque más exacto, su enfoque es demasiado complicado y costoso de implementar. Así pues aun conociendo la existencia de un esquema de discretización más exacto decidimos utilizar uno más sencillo y más fácil de implementar para facilitar el trabajo computacional.

El siguiente problema al que nos enfrentamos, es comprobar que la matriz de correlación que estamos generando cumpla la condición de ser semi-definida positiva, para poder considerarse una matriz de correlación. Para poder solucionar este problema además de comprobar que los valores de correlación calculados se mantengan dentro del intervalo de valores válidos, comprobado anteriormente, también nos apoyaremos en la función de Matlab "chol"[2].

Otro de los mayores problemas a los que nos hemos enfrentado al realizar este trabajo es el gran coste computacional y el tiempo de ejecución de nuestros programas iniciales.

Cabe destacar que para las metodologías que utilizaremos posteriormente en el proceso de calibración tener un tiempo de ejecución reducido era esencial para agilizar el proceso. Uno de los procesos que consume la mayoría del tiempo de ejecución de un programa es la generación de los brownianos correspondientes a cada uno de los procesos de los activos y de los incrementos de las correlaciones en cada uno de los caminos con la correlación correspondiente entre ellos. Cuando más adelante hablemos de matrices de correlación, estaremos hablando de las matrices que contienen la correlación existente entre los procesos del valor de los activos, y los procesos de correlación.

[2] La función de este comando de Matlab es devolver la matriz que contiene la correspondiente descomposición de cholesky de la matriz que ha introducido el usuario como input. Pero además si le damos dos valores de output nos devuelve una variable que tendrá valor cero en el caso en que nuestra matriz sea semi-definida positiva, y un valor aleatorio positivo en el caso contrario. Así pues comprobando el valor de p podemos comprobar que la matriz de correlación con la que nos disponemos a trabajar cumple las condiciones de una matriz de correlación.

Notaremos, en las tablas que encontraremos posteriormente, como la comparación entre el tiempo de ejecución del primer programa realizado con el último es abismal. La mayoría de cambios que realizamos en las primeras mejoras fueron eliminación de bucles. Sin embargo la mejora que implicó una mayor disminución del tiempo de ejecución del programa fue la siguiente.

En los programas anteriores calculábamos una matriz de correlación para cada uno de los valores de correlación que simulábamos para cada camino en cada instante, lo que implicaba un coste computacional elevado para cada simulación y repercutía en el tiempo de ejecución de cada uno de los programas. En el artículo de Zetocha y en el de Reghai encontramos métodos para agilizar el proceso de simulación. Su aplicación además nos permite simplificar el algoritmo computacional y eliminar el los bucle de caminos que existía en nuestro programa, el método que nos sugieren ambos artículos se basa en lo siguiente.

Sabemos que para cada modelo con el que trabajamos a lo largo del trabajo, Zetocha y Ma, ambos se caracterizan por tener para cada cartera un intervalo de valores posibles que puede tomar la correlación. Podemos dividir ese intervalo en x partes equidistantes, y supondremos que los puntos de delimitan cada una de las partes se comportan como valores representativos de todos los valores posibles que podemos generar. Una vez tenemos dichos puntos, calcularemos las matrices que contienen las descomposiciones de cholesky para cada una de las matrices de correlación que podemos formar con los puntos representativos que hemos calculado. De esta manera guardaremos dentro de una matriz todas las posibles matrices que necesitaremos a lo largo del proceso.

Una vez realizados los cambios anteriores seguiríamos con nuestro programa de simulación de Monte Carlo, pero en este caso al calcular el valor de la correlación para cada camino en cada uno de los instantes no tendremos que calcular la descomposición de cholesky para cada uno de los valores, si no que buscaremos que valor de los denominados anteriormente como representativos es el más próximo al valor que hemos obtenido en la generación, una vez encontrado dicho valor utilizaremos la descomposición de cholesky correspondiente calculada anteriormente. De esta manera reducimos el número de descomposiciones de cholesky que realiza el programa, lo que implica un menor coste computacional.

De esta forma hemos conseguido que nuestro programa sea eficiente y nos permita realizar todo el procedimiento que requiere nuestro trabajo en un tiempo eficiente.

Otro de los problemas con el que nos hemos encontrado es la imposibilidad de realizar un número elevado de simulaciones a la vez utilizando el programa Matlab. El error estaba vinculado a la cantidad de memoria que se necesitaba para guardar los datos de todos los caminos que queríamos simular. Probando para descubrir a partir de qué número de simulaciones empezábamos a tener problemas, nos percatamos que podíamos simular 25000 simulaciones de una misma vez pero al intentar realizar más aparecía el problema de memoria comentado anteriormente.

Una primera solución para el programa era dividir el número de simulaciones que el usuario quería generar en submuestras de 25000 caminos, generarlas todas ellas y únicamente guardar los precios iniciales y los precios finales. Pero observamos que el tiempo que tardaba el programa en generar muestras de 25000 caminos era superior al cuádruple de tiempo que tardaba en generar una muestra de 10000 caminos. Así pues decidimos subdividir el número de caminos que queremos calcular en submuestras más reducidas, de 10000 caminos, para agilizar el proceso de generación de datos y evitarnos los problemas de memoria.

La mayoría de problemas que hemos comentado a lo largo de este punto son problemas comunes en los procesos de simulación de Monte Carlo de todos los modelos, es por eso que aunque la mayoría de pruebas solo las realizamos con uno de los modelos las extrapolamos al resto de modelos sin pérdida de generalidad.

A continuación, tal y como hemos comentado anteriormente, encontraremos la tabla 1, donde mostraremos el tiempo de ejecución de los distintos programas que hemos programado, donde cada uno es la mejora del anterior.

Pero anteriormente a esto explicaremos los cambios que hemos aplicado en cada uno de los programas para disminuir su tiempo de ejecución.

Comenzaremos por el programa con menor eficiencia para acabar con los cambios que hemos ido realizando hasta llegar al programa que finalmente hemos utilizado para nuestros cálculos.

En el primer programa que realizamos, al que denominamos Zetocha2, empezamos con tres bucles, que consistían, el primero en instantes, el segundo a caminos y el tercero para activos. Calculábamos todas las correlaciones dentro de un bucle, cosa que cambiamos en el programa siguiente, definido como Zetocha 3, consiguiendo que se calcularan todas a la vez sin necesidad de bucle. Otra de las cosas que cambiamos del primer al segundo programa fue eliminar el bucle de los activos, puesto que una vez calculada la correlación de cada camino en cada instante y el valor de los brownianos que necesitábamos con la correlación correspondiente podíamos calcular el valor de todos los activos del mercado de una, sin necesidad de ese tercer bucle. También al comienzo del proceso creí que sería interesante separar los precios de los activos en matrices que contuvieran los precios de un único activo en cada uno de los diferentes caminos que simulábamos. Sin embargo llegado el segundo programa observamos que era un proceso innecesario y que simplemente añadía tiempo de ejecución sin ofrecernos ninguna mejora. Así pues dicha parte fue eliminada al pasar del primer programa al segundo. Pasamos a comentar las mejoras que encontramos del segundo programa al tercero, Zetocha4.

En el tercer programa, aunque no conseguimos eliminar el bucle de las simulaciones, realizamos un proceso que calculaba el precio de todos los activos que componen el mercado de todas las simulaciones a la vez.

Y por último los cambios que encontramos del tercer programa al cuarto y último, al que hemos definido como Zetocha, son los siguientes. A medida que íbamos probando los programas que realizábamos notábamos que las mejoras que conseguíamos no satisfacían nuestras necesidades, puesto que aunque hubiéramos rebajado el tiempo de ejecución desde el primer programa al cuarto no conseguíamos tener un programa con un tiempo de ejecución reducido. Así pues nos dispusimos a eliminar el bucle de simulaciones y cambiarlo por el bucle de activos, puesto que siempre íbamos a realizar más simulaciones que el número de activos que existían en el mercado. Realizamos dicho cambio y eliminamos todo bucle sobre simulaciones que pudiéramos encontrar. Además conseguimos calcular los brownianos de cada uno de los activos simultáneamente, para más tarde juntar todos los valores de los brownianos calculados y obtener los precios de los activos en dicho instante todo de una única vez.

Además es en este programa donde hemos añadido la mejora de calcular un número limitado de descomposiciones de cholesky y después interpolar el valor de la correlación calculada para cada simulación al valor más cercano de los valores considerados como representativos, lo que reduce el coste computacional en los cálculos de las descomposiciones de cholesky. Finalmente aplicando dichos cambios y mejoras conseguimos nuestro programa consiguiera simular 10000 caminos en 46 segundos, reducción más que considerada si observamos que nuestro primer programa consumía más de media hora en realizar la misma tarea.

Una vez comentadas todas las mejoras que podemos encontrar en todos los programas nos disponemos a exponer los datos que hemos obtenido ejecutando cada uno de ellos. Mediante estos datos queremos observar las implicaciones que tiene en los precios, los tiempos de ejecución y los errores que encontramos en los precios calculados el cambio en el strike de la dispersion trade (que es la opción que hemos decidido valorar para esta comparación), los cambios en el número de simulaciones generadas, los cambios que encontramos si variamos el valor de la distancia que hay entre cada una de las simulaciones y por último los cambios que encontramos, en este caso en el último programa ya que en el resto no tiene ninguna implicación, el número de valores de correlación representativos que vamos a utilizar.

Para realizar las simulaciones que generan los precios que encontraremos en las siguientes gráficas hemos utilizado aleatoriamente uno de los escenarios que más tarde utilizaremos. La elección del escenario no tiene ninguna implicación ni en los resultados de los tiempos de ejecución del programa ni en los errores que podemos cometer al considerar dicho precio como cierto.

Nos disponemos a exponer los datos que hemos utilizado para generar dichos resultados:

- Rhocs = -0.5.
- Alpha=5;
- Rho0=0.4;
- Rhob= 0.8;
- Beta=1;
- Sigma=[0.75,0.8,0.9,0.82,0.7];
- Ti=r= 0.05;
- Precio0=[100,100,100,100,100];
- deltaT=0.01 (aunque durante uno de los estudios cambiará de valor)
- n=5;
- k=10000 (Aunque durante uno de los estudios cambiará de valor)
- T=5;
- Strike=1 (Aunque durante uno de los estudios cambiará de valor)
- Num= 100 (Aunque durante uno de los estudios cambiará de valor

A continuación encontraremos los cambios en precios, tiempos de ejecución y errores que podemos encontrar al variar el valor del strike de la opción dispersion trade.

