UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANZAS

METODOS NUMÉRICOS PARA LA VALORACIÓN DE DERIVADOS COMPLEJOS

TESIS DOCTORAL

AUTOR: ALVARO MONTEALEGRE MOYANO

DIRECTORES: ANNA RITA BACINELLO
PIETRO MILLOSSOVICH
ELISEO NAVARRO ARRIBAS

Ciudad Real, Septiembre de 2013

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

DEPARTMENT OF ECONOMIC ANALYSIS AND FINANCE

NUMERICAL METHODS FOR PRICING COMPLEX DERIVATIVES

PhD THESIS

AUTHOR: ALVARO MONTEALEGRE MOYANO

SUPERVISORS: ANNA RITA BACINELLO
PIETRO MILLOSSOVICH
ELISEO NAVARRO ARRIBAS

Ciudad Real, Septiembre de 2013

A mi familia: Borja, Eloy e Isabel

Knowledge, like air, is vital to life. Like air, no one should be denied it.

V for Vendetta.

Agradecimientos

Agradecimientos aqui.

Índice

Índice **xi**

Lista de Figuras **xvii**

Lista de Tablas **xix**

1 Métodos numéricos en finanzas **3**

1.1 Introducción 3

1.1.1 Arbitraje y martingalas 4

1.1.2 Cambio de numerario 7

1.1.3 Teorema de Girsanov 8

1.1.4 Lema de Itô 8

1.1.5 Teorema de Feynman-Kac 9

1.1.6 Ecuación de valoración 10

1.2 Método de diferencias finitas 12

1.2.1 Introducción 12

1.2.2 Clasificación de EDPs 13

1.2.3 Diferencias finitas 15

1.2.3.1 Método explícito 17

1.2.3.2 Método implícito 18

1.2.3.3 Método de Crank-Nicolson 19

1.2.4 Consistencia, convergencia y estabilidad 20

1.2.5 Resolución numérica de sistemas lineales 22

1.2.5.1 Convergencia de los métodos iterativos 23

1.2.5.2 Método iterativo de Jacobi 23

1.2.5.3 Método iterativo de Gauss-Seidel 23
1.2.5.4 Método iterativo SOR 24
1.2.5.5 Sistemas con restricciones 25
1.2.5.6 Método explicito para opción de venta europea y americana 26
1.3 Métodos de Monte Carlo 27
1.3.1 Introducción 27
1.3.2 Generadores de números aleatorios 30
1.3.3 Métodos generales de muestreo 32
1.3.3.1 Método de la transformada inversa 33
1.3.3.2 Método del rechazo 34
1.3.4 Variables y vectores aleatorios normales 34
1.3.5 Generación de variables aleatorias normales 36
1.3.5.1 Método de Box-Muller 36
1.3.5.2 Aproximando la inversa de la normal 37
1.3.5.3 Generación de normales multivariantes 39
1.3.6 Variables aleatorias procedentes de otras distribuciones . 40
1.3.6.1 Distribución exponencial 40
1.3.6.2 Distribución Bernoulli 40
1.3.6.3 Distribución Binomial 41
1.3.6.4 Distribución de Poisson 42
1.3.7 Simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas 43
1.3.7.1 Densidad de la transición 44
1.3.7.2 Solución exacta de la SDE 44
1.3.7.3 Aproximación de la dinámica de la SDE 45
1.3.8 Reducción de farianza. 46
1.3.8.1 Variables antitéticas 46
1.3.8.2 Variables de control 48
1.3.9 Least Square Monte Carlo (LSMC) 49
1.3.10 Ejemplo 51
1.4 Modelos binomiales 53
1.4.1 Modelo binomial computacionalmente simple 55
1.4.1.1 Ninguna singularidad en $\sigma(y,t)$ 56

1.4.1.2 Singularidad en $y = 0$: $\sigma(0,t) = 0$, $\mu(0,t) \leq 0$. 57
1.4.2 Ejemplo: CIR 59
1.4.3 Valoración de opciones 60
1.5 Métodos de Fourier 62
1.5.1 Propiedades de las transformadas de Fourier 62
1.5.2 Transformada discreta de Fourier 63
1.5.3 Procesos de Lévy 64
1.5.4 Valoración de derivados bajo procesos de Lévy 66
1.5.5 Ejemplos 67
1.5.5.1 Opciones europeas 67
1.5.5.2 Opciones americanas 68

2 Estimación de la curva de tipos de interés: Valoración de derivados 71
2.1 Introducción 71
2.2 Base de datos y metodología de estimación 74
2.2.1 Funciones de Nelson y Siegel 75
2.2.2 Splines de Vasicek Fong 76
2.2.3 Estimación de la volatilidad. 77
2.3 Modelo de Black Derman Toy 78
2.4 Valoración de opciones sobre bonos cupón cero 81
2.5 Resultados numéricos 82
2.6 Conclusiones 91

3 Unit-linked contracts embedding a surrender option 107
3.1 Introduction 107
3.2 Valuation framework 108
3.3 Least-squares Monte Carlo approach 111
3.4 Partial differential equation approach 113
3.5 Numerical examples 115

4 Dynamic Programming Algorithim for the valuation of GMWB in VA 123
4.1 Introduction 123

4.2 Review on the literature on GMWBs . . . 125
4.3 The structure of the contract . . . 128
4.3.1 Description . . . 128
4.3.2 Model and valuation . . . 129
4.3.2.1 Dynamic withdrawals . . . 131
4.3.2.2 Static withdrawals . . . 132
4.3.2.3 Dynamic+surrender . . . 133
4.3.2.4 Mixed (static+surrender) . . . 134
4.3.3 Fair pricing and comparison . . . 134
4.3.4 Mortality risk . . . 135
4.4 Lévy processes framework . . . 135
4.5 Dynamic programming algorithm . . . 138
4.5.1 Algorithm . . . 139
4.6 Numerical results . . . 141
4.7 Conclusions . . . 148

5 Summary, conclusions and contributions 151
5.1 Methodology for the estimation of the interest rate curve: impact on valuation of derivatives . . . 151
5.1.1 Summary . . . 151
5.1.2 Conclusions and contributions . . . 152
5.2 Unit-linked contracts embedding a surrender option . . . 153
5.2.1 Summary . . . 153
5.2.2 Conclusions and contributions . . . 153
5.3 Dynamic Programming Algorithim for the valuation of GMWB in VA . . . 155
5.3.1 Summary . . . 155
5.3.2 Conclusions and contributions . . . 155

5 Resumen, conclusiones y contribuciones 157
5.1 Metodología para la estimación de la curva de tipos de interés: impacto en la valoración de derivados . . . 157
5.1.1 Resumen . . . 157

5.1.2 Conclusiones y contribuciones 158
5.2 Contratos Unit-Linked con opciones de cancelación 159
5.2.1 Resumen 159
5.2.2 Conclusiones y contribuciones 160
5.3 Algoritmo de programación dinámica para la valoración de GMWB en VA 161
5.3.1 Resumen 161
5.3.2 Conclusiones y contribuciones 162

Bibliografía **163**

Lista de Figuras

2.1 Tipos de interés a 1, 5 y 10 años. (NSWG) 96
2.2 Volatilidades de los tipos a 1, 5 y 10 años. (NSWG) 96
2.3 TSIR calculada por las 4 metodologías en 4 días distintos de la base de datos. 97
2.4 Precios de opciones con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 9 años calculados con las 8 metodologías de estimación presentadas en el artículo. 98
2.5 VTS para 4 días de la base de datos calculadas con las 8 metodologías de estimación presentadas en el artículo. 99
2.6 Precio y delta de O_1B_3 para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSUG. 100
2.7 Límites y precio de O_1B_3 para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSUG. 101
2.8 Precio y delta de O_3B_7 para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSWH. 102
2.9 Límites y precio de O_3B_7 para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSWH. 103
2.10 Precio y delta de O_5B_{10} para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y VFWG. 104
2.11 Límites y precio de O_5B_{10} para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y VFWG. 105

4.1 Density of 1 year log return 142

Lista de Tablas

1.1 Diferentes métodos de congruencia lineal para la generación de números aleatorios uniformes en el intervalo unidad. 32

2.1 Valor de un contrato a plazo con vencimiento a un año sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años para 4 fechas distintas calculado con la TSIR obtenida mediante la metodología usada como benchmark, NSWG. Entre paréntesis se presenta el máximo error relativo entre el precio del contrato a plazo calculado con la metodología benchmark y el resto de las metodologías. 85

2.2 Valor de una opción de compra con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años para 4 fechas distintas calculado con la TSIR obtenida mediante la metodología usada como benchmark, NSWG. Entre paréntesis se presenta el máximo error relativo entre el precio de la opción calculado con la metodología benchmark y el resto de las metodologías. 86

2.3 Valor de una opción de compra con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años. Los árboles se han calibrado según las TSIR obtenidas mediante las cuatro metodologías del artículo mientras que la volatilidad es la misma para todos obtenida mediante NSHW con afán de ser un proxy de las volatilidades de mercado. 86

2.4 Estadísticos del precio y las deltas de O_1B_3 calculados con las diferentes metodologías de estimación. 87

2.5 Estadísticos del precio y las deltas de O_3B_7 calculados con las diferentes metodologías de estimación. 87

2.6 Estadisticos del precio y las deltas de O_5B_{10} calculados con las diferentes metodologías de estimación. 88

3.1 Numerical results, interest rate (in brackets standard errors) 119
3.2 Numerical results, maturity (in brackets standard errors) 119
3.3 Numerical results, volatility (in brackets standard errors) 120
3.4 Relative root mean squared errors in percentage 121