Precios:

Strike	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
0.5	-2.4362	-2.4496	-2.5214	-2.5078
0.7	-2.2292	-2.2874	-2.3388	-2.3989
1	-2.0522	-2.1823	-2.1383	-2.3213
1.20	-1.9240	-2.0068	-2.0410	-2.0806
1.50	-1.8910	-1.8662	-1.9246	-2.0405

Errores:

Strike	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
0.5	0.1065	0.0975	0.1389	0.0601
0.7	0.0769	0.0856	0.0964	0.0941
1	0.0999	0.0956	0.1009	0.0601
1.20	0.0817	0.0938	0.1175	0.0640
1.50	0.1051	0.1011	0.1758	0.0688

Tiempos: (en segundos)

Strike	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
0.5	1898.7554	452.1802	399.2172	44.9743
0.7	1772.3423	428.8305	409.1796	46.2023
1	1829.1101	432.2443	416.8916	46.1372
1.20	1786.3060	450.5415	397.1888	46.5542
1.50	1897.0105	455.0110	403.9193	46.7513

Tabla 1: Mejora en la eficiencia computacional.

Lo destacable de estas gráficas es la disminución del precio de la opción a medida que aumentas su strike.

Las tablas que encontraremos a continuación estudiaremos el efecto que tiene sobre cada uno de los programas el aumento del número de los caminos simulados. Para este proceso los cambios que más nos interesan son como se eleva el tiempo de ejecución del programa y la disminución del error que podemos encontrar en los precios.

Precios:

Caminos	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
1000	-2.3886	-1.9434	-1.9859	
10000	-2.0993	-2.0271	-2.2118	-2.2891
50000	-2.1905	-2.0064	-2.1360	-2.2439

Errores:

Caminos	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
1000	0.2545	0.2609	0.2278	
10000	0.1015	0.0824	0.0963	0.0629
50000	0.1055	0.0795	0.0413	0.0583

Tiempos

Caminos	Zetocha2	Zetocha3	Zetocha4	Zetocha
1000	35.0666	22.8662	19.4259	
10000	1712.3399	456.4429	406.0638	45.9195
50000	5952.0709	2219.4024	6093.7583	226.5193

Tabla 2: Efecto del número de caminos de Montecarlo.

En las tablas anteriores podemos observar como el error en los precios obtenidos utilizando programas con pocas simulaciones era muy elevado. Es decir, aunque el tiempo que tarda el programa en el caso de utilizar 1000 caminos sea reducido no nos resulta interesante este caso, pues el precio obtenido tiene un porcentaje de error muy elevado. Por otro lado al observar los errores de los programas con 10000 y 50000 simulaciones notamos que no existe tanta diferencia entre ambos en niveles de error pero sí que existe en niveles de tiempo de ejecución. Así pues una de las decisiones que nos planteamos a la hora utilizar el programa es el número de simulaciones idóneo que deberíamos utilizar para nuestro proceso. En el caso en que no hubiéramos llegado al último programa con unos tiempos de ejecución tan bajos, quizá plantearíamos la idea de utilizar 10000 caminos al razonar que la disminución del error que tiene el aumentar el número de caminos compensa observando cómo aumenta el tiempo. Sin embargo para el caso del último y mejorado programa aunque el tiempo de ejecución aumenta y parece que el porcentaje de error no disminuye demasiado llegamos a la conclusión que un tiempo de ejecución de un programa de 226 segundos, aproximadamente 4 minutos, es un tiempo factible a la hora de realizar todas las simulaciones necesarias en nuestro proceso.

Pasamos ahora a estudiar los cambios en los precios, los errores y los tiempos de ejecución que implica el cambiar la distancia existente entre cada simulación.

Precios:

deltaT	Zetocha
0.01	-2.2683
0.005	-2.2550
0.0033	-2.3033

Errores

deltaT	Zetocha
0.01	0.0557
0.005	0.0662
0.0033	0.0632

Tiempos:

deltaT	Zetocha
0.01	46.0959
0.005	161.6261
0.0033	165.5200

Tabla 3: Efecto de deltaT

Tal y como observamos en las tablas, el disminuir la distancia existente entre cada simulación del valor de los activos no tiene ninguna implicación ni en los precios de la opción, ni en los errores que estos contienen. Sin embargo sí que implican un aumento en el tiempo de ejecución. Así pues a posteriori de observar este resultado decidimos utilizar para todas las simulaciones el valor de 0.01 para deltaT, puesto que consideramos que es el valor más eficiente.

Y por último nos queda estudiar el efecto que tiene el número de particiones que realizaremos durante el proceso comentado anteriormente de creación de valores de correlación representativos en los errores y en los tiempos.

Precios:

Particiones	Zetocha
100	-2.2935
200	-2.3654
500	-2.3544

Errores:

Particiones	Zetocha
100	0.0591
200	0.0606
500	0.0618

Tiempos:

Particiones	Zetocha
100	46.8455
200	46.7524
500	45.9875

Tabla 4: Número de matrices de cholesky precalculadas (Particiones)

Tal y como ocurría en el caso anterior, el aumento del número de matrices de cholesky precalculadas a partir de 100 no tiene implicaciones en los porcentajes de error de los precios simulados de las opciones. Pero tampoco tiene un efecto en el tiempo de ejecución. Así pues a la hora de simular es indiferente el valor que escojamos, por tanto utilizaremos el número de particiones escogido inicialmente, 100.

5. Escenarios.

A lo largo de todo el trabajo vamos a trabajar con 6 escenarios distintos que serán representativos de la realidad que nos podemos encontrar en el mercado. Nuestro objetivo es analizar la adecuación de los modelos escogidos para representar la dinámica de los subyacentes en cada uno de los escenarios. Al no basarnos en datos reales las situaciones que exponemos serán ficticias, pero nuestro propósito es que sean plausibles, recogiendo diferentes escenarios que se pueden dar en el mercado. Para generar los distintos escenarios se va a utilizar el modelo de correlación estocástica de Boortz. A partir del cual construiremos series históricas para cada uno de los subyacentes en cada escenario.

A continuación vamos a realizar una breve especificación de todos y cada uno de los escenarios escogidos. Estos se distinguirán por tener los valores de dos de sus parámetros diferentes entre ellos. Uno de los parámetros que irán variando serán las volatilidades de los activos. El otro parámetro que irá variando su valor en los distintos escenarios será el parámetro que recoge el valor de las correlaciones iniciales entre los activos y el mercado desde las que partiremos.

Así pues nos disponemos a enumerar aquellos parámetros que se mantendrán constantes durante todos los escenarios y los valores que les hemos otorgado.

- Número de activos que compondrán el mercado: **n** = 5;
- El tipo de interés libre de riesgo constante: **r** = 0.05;
- Valor inicial de cada uno de los subyacentes **S0** = [100,100,100,100,100];
- Parámetros de los procesos de correlación bajo el modelo de Boortz que se usara para simular la evolución de los subyacentes en los distintos escenarios:
- Reversión a la media de cada uno de los procesos de correlación de los activos. **k** = [0.5,1,2,3,5];
- Volatilidad del proceso de correlación **beta** = [0.6,0.8,1.1,0.9,1.7];
- Correlación a largo plazo m = [0.4,0.3,0.25,0.8,0.6];
- Correlación entre los procesos de correlación y los activos:
  xi = [-0.1,-0.3,-0.5,-0.75,-0.8].
- Serie histórica: 5 años (T)

Una vez finalizada la enumeración de todos los parámetros que consideraremos constantes, pasaremos a especificar cada uno de estos escenarios y las características que los diferencian.

Escenario 1:

Definiremos este escenario como una realidad donde los activos posean **volatilidades altas** y **correlaciones iniciales equivalentes** para todas las parejas de activos (cabe destacar que estamos hablando de datos que serán introducidos en el modelo de correlación de Boortz, el cual considera que las correlaciones entre los activos puede ser diferentes entre pares de activos distintos).

Así pues los valores de los parámetros de volatilidades y correlación inicial utilizados para generar este escenario serán los siguientes:

- corr0 = [0.5,0.5,0.5,0.5,0.5]
- sigma = [0.7,0.85,0.9,0.8,0.75]

En este caso la matriz de correlación inicial con la que trabajaremos quedará de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Escenario 2:

Para el segundo escenario seguiremos considerando que las **volatilidades** de los activos se mantienen en **niveles altos**, mientras que las **correlaciones iniciales** desde las que partimos en este caso son **distintas entre ellas**, pero comparten una característica en común todas son positivas.

Así pues los valores de los parámetros de volatilidades y correlación inicial utilizados para generar este escenario serán los siguientes:

- corr0 = [0.80, 0.60,0.50,0.30,0.20]
- sigma = [0.7,0.85,0.9,0.8,0.75]

Con estos datos la matriz de correlación inicial sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.4 & 0.24 & 0.16 \\ 0.48 & 1 & 0.3 & 0.18 & 0.12 \\ 0.4 & 0.3 & 1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.24 & 0.18 & 0.15 & 1 & 0.06 \\ 0.16 & 0.12 & 0.1 & 0.06 & 1 \end{pmatrix}$$

Escenario 3:

Para el tercer escenario siguiendo la estela de los dos primeros continuaremos considerando que las **volatilidades** de los activos se mantienen en **niveles considerados como altos**. La diferencia entre los casos anteriores es que en este caso las **correlaciones iniciales** además de ser **diferentes** para cada activo, para algunas parejas de subyacentes serán **negativas**.

- corr0 = [0.50,0.40,0.60,-0.10,-0.20]
- sigma = [0.7,0.85,0.9,0.8,0.75]

Así pues en este caso la matriz de correlación inicial con la que trabajaremos será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 & -0.05 & -0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.24 & -0.04 & -0.08 \\ 0.3 & 0.24 & 1 & -0.06 & -0.12 \\ -0.05 & -0.04 & -0.06 & 1 & 0.02 \\ -0.1 & -0.08 & -0.12 & 0.02 & 1 \end{pmatrix}$$

Escenario 4:

Para el caso del cuarto escenario nos distanciamos de los escenarios anteriores para ahora considerar el caso de tener un mercado la **volatilidad** de cuyos activos se mantenga en **niveles** considerados **bajos**. Por otro lado las **correlaciones iniciales** que consideraremos se mantendrán **constantes** para todos los activos.

- corr0 = [0.5,0.5,0.5,0.5,0.5]
- sigma = [0.15,0.25,0.3,0.4,0.5]

En este caso la matriz de correlación inicial con la que trabajaremos quedará de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Escenario 5:

Para el penúltimo escenario que con el que trabajaremos mantendremos los niveles de **volatilidad** de los activos a **niveles bajos**, como en el escenario otra vez. Pero consideraremos que las **correlaciones** desde las que partimos serán **diferentes** entre ellas, aunque todas serán positivas.

- corr0 = [0.80, 0.60,0.50,0.30,0.20]
- sigma = [0.15,0.25,0.3,0.4,0.5]

Con estos datos la matriz de correlación inicial sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.4 & 0.24 & 0.16 \\ 0.48 & 1 & 0.3 & 0.18 & 0.12 \\ 0.4 & 0.3 & 1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.24 & 0.18 & 0.15 & 1 & 0.06 \\ 0.16 & 0.12 & 0.1 & 0.06 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Escenario 6:</u>

Y por último consideraremos un escenario cuyas **volatilidades se mantienen bajas** pero las **correlaciones** podrán partir tanto desde valores **positivos como** desde valores **negativos**.

- corr0 = [0.50,0.40,0.60,-0.10,-0.20]
- sigma = [0.15,0.25,0.3,0.4,0.5]

Así pues en este caso la matriz de correlación inicial con la que trabajaremos será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 & -0.05 & -0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.24 & -0.04 & -0.08 \\ 0.3 & 0.24 & 1 & -0.06 & -0.12 \\ -0.05 & -0.04 & -0.06 & 1 & 0.02 \\ -0.1 & -0.08 & -0.12 & 0.02 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues mediante estos seis escenarios intentaremos reproducir diferentes situaciones que se pueden dar en la realidad. Nos apoyaremos en estos escenarios para estudiar cómo funcionan cada uno de los modelos en las diferentes situaciones que podemos encontrar en el mercado real.

6.Calibración.

Anteriormente a la explicación de la metodología que vamos a utilizar para calibrar, haremos un estudio sobre las metodologías teóricas que podremos utilizar, para así más tarde poder decidir cuál utilizar con toda la información necesaria. Para ello lo primero que tenemos que recordar es que la mayoría de parámetros que debemos calibrar son correlaciones. Así pues explicaremos la metodología dirigida a calibrar dichos parámetros, pero estas metodologías se pueden extrapolar al resto de parámetros sin pérdida de generalidad.

Estimación de covarianzas condicionales:

Para explicar este procedimiento empezaremos comentando los supuestos que deberá cumplir la muestra para poder aplicarlo. Supondremos que tenemos una cartera compuesta por N activos o N factores de riesgo cuyas matrices de covarianzas y de correlaciones son las variables que queremos caracterizar. Una de las formas de representarla más sencillas es por medio de una covarianza cambiante calculada a partir de una ventana móvil. El problema de esta metodología es la elección de la longitud de la ventana móvil, pues dependiendo de la escogida podemos incurrir en distintas limitaciones, tal y como hemos comentado en el primer apartado del trabajo. Suponemos que considerando dichas limitaciones escogemos m como longitud de nuestra ventana. Una vez elegido el parámetro podemos utilizar una fórmula similar a la que encontraremos a continuación, utilizada para calibrar las volatilidades cambiantes.

$$\sigma_{ij,t+1} = \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{m-1} R_{i,t+1-s}\, R_{j,t+1-s}$$

Para utilizar la fórmula anterior debemos de suponer que la media de las rentabilidades es cero, un supuesto aceptable para datos de alta frecuencia.

Además de las limitaciones que tenemos dependiendo del valor de m elegido, también hemos de tener en cuenta que el tipo de modelización que estamos utilizando puede generar una excesiva variabilidad en la serie de covarianzas debido a que los sucesos ocurridos en un pasado lejano tienen el mismo peso que los sucesos ocurridos un día anterior al cálculo de la rentabilidad. Para evitarlo podemos añadir una variable λ, para introducir la persistencia mediante un suavizado exponencial en covarianzas. El resultado de aplicar dicho cambio sería:

$$\sigma_{ij,t+1} = (1-\lambda)R_{i,t}R_{j,t} + \lambda\sigma_{ij,t}$$

Aunque esta nueva fórmula no está exenta de limitaciones, pues utilizando la fórmula anterior no existe un nivel de referencia que pueda interpretarse como la covarianza a largo plazo. Por tanto, igual que ocurre al aplicar esta fórmula para el cálculo de varianzas, este modelo implica que no existe reversión a la media en las covarianzas.

Al utilizar la última fórmula expuesta en lugar de la anterior, cambiamos la decisión de elegir el valor de m por la elección del valor de la variable λ. Los valores utilizados por Riskmetrics son $\lambda = 0.94$ en el caso de estar utilizando datos diarios y $\lambda = 0.97$ en el caso de utilizar datos mensuales. (En nuestro caso utilizaremos valores un poco mayores para dar persistencia a una mayor número de datos de rentabilidades).

Una de las características principales de las matrices de covarianzas es ser semi-definida positiva, para asegurarnos que la matriz de covarianzas obtenida cumpla dicha condición debemos utilizar el mismo valor de lambda para cada uno de los activos.

Una vez elegido el valor de lambda que nos interesa en cada caso, nos disponemos a calcular el valor de las correlaciones mediante la siguiente fórmula:

$$\rho_{u\,v,t} = \frac{\sigma_{u\,v,t}}{\sigma_{u,t}\sigma_{v,t}}$$

Otra metodología alternativa para poder calcular el valor de las correlaciones es utilizar el esquema GACH(1,1) de covarianza, que al contrario que el modelo anterior sí presenta reversión a la media. A continuación expondremos la fórmula de este modelo:

$$\sigma_{ij\,,t+1} = \omega_{ij} + \alpha R_{i,t} R_{j\,,t} + \beta\sigma_{ij\,,t}$$

Según la cual, el valor al que revertirá a largo plazo será:

$$\sigma_{ij\,,t} = \frac{\omega_{ij}}{1-\alpha-\beta}$$

Para garantizar que la matriz de covarianzas obtenida mediante este modelo sea siempre definida positiva debemos imponer los mismos parámetros de persistencia, α y β en la estimación de las varianzas y covarianzas de los distintos activos con los que trabajamos, aunque esta restricción puede parecer poco razonable en algunos casos.

Modelo de suavizado exponencial:

Para este modelo supondremos que la evolución dinámica que muestran las correlaciones vienen causadas por las variables auxiliares $q_{ij\,,t}$, que pueden ser consideradas como las covarianzas condiciones y que son calculadas mediante la fórmula:

$$q_{ij\,,t+1} = (1-\lambda) z_{it} z_{jt} + \lambda q_{ij\,,t} \quad \forall i.j = 1, \dots, n$$

Donde las variables z_{it} representan las rentabilidades estandarizadas de nuestros activos.

Podemos observar que al ser una covarianza entre rentabilidades estandarizadas, la serie temporal $q_{ij\,,t}$, nos proporciona una estimación de la correlación condicional entre ambas rentabilidades, pero no nos garantiza que dicha correlación se mantenga en el intervalo (-1,1) durante toda la serie. Para pode asegurar que dicha condición se cumple aplicaremos la siguiente normalización:

$$\rho_{ij\,,t+1} = \frac{q_{ij\,,t+1}}{\sqrt{q_{ii,t+1}}\sqrt{q_{jj\,,t+1}}}$$

Cabe destacar que estamos utilizando una fórmula recursiva para calcular el valor de las correlaciones en este modelo. Así pues para poder utilizar dicha fórmula deberemos definir el valor inicial que ha de utilizarse. Este valor inicial puede ser calculado de diversas formas, todas ellas válidas. Un primer estimador del valor inicial puede ser el promedio del los productos de las rentabilidades estandarizadas de toda la muestra. Será interesante utilizar este valor inicial en el caso en que queramos estimar como ha variado la correlación condicional en los momentos posteriores a nuestra muestra. Otro procedimiento para calcular el valor inicial sería utilizar el promedio de las rentabilidades pero esta vez no utilizar toda la muestra, si no un número inicial de observaciones y actualizar el valor de $q_{ij,t}$ a partir de la observación siguiente, desechando los datos anteriores utilizados para el cálculo de $q_{ij,1}$.

Para el caso de la condición inicial para las varianzas condicionales $q_{ii,1}$, debemos utilizar la esperanza matemática de dicha variable, 1 en el caso en que queramos utilizar toda la información muestral. Alternativamente podemos utilizar una submuestra inicial tal y como hemos utilizado para calcular $q_{ij,1}$.

En el caso en que trabajemos en un espacio muestral compuesto por diversos activos, como es nuestro caso, podemos reescribir las fórmulas de forma matricial cuyo resultado se presenta posteriormente:

$$Q_{t+1} = (1-\lambda)z_t z_t^{'} + \lambda Q_t$$

Donde la matriz Q_t es una matriz de dimensión nxn, donde n es el número de activos que componen el mercado. Y como podemos observar utilizamos un único valor de λ para asegurar que la matriz de covarianzas obtenida cumpla la condición de ser semi-definida positiva.

Modelo de correlación condicional constante:

Este modelo consiste en calcular el coeficiente de correlación lineal estándar para cada par de rentabilidades estandarizadas. Para ello, el primer paso a seguir, es estimar el un modelo de volatilidad condicional, y estandarizar la rentabilidad de cada día utilizando dicha estimación. (La metodología para estandarizar un dato es restar su media, que para el caso de rentabilidades es cero, y dividimos el resultado entre la raíz de la varianza).