4.1 GMWB=Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit, GLW=Guaranteed Lifelong Withdrawal; GBM=Geometric Brownian Motion, Merton=Merton Jump Diffusion model, RS=Regime Switching, SIR=Stochastic Interest Rates, SV=Stochastic Volatility, SM=Stochastic Mortality; PDE=Partial Differential Equations, DP=Dynamic Programming, MC=Monte Carlo LSMC=Least-Squares Monte Carlo 127
4.2 Parameters of the Lévy processes obtained by calibration to S&P 500 option prices 141
4.3 $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different risk-free interest rates. 143
4.4 $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different contract maturities. 143
4.5 $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different penalties. 144
4.6 Fair fees in b.p., benchmark case, for different penalties and policyholder behaviours. 145
4.7 Comparison of contract values under different policyholder behaviours, benchmark case, for different penalties when $\varphi = 0$. 146
4.8 Fair fee in b.p., benchmark case, for different contract maturities and mortality tables obtained by stressing the one-year survival probabilities using $p_y^{(\alpha)} = p_y^{\alpha}$. 147
4.9 $\varphi^{\text{surrender}}$ in b.p. for a GMDB contract, benchmark case, for different contract maturities and different mortality tables obtained by stressing the one-year survival probabilities using $p_y^{(\alpha)} = p_y^{\alpha}$. 148

Capítulo 1

Métodos numéricos en finanzas

1.1 Introducción

La piedra angular de la valoración de derivados, se basa en el supuesto de que cualquier instrumento financiero, que tenga garantizado un flujo de caja no negativo, debe de tener un precio no negativo, si no, en caso contrario, existirían oportunidades de arbitraje (ver [10]). Por supuesto, cuando existen este tipo de oportunidades, los inversores las aprovechan ya que sin ninguna inversión inicial son capaces de generar dinero. Sin embargo al incrementar la demanda, alzan el precio y por tanto la oportunidad de arbitraje desaparece. En una economía que está en equilibrio, parece entonces asumible, excluir dichas oportunidades de arbitraje y como se verá más adelante, esta hipótesis es el fundamento principal en la valoración de derivados.

Otro supuesto importante a la hora de construir una teoría sólida para la valoración de derivados, es la ausencia de costes de transacción. Esto significa que los activos deben de ser comprados y vendidos al mismo precio. Sin embargo, este supuesto no se da en los mercados reales. En presencia de costes de transacción, no todas las oportunidades de arbitraje que teóricamente pueden ser rentables pueden ser explotadas. Sin embargo, los grandes participantes de los mercados, como bancos e instituciones tienen costes de transacción realmente bajos y por tanto pueden explotar practicamente todas las oportunidades de arbitraje haciendo que el mercado esté en un equilibrio

cercano al que hubiera, en caso de no existir los costes de transacción. Por consiguiente asumir la ausencia de los costes de transacción es una buena aproximación.

1.1.1 Arbitraje y martingalas

A lo largo de este capítulo se considera una economía continua en un intervalo finito $[0, T]$. La incertidumbre del mercado se modela mediante un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En esta notación Ω denota el espacio muestral con elementos $\omega \in \Omega$; $\mathcal{F}$ denota la σ-álgebra en Ω y $\mathbb{P}$ denota la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. La incertidumbre se resuelve sobre $[0, T]$ de acuerdo con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Se asume que existen N activos negociados en el mercado $X_1, X_2, \ldots, X_N$, que pueden ser modelados mediante procesos de Itô descritos por ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dX_i = \mu(\omega, t)dt + \sigma(\omega, t)dW \tag{1.1}$$

donde $\mu(\omega, t)$ es la deriva y $\sigma(\omega, t)$ es la volatilidad del proceso que se asumen $\mathcal{F}_t$-adaptadas y que satisfacen:

$$\int_0^T |\mu(t, \omega)|dt < \infty \tag{1.2}$$

$$\int_0^T \sigma(t, \omega)^2 dt < \infty \tag{1.3}$$

con probabilidad uno.

Por simplicidad se ha asumido que sólo hay una fuente de incertidumbre (el movimiento Browniano W). Es directo establecer una economía con más fuentes de incertidumbre, pero la notación se vuelve más engorrosa.

Partiendo de los N activos negociados en el mercado $X_1, X_2, \ldots, X_N$, se define una estrategia predecible de trading como el proceso estocástico $\delta(t, \omega) = (\delta_1(t, \omega), \delta_2(t, \omega), \ldots, \delta_N(t, \omega))$, donde $\delta_n(t, \omega)$ representa la posición tomada en el activo n. El valor $V(\delta, t)$ en el instante t de la estrategía de

trading $\delta(\omega, t)$ viene dado por:

$$V(\delta, t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n(t) X_n(t) \tag{1.4}$$

Por otra parte una estrategia de trading es autofinanciable si cumple la siguiente propiedad:

$$V(\delta, t) = V(\delta, 0) + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \delta_n(s) dX_n(s) \tag{1.5}$$

donde las integrales $\int_0^t \delta_n(s) dX_n(s)$ son integrales de Itô. Por tanto, las estrategias de trading autofinanciables son aquellas que no involucran ni la entrada ni salida de dinero después de $t = 0$, de tal manera que las ganancias o pérdidas del inversor sólo dependen de la variación de los precios de los activos involucrados en dicha estrategia.

Una vez establecidas las estrategias autofinanciables de trading, se definen las oportunidades de arbitraje δ como aquellas con $\Pr[V(\delta, T) \geq 0] = 1$ y $V(\delta, 0) < 0$. Una oportunidad de arbitraje se define entonces como una estrategia autofinanciada que tiene costes iniciales estrictamente negativos pero que tiene probabilidad igual a uno de tener valor no negativo en T.

Supongamos ahora cuaquier derivado $H(t)$ $\{\mathcal{F}_t\}$-medible. Si podemos encontrar una estrategia autofinanciable δ tal que $V(\delta, t) = H(t)$ con probabilidad 1 para todo t, entonces a esta estrategia autofinanciable se la conoce como estrategia de replicación. Si en una economía todos los derivados pueden ser replicados, se dice que la economía es completa.

Si no existen oportunidades de arbiraje y costes de transacción en una economía, entonces el valor de cualquier estrategia de replicación es único, por lo que se puede determinar el precio de cualquier derivado mediante estrategías de replicación, siempre y cuando la economía sea completa y no existan oportunidades de arbitraje.

Las cuestiones de no arbitraje y mercados completos, fueron matemáticamente tratados en los papers de Harrison y Kreps (1979) [41] y Harrison y Pliska

(1981) [42]. Ambos resolvieron ambas cuestiones usando la noción de medida de martingala. Se recomienda la lectura de [89] y [90], [10] o los dos primeros capítulos de [19] para una amplia presentación de los conceptos tratados en este apartado.

Cualquier activo con precios estrictamente positivos para todo $t \in [0, T]$ se denomina numerario. Supongamos que el activo X_1 puede ser considerado numerario. Los precios relativos de otro activo X_n con respecto a X_1 se denotan como $\hat{X}_n = X_n/X_1$. Bajo el espacio de probabilidad definido anteriormente consideramos el set que contiene todas las medidas de probabilidad $\mathbb{Q}$ tal que:

1. $\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$ es decir, ambas medidas tienen los mismos conjuntos nulos.

2. Los precios relativos $\hat{X}_n$ son martingalas bajo la medida $\mathbb{Q}$ para todos los n. Esto quiere decir que para $t \leq s$ se tiene que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{X}_n(s)|\mathcal{F}_t\right) = \hat{X}_n(t)$

La medidas $\mathbb{Q}$ que cumplan estas propiedades se denominan medidas equivalentes de martingala.

Una estrategia de trading es un proceso predecible N-dimensional $\delta(t, \omega) = (\delta_1(t, \omega), \delta_2(t, \omega), \ldots, \delta_N(t, \omega))$ tal que $\int_0^t \delta_n(s) d\hat{X}_n(s)$ sean martingalas bajo $\mathbb{Q}$. Con todos estos ingredientes, enunciamos sin demostrar el siguiente teorema:

Teorema: *Una economía continua es libre de arbitraje y todo derivado es replicable, si y sólo si para cada elección de numerario existe una única medida equivalente de martingala.*

Nótese que para cada elección de numerario existe una única pero diferente medida equivalente de martingala. A partir de estos resultados, se obtiene que dado un numerario M con única medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}^M$, el valor de una estrategia autofinanciable $\hat{V}(\delta, t) = V(\delta, t)/M(t)$ es una $\mathbb{Q}$ martingala. Por tanto, para una estrategia de replicación δ_K que replica el derivado $H(T)$, se obtiene:

$$\mathbb{E}^M\left(\frac{H(T)}{M(T)}|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^M\left(\frac{V(\delta_K, t)}{M(T)}|\mathcal{F}_t\right) = \frac{V(\delta_K, t)}{M(t)} \tag{1.6}$$

donde la última expresión viene de la definición de martingala. Combinando la

primera y la tercera expresión se obtiene la fórmula de valoración de derivados:

$$V(\delta_K, t) = M(t)\mathbb{E}^M \left(\frac{H(T)}{M(T)} | \mathcal{F}_t \right) \tag{1.7}$$

El teorema de la medida equivalente de martingala única fué inicialmente probado por Harrison y Pliska [42]. En su paper, ellos usaron como numerario la cuenta corriente. Más adelante se demostró que la elección del numerario es arbitraria.

1.1.2 Cambio de numerario

La ecuación (1.7) muestra como calcular el valor $V(t)$ de cualquier derivado. Sin embargo el valor de este derivado ha de ser independiente de la elección del numerario.

Se consideran los numerarios N y M con las medidas de martingala $\mathbb{Q}^N$ y $\mathbb{Q}^N$ respectivamente. Según (1.7) se tiene que:

$$N(t)\mathbb{E}^N \left(\frac{H(T)}{N(T)} | \mathcal{F}_t \right) = M(t)\mathbb{E}^M \left(\frac{H(T)}{M(T)} | \mathcal{F}_t \right) \tag{1.8}$$

Que puede reescribirse como:

$$\mathbb{E}^N \left(G(T) | \mathcal{F}_t \right) = M(t)\mathbb{E}^M \left(G(T) \frac{N(T)/N(t)}{M(T)/M(t)} | \mathcal{F}_t \right) \tag{1.9}$$

donde $G(T) = H(T)/N(T)$. Desde que H, N y M son generales este resultado prevalece para todas las variables aleatorias G y numerarios. Por tanto se ha encontrado una una forma de expresar el valor esperado de G bajo la medida $\mathbb{Q}^N$ en función de la medida $\mathbb{Q}^M$. El valor esperado de G bajo la medida $\mathbb{Q}^N$ es el valor esperado de G multiplicado por la variable aleatoria $\frac{N(T)/N(t)}{M(T)/M(t)}$ bajo la medida $\mathbb{Q}^M$. A esta variable aleatoria se la conoce como derivada de *Radon Nikodym* y se denota por $d\mathbb{Q}^N/d\mathbb{Q}^M$.