Así obtendremos un único valor de correlación para cada par de activos, que será válido para toda la muestra.

Otra forma de considerar el estimador obtenido para cada pareja de activos, es como la media de la posible serie de correlaciones cambiantes en el tiempo que se pudiera estimar para dicho par de activos.

Estimación por cuasi-verosimilitud:

Para explicar el modelo de cuasi-verosimilitud comenzaremos suponiendo que nos encontramos en el caso en el que el mercado está compuesto únicamente por dos activos, para más tarde extrapolar los resultados a un mercado compuesto por un número de activos mayor.

Para trabajar con el modelo de verosimilitud tiene sentido trabajar bajo el supuesto de Normalidad. Por tanto bajo dicho supuesto, el logaritmo de la función de verosimilitud será:

$$lnL = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln\left(1-\rho_{12,t}^2\right)+\frac{z_{1,t}^2+z_{2,t}^2-2\rho_{12,t}z_{1,t}z_{2,t}}{1-\rho_{12,t}^2}\right)$$

Podemos notar como en la fórmula anterior encontramos el valor de $\rho_{12,t}^2$, cuyo valor se calculará dependiendo del modelo particular de correlación que se utilice.

Una de las posibles formas de hacerlo será mediante el modelo de suavizado exponencial, expuesto anteriormente.

Utilizaremos como valores iniciales:

$$q_{11,0} = q_{22,0} = 1$$

$$q_{12,0} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_{1,t}\ z_{2,t}$$

Recordar que estamos trabajando con rentabilidades estandarizadas y para calcularlas necesitaremos utilizar varianzas condicionales procedentes de modelos que hayamos estimado con anterioridad.

Si aumentamos el número de activos con los que trabajamos podemos extrapolar las fórmulas anteriores, cuyo resultado quedará de la siguiente forma:

$$lnL = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\ln|\Gamma_t| + z_t^{'}\Gamma_t^{-1}z_t\right)$$

Donde Γ_t es la matriz de correlaciones condicionales.

Hasta aquí hemos explicado las metodologías teóricas utilizadas para calibrar parámetros. Pero existen otras que son las que comúnmente utilizan las entidades financieras para estimar las matrices de correlación de forma implícita.

Una de las metodologías más utilizadas es la que comentaremos a continuación.

Durante todo este proceso lo que a nosotros nos interesa calcular es la correlación futura entre diferentes activos, pero los datos que tenemos son datos pasados. Vamos a ver qué información podemos sacar de dichos datos pasados sobre la correlación futura de los activos. Para ello comenzaremos obteniendo la matriz de correlación histórica de los datos. Una vez obtenida dicha matriz, formarán una combinación convexa entre dicha matriz y la matriz formada únicamente por unos. De esta forma podrán dar lugar a todas las matrices de correlación que ellos consideran viables para el conjunto de activos con los que estamos trabajando. La ecuación quedará de la siguiente forma:

$$\rho = (1-\lambda)\rho_{his} + \lambda\mathbf{1} \quad \lambda \epsilon[0,1]$$

Dándole valores al parámetro λ podremos conseguir todas las diferentes matrices de correlación que consideramos que pueden darse en el futuro, y calibrar cual es la matriz de correlación con la que se replican los precios de productos derivados sobre cestas[3].

Este método está limitado por del número de precios de las opciones que podemos encontrar en el mercado, puesto que no necesariamente encontraremos diariamente precios sobre la misma opción. En nuestro caso nosotros nos hemos generado escenarios en los que contamos tanto con datos históricos de los subyacentes como del precio de producto derivados sobre ellos.

Una vez expuestos las formas que conocemos para calibrar los parámetros de correlación, pasamos a redactar los pasos que vamos a seguir en nuestro proceso. Cabe destacar que el proceso será equivalente para cada uno de los seis escenarios con los que vamos a trabajar, así pues, expondremos la metodología para un escenario y sin pérdida de generalidad extrapolaremos dichos procedimientos para aplicarlos en el resto de escenarios.

El primer paso que deberemos realizar será generar la serie de datos que configura nuestros datos históricos imponiendo la volatilidad y la correlación inicial correspondiente en cada caso. Mediante este procedimiento obtendremos una serie de datos de cinco años de longitud. Estos valores de los subyacentes que hemos simulado serán considerados como "la realidad" existente en el mercado durante todo el proceso.

Una vez obtenidos los valores de los subyacentes durante nuestra muestra histórica nos dispondremos a utilizar la información que tenemos para poder calibrar los parámetros de cada modelo. Notar que únicamente tendremos que calibrar los parámetros de los modelos de Zetocha y de Ma, puesto que para el modelo de Boortz utilizaremos los mismos parámetros que los utilizados en la generación de los precios de los activos.

Previo a la metodología resulta interesante exponer aquellos parámetros que deberemos calibrar, para más adelante, explicar el procedimiento que hemos realizado para calibrar su valor en cada escenario. Pasamos a enumerar los distintos parámetros que hemos de calibrar:

- $(\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5)$.
- ρ_{cs}
- ρ_0
- $\bar{\rho}$.
- $\alpha_{Zetocha}$
- $\beta_{Zetocha}$
- α_{Ma}
- β_{Ma}

El orden anterior, será el orden que utilizaremos posteriormente para explicar el procedimiento de calibración de cada uno de los parámetros.

[3] Ver Guyon 2013.

La principal metodología que utilizaremos será la simulación de Monte Carlo, mediante la cual obtendremos precios de distintas opciones que utilizaremos para obtener el valor de los parámetros, aunque no será el único mecanismo utilizado durante todo el proceso.

Empezaremos con $(\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5)$, para calibrar estos parámetros utilizaremos el proceso EWMA, que hemos comentado anteriormente. Utilizaremos este procedimiento para obtener una serie de 3 años de longitud de correlaciones entre las diferentes parejas de activos. Cuando obtengamos las 10 series de correlaciones calcularemos un único valor para cada una de las simulaciones, calculando la media de las 10 series considerando que esta serie de correlaciones es la correlación media del mercado.

Pero nosotros no queremos calibrar ese valor, si no la correlación existente entre cada uno de los activos con el mercado. Y para eso calcularemos la correlación existente entre las rentabilidades de los activos durante los últimos 3 años y la correlación media del mercado obtenida anteriormente. Alcanzamos así el valor para cada uno de los ρ^i. Estos resultados nos ayudarán a obtener la calibración del siguiente parámetro. Para ello hemos de recordar que el valor de $(\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5)$, para el modelo de Ma corresponde a la correlación entre los activos y el mercado, distinta para cada uno de los activos. Sin embargo, el modelo de Zetocha es más restrictivo al respecto, y considera que todos los activos tienen la misma correlación con el mercado, denominada ρ_{cs}. Así pues podemos calibrar dicho valor como la media de los $(\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5)$ calculados anteriormente.

El procedimiento que utilizaremos para calcular el valor de ρ_0 y de $\bar{\rho}$ será similar.

Para calibrar el valor de ρ_0, lo primero que hemos de hacer es calcular mediante la simulación de Monte Carlo del modelo de Boortz, el precio de una opción dispersion trade con vencimiento a un año. Una vez obtenido dicho precio, nos dispondremos a realizar una búsqueda del valor de rho constante que consiga que el valor de la opción dispersion trade mediante el modelo de Black-Scholes replique el precio obtenido con Boortz.. El rho obtenido será considerado como ρ_0 para el procedimiento. La metodología utilizada para calibrar el valor de $\bar{\rho}$ será el mismo pero esta vez el vencimiento de la opción será de cinco años. El resto del proceso será equivalente al utilizado para calibrar el valor de ρ_0.

Los siguientes parámetros que nos disponemos a calibrar serán el $\alpha_{Zeto\,cha}$ y $\beta_{Zetoc\,ha}$. La razón por la que dichos parámetros serán calibrados a la vez, es asegurarnos que se cumplan las condiciones de Feller. Por tanto utilizando el precio de una opción dispersion trade de nuestros cinco activos con vencimiento a 5 años utilizando el modelo de Boortz, tal y como hemos realizado en el caso anterior. Buscaremos el α y su correspondiente beta (el 90% de la máxima beta permitida en cada caso) que minimice la diferencia entre el valor de la opción con el modelo de Zetocha y el valor de misma opción utilizando el modelo de Boortz. El valor de alpha y de beta que consiga la menor diferencia será el valor calibrado de los parámetros.

Para encontrar el valor de α_{Ma} y β_{Ma} seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior, con la única diferencia que en este caso la diferencia se calculará entre el precio de la opción en el modelo de Boortz y el precio de la opción obtenido utilizado el modelo de Ma.

Zetocha, en su artículo, propone calibrar la α a partir de la series históricas de correlación entre activos, calculando estas con distintas ventanas móviles, y tratando de encontrar la reversión a la media que hace que desviación estándar de la correlación media del mercado se iguale a la del modelo. Pero el hecho de utilizar ventanas móviles corridas al calcular las series históricas de correlaciones hace que están sean más suaves y que por lo tanto tengan menor desviación típica. Al calibrar el alpha a precios de opciones de mercado, se corre el riesgo de que el parámetro no sea muy estable en el tiempo, cuando a priori esperaríamos que si lo fuese. Otra opción sería realizar el procedimiento de Zetocha pero en vez de calcular la serie de correlación histórica, calcular una serie histórica de correlaciones implícitas a partir de las opciones sobre un índice que represente la correlación media del mercado. Por ejemplo se podría utilizar el índice de correlación cotizado sobre el SPX mencionado en el apartado 2. Pero finalmente para evitarnos posibles problemas con la estabilidad del parámetro y por una mayor facilidad a la hora de tratar con los datos decidimos, que sabiendo de la existencia de ambas metodologías que acabamos de exponer, durante nuestro trabajo trabajaremos con el primer proceso de calibración para calcular el valor de alpha y beta que hemos expuesto.

Y con esto finalizamos la explicación del procedimiento utilizado en cada escenario para calibrar cada uno de los parámetros utilizados. Dichos parámetros nos van a servir para obtener el precio de diversas opciones mediante los distintos modelos con los que estamos trabajando. Estos modelos serán los siguientes, modelo de Black-Scholes, modelo de Zetocha, modelo de Ma y por último el modelo de Boortz que utilizaremos de contraste.

Calcularemos los precios de diversas opciones con distintos strikes, cuyos resultados mostraremos más adelante. Las opciones que hemos decidido valorar son:

- Dispersion trade.
- Put vanilla.
- Worst-of.
- Best-of.
- Equiponderada.

Mediante estos resultados podremos observar que modelo se aproxima mejor a los precios reales de las opciones en nuestros escenarios. En este caso recordemos que estamos considerando que "la realidad" en la que trabajamos son los resultados obtenidos mediante el modelo de Boortz.

Además utilizaremos los precios de la put vanilla con distintos strikes de cada uno de los modelos para obtener información sobre aproximación que hace cada modelo de la volatilidad implícita de cada strike, y así poder encontrar que modelo es el que mejor aproxima dicha información.

A continuación encontraremos los resultados obtenidos en cada uno de los escenarios de los parámetros calibrados con la metodología que acabamos de exponer.

En apartados posteriores podemos observar los precios de las diversas opciones y las gráficas de la volatilidad implícita en cada uno de los modelos.

A partir de aquí una vez conocidos todos los procedimientos que conocemos para calibrar y definidos aquellos que vamos a utilizar, pasamos a exponer los resultados que hemos obtenido mediante dichas metodologías.

En la tabla 5 mostraremos el valor de cada uno de los cinco activos de nuestro mercado una vez pasados cinco años desde el momento inicial de la muestra.

	Escenario 1	**Escenario 2**	**Escenario 3**	**Escenario 4**	**Escenario 5**	**Escenario 6**
Activo 1	6.1412	60.655	5.7292	83.3600	71.9140	96.7148
Activo 2	2.1198	15.309	10.0260	59.5541	42.9266	84.6484
Activo 3	7.6408	76.702	1.7808	27.8493	16.1997	51.9216
Activo 4	0.8683	8.537	1.4109	27.5742	3.1749	8.5804
Activo 5	0.6789	2.778	0.0893	16.9378	1.8876	6.4132

Tabla 5: Precios de los activos cinco años después del momento inicial.

En la tabla 6 encontraremos la correlación entre los activos y el mercado calculada mediante el modelo de Boortz que tendrán los activos pasados cinco años desde la muestra inicial.

	Escenario 1	**Escenario 2**	**Escenario 3**	**Escenario 4**	**Escenario 5**	**Escenario 6**
Activo 1	0.3538	0.7369	0.0103	0.2480	0.8072	0.6853
Activo 2	0.5170	0.3614	0.3379	0.1526	0.5858	0.8391
Activo 3	0.5469	0.3470	0.3429	0.3412	0.5184	0.7150
Activo 4	0.8748	0.8323	0.7236	0.8466	0.8721	0.8816
Activo 5	0.4926	0.6214	0.7994	0.7126	0.2336	0.7224

Tabla 6: Correlaciones del modelo de Boortz pasados cinco años.

A continuación, en la tabla 7, mostraremos los valores de los parámetros calibrados para cada escenario para el modelo de Zetocha primero y en la tabla consecutiva el valor calibrado para el modelo de Ma.

Parámetros	**Escenario 1**	**Escenario 2**	**Escenario 3**	**Escenario 4**	**Escenario 5**	**Escenario 6**
$\boldsymbol{\rho_0}$	0.5470	0.5299	0.3029	0.4402	0.5534	0.7587
$\boldsymbol{\overline{\rho}}$	0.5570	0.6199	0.4429	0.4502	0.5834	0.6487
$\boldsymbol{\alpha_{Zetocha}}$	3	0.25	0.25	0.7500	2	5.25
$\boldsymbol{\beta_{Zetocha}}$	1.3124	0.3510	0.4249	0.7310	1.0401	1.5463
$\boldsymbol{\rho_{cs}}$	-0,0070793	-0.005470	-0.0193	-0,0007	-0.0434	-0.0156

Tabla 7: Parámetros del modelo de Zetocha calibrados.

Parámetros	**Escenario 1**	**Escenario 2**	**Escenario 3**	**Escenario 4**	**Escenario 5**	**Escenario 6**
$\boldsymbol{\rho_0}$	0.5470	0.5299	0.3029	0.4402	0.5534	0.7587
$\boldsymbol{\bar{\rho}}$	0.5570	0.6199	0.4429	0.4502	0.5834	0.6487
$\boldsymbol{\alpha_{Ma}}$	3	0.5	1.75	1	2	5.5
$\boldsymbol{\beta_{Ma}}$	0.0015	0.5069	1.1063	0.8278	1.0276	1.5564
$\boldsymbol{\rho^1}$	0,0552	0.0450	0.0238	-0.0555	-0.0311	0.0228
$\boldsymbol{\rho^2}$	-0,0419	-0.0170	-0.0913	-0.0001	-0.0716	-0.0395
$\boldsymbol{\rho^3}$	-0,0312	-0.0012	0.0223	-0.001	-0.0139	-0.0522
$\boldsymbol{\rho^4}$	-0,003	0.01399	-0.0375	0.0145	-0.0428	0.0066
$\boldsymbol{\rho^5}$	-0,0142	-0.0681	-0.0139	0.0392	-0.0578	-0.0161

Tabla 8: Parámetros calibrados del modelo de Ma.

Podemos observar en la gráfica que los valores de $\boldsymbol{\alpha}$ calibrados para ambos modelos, son similares en cada uno de los escenarios. Sin embargo el valor de la beta no tiene que cumplir dicha condición, ya que hemos escogido el máximo valor de $\boldsymbol{\beta}$ que cumpla las condiciones de Feller en cada uno de los casos, por tanto, al tener cada modelo unas condiciones de Feller distintas (unas dependen del valor de $\boldsymbol{\rho_{cs}}$ y la otra del valor de $(\boldsymbol{\rho^1}, \boldsymbol{\rho^2}, \boldsymbol{\rho^3}, \boldsymbol{\rho^4}, \boldsymbol{\rho^5})$).

7. Valoración de productos de Mercado.

Para comparar los modelos se van a valorar una serie de productos sobre cestas escogidos porque son los más habituales en el mercado. Valoraremos estos productos en los cuatro modelos con los que trabajamos. Consideraremos que el precio real será el obtenido mediante el modelo de Boortz. Pero además, los valoraremos también utilizando el modelo de Ma, el de Zetocha y finalmente el modelo de Back-Scholes.

A continuación encontraremos una descripción de todas aquellas opciones que valoraremos durante el proceso y para cada uno de los escenarios con los que estamos trabajando.

- **Dispersion Trade:** Valoraremos una opción dispersion trade, que como hemos comentado anteriormente se compone de una posición larga en opción call sobre una cesta equiponderada compuesta por todos los activos del mercado y una posición corta sobre una opción call sobre cada uno de los activos que componen el mercado. El strike utilizado para todas las opciones será 100%.
- **Put Vanilla Digital:** Valoraremos una put vanilla sobre una cesta equiponderada, compuesta por todos los activos del mercado. Este proceso se llevará a cabo con distintos strikes: 70%, 80%, 90%, 100%, 110% y 120%.
- **Opción Worst-of digitales:** Estas opciones solo dependen del activo con menor rendimiento, y pagarán la cantidad estipulada, 100% en nuestro caso, cuando se de la condición de que la rentabilidad haya sido menor que el strike impuesto a la hora de la compra de la opción. Valoraremos tanto la call como la put de esta opción con los strikes 80%, 100% y 120%. También calcularemos el valor de la opción pero en el caso en que la cartera estuviera compuesta únicamente por dos de los activos que forman el mercado, en nuestro caso y sin pérdida de generalidad hemos escogido la pareja de activos 3 y 5. En este caso valoraremos los mismos casos que en el caso de la cartera completa.
- **Opción Best-of digítal:** Esta opción es similar a la anterior, pero en lugar de depender del activo con menor rentabilidad, en este caso la opción depende del activo con mejor rentabilidad, es decir, el mejor activo de los que componen la cartera. En el caso en que este activo tenga una rentabilidad mayor que el strike impuesto, la opción pagará la cantidad estipulada, en nuestro caso 100%. La opción será valorada tanto desde el punto de vista de una call como desde el de una put, con distintos strikes en cada uno de los casos como será 80%, 100% y 120%. Además valoraremos la opción considerando que solo dependa de una pareja de activos. La pareja escogida será la compuesta por los activos 3 y 5, y valoraremos el equivalente a lo explicado con anterioridad para el caso de la cartera completa.
- **Opción digital sobre la Cesta equiponderada:** Esta opción depende directamente de la rentabilidad de la cesta completa. Esta opción estará “in the Money” cuando la rentabilidad de la cartera superé el strike implícito en la opción. Al ser una opción digital, el pago será constante, en nuestro caso 100%. Valoraremos tanto la call como la put de esta opción, ambas con diferentes strikes: 80%, 100% y 120%. Tal y como ocurre en los dos casos

anteriores valoraremos estos mismos casos para el suceso en que la cartera únicamente esté compuesta por dos activos. En nuestro caso estos activos serán los mismos que hemos escogido en los dos casos anteriores.