Teorema: *Dada la medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}^N$ con respecto al numerario $N(t)$ y dada la medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}^M$ con respecto al numerario $M(t)$, la derivada de Radon Nikodym que transforma la medida*

equivalente de martingala $\mathbb{Q}^M$ *en* $\mathbb{Q}^N$ *viene dada por:*

$$\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^M} = \frac{N(T)/N(t)}{M(T)/M(t)} \tag{1.10}$$

1.1.3 Teorema de Girsanov

Los siguientes dos resultados se presentan sin demostración.

Un resultado clave que puede ser usado para determinar medidas equivalentes de martingalas, es el teorema de Girsanov . Este teorema nos proporciona una poderosa herramienta para determinar el efecto de un cambio de medida en un proceso estocástico.

Teorema: *Dado un proceso estocástico* $\kappa(t)$ *tal que:*

$$\int_0^T \kappa(s)^2 ds < \infty \tag{1.11}$$

con probabilidad 1, se considera la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \rho(t)$ *dada por:*

$$\rho(t) = \exp\{\int_0^t \kappa(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \kappa(s)^2 ds\} \tag{1.12}$$

donde $W^{\mathbb{P}}$ *es un movimiento Browniano bajo la medida* $\mathbb{P}$*. Bajo la medida* $\mathbb{Q}$*, el proceso*

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = W^{\mathbb{P}}(t) - \int_0^t \kappa(s) ds \tag{1.13}$$

es también un movimiento Browniano.

1.1.4 Lema de Itô

Otro resultado clave en cálculo estocástico, es conocido como Lema de Itô. Dado un proceso estocástico x, el Lema de Itô nos describe el comportamiento de los procesos estocásticos derivados de las funciones $f(x,t)$.

Lema: *Si el proceso estocástico* x *viene determinado por la ecuación*

diferencial estocástica $dx = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dW$. *Entonces la función* $f(t,x)$ *satisface:*

$$df(t,x) = \left(\partial_t f + \mu(t,x)\partial_x f + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\partial^2_{xx} f\right) dt + \sigma(t,x)\partial_x f\, dW. \quad (1.14)$$

siempre y cuando $f(t,x)$ *sea lo suficientemente diferenciable.*

Si $f(x,t)$ en vez de vez de ser función de un único proceso estocástico x es función de un conjunto de N procesos $\mathbf{x}^\top = (x_1, \ldots, x_N)$, cuya dinámica viene expresada matricialmente por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$d\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}\left(t, \mathbf{x}\right) dt + \boldsymbol{\Sigma}\left(t, \mathbf{x}\right) d\mathbf{W} \quad (1.15)$$

donde $\boldsymbol{\mu}^\top\left(t, \mathbf{x}\right) = (\mu_1(t,\mathbf{x}), \ldots, \mu_N(t,\mathbf{x}))$ es la deriva del proceso N-dimensional, $\boldsymbol{\Sigma}\left(t, \mathbf{x}\right)$ es la matriz de términos de ruido y $d\mathbf{W}^\top = (dW_1, dW_2, \ldots, dW_N)$ es un vector de movimientos Brownianos, tales que $dW_i \cdot dW_j = \rho_{i,j}dt$, donde $\rho_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz de correlación de los movimientos Brownianos, $\boldsymbol{\rho}(t,\mathbf{x})$. Entonces la función $f(t,\mathbf{x})$ sigue un proceso estocástico que viene dado por:

$$df = \left(\partial_t f + (\nabla_x f)^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Sigma}^\top \mathrm{He}\left[f\right]\boldsymbol{\Sigma}\right)\right) dt + (\nabla_x f)^\top \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{W} \quad (1.16)$$

donde donde ∇_x es el operador gradiente, $\mathrm{Tr}[\cdot]$ es el operador traza y $\mathrm{He}[\cdot]$ es el operador Hessiano. Se ha omitido por simplificar la notación, la dependencia en $(t,\mathbf{x})$ de f, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\rho}$.

1.1.5 Teorema de Feynman-Kac

El teorema de Feynman Kac es una herramienta potente para poder resolver ecuaciones diferenciales mediante las técnicas de Monte Carlo que posteriormente se presentarán en esta tesis.

Teorema: *Sea* $V(t,x)$ *la función que cumple la siguiente ecuación en*

derivadas parciales:

$$\partial_t V + \mu(t,x)\partial_x V + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\partial^2_{xx}V - r(x,t)V = 0 \tag{1.17}$$

con la condición $V(T,x) = H(T,x)$*, entoces la solución viene dada por:*

$$V(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s,x)\mathrm{d}s}H(T,x)\right] \tag{1.18}$$

donde el valor esperado se toma con respecto al proceso x *definido por* $dx = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dW$*.*

Se puede generalizar este teorema de la misma manera que se hizo en el lema de Itô:

Si la función $V(t,\mathbf{x})$ cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\left(\partial_t + (\nabla_x)^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Sigma}^\top \mathrm{He}\left[\cdot\right]\boldsymbol{\Sigma}\right) - r\right)V(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{1.19}$$

con la condición $V(T,\mathbf{x}) = H(T,\mathbf{x})$, entoces la solución viene dada por:

$$V(t,\mathbf{x}) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s,\mathbf{x})\mathrm{d}s}H(T,\mathbf{x})\right] \tag{1.20}$$

donde el valor esperado se toma con respecto al proceso $\mathbf{x}$ definido por (1.15).

Para consultar en profundidad estos y muchos otros temas en cálculo estocástico se recomienda la lectura de Øskendal (2003) [77], Karatzas (1991) [51] o Shreve [89] y [90].

1.1.6 Ecuación de valoración

Se considera ahora la siguiente economía a la que aplicaremos los resultados que se han introducido anteriormente. Se denota por B y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ los $N+1$ activos negociados en el mercado. Los precios de los activos siguen las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \boldsymbol{\mu}\left(t,\mathbf{x}\right)dt + \boldsymbol{\Sigma}\left(t,\mathbf{x}\right)d\mathbf{W} \\ dB &= r\left(t,\mathbf{x}\right)Bdt \end{aligned}$$

donde B es el valor de la cuenta corriente libre de riesgo, donde $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$ es la deriva del proceso N-dimensional bajo la medida de probabilidad histórica $\mathbb{P}$, $\boldsymbol{\Sigma}(t, \mathbf{x})$ es la matriz de varianzas covarianzas y $d\mathbf{W}^\top = (dW_1, dW_2, \ldots, dW_N)$ es el vector de movimientos Brownianos que serán fuente de incertidumbre en la economía tales que $dW_i \cdot dW_j = \rho_{i,j} dt$, donde $\rho_{i,j}$ es el elemento (i, j) de la matriz de correlación de los movimientos Brownianos, $\boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{x})$.

El teorema fundamental de valoración, establece que existe una única medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a la probabilidad histórica $\mathbb{P}$, tal que los precios relativos $x_i(t)/B(t)$ con $i = \{1, \ldots, N\}$, se comportan como martingalas bajo la probabilidad $\mathbb{Q}$. Esto implica según (1.7), la siguiente expresión explícita para el valor de cualquier derivado $H(T, \mathbf{x})$:

$$V(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s,\mathbf{x}) \mathrm{d}s} H(T, \mathbf{x}) | \mathcal{F}_t \right] \tag{1.21}$$

donde el valor esperado se toma con respecto a la información conocida a tiempo t.

La propiedad de martingala de los precios relativos $\hat{V}(t, \mathbf{x}) = V(t, \mathbf{x})/B(t)$ implica que su deriva debe ser cero bajo la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ para todo $t \in [0, T]$. Por tanto, aplicando el lema de Itô multidimensional a $\hat{V}(t, \mathbf{x})$ e igualando la deriva a cero[1], se obtiene la ecuación en derivadas parciales que sigue cualquier derivado financiero:

$$\left(\partial_t + (\nabla_x)^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Sigma}^\top \mathrm{He}[\cdot] \boldsymbol{\Sigma} \right) - r \right) V(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{1.22}$$

cuya condición de contorno viene dada por el pay-off a vencimiento del activo: $V(T, \mathbf{x}) = H(T, \mathbf{x})$. De nuevo se ha omitido la dependencia en $(t, \mathbf{x})$ en $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\rho}$.

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales, permiten obtener soluciones en muchos casos. Sin embargo, existen al menos tres importantes casos donde estos métodos son difíciles o imposibles de aplicar.

- Caso I: La variable de estado no es Markoviana, lo que implica que las

[1] Término en dt.

propiedades estadísticas evaluadas hoy, dependen de la historia entera de la variable. Esto ocurre cuando $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ dependen de la trayectoria seguida de la variable aleatória.

- Caso II: El pay-off de $V(t)$ depende de la trayectoria seguida por el activo.
- Caso III: Alta dimensionalidad de la ecuación en derivadas parciales (EDP) (1.22).

En cada una de estas situaciones, se podrán aplicar diferentes métodos numéricos para tratar de obtener la mejor solución posible.

En este primer capítulo, se pretende dar una visión con un énfasis meramente práctico de los métodos numéricos comunmente usados en la industria financiera y que han sido utilizados durante el desarrollo de la tesis.

1.2 Método de diferencias finitas

1.2.1 Introducción

Se parte de un caso sencillo con un único activo ($k = 1$), cuya dinámica viene descrita por la ecuación (1.22). Asumiendo que x evoluciona según un Movimiento Browniano Geómetrico (GBM) bajo la probabilidad riesgo neutral, esto es $dx = (r - q)xdt + \sigma x dW$ con $x(0) = x_0$, y donde r el activo libre de riesgo, q la tasa de dividendo contínuo y σ la volatilidad, se tiene que (1.22) es exactamente la ecuación de Black-Scholes:

$$\left[\partial_t + (r - q)x\partial_x + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_{xx} - r\right] F(t, x) = 0 \tag{1.23}$$

Esta ecuación se completa con la condición de contorno, dada por el pay-off a vencimiento que para el caso de una opción de compra resulta ser $F(T, x) = \max(0, x - K)$.

En esta sección se presentan los métodos numéricos básicos para resolver ecuaciones en derivadas parciales de una sola dimensión espacial ($k = 1$), en particular se introduce el método de las diferencias finitas como una técnica simple para generar soluciones aproximadas a (1.23). En el caso de EDPs de

una dimensión mayor (modelos con volatilidad estocástica, tipos de interés estocástico y pay-off que dependen de la trayectoria seguida, la herramienta comunmente utilizada son las transformadas de Fourier o los métodos de Monte Carlo que se tratarán posteriormente. Con el fin de ampliar los contenidos que aquí se presentan, se recomienda la lectura de [97] y [99], principales referencias utilizadas en la elaboración de esta sección.

1.2.2 Clasificación de EDPs

Se considera una ecuación diferencial de segundo orden lo más general posible:

$$\left[A\partial_{xx} + 2B\partial_{xt} + C\partial_{tt} + D\partial_x + E\partial_t + H\right] F(t,x) = G \tag{1.24}$$

Donde F is la función a determinar y A, B, C, D, E, H y G son funciones reales de t y x. Si $G \equiv 0$ para todo x y t la ecuación es llamada homogénea y en caso contrario no homogénea.

La ecuación (1.24) se clasifica en uno de los tres siguientes grupos:

Hyperbólica, si $B^2 - AC > 0$

Parabólica, si $B^2 - AC = 0$

Elíptica, si $B^2 - AC < 0$

Desde que, en general, $B^2 - AC$ es una funcion de otras variables (t, x), la PDE puede cambiar de naturaleza según el dominio en la que sea considerada. Las ecuaciones como (1.23) o las que generalmente se encuentran en finanzas, son de tipo parabólico y, por tanto, son las que se tratararán de resolver:

$$\left[\partial_t + A\partial_{xx} + D\partial_x + H\right] F(t,x) = G \tag{1.25}$$

Una completa descripción de un problema de valoración financiero mediante una EPD requiere:

- Una ecuación que describa las relaciones de no arbitraje entre el precio del derivado y de los subyacentes.

- Unas condiciones de contorno que describan las características financieras del contrato en la frontera del recinto especificado para la valoración.
- Unas condiciones terminales, que describan el pay-off al vencimiento del contrato.

Se examinan a través de algunos ejemplos la importancia de las condiciones de contorno en las fronteras y de las condiciones terminales. Distintas condiciones terminales dan lugar a diferentes contratos. Por ejemplo, la condición final $F(T,x) = \max(K-x,0)$ devolvería el precio de una opción de venta con strike K. Es importante también especificar el dominio de x dependiendo del contrato que se vaya a evaluar.

Ejemplo 1 (Opción de compra vainilla): Para una opción de compra estandar, el precio del activo subyacente puede asumirse en el rango $(0,+\infty)$. Desde un punto de vista computacional, este dominio requiere de un truncamiento, $(0,U)$ y una indicación acerca del comportamiento de la solución cuando x tiende a sus dos extremos. Se debe observar que si $x_0 = 0$, y x_t sigue un GMB, entonces x_t permanecerá en 0 para todo $t > 0$, por tanto, la condición en la frontera para una opción de compra en $x = 0$ viene dada por la siguiente expresión $F(t,0) = 0$. Para $x = U \gg K$ la opción acabará *in the money* y por tanto será ejercida. Por consiguiente el valor actual puede ser aproximado por $F(t,U) = U - Ke^{-r(T-t)}$. Alternativamente se puede asumir la siguiente condición de Neumann, $\partial_x F(t,U) = 1$, lo cual indica que para grandes valores de x, la opción tiende a parecerse al subyacente.

Ejemplo 2 (Opción Barrera): Las opciones barrera son aquellas que se activan cuando el activo toca la barrera (knock in), o las que se desactivan cuando la tocan (knock out). Así, por ejemplo, una opción de compra *down and out*, termina si el activo subyacente toca una barrera inferior $B_l < x_0$ antes del vencimiento T y, por tanto, la opción deja de tener valor, siendo el dominio para la resolución de esta opción $[B_l, U]$ donde U es un valor lo suficientemente grande. Las condiciones de contorno son las siguientes: Si $x = B_l$ entonces $F(t,B_l) = 0$ y si $x = U$, entonces $F(t,U) = U - Ke^{-r(T-t)}$. En una opción de compra *down and in*, la opción se activa siempre que el subyacente toque la barrera $B_l < x_0$, siendo las condiciones de contorno las

siguientes: $F(t, B_l) = C(t, B_l)$ y $F(t, U) = U - Ke^{-r(T-t)}$ donde $C(t, B_l)$ es el valor de una opción de compra vainilla con el mismo strike que la opción *down and in*. En el caso de una opción compra *knock-out* doble barrera, el valor de la opción se reduce a cero en caso de que el activo subyacente toque alguna de las dos barreras B_l y B_u, con $B_l < x_0 < B_u$, de esta forma el dominio de valoración será $[B_l, B_u]$ y las condiciones de contorno $F(t, B_l) = 0$ y $F(t, B_u) = 0$.

1.2.3 Diferencias finitas

Cuando una función $f(x)$ es diferenciable un número apropiado de veces, entonces aplicando la formula de Taylor se tiene que:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4) \tag{1.26}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4) \tag{1.27}$$

Donde $O(h^k)$ denota términos que, cuando $h \to 0$, tienden a cero tan o más rápido como la función h^k. A partir de estas dos expresiones, se puede construir las siguientes aproximaciones de la derivada:

Si se substrae (1.27) de (1.26) se obtiene:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{1}{3}h^3 f'''(x) + O(h^4) \tag{1.28}$$

que tras despejar se obtiene la aproximación centrada de la derivada (*center*):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{1.29}$$

Si se usa (1.26), para aproximar la derivada se obtiene la aproximación hacia delante (*forward*):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \tag{1.30}$$

Si por lo contrario se usa (1.27) se obtiene la aproximación hacia atrás (*backward*):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \tag{1.31}$$

Para aproximar la segunda derivada, se procede a sumar (1.27) y (1.26) y mediante un simple cálculo directo se obtiene que:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{1.32}$$

Las derivadas parciales ∂_t y ∂_{xx} que aparecen en (1.25) se aproximarán mediante las expresiones anteriores para obtener los diferentes métodos para resolver las EDPs numéricamente: (explícito, implícito y Crank-Nicholson).

A continuación, se presenta como resolver numéricamente una ecuación diferencial parabólica del estilo de (1.25). Lo primero que se va a hacer es cambiar el origen del tiempo. En finanzas, las EDPs se caracterizan por una condición en el vencimiento del contrato. Sin embargo en problemas físicos es más común pensar en término de condiciones iniciales y después modelar la forma en la que la información fluye. Con el fin de usar métodos numéricos para la resolver numéricamente las EDPs, se realiza el siguiente cambio a (1.25): $\tau = T - t$ y $u(\tau, x) = F(t, x)$, con lo que la ecuación (1.25):

$$\left[-\partial_\tau + a(\tau, x)\partial_{xx} + b(\tau, x)\partial_x + c(\tau, x)\right] u(\tau, x) = d(\tau, x) \tag{1.33}$$

Donde $a(\tau, x) = A(t, x)$, $b(\tau, x) = D(t, x)$, $c(\tau, x) = H(t, x)$ y $d(\tau, x) = G(t, x)$. La condición al vencimiento que afectaba a F, se convierte en una condición inicial para f, esto es $u(0, x) = F(T, x)$. Las condiciones de contorno no quedan afectadas, salvo por el remplazamiento de $T - t$ por τ. Por ejemplo, una opción de compra, tal y como en el ejemplo 1, queda caracterizada por las siguientes condiciones $u(\tau, 0) = 0$ y $u(\tau, U) = U - Ke^{-r\tau}$.

El dominio de τ es $[0, T]$ y el dominio de x es $[L, U]$. A continuación se construye un grid en el que se discretizan las variables τ y x en $n + 1$ y en $m + 1$ puntos respectivamente. Se denota a la solución aproximada de la EDP

en el punto del grid (i, j) por $v_{i,j}$, en la que se desprecian los términos de orden superior en (1.29), (1.30), (1.31) y (1.32). La longitud de los intervalos vendrá dada por $\Delta t = T/n$ y $\Delta x = (U - L)/m$. Notar que $u_{i,j}$ es la verdadera solución de la EDP calculada en los puntos $(i\Delta\tau, j\Delta x)$ con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $j = 0, 1, 2, \ldots, m$.

1.2.3.1 Método explícito

Si se aproxima la derivada parcial en t mediante una diferencia forward, la derivada parcial en x mediante una diferencia centrada y la segunda derivada en x como en (1.32), la ecuación (1.33) queda expresada de la siguiente forma:

$$-\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta\tau} + a_{i,j}\frac{v_{i.j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta x^2} + b_{i,j}\frac{v_{i.j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x} + c_{i,j}v_{i,j} = d_{i,j}$$

Obteniendo así el siguiente algoritmo recursivo:

$$\begin{aligned} v_{i,j+1} = &\left(\alpha a_{i,j} - \frac{\beta}{2}b_{i,j}\right) v_{i,j-1} + \left(1 - 2\alpha a_{i,j} + \Delta\tau c_{i,j}\right) v_{i,j} \\ &+ \left(\alpha a_{i,j} + \frac{\beta}{2}b_{i,j}\right) v_{i,j+1} + \Delta\tau d_{i,j} \end{aligned} \tag{1.34}$$

Donde $\alpha = \Delta\tau/\Delta x^2$ y $\beta = \Delta t/\Delta x$. Usando notación matricial se tiene que (1.34) es: $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{A}_i\mathbf{v}_i + \mathbf{b}_i$ con $i = 1, \ldots, n-1$ donde: $\mathbf{A}_i$ es una matriz $(m-1) \times (m-1)$ definida por:

$$\mathbf{A}_i = \text{tridiag}\left\{\alpha a_{i,j} - \frac{\beta}{2}b_{i,j}, 1 - 2\alpha a_{i,j} + \Delta\tau c_{i,j}, \alpha a_{i,j} + \frac{\beta}{2}b_{i,j}\right\}$$

Donde una matriz tridiagonal de dimensión $m \times m$ se define como:

$$\text{tridiag}(a_i, b_i, c_i) = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & & a_m & b_m \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{b}_i$ es un vector $(m-1)\times 1$

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \left(\alpha a_{i,1} - \frac{\beta}{2} b_{i,1}\right) v_{i,0} + \Delta\tau d_{i,1} \\ \Delta\tau d_{i,2} \\ \vdots \\ \Delta\tau d_{i,m-2} \\ \left(\alpha a_{i,m-1} + \frac{\beta}{2} b_{i,m-1}\right) v_{i,m} + \Delta\tau d_{i,m-1} \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

Donde $v_{i,0}$ y $v_{i,m}$ vienen determinadas por las condiciones de contorno y $v_{0,m}$ por las condiciones iniciales.