Escenario 1: Volatilidades Altas y Correlaciones equivalentes

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-2.1302	-2.2876	-2.3141	-2.2151

Tabla 9: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.1788	0.1349	0.1347	0.2156
80	0.2257	0.1762	0.1766	0.2660
90	0.2755	0.2211	0.2222	0.3189
100	0.3280	0.2693	0.2709	0.3739
110	0.3826	0.3204	0.3224	0.4308
120	0.4391	0.3739	0.3764	0.4893

Tabla 10: Precio de la put vanilla con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0096	0.0016	0.0013	0.0376
100	0.0059	0.00077	0.00065	0.0276
120	0.0043	0.00046	0.00029	0.02099

Tabla 11: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7691	0.7771	0.7774	0.7411
100	0.7728	0.7780	0.7781	0.7512
120	0.7744	0.7783	0.7785	0.7578

Tabla 12: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5242	0.6074	0.6082	0.4466
100	0.4758	0.5576	0.5594	0.4003
120	0.4348	0.5142	0.5166	0.3624

Tabla 13: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2545	0.1713	0.1705	0.3321
100	0.3029	0.2211	0.2193	0.3784
120	0.3439	0.2645	0.2621	0.4163

Tabla 14: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2949	0.3466	0.3399	0.2616
100	0.2436	0.2809	0.2775	0.2188
120	0.2050	0.2348	0.2282	0.1866

Tabla 15: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4838	0.4321	0.4388	0.5171
100	0.5351	0.4978	0.5012	0.5599
120	0.5737	0.5439	0.5505	0.5921

Tabla 16: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0689	0.0533	0.0521	0.0986
100	0.0520	0.0380	0.0384	0.0790
120	0.0414	0.0290	0.0291	0.0649

Tabla 17: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7098	0.7254	0.7266	0.6801
100	0.7267	0.7407	0.7403	0.6997
120	0.7373	0.7497	0.7496	0.7138

Tabla 18: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3230	0.3549	0.3486	0.2976
100	0.2821	0.3105	0.3040	0.2578
120	0.2499	0.2756	0.2699	0.2285

Tabla 19: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4557	0.4238	0.4301	0.4811
100	0.4966	0.4682	0.4747	0.5209
120	0.5288	0.5031	0.5088	0.5502

Tabla 20: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2354	0.2549	0.2498	0.2242
100	0.1989	0.2149	0.2105	0.1897
120	0.1631	0.1852	0.1799	0.1645

Tabla 21: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5433	0.5238	0.5289	0.5545
100	0.5798	0.5638	0.5682	0.5890
120	0.6156	0.5935	0.5988	0.6142

Tabla 22: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con diferentes strikes

Observando los precios anteriores podemos sacar las diversas conclusiones, al respecto de qué modelo se aproxima más al precio real, que consideramos que es el precio que hemos obtenido mediante el modelo de Boortz.

Comenzaremos comparando los precios obtenidos con los distintos modelos de correlación estocástica. En el caso de la opción dispersion trade, el precio más próximo al de Boortz, es el que hemos obtenido utilizando el modelo de Zetocha. Aunque observando la totalidad de los resultados, concluimos que el resultado que nos proporciona el modelo de Black-Scholes, modelo que supone correlación constante, es más semejante al precio del modelo de Boortz que los precios de los dos modelos anteriores.

En el caso de las opciones put vanilla con distintos strikes, observamos como los resultados obtenidos mediante el modelo de Ma son más similares a los de Boortz, que los obtenidos mediante el modelo de Zetocha y el modelo de Black-Scholes. Sin embargo esta tendencia no se mantiene constante al observar los precios de las opciones Best-of y Worst-of, tanto en el caso de las calls como en el caso de las puts, el modelo de Zetocha calcula un precio más similar al considerado real que el modelo de Ma y de Black-Scholes.

En el caso de las opciones sobre dos activos, las corrientes anteriores continúan siendo válidas. Tanto para el caso de las opciones Worst-of como para el caso de las opciones Best-of, los modelos que consideran que la correlación es estocástica nos proporcionan precios más ajustados al precio real, sin apenas diferencia entre ambos resultados. Por el contrario en el caso de las opciones call y put digitales el modelo que da una mejor aproximación es el de Black-Scholes.

<u>Escenario 2:</u> Altas volatilidades y correlaciones diferentes y positivas.

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-2.1822	-2.2489	-2.3700	-2.0985

Tabla 23: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.1719	0.1357	0.1357	0.2146
80	0.2180	0.1776	0.1779	0.2649
90	0.2673	0.2231	0.2237	0.3177
100	0.3193	0.2720	0.2728	0.3725
110	0.3736	0.3238	0.3245	0.4291
120	0.4297	0.3780	0.3787	0.4873

Tabla 24: Precio de la put vanilla con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0068	0.0019	0.0019	0.0356
100	0.0044	0.0010	0.0009	0.0253
120	0.0027	0.0004	0.0005	0.0190

Tabla 25: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7720	0.7769	0.7769	0.7432
100	0.7744	0.7778	0.7779	0.7535
120	0.7761	0.7784	0.7783	0.7598

Tabla 26: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5392	0.6033	0.6048	0.4491
100	0.4894	0.5558	0.5575	0.4018
120	0.4478	0.5150	0.5137	0.3655

Tabla 27: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2396	0.1755	0.1740	0.3297
100	0.2894	0.2230	0.2213	0.3770
120	0.3310	0.2638	0.2651	0.4133

Tabla 28: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3003	0.3415	0.3370	0.2623
100	0.2469	0.2739	0.2743	0.2210
120	0.2081	0.2266	0.2257	0.1897

Tabla 29: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4785	0.4373	0.4418	0.5165
100	0.5319	0.5049	0.5045	0.5578
120	0.5707	0.5522	0.5531	0.5891

Tabla 30: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0623	0.0547	0.0537	0.0980
100	0.0475	0.0386	0.0397	0.0770
120	0.0359	0.0296	0.0306	0.0628

Tabla 31: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7165	0.7241	0.7251	0.6808
100	0.7313	0.7403	0.7391	0.7018
120	0.7429	0.7492	0.7482	0.7160

Tabla 32: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3313	0.3468	0.3455	0.2994
100	0.2887	0.3040	0.3000	0.2606
120	0.2556	0.2698	0.2641	0.2305

Tabla 33: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4475	0.4320	0.4333	0.4794
100	0.4901	0.4748	0.4788	0.5182
120	0.5233	0.5090	0.5147	0.5483

Tabla 34: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes:

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2398	0.2515	0.2466	0.2267
100	0.2003	0.2125	0.2068	0.1913
120	0.1717	0.1787	0.1758	0.1643

Tabla 35: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5390	0.5273	0.5322	0.5521
100	0.5785	0.5663	0.5720	0.5875
120	0.6071	0.6001	0.6030	0.6145

Tabla 36: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

Al iniciar el estudio de los resultados obtenidos en el segundo escenario observamos que, tal y como ocurría en el primer escenario, el modelo que da una mejor aproximación al precio real de la dispersion trade es el modelo de Black-Scholes, comparando su resultado con el obtenido utilizando los modelos de Zetocha y de Ma.

Pero la conclusión anterior no se mantiene al estudiar los precios de las siguientes opciones. Al fijarnos en los precios que resultan de utilizar los modelos de Zetocha y de Ma, podemos concluir que las diferencias entre ambos modelos son mínimas y que aunque en algunos casos uno de ellos de un precio más aproximado que el otro, las diferencias que podemos encontrar podemos considerarlas casi insignificantes y más si comparamos ambos modelos con Black-Scholes.

En la mayoría de las opciones el precio obtenido mediante los modelos de correlación estocástica son una mejor aproximación que los precios obtenidos mediante Black-Scholes, aunque esta diferencia se minimiza en el caso de las opciones call y put digitales, tanto para el caso de trabajar con una cartera equiponderada como en el caso de trabajar únicamente con dos activos. Pues en ambos casos no podemos concretar qué modelo de los tres da un resultado más ajustado, pues la distancia entre el precio aproximado y el real son muy similares en los tres casos.

<u>Escenario 3:</u> Altas volatilidades y correlaciones distintas.

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-2.0668	-2.4010	-2.2305	-2.1547

Tabla 37: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.1685	0.1337	0.1351	0.1810
80	0.2144	0.1757	0.1773	0.2280
90	0.2635	0.2214	0.2233	0.2780
100	0.3152	0.2701	0.2724	0.3304
110	0.3693	0.3216	0.3242	0.3850
120	0.4253	0.3757	0.3785	0.4415

Tabla 38: Precio de la put vanilla con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0072	0.0012	0.0015	0.0140
100	0.0044	0.0007	0.0007	0.0093
120	0.0026	0.0005	0.0002	0.0065

Tabla 39: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7716	0.7776	0.7773	0.7648
100	0.7744	0.7781	0.7781	0.7695
120	0.7762	0.7783	0.7786	0.7723

Tabla 40: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5458	0.6127	0.6074	0.5213
100	0.4969	0.5634	0.5576	0.4737
120	0.4549	0.5177	0.5142	0.4327

Tabla 41: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2330	0.1661	0.1714	0.2575
100	0.2819	0.2154	0.2212	0.3051
120	0.3239	0.2611	0.2646	0.3461

Tabla 42: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3025	0.3394	0.3368	0.2936
100	0.2493	0.2776	0.2732	0.2429
120	0.2092	0.2286	0.2257	0.2060

Tabla 43: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4763	0.4394	0.4420	0.4852
100	0.5295	0.5012	0.5056	0.5359
120	0.5696	0.5502	0.5531	0.5728

Tabla 44: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0632	0.0544	0.0526	0.0743
100	0.0479	0.0398	0.0383	0.0572
120	0.0377	0.0306	0.0293	0.0464

Tabla 45: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7156	0.7244	0.7262	0.7045
100	0.7309	0.7390	0.7405	0.7216
120	0.7411	0.7482	0.7495	0.7324

Tabla 46: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3277	0.3519	0.3478	0.3192
100	0.2851	0.3074	0.3029	0.2779
120	0.2513	0.2742	0.2680	0.2463

Tabla 47: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4511	0.4269	0.4310	0.4596
100	0.4937	0.4714	0.4759	0.5009
120	0.5275	0.5046	0.5108	0.5325

Tabla 48: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2371	0.2526	0.2499	0.2342
100	0.1987	0.2116	0.2104	0.1964
120	0.1699	0.1818	0.1792	0.1679

Tabla 49: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5417	0.5262	0.5289	0.5446
100	0.5801	0.5672	0.5684	0.5824
120	0.6089	0.5970	0.5996	0.6109

Tabla 50: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes:

Siguiendo la misma corriente que en los escenarios anteriores, al estudiar los precios de una opción dispersion trade calculada mediante los diferentes modelos de correlación, podemos concluir que la mejor aproximación se obtiene utilizando el modelo de Black-Scholes. Lo mismo ocurre en el caso de las opciones put.

Al estudiar el resto de precios de las distintas opciones, observamos como en este escenario los resultado obtenidos mediante el modelo de Black-Scholes se ajustan mejor a los precios reales que los resultados tanto de Ma como de Zetocha para la mayoría de los casos.