1.2.3.2 Método implícito

En el método implícito se aproxima la derivada respecto al tiempo de (1.33) mediante una diferencia backward, mientras que las derivadas respecto a x se mantienen igual que en el método explícito. Siguiendo los pasos anteriores y tras unas manipulaciones sencillas se llega a la siguiente ecuación recursiva:

$$\begin{aligned} v_{i-1,j} = &- \left(\alpha a_{i,j} - \frac{\beta}{2} b_{i,j}\right) v_{i,j-1} + \left(1 + 2\alpha a_{i,j} - \Delta\tau c_{i,j}\right) v_{i,j} \\ &- \left(\alpha a_{i,j} + \frac{\beta}{2} b_{i,j}\right) v_{i,j+1} - \Delta\tau d_{i,j} \end{aligned} \tag{1.36}$$

En cada instante de tiempo se tiene que resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{B}_i\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{b}_i$ con $i = 1, \ldots, n-1$, donde:

$$\mathbf{B}_i = \text{tridiag}\left\{-\alpha a_{i,j} + \frac{\beta}{2} b_{i,j}, 1 + 2\alpha a_{i,j} - \Delta\tau c_{i,j}, -\alpha a_{i,j} - \frac{\beta}{2} b_{i,j}\right\}$$

y $\mathbf{b}_i$ es un vector $(m-1)\times 1$:

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\left(\alpha a_{i,1} - \frac{\beta}{2} b_{i,1}\right) v_{i,0} - \Delta\tau d_{i,1} \\ -\Delta\tau d_{i,2} \\ \vdots \\ -\Delta\tau d_{i,m-2} \\ -\left(\alpha a_{i,m-1} + \frac{\beta}{2} b_{i,m-1}\right) v_{i,m} - \Delta\tau d_{i,m-1} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Donde $v_{i+1,0}$ y $v_{i+1,m}$ vienen determinadas por las condiciones de contorno y $v_{0,m}$ por las condiciones iniciales.

1.2.3.3 Método de Crank-Nicolson

El método de Crank-Nicolson es un refinamiento del método implícito de las diferencias finitas. Reemplaza las derivadas en t y en x con diferencias finitas centradas en un punto intermedio $((i+1/2)\Delta\tau, j\Delta x)$, obteniendo así un orden de convergencia de orden $O(h^2)$ para todas las derivadas. Tras realizar la expansión en serie de Taylor centrada en $((i+1/2)\Delta\tau, j\Delta x)$ y tras unos tediosos cálculos algebraicos, se llega a que la ecuación en diferencias, seguida por $v_{i,j}$ es:

$$\begin{aligned} &\left(\alpha\frac{a^*}{2} - \frac{\beta}{4}b^*\right) v_{i+1,j-1} - \left(1 + \alpha a^* - \Delta\tau\frac{c^*}{2}\right) v_{i+1,j} + \left(\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right) v_{i+1,j+1} \\ &= \left(-\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right) v_{i,j-1} - \left(1 - \alpha a^* + \Delta\tau\frac{c^*}{2}\right) v_{i,j} \\ &\quad - \left(\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right) v_{i,j+1} - d^*\Delta\tau \end{aligned} \tag{1.38}$$

Donde a^*, b^*, c^* y d^* están evaluadas en el punto $((i+1/2)\Delta\tau, j\Delta x)$ del grid. Escribiendo la ecuación anterior en forma matricial se tiene que: $\mathbf{C}_i\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{D}_i\mathbf{v}_i + \mathbf{b}_i$, con $i = 1, \ldots, n-1$, donde:

$$\mathbf{C}_i = \text{tridiag}\left\{\alpha\frac{a^*}{2} - \frac{\beta}{4}b^*, -1 - \alpha a^* + \Delta\tau\frac{c^*}{2}, \alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right\}$$

$$\mathbf{D}_i = \text{tridiag}\left\{-\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*, -1 + \alpha a^* - \Delta\tau\frac{c^*}{2}, -\alpha\frac{a^*}{2} - \frac{\beta}{4}b^*\right\}$$

y $\mathbf{b}_i$ es definido como:

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\left(\alpha\frac{a^*}{2} - \frac{\beta}{4}b^*\right)v_{i+1,0} + \left(-\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right)v_{i,0} - \Delta\tau d^* \\ -\Delta\tau d^* \\ \vdots \\ -\Delta\tau d^* \\ -\left(\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right)v_{i+1,m} - \left(\alpha\frac{a^*}{2} + \frac{\beta}{4}b^*\right)v_{i,m} - \Delta\tau d^* \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

1.2.4 Consistencia, convergencia y estabilidad

Se comienza escribiendo la ecuación (1.33) de la siguiente forma:

$$L(u) = \left[-\partial_\tau + a(\tau,x)\partial_{xx} + b(\tau,x)\partial_x + c(\tau,x)\right]u(\tau,x) - d(\tau,x) = 0 \tag{1.40}$$

Se define ahora F como la aproximación en diferencias finitas de L en los puntos del grid, v como la solución de la ecuación en diferencias, esto es $F(v) = 0$ y u como la solución exacta de la EDP, $L(u) = 0$. Con todo esto, se define el error de truncamiento en los puntos del grid como:

$$T_{i,j}(u) = F(u_{i,j}) - L(u_{i,j}) = F(u_{i,j}) \tag{1.41}$$

El valor de $F(u_{i,j})$, es el error local de truncamiento en el punto del grid (i,j). En otras palabras, $T_{i,j}(u)$ representa el error generado al reemplazar L por F.

Consistencia: La aproximación mediante diferencias finitas, se dice que es consistente con la EDP original, si $F(u_{i,j}) \to 0$ cuando $\Delta\tau \to 0$ y $\Delta x \to 0$. Como el error de truncación desaparece tanto en el esquema explícito, implícito y de Crank-Nicolson cuando $\Delta\tau \to 0$ y $\Delta x \to 0$, se puede decir que estos métodos son consistentes con la PDE original.

Convergencia: Un esquema en diferencias finitas, se dice que es conver-

gente con respecto a una norma dada $\| \cdot \|$ cuando la solución aproximada converge a la solución exacta de la EDP original, esto es:

$$\max_{i,j} \| v_{i,j} - u_{i,j} \| \to 0$$

cuando $\Delta\tau \to 0$ y $\Delta x \to 0$

En general, el problema de la convergencia se trata usando el teorema de equivalencia de Lax. Dado un problema de valor inicial lineal y un esquema en diferencias finitas para aproximarlo que satisfaga la condición de consistencia, entonces, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia. Con estabilidad se quiere decir que pequeñas perturbaciones introducidas en cualquier paso de la resolución numérica del problema, no crecen y dominan la solución.

Estabilidad de Lax-Richtmyer: Un esquema es *Lax-Richtmyer estable*, si la solución en diferencias finitas permanece acotada mientras que $\Delta x \to 0$ y $\Delta\tau$ se mantiene constante.

Teorema de Lax-Richtmyer En un problema consistente en diferencias finitas, lineal y bien especificado, la estabilidad del esquema es necesaria y suficiente para garantizar la convergencia.

Se ha visto que con simples manipulaciones algebraicas, los esquemas explícito, implícito y de Crank-Nicolson pueden especificarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{b}_i \tag{1.42}$$

La estabilidad de Lax-Richtmyer requiere que la solución permanezca acotada cuando $\Delta x \to 0$ o lo que es lo mismo, cuando $i \to \infty$. Se puede demostrar que esta condición se consigue si $\| \mathbf{A}_i \| \leq 1$.

Dada una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times n$, se pueden definir entre otras las siguientes normas:

1. $\| \mathbf{A}_i \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$

2. $\| \mathbf{A}_i \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

3. $\| \mathbf{A}_i \|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i| \ / \ \lambda_i \text{ es un autovalor de } \mathbf{A}\}$

A modo de ejemplo, se considera la siguiente EDP:

$$[-\partial_\tau + \partial_{xx}]\, u = 0 \tag{1.43}$$

En el método explícito, la matriz A es tridiag $\{\alpha, 1-2\alpha, \alpha\}$. Como la matriz es tridiagonal y tiene en todas las filas los mismos elementos, salvo en la primera y la última, se tiene que la $\| \mathbf{A} \|_\infty = \alpha + |1-2\alpha| + \alpha$. Por tanto el método explícito es estable si y sólo si $\alpha \leq 1/2$. El método explícito es condicionalmente estable, ya que depende de que se cumplan ciertas propiedades del grid ya que $\alpha = \Delta\tau/\Delta x^2$

En el método implícito, la matriz $\mathbf{A}$ es $[\text{tridiag}\{-\alpha, 1+2\alpha, -\alpha\}]^{-1}$. En este caso se usa la norma-2. Para esta matriz, los autovalores son $\left[1 + 2\alpha \sin^2(\frac{s\pi}{2m})\right]^{-1}$ con $s = 1, \leq, m-1$, y consecuentemente $\| \mathbf{A} \|_2 < 1$ para cualquier α, lo que prueba que el método implícito es incondicionalmente estable y como es consistente por el teorema de Lax-Richtmyer, también es convergente.

1.2.5 Resolución numérica de sistemas lineales

Resolver un sistemas de ecuaciones lineales implica calcular la inversa de una matriz. El cálculo de la inversa de una matriz es muy costoso computacionalmente cuando la dimensión de la matriz es suficientemente grande y, por tanto, se han de buscar métodos alternativos. En esta sección se presentan tres métodos iterativos (ver [34], [97], [40] y [98]) para resolver sistemas compatibles determinados de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$: Jacobi, Gauss-Seidel y SOR (*Successive Over-Relaxation*).

Se comienza escribiendo la matriz tridiagonal $\mathbf{A}$ como la suma de tres matrices $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$ donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal, $\mathbf{L}$ una triangular inferior y $\mathbf{U}$ una triangular superior. El sistema queda $(\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y por tanto

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \tag{1.44}$$

Esta ecuación representa el punto de partida de los métodos iterativos que

se van a desarrollar. La idea principal es transformar esta última ecuación en un proceso iterativo. Por tanto dado el resultado en la iteración k se podrán generar la solución $k+1$.

1.2.5.1 Convergencia de los métodos iterativos

Teorema Para cualquier $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión $\{\mathbf{x}^k\}_{k\geq 0}$ definida por $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ converge a la solución única de $\{\mathbf{x}\}_{k\geq 0}$ definida por $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ si y sólo si $\rho(\mathbf{H}) < 1$ (ver [40]).

1.2.5.2 Método iterativo de Jacobi

En este método iterativo, si se conoce la solución aproximada $\mathbf{x}^k$ en la k-ésima iteración entonces la solución en la $k+1$-ésima viene dada, de acuerdo con (1.44), por:

$$\mathbf{x}^{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{L}+\mathbf{U}\right)\mathbf{x}^k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \tag{1.45}$$

Donde $\mathbf{x}^0$ es arbitrario. En el caso de sistemas que surgen de la resolución de un problema en diferencias finitas asociado a una EDP, una posible elección es $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.

Cada componente x_i^{k+1} se obtienen a partir de los de $\mathbf{x}^k$ mediante:

$$x_i^{k+1} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{i,j}x_j^k\right) + b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.46}$$

1.2.5.3 Método iterativo de Gauss-Seidel

Un análisis de la ecuación (1.46) sugiere una mejora del método. Si se quiere cualcular x_i^{k+1}, se utilizan las componentes de $\mathbf{x}^k$. Como para $i < j$ ya se han calculado $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}$ y probablemente sean mejores aproximaciones de las soluciones reales que $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k$, parece más razonable calcular x_i^{k+1}

por medio de los valores calculados más recientemente:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_{i,j} x_j^{k+1}\right) - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{i,j} x_j^{k}\right)}{a_{i,i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.47}$$

Con el fin expresar el método de Gauss-Seidel en forma matricial, se multiplican ambos lados de (1.47) por $a_{i,i}$ y se reunen todos los k-ésimos términos de la iteración, observando que:

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L})\, \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{U}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \tag{1.48}$$

1.2.5.4 Método iterativo SOR

El método de la sobre-relajación sucesiva (SOR) es una variante del método de Gauss-Seidel para resolver un sistema de ecuaciones lineales con una velocidad de convergencia mayor. El sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede reescribirse como:

$$(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})\mathbf{x} = \omega\mathbf{b} - [\omega\mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D}]\, \mathbf{x} \tag{1.49}$$

donde $\omega > 1$ y se denomina parámetro de relajación. El método SOR es una técnica iterativa que resuelve el lado izquierdo de esta expresión para $\mathbf{x}^{k+1}$, utilizando el valor de $\mathbf{x}^k$ en el lado derecho. Analíticamente, esto puede ser escrito como:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} \left(\omega\mathbf{b} - [\omega\mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D}]\right) \mathbf{x}^k \tag{1.50}$$

Sin embargo, tomando ventaja de la forma triangular de $(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})$, los elementos de $\mathbf{x}^{k+1}$ se puede calcular secuencialmente utilizando sustitución hacia adelante:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.51}$$

La elección del parámetro de relajación no es fácil y depende de las propiedades de la matriz $\mathbf{A}$, sin embargo se ha demostrado que para matrices simétricas

y definidas-positivas, $1 < \omega < 2$ asegura la convergencia, aunque realmente estamos interesados en la convergencia rápida más que en la convergencia en sí.

1.2.5.5 Sistemas con restricciones

En la valoración numérica de derivados de tipo americano suelen aparecer sistemas de ecuaciones con restricciones del tipo

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{c}$$
$$(\mathbf{x} - \mathbf{c})(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0$$

Se puede demostrar que este sistema tiene solución única y para resolverlos simplemente se tiene que introducir la siguiente modificación al método SOR, que se vió anteriormente:

$$x_i^{(k+1)} = \max\left(c_i, (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k+1)}\right)\right)$$

1.2.5.6 Método explicito para opción de venta europea y americana

El siguiente ejemplo presenta el código Matlab para la resolución de la EDP de una put americana y europea.

```
%%%
```

```
vam(1,2:M+1)=E*exp(-r*t(2:M+1))';

v(N,2:M+1)=0;
vam(N,2:M+1)=0;



r1=dt/(ds^2);
r2=dt/ds;
%                          V(S,t)


for j=2:M+1
    for i=2:N
        aa=0.5*dt*(sigma^2*i^2-(r-d)*i);
        bb=1-dt*(sigma^2*i^2+(r-d));
        cc=0.5*dt*(sigma^2*i^2+(r-d)*i);
        v(i,j)=bb*v(i,j-1)+cc*v(i+1,j-1)+aa*v(i-1,j-1);
        vam(i,j)=max(bb*vam(i,j-1)+cc*vam(i+1,j-1)+aa*vam(i-1,j-1),...
                                                    max(E-S(i),0));
    end
end

plot(S,v(:,M+1),'r',S,vam(:,M+1),'b')
legend('European','American')

american=interp1q(S,vam(:,M+1),S0);
european=interp1q(S,v(:,M+1),S0);
```

1.3 Métodos de Monte Carlo

1.3.1 Introducción

Los métodos de Monte Carlo están basados en la analogía entre la probabilidad y el volumen. La teoría de la medida formaliza la intuitiva noción de probabilidad, asociada a un evento, con un conjunto de posibilidades y la definición de probabilidad del evento, como el volumen o medida del

evento relativa al universo del conjunto de posibilidades. Monte Carlo usa esta identidad de forma inversa, calculando el volumen de un conjunto e interpretarlo como una probabilidad. En el caso más simple, significa obtener muestras aleatorias del universo de posibilidades y tomar la fracción de ellas que caen dentro de un conjunto dado como una estimación del volumen del mismo. La ley de los grandes números asegura de la convergencia del estimador a medida que el número de muestras aleatorias se incrementa.

Se considera, por ejemplo, el problema de estimar la integral de una funcion f a lo largo del intervalo unidad (ver [39]):

$$\alpha = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Esta integral se puede expresar como $\mathrm{E}[f(U)]$ donde U es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo unidad. Supongamos que se tiene un mecanismo para obtener números aleatorios $U_1, U_2, \ldots, U_n$ independientes y uniformes en el intervalo unidad. Evaluando f en estos puntos, se puede obtener el estimador de Monte Carlo de esta integral como:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i)$$

Si f es integrable en el intervalo unidad, entonces por la ley de los grandes números se obtiene que $\hat{\alpha}_n \to \alpha$ con probabilidad 1 cuando $n \to \infty$.

Si f es cuadrado integrable y se define:

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 \mathrm{d}x$$

entonces el error $\hat{\alpha}_n - \alpha$ en el estimador de Monte Carlo se distribuye según una normal con media 0 y con una desviación $\sigma_f/\sqrt{n}$. El paramétro σ_f puede ser estimado usando la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma_f}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2$$

Obtener un error del tipo $\sigma_f/\sqrt{n}$ es un punto central en los métodos de Monte Carlo. Reducir el error a la mitad implica simular 4 veces más puntos para la estimación, esto es $O(n^{-1/2})$. Es importante destacar que el orden de convergencia $O(n^{-1/2})$ es independiente de la dimensión de la integral, lo que hace que el método de Monte Carlo no sea atractivo para calcular integrales de una dimensión baja, pero interése para problemas más complejos con una alta dimensionalidad. Por ejemplo, la regla trapezoidal de integración en d dimensiones, tiene un orden de convergencia $O(n^{-2/d})$ para integrandos doblemente diferenciables. Esta degradación en convergencia existe en todos los métodos numéricos deterministas. Por lo que los métodos de Monte Carlo, son atractivos cuando las integrales son de una dimensión grande.

La valoración de derivados, implica el cálculo de valores esperados de funcionales complejos sobre caminos aleatorios. El método de Monte Carlo puede ser aplicado para calcular valores aproximados de estas cantidades. Por ejemplo, se considera un derivado de estilo Europeo sobre un subyacente cuyo valor en t se denota como X_t y que en un tiempo futuro T paga una cantidad correspondiente a un funcional F de la trayectoria seguida por el subyacente $\{X_s, t \leq s \leq T\}$ entre el tiempo actual y el vencimiento del contrato. Por conveniencia, se denota a este camino como $X_{t,T}$.

El precio libre de arbitraje bajo la medida riesgo neutral equivalente $\mathbb{Q}$ en el instante t del derivado viene dado por:

$$V(t) = E_t^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(u,X_u)\mathrm{d}u} F(X_{t,T}) \right) \tag{1.52}$$

Si de alguna manera somos capaces de generar muestras independientes e identicamente distribuidas de $X_{t,T}$, esto es $x_{t,T}^{(1)}, x_{t,T}^{(2)}, \ldots, x_{t,T}^{(n)}$. El estimador de Monte Carlo de (1.52) es:

$$V(t) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\int_t^T r(u,x_{t,u}^{(i)})\mathrm{d}u} F(x_{t,T}^{(i)}) \tag{1.53}$$

El algoritmo de valoración de Monte Carlo que resuelve (1.53) es el siguiente:

1. Fijar un n grande.

2. Generar n caminos independientes $x_{t,T}^{(1)}, x_{t,T}^{(2)}, \ldots, x_{t,T}^{(n)}$ del proceso X en $[t, T]$.

3. Calcular el factor de descuento y el pay-off para cada uno de los caminos simulados $x_{t,T}^{(i)}$.

4. Calcular el valor presente del pay-off para cada uno de los caminos, esto es $V^{(i)} = e^{-\int_t^T r(u, x_{t,u}^{(i)})\mathrm{d}u} F(x_{t,T}^{(i)})$.