Cabe destacar que en el caso de querer comparar los resultados de los dos modelos de correlación estocástica, la diferencia es relativamente pequeña y parece ser mejor que el otro durante todos los casos, si no que dependiendo de la opción que estamos estudiando uno u otro da una mejor aproximación.

Escenario 4: Bajas volatilidades y correlaciones iguales

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-1.1954	-1.2459	-1.2505	-1.1894

Tabla 51: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.0112	0.0043	0.0044	0.0212
80	0.0242	0.0120	0.0120	0.0388
90	0.0444	0.0259	0.0261	0.0631
100	0.0719	0.0476	0.0477	0.0938
110	0.1067	0.0777	0.0774	0.1307
120	0.1481	0.1155	0.1148	0.1730

Tabla 52: Precio de la put vanilla con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1414	0.0829	0.0814	0.1834
100	0.0692	0.0305	0.0309	0.1106
120	0.0316	0.0111	0.0101	0.0648

Tabla 53: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6374	0.6959	0.6974	0.5954
100	0.7096	0.7483	0.7479	0.6682
120	0.7472	0.7677	0.7687	0.7140

Tabla 54: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7687	0.7750	0.7745	0.7482
100	0.7359	0.7574	0.7555	0.6919
120	0.6741	0.7141	0.7127	0.6091

Tabla 55: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0101	0.0038	0.0043	0.0306
100	0.0429	0.0214	0.0233	0.0869
120	0.1047	0.0647	0.0661	0.1697

Tabla 56: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6129	0.6744	0.6734	0.5688
100	0.4670	0.5193	0.5225	0.4400
120	0.3351	0.3643	0.3676	0.3302

Tabla 57: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1659	0.1044	0.1054	0.2100
100	0.3118	0.2595	0.2563	0.3388
120	0.4437	0.4145	0.4112	0.4486

Tabla 58: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2470	0.2254	0.2248	0.2756
100	0.1713	0.1459	0.1494	0.2024
120	0.1201	0.0970	0.0983	0.1486

Tabla 59: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5318	0.5534	0.5540	0.5032
100	0.6075	0.6329	0.6294	0.5764
120	0.6587	0.6818	0.6805	0.6302

Tabla 60: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5984	0.6254	0.6223	0.5744
100	0.5138	0.5364	0.5379	0.4883
120	0.4338	0.4562	0.4586	0.4110

Tabla 61: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1804	0.1534	0.1565	0.2044
100	0.2650	0.2424	0.2409	0.2905
120	0.3450	0.3226	0.3202	0.3678

Tabla 62: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4764	0.5011	0.4960	0.4606
100	0.3742	0.3891	0.3903	0.3648
120	0.2944	0.3009	0.3032	0.2894

Tabla 63: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3024	0.2777	0.2828	0.3182
100	0.4046	0.3897	0.3885	0.4140
120	0.4844	0.4780	0.4756	0.4894

Tabla 64: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

En los precios obtenido con los datos del cuarto escenario encontramos que en la mayoría de los casos las diferencias entre los modelos de Ma y de Zetocha son casi imperceptibles o uno aproxima mejor que el otro y a la inversa dependiente del strike escogido. Por otro lado si comparamos estos precios con los del modelo de Black-Scholes, ya podemos encontrar más diferencias.

En el caso del estudio de los precios de la opción dispersion trade, observamos como la mejor aproximación se obtiene utilizando el modelo de correlación constante, y se sigue la misma línea en los precios de las siguientes opciones.

Escenario 5: Bajas volatilidades y correlaciones distintas.

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-1.1920	-1.2589	-1.2609	-1.1675

Tabla 65: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.0121	0.0045	0.0046	0.0265
80	0.0257	0.0121	0.0122	0.0464
90	0.0464	0.0261	0.0261	0.0727
100	0.0742	0.0475	0.0475	0.1053
110	0.1089	0.0774	0.0770	0.1437
120	0.1501	0.1152	0.1144	0.1871

Tabla 66: Precio de la put vanilla con diferentes strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1376	0.0804	0.0821	0.2113
100	0.0710	0.0318	0.0309	0.1380
120	0.0335	0.0101	0.0109	0.0882

Tabla 67: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6412	0.6984	0.6967	0.5675
100	0.7078	0.7470	0.7479	0.6408
120	0.7453	0.7687	0.7679	0.6906

Tabla 68: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7665	0.7747	0.7749	0.7373
100	0.7289	0.7564	0.7563	0.6664
120	0.6631	0.7153	0.7140	0.5769

Tabla 69: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0123	0.0041	0.0039	0.0415
100	0.0499	0.0224	0.0225	0.1124
120	0.1157	0.0635	0.0648	0.2019

Tabla 70: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6078	0.6734	0.6741	0.5470
100	0.4653	0.5232	0.5236	0.4229
120	0.3370	0.3667	0.3679	0.3214

Tabla 71: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1710	0.1054	0.1047	0.2318
100	0.3135	0.2556	0.2552	0.3559
120	0.4418	0.4121	0.4109	0.4574

Tabla 72: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2399	0.2234	0.2268	0.2891
100	0.1659	0.1518	0.1515	0.2155
120	0.1134	0.1005	0.1023	0.1615

Tabla 73: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5389	0.5554	0.5520	0.4897
100	0.6129	0.6270	0.6273	0.5633
120	0.6654	0.6783	0.6765	0.6173

Tabla 74: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6072	0.6201	0.6247	0.5591
100	0.5222	0.5386	0.5392	0.4722
120	0.4432	0.4599	0.4601	0.3968

Tabla 75: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1716	0.1587	0.1541	0.2197
100	0.2566	0.2402	0.2396	0.3066
120	0.3356	0.3189	0.3187	0.3820

Tabla 76: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4823	0.4977	0.4969	0.4494
100	0.3795	0.3903	0.3910	0.3586
120	0.4554	0.4684	0.4692	0.4304

Tabla 77: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2965	0.2811	0.2819	0.3294
100	0.3993	0.3885	0.3878	0.4202
120	0.4792	0.4662	0.4654	0.5042

Tabla 78: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes:

Observando todas las valoraciones de las opciones para el quinto escenario que encontramos anteriormente, solo fijándonos en los resultados calculados utilizando los modelos estocásticos podemos concluir que en alguno de los casos uno de los dos modelos o el de Ma o el de Zetocha aproxima mejor el precio de las opciones al valor real obtenido mediante el modelo de Boortz. Pero el mejor modelo no siempre es el mismo, depende de la opción que estamos valorando y de si estamos en el caso de una put o de una call. Si añadimos a la compasión los resultados del modelo de Black-Scholes, podemos concluir que a diferencia de lo ocurrido en el caso anterior, para este escenario las aproximaciones que nos proporciona el modelo de Black-Scholes en la mayoría de ocasione son peores que aquellas que nos proveen los modelos de Ma y Zetocha. Con alguna excepción, como es el precio de la dispersion trade, donde tal y como viene ocurriendo en todos los modelos el modelo de Black-Scholes da un resultado más próximo al real.

<u>Escenario 6:</u> Bajas volatilidades y correlaciones diferentes

BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
-1.1876	-1.2670	-1.2613	-1.1463

Tabla 79: Precio de la dispersion trade

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
70	0.0151	0.0053	0.0050	0.0360
80	0.0304	0.0132	0.0130	0.0591
90	0.0527	0.0274	0.0275	0.0885
100	0.0819	0.0491	0.0495	0.1237
110	0.1179	0.0786	0.0793	0.1640
120	0.1599	0.1161	0.1166	0.2091

Tabla 80: Precio de la put vanilla con diferentes strikes:

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1616	0.0819	0.0809	0.2668
100	0.0883	0.0317	0.0323	0.1943
120	0.0441	0.0118	0.0114	0.1367

Tabla 81: Precio de una opción call de una worst of digital de una cesta con strikes:

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6172	0.6969	0.6979	0.5120
100	0.6905	0.7471	0.7465	0.5845
120	0.7347	0.7670	0.7674	0.6421

Tabla 82: Precio de una opción put de una worst of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.7626	0.7730	0.7743	0.7141
100	0.7199	0.7522	0.7541	0.6177
120	0.6498	0.7096	0.7100	0.5101

Tabla 83: Precio de una opción call de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.0162	0.0058	0.0045	0.0647
100	0.0589	0.0266	0.0247	0.1611
120	0.1290	0.0692	0.0688	0.2687

Tabla 84: Precio de una opción put de una best of digital de una cesta con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5919	0.6715	0.6686	0.5157
100	0.4518	0.5236	0.5201	0.4008
120	0.3316	0.3670	0.3699	0.3071

Tabla 85: Precio de una opción call digital de una cesta equiponderada con strikes:

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1869	0.1073	0.1102	0.2631
100	0.3270	0.2552	0.2587	0.3780
120	0.4472	0.4118	0.4089	0.4717

Tabla 86: Precio de una opción put digital de una cesta equiponderada con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.2439	0.2278	0.2246	0.3160
100	0.1691	0.1550	0.1523	0.2451
120	0.1174	0.1026	0.1031	0.1895

Tabla 87: Precio de una opción call de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.5349	0.5510	0.5542	0.4628
100	0.6097	0.6238	0.6265	0.5337
120	0.6614	0.6762	0.6757	0.5893

Tabla 88: Precio de una opción put de una worst of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.6008	0.6227	0.6203	0.5326
100	0.5128	0.5365	0.5380	0.4403
120	0.4353	0.4590	0.4605	0.3642

Tabla 89: Precio de una opción call de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.1780	0.1561	0.1585	0.2462
100	0.2660	0.2423	0.2408	0.3385
120	0.3435	0.3198	0.3183	0.4146

Tabla 90: Precio de una opción put de una best of digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.4762	0.4932	0.4969	0.4309
100	0.3731	0.3899	0.3907	0.3450
120	0.2960	0.3030	0.3053	0.2762

Tabla 91: Precio de una opción call digital de una de la pareja de activos 3- 5 con strikes

	BOORTZ	ZETOCHA	MA	BLACK-SCHOLES
80	0.3026	0.2856	0.2819	0.3479
100	0.4057	0.3889	0.3881	0.4338
120	0.4828	0.4758	0.4735	0.5026

Tabla 92: Precio de una opción put digital de la pareja de activos 3- 5 con strikes

Por último estudiaremos los precios obtenidos para el sexto escenario. Continuando con lo sucedido en los casos anteriores, al observar los datos sobre los distintos precios de la opción dispersion trade, podemos concluir que la mejor aproximación nos la proporciona el modelo de Black-Scholes, comparando el resultado con el precio que nos proporcionan los modelos de Zetocha y de Ma.