5. Calcular la media de los $V^{(i)}$.

Como principales referencias en métodos de Monte Carlo se han seguido el libro de Glasserman [39] y el de Rubinstein [83].

1.3.2 Generadores de números aleatorios

Los generadores de números aleatorios son procedimientos o rutinas utilizadas para generar una secuencia de números de naturaleza aleatoria. Para ellos disponen de algoritmos deterministas, que son implementados como funciones de biblioteca (Rand, Random, Rand, Randomize, etc.), en los distintos lenguajes de programación existentes, de manera que cualquier usuario pueda utilizar éstos en sus aplicaciones o programas.

La mayoría de generadores de números aleatorios que se usan actualmente son casos especiales del generador propuesto por D. H. Lehmer [60], en el cual se escogen cuatro números enteros no negativos de la siguiente forma:

x_0	el valor inicial o semilla	$x_0 \geq 0$
a	el multiplicador	$a \geq 0$
c	el incremento	$c \geq 0$
m	el módulo	$m \geq x_0, m > a, m > c$

La secuencia deseada de números aleatorios independientes e identicamente distribuidos (iid) es obtenida como sigue:

$$x_{j+1} = (ax_j + c) \bmod m, \text{ siendo } 0 \leq x_j < m \ \forall j \tag{1.54}$$

Esta es conocida como una secuencia lineal de congruencias o generador lineal de congruencias.

Los números generados corresponden siempre al resto de la división de $(ax_j + c)$ entre m, por lo que los posibles valores que se obtendrán son $0, 1, \ldots, m-1$. Lo anterior indica que los números de la sucesión son completamente deterministas. La aleatoriedad está asociada con el orden de aparición de éstos dentro de la secuencia. Para un valor fijo del módulo m, dicho orden depende de los tres números restantes: a, c y x_0.

Al dividir los números de la sucesión entre el módulo m, se obtiene números aleatorios estandarizados, es decir, con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, los cuales, mediante métodos de transformación, como el de la transformada inversa, permiten la generación de números aleatorios con diferentes distribuciones de probabilidad.

La semilla x_0 vuelve a aparecer después de una serie de iteraciones, y genera un ciclo de números que se repite indefinidamente. Esta propiedad es común para todas las secuencias que tienen la forma $x_{j+1} = f(x_j)$. El ciclo repetitivo origina el periodo de la sucesión, el cual corresponde al número de términos diferentes generados en la secuencia, y su longitud se denota por $\lambda(m)$. Se tiene que: $x_0 = x_{\lambda(m)} = \ldots = x_{k\lambda(m)}, k \in \mathbb{Z}^+$

El máximo periodo posible se denota con $\lambda^*(m)$; éste se obtiene cuando cada uno de los potenciales residuos $[x_{j+1} = (ax_j + c) \bmod m]$ aparece exactamente una vez en la secuencia antes de que la semilla x_0 se repita. Si $c \neq 0$, el generador de Lehmer también se conoce como el Método Mixto de Congruencias $[x_{j+1} = (ax_j + c) \bmod m]$. Su ventaja radica en su periodo completo que cubre el conjunto de m números diferentes cuando se tiene a m por el módulo. Las condiciones para la elección del módulo, multiplicador y semilla son dadas por Knuth (1981) y escapan del objetivo de esta tesis.

Si $c = 0$, el generador de Lehmer es llamado el Método Multiplicativo de

Congruencias. Su principal atractivo es que las secuencias generadas presentan un mayor grado de aleatoriedad; su desventaja es que el periodo se reduce con relación al Método Mixto.

El siguiente cuadro muestra módulos y multiplicadores de siete generadores de congruencia lineal que se han recomendado en la literatura. En cada caso, el módulo m es un número primo grande que no excede a $2^{31}-1$. Éste es el entero más grande que puede ser representado en 32 bits (asumiendo que un bit es usado para determinar el signo). Cada multiplicador a en la tabla, es una raiz primitiva de su correspondiente módulo, por tanto, todos los generadores en la tabla tienen periodo completo. El primer generador de la lista fue llamado *minimal standard* por Park y Miller [78]; aunque ampliamente usado, parece ser inferior a los otros listados. Entre los generadores restantes, los identificados por Fishman and Moore [36] parecen tener mejor uniformidad, mientras que los de L'Ecuyer [57], ofrecen una ventaja computacional resultante de tener valores comparativamente más reducidos de a (En particular, $a < \sqrt{m}$).

Módulo m	Multiplicador a	Referencia
$2^{31}-1$	16807	Lewis,Goodman,and Miller
(=2147483647)		Park and Miller
	39373	L'Ecuyer
	742938285	Fishman and Moore
	950706376	Fishman and Moore
	1226874159	Fishman and Moore
2147483399	40692	L'Ecuyer
2147483563	40014	L'Ecuyer

Tabla 1.1: Diferentes métodos de congruencia lineal para la generación de números aleatorios uniformes en el intervalo unidad.

1.3.3 Métodos generales de muestreo

Tras una introducción a la generación de números aleatorios uniformes iid, de ahora en adelante, se puede asumir la disponibilidad de una secuencia ideal de los mismos. Más precisamente, se supone la disponibilidad de una secuencia

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ de variables aleatorias iid, satisfaciendo:

$$P(U_i \leq u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

Es decir, cada una distribuida uniformemente entre 0 y 1. Un algoritmo de simulación transforma estas uniformes iid en trayectorias muestrales de procesos estocásticos. La gran mayoria de estas simulaciones utilizan variables aleatorias o vectores aleatorios de distribuciones distintas de la uniforme.

En esta sección, se presentan dos de las técnicas más utilizadas en general para obtener variables o vectores aleatorios con diferentes distribuciones de probabilidad a partir de las distribuciones uniformes. El método de la transformada inversa y el método del rechazo.

1.3.3.1 Método de la transformada inversa

Se pretende generar una realización de variables aleatorias X iid con función de distribución $F(x) = P(X \leq x)$ para todo x, el método de la transformada inversa establece que:

$$X = F^{-1}(U),\ U \sim U(0,1) \tag{1.55}$$

donde F^{-1} es la inversa de F y $U(0,1)$ denota la distribución uniforme en $[0,1]$. Incluso cuando F no tiene inversa explícita, el método es todavía aplicable mediante la evaluación numérica de F^{-1}. Computar $F^{-1}(u)$ es equivalente a encontrar la raíz de la ecuación $F(x) - u = 0$. Para una función de distribución F con densidad f, el método de Newton para encontrar raices produce la secuencia de iteraciones:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n) - u}{f(x_n)} \quad \text{dado un } x_0 \text{ inicial.}$$

El método es rara vez el más rápido para el muestreo de una distribución, pero tiene características importantes que lo hacen atractivo como por ejemplo, que requiere de sólo una variable aleatoria uniforme para cada muestra generada.

1.3.3.2 Método del rechazo

El método del rechazo, introducido por Von Neumann, es uno de los mecanismos más aplicados para la generación de muestras aleatorias. Este método genera muestras de una distribución objetivo, en primer lugar, generando candidatos de una distribución más conveniente y luego rechazando un subconjunto de los candidatos generados.

Se desea generar muestras de variables aleatorias iid de una densidad f definida en un conjunto χ. Este podría ser un subconjunto de la recta real, o un conjunto más general. Sea g una densidad de χ de la cual, se saben generar muestras y con la propiedad $f(x) \leq cg(x)$ para todo $x \in \chi$ para alguna constante c. En el método del rechazo, se genera una muestra x de g y se acepta con probabilidad $f(x)/cg(x)$; esto puede ser implementado por muestreo uniforme de U sobre $(0, 1)$ y aceptando x si $U \leq f(x)/cg(x)$. Si x es rechazada, un nuevo candidato es muestreado mediante g y el test de aceptación es aplicado de nuevo. El proceso se repite hasta que la prueba de aceptación se pasa; el valor aceptado es devuelto como una muestra de f. A continuación mostramos una implementación genérica del método:

1. Generar x de la distribución g
2. Generar U de $U(0, 1)$
3. Si $U \leq f(x)/cg(x)$

   Retorna x

   De otra manera

   Ir al Paso 1

1.3.4 Variables y vectores aleatorios normales

Muchos modelos de simulación tienen como componentes básicos variables aleatorias normales. Se comienza con un breve repaso de las propiedades básicas de distribuciones normales.

Se denota por *Estándar* a la distribución normal con media 0 y varianza 1 y por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ al hecho de que X sea una variable aleatoria normalmente

distribuida con media μ y varianza σ^2,$\sigma > 0$. Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

Por tanto, dado un método para generar muestras $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ de la distribución normal estándar, se puede generar muestras $X_1, X_2, \ldots, X_n$ procedentes de $N(\mu, \sigma^2)$ tomando $X_i = \mu + \sigma Z_i$. Por lo que, basta con examinar los métodos de muestreo de $N(0,1)$.

Una distribución normal d-dimensional caracterizada por un vector de medias μ de d componentes y una matriz $d \times d$ de covarianzas Σ, se denota como $N(\mu, \Sigma)$. Σ debe ser simétrica y semidefinida positiva. Esto es equivalente a la exigencia de que todos los valores propios de Σ sean no negativos (Como matriz simétrica, Σ tiene valores propios reales). Si Σ fuese definida positiva (Todos sus valores propios positivos), entonces la distribución normal $N(\mu, \Sigma)$ tiene como función densidad:

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Siendo $|\Sigma|$ el determinante de Σ. La normal estándar d-dimensional $N(0, I_d)$, con I_d la matriz identidad $d \times d$, es el caso especial

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right)$$

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ (es decir, si el vector aleatorio X tiene distribución normal multivariante), entonces su i-ésima componente X_i tiene distribución $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, con $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$. La i-ésima y la j-ésima componentes se corresponde con la covarianza:

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \Sigma_{i,j}$$

La correlación entre X_i y X_j viene dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Dos propiedades adicionales de la distribución normal multivariante que

merecen especial mención:

Propiedad de transformación lineal: Cualquier transformación lineal de un vector normal, es normal de nuevo:

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$$

Para cualquier vector μ con d componentes, matriz Σ $d \times d$ y cualquier matriz A $k \times d$; para cualquier k.