Por otro lado este suceso cambia radicalmente al estudiar las siguientes opciones, donde los modelos de correlación estocástica dan como resultado una aproximación mejor que el precio obtenido utilizando el modelo de correlación constante, Black-Scholes.

A posteriori de estudiar los resultados obtenidos en cada uno de los escenarios podemos deducir que las diferencias al comparar los modelos con correlación estocástica, Zetocha versus Ma, es pequeña para poder considerar que uno es mejor en general. Observamos como en la mayoría de los casos la diferencia entre los precios que resultan de utilizar un modelo u otro son inexistentes. Este suceso se da sobre todo en los escenarios cuyo mercado está compuesto por activos con baja volatilidad. En los escenarios con activos muy volátiles las diferencias entre los modelos son más fáciles de observar. Por lo tanto entre los dos modelos propuestos de correlación estocástica nos quedaríamos con el modelo de Zetocha ya que con un número inferior de pará metros consigue unos resultados equivalentes al modelo de Ma.

Por otra parte hay que resaltar que los resultados en cuanto a la bondad de ajuste de cada modelo para cada tipo de producto los resultados son muy parecidos independientemente del escenario considerado, en general para los productos que están especialmente influidos por la correlación terminal como las opciones vanilla o los dispersion trades, el modelo de correlación constantes es adecuado, en cambio para los productos que se ven más afectados por el skew de correlación como los worst-of/Best-of considerar un modelo de correlación estocástica parece crucial para poder dar precios de mercado adecuados.

También podemos añadir que al observar los precios de las opciones en cada uno de los escenarios, hemos observado un patrón, en el que las diferencias entre los precios de los activos mediante los modelos de correlación estocástica y el de correlación constante son mayores en los escenarios de mayor volatilidad.

9. Conclusión.

A lo largo de todo el trabajo hemos estado comparando los resultados obtenidos mediante diversos modelos, para poder encontrar que modelo generaba una mejor aproximación de la realidad ficticia que habíamos creado.

Pero anteriormente a estudiar qué modelo nos aporta una mejor aproximación de otro debemos definir ciertos conceptos que nos ayudarán a entender mejor las conclusiones a las que llegaremos posteriormente.

Si escogemos un par de modelos cualesquiera del mercado que traten de dar precio a mismo producto y los comparamos, podemos diferenciarlos entre modelo superior y modelo inferior. Al hablar de modelo superior nos referimos a aquel modelo que nos dan una mejor caracterización de los productos de mercado, aunque habitualmente va acompañado de un coste computacional relativamente alto, y suele implicar una calibración más difícil para la que no siempre es posible encontrar datos de mercado en los que podernos apoyar para calibrar sus parámetros. Por otro lado los modelos inferiores son aquellos que, aunque no dan una aproximación a los productos de mercado tan buena, habitualmente son sencillos de utilizar y facilitan el trabajo mediante su menor coste computacional.

Podemos definir el riesgo de modelo como la diferencia entre el precio de un producto calculada con un modelo superior y un modelo inferior. En la vida real, se utiliza métodos inferiores por su facilidad de ser tratados y sus bajos costes computacionales. En este trabajo hemos intentado estudiar cómo afecta basar las decisiones sobre resultados obtenidos con modelos inferiores en lugar de utilizar métodos más complicados pero que nos dan un mejor resultado, en nuestro caso el modelo inferior sería considerar una correlación constante (Black-Scholes) y los modelos superiores serian los que consideran una correlación estocástica, los modelos de Zetocha y Ma, en el caso del modelo de Ma sería “superior” al de Zetocha ya que tiene una mayor complejidad.

En general debemos encontrar el equilibrio entre un modelo cuyo coste computacional sea reducido y el resultado nos proporcione una buena aproximación del resultado real. Encontrar el equilibrio entre ambos será indispensable, puesto que no tenerlo en cuenta implicaría poder incurrir en grandes pérdidas. Es por esto que el riesgo de modelo, resulta ser tan importante a la hora de la elección del modelo con el que nos disponemos a trabajar, ya que la bondad de nuestros resultados dependerán de nuestra elección.

Debemos de tener en cuenta que no es bueno ni sobreestimar la volatilidad ni sobrevalorarla ya que en ambos casos se pueden incurrir en perdidas por la valoración del producto derivado o por su cobertura. Las pérdidas se derivarían de estar pagando de más por un producto cuyo valor real es menor o por el otro aunque a priori se estaría pagando un precio menor por el producto, estaríamos realizando una mala cobertura. Así pues esta solución tampoco interesa desde el punto de vista del comprador, aunque este desembolsando una cantidad de dinero menor a la que debería desembolsar.

Es por esto la importancia de encontrar un buen modelo que nos proporcione una buena aproximación sin tener que incurrir en grandes costes computaciones ni temporales. Puesto que si esto ocurriera podría darse el caso que el dinero que se ahorraría al tener una mejor información, se gastaría por otro lado en costes para formular los procedimientos tan complejos necesarios para calcularla.

Es por todo esto que este tema tiene tanto auge, no se puede decidir en general que modelo es mejor que otro, cada entidad puede considerar un modelo como que ella cree que le da la aproximación que ella necesita debido a diversas causas. Como por ejemplo la capacidad que tiene cada empresa de poder trabajar con modelos más complejos o menos, como la razón por la que necesita la aproximación (ya que si es necesaria de cobertura en una posición de grandes dimensiones puede ser que equivocarse en un porcentaje pequeño pueda llevar a incurrir en grandes pérdidas). Sin embargo la aproximación es solo necesaria para obtener una idea del efecto de un supuesto más complejo sobre la cartera actual o para cubrir una posición pequeña quizá no sea necesario utilizar el modelo superior para el cálculo del P&L y la gestión de riesgos por el coste computacional que este conlleva.

Un detalle a tener en cuenta es el estudio de cómo funciona cada uno de los modelos en los distintos escenarios que nos podemos encontrar en la vida real. Los modelos que decidamos utilizar deben de ser aquellos que nos den unos buenos resultados en todos los escenarios posibles que nos podamos encontrar, puesto que si esta característica no se diera podríamos tener muy buenas aproximaciones en algunas situaciones pero quizá unas pérdidas inmensas en aquellas situaciones que no se han tenido en cuenta que pudieran darse a la hora de la elección el mejor modelo, y esas pérdidas podrían superar a las ganancias producidas en anteriores escenarios por el modelos. Es por esto que el estudio y la elección del modelo a utilizar resultan tan necesarios e importantes.

Después de las pérdidas sufridas en el pasado por algunas entidades financieras, la mayoría de estas han concedido gran importancia al estudio y la posesión de un buen modelo con el que poder trabajar y ser más eficientes, y al gestión del riesgo de modelo inherente al él. Pero estos procesos no vienen impulsados solamente desde dentro de las entidades, sino también desde el ámbito regulador.

La regulación sobre “Riesgo de modelo” tanto de la Reserva Federal como de la EBA y así como la nueva normativa sobre “Prudent Valuation” de la EBA, está forzando a muchas entidades a tener en los sistemas modelos “superiores” al menos para el cálculo de provisiones y ajustes de valoración en capital (AVAs). El trabajo realizado pretende poner de manifiesto el riesgo de modelo asumido al considerar supuestos simplificadores de la realidad, utilizando como ejemplo la modelización de la correlación en productos de renta variable.

Bibliografía:

Alfonsi, A. (2005). On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. Monte Carlo Methods and Applications mcma, 11(4), 355-384.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., &Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. Journal of financial economics,61(1), 43-76.

Boortz, C. K. (2008). Modelling correlation risk (Doctoral dissertation, Diplomarbeit).

CBOE S&P 500® Implied Correlation Index https://www.cboe.com/micro/impliedcorrelation/ImpliedCorrelationIndicator.pdf

Chen, Andrew H. Y. "A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market." J. Finance 25 (December 1970): 1041-60.

Da Fonseca, J., Grasselli, M., & Tebaldi, C. (2007). Option pricing when correlations are stochastic: an analytical framework. Review of Derivatives Research, 10(2), 151-180.

Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., &Zou, J. (1999). More than you ever wanted to know about volatility swaps. Goldman Sachs quantitative strategies research notes, 41.

Driessen, J., Maenhout, P. J., &Vilkov, G. (2013). Option-implied correlations and the price of correlation risk.

Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. Risk, 7(1), 18-20.

Erb, C. B., Harvey, C. R., &Viskanta, T. E. (1994).Forecasting international equity correlations. Financial analysts journal, 50(6), 32-45.

Foresi and Wu (2005) Crash-O-Phobia: A Domestic Fear or a Worldwide Concern? http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=598182

Guyon, J. (2013). A New Class of Local Correlation Models. Available at SSRN 2283419.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of financial studies, 6(2), 327-343.

Langnau, A. (2010). A dynamic model for correlation. Risk, 23(4), 74.

Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets."Rev. Econ. andStatis. 47 (February 1965): 768-83.

Ma, J. (2009).A stochastic correlation model with mean reversion for pricing multi-asset options. Asia-Pacific Financial Markets, 16(2), 97-109.

Novales, A. Medición de riesgos.

Reghai, A. (2010). Breaking correlation breaks. Risk, 23(10), 92.

Reghai, A. (2010). Model risk: new techniques.

Samuelson, Paul A., and Merton, Robert C. "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility." Indus. Management Rev. 10 (Winter 1969): 17-46.

Sharpe, William F. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk." J. Finance 19 (September 1964): 425-42

Zetocha, V. (2014).Skewing Up Correlation: Understanding Correlation Skew in Equity Derivatives. Available at SSRN 2441724.

Zetocha, V. (2015).Jumping Off the Bandwagon: Introducing Jumps to Equity Correlation. Available at SSRN 2568441.