Función Generadora de Momentos: Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ con X d-dimensional, entonces:

$$E[exp(\theta^T X)] = \exp(\mu^T \theta + \frac{1}{2}\theta^T \Sigma \theta) \text{ para todo} \theta \in \mathbb{R}^d$$

1.3.5 Generación de variables aleatorias normales

A continuación se discuten algoritmos para generar muestras de distribuciones normales univariantes. Como se ha señalado anteriormente, es suficiente con considerar el muestreo de una $N(0, 1)$. Si se supone la disponibilidad de una secuencia $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$ y se consideran los métodos para la transformación de estas variables aleatorias uniformes a variables aleatorias normalmente distribuidas.

1.3.5.1 Método de Box-Muller

El método de Box-Muller [15] quizás es el método más sencillo de implementar (aunque no necesariamente el más rápido o el más conveniente). Este algoritmo genera una muestra de la normal estándar bivariante. El algoritmo está basado en las dos propiedades siguientes de la normal bivariante. Si $Z \sim N(0, I_2)$, entonces:

1. $R = Z_1^2 + Z_2^2$ es exponencialmente distribuida con media 2, esto significa que $P(R \leq x) = 1 - e^{-x/2}$

2. Dado R, el punto (Z_1, Z_2) está uniformemente distribuida sobre el círculo de radio $\sqrt{R}$ centrado sobre el origen.

Así, para generar (Z_1, Z_2), primero se generan R y luego se eligen un punto de manera uniforme del círculo de radio $\sqrt{R}$. Para tomar una muestra de la distribución exponencial, se puede establecer $R = -2\log U_1$ con $U_1 \sim U(0,1)$ (Aplicar Método Transformada Inversa). Para generar un punto aleatorio sobre el círculo, se puede generar un ángulo aleatorio uniformemente entre 0 y 2π y luego asignándole al ángulo un punto del círculo. El ángulo aleatorio puede ser generado mediante $V = 2\pi U_2$, $U_2 \sim U(0,1)$; el correspondiente punto en el círculo tiene coordenadas $(\sqrt{R}\cos(V), \sqrt{R}\sin(V))$. El algoritmo completo es:

1. Generar U_1, U_2 independendientes $U(0,1)$
2. $R \leftarrow -2\log U_1$
   $V \leftarrow 2\pi U_2$
   $Z_1 \leftarrow \sqrt{R}\cos(V), Z_2 \leftarrow \sqrt{R}\sin(V)$
3. **devuelve** Z_1, Z_2

1.3.5.2 Aproximando la inversa de la normal

La aplicación del método de transformada inversa a la distribución normal implica la evaluación de Φ^{-1} donde:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

es la función distribución de la normal éstandar.A primera vista, esto puede parecer inviable. Sin embargo, se puede aproximar con una precisión suficiente para aplicaciones. A continuación se discuten algunos métodos específicos para evaluar Φ^{-1}.

Dada la simetría de la distribución normal,

$$\Phi^{-1}(1-u) = -\Phi^{-1}(u),\ 0 < u < 1$$

basta aproximar Φ^{-1} en el intervalo $[0.5, 1)$ (o el intervalo $(0, 0.5]$)y luego utilizar la propiedad de simetría para extender la aproximación al intervalo

entero. Beasley-Springer [39] proporcionan una aproximación racional:

$$\Phi^{-1}(u) \approx \frac{\sum_{n=0}^{3} a_n (u - \frac{1}{2})^{2n+1}}{1 + \sum_{n=0}^{3} b_n (u - \frac{1}{2})^{2n}}$$

Para $0.5 \leq u \leq 0.92$, con constantes a_n, b_n:

a_0=2.506628238	b_0=−8.4735109301
a_1= −18.615000625	b_1=23.083367437
a_2=41.391197735	b_2=−21.062241018
a_3=−25.41060496	b_3=3.130829098

Para $u > 0.92$ usan una función racional de $\sqrt{\log(1-u)}$.

Por otra parte, Moro [39] consigue una mayor precisión en las colas sustituyendo la segunda parte de la aproximación de Beasley-Springer con una aproximación de Chebyshev:

$$\Phi^{-1}(u) \approx g(u) = \sum_{n=0}^{8} \{c_n \left[\log\{(-\log\{(1-u)\})\}\right]^n, \ 0.92 \leq u < 1$$

Con constantes c_n:

c_0=0.3374754822726147 c_1=0.9761690190917186 c_2=0.1607979714918209
c_3=0.0276438810333863 c_4=0.0038405729173609 c_5=0.0003951896511919
c_6=0.0000321767881768 c_7=0.0000002888167364 c_8=0.0000003960315187

Usando la regla de la simetría, se tiene $\Phi^{-1}(u) \approx -g(1-u)$ para $0 < u \leq 0.08$. Con esta modificación, encuentra un error máximo absoluto de 3×10^{-9}.

Un tercer método para el cálculo de la transformada inversa, es el uso del método de Newton-Raphson, el cual se basa en la resolución numérica de $\Phi(x) = u$ mediante la siguiente secuencia de iteraciones:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n) - u}{\phi(x_n)}$$

Con punto inicial recomendado $x_0 = \pm\sqrt{|-1.6 \log(1.0004 - (1-2u)^2)|}$ donde el signo en va en función de si $u \geq 0.5$ o $u < 0.5$ El método de encontrar la

raíz es útil, cuando una precisión es más importante que la velocidad.

1.3.5.3 Generación de normales multivariantes

Una distribución normal multivariante $N(\mu, \Sigma)$ se especifica por su vector de medias μ y su matriz de covarianas Σ. La matriz de covarianzas puede ser especificada implícitamente mediante los elementos de su diagonal σ_i^2 y las correlaciones ρ_{ij} como se vió en las propiedades básicas. Esto es en forma matricial:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1d} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & & \rho_{2d} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{1d} & \rho_{2d} & \cdots & \rho_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_d \end{pmatrix}$$

De la propiedad de transformacion lineal, se sabe que si $Z \sim N(0, I)$ y $X = \mu + AZ$, entonces $X \sim N(\mu, AA^T)$. Usando cualquiera de los métodos discutidos se puede generar variables aleatorias normales estándar independientes $Z_1, \ldots, Z_d$ y reunirlas en un vector $Z \sim N(0, I)$. Por lo que el problema de la toma de muestras de la normal multivariante $N(\mu, \Sigma)$ se reduce a encontrar una matriz A tal que $AA^T = \Sigma$. Para resolver este problema se recurre a la factorización Cholesky [34] de Σ:

$$A_{ii}^2 = \Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2 \quad \text{para los elementos de la diagonal principal, y:}$$

$$A_{ij} = \frac{\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik} A_{jk}}{A_{jj}} \quad \text{para el resto de los elementos.}$$

Donde A_{ij} son los elementos de la matriz A.

1.3.6 Variables aleatorias procedentes de otras distribuciones

A continuación se presentan algoritmos para generar variables aleatorias procedentes de las distribuciones continuas y discretas más usadas. De los algoritmos disponibles, se han tratado de seleccionar aquellos que son razonablemente eficientes y relativamente sencillos de implementar.

1.3.6.1 Distribución exponencial

Se comienza aplicando el método de la transformada inversa a la distribución exponencial. Si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces su función de distribución acumulada F viene dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

Por tanto, resolviendo $u = F(x)$ en funcion de X da:

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

Viendo que $U \sim U(0,1)$ implica $1 - U \sim U(0,1)$, se obtiene el siguiente algoritmo:

1. Generar $U \sim U(0,1)$
2. Calcula $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ como variable aleatoria de la $Exp(\lambda)$

1.3.6.2 Distribución Bernoulli

Si $X \sim Ber(p)$ iid entonces su función de cuantía tiene la siguiente forma

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1$$

Donde p es la probabilidad de éxito. Aplicando el método de la transformada inversa se obtiene de forma fácil el siguiente algoritmo de generación:

1. Generar $U \sim U(0,1)$

2. Si $U \geq p$, devuelve $X = 1$; de otra manera, devuelve $X = 0$

1.3.6.3 Distribución Binomial

Si $X \sim Bin(n, p)$ iid entonces su función de cuantía tiene la siguiente forma

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.56}$$

Se recuerda que una variable aleatoria binomial X iid se puede ver como el número total de éxitos en n experimentos Bernoulli iid, cada uno con probabilidad de éxito p. Denotanto al resultado del i-ésimo intento como $X_i = 1$ (éxito) o $X_i = 0$ (fallo), se puede reescribir $X = X_1 + \ldots + X_n$ con $\{X_i\}$ siendo $Ber(p)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El algoritmo más simple que puede escribirse como sigue:

1. Generar variables aleatorias independientes igualmente distribuidas $X_1 + \ldots + X_n$ con distribución $X \sim Ber(p)$ iid

2. Generar $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ como variable aleatoria con distribución $Bin(n, p)$

Puesto que el coste computacional del algoritmo es proporcional a n, se tiene la motivación de buscar métodos alternativos para n grande. Por ejemplo, se puede considerar la distribución normal como una aproximación de la binomial. En particular, por el teorema central del límite, a medida que aumenta n, la distribución de X se acerca a la de $Y \sim N(np, np(1-p))$.

Así, para obtener una variable aletaoria binomial, se genera Y de la $N(np, np(1-p))$ y se trunca al entero no negativo más cercano. Equivalentemente, se genera $Z \sim N(0, 1)$ y se establece

$$\max\left\{0, \left\lceil np - \frac{1}{2} + Z\sqrt{np(1-p)} \right\rceil\right\}$$

como una muestra aproximada de la distribución $Bin(np)$. Donde $\lceil \alpha \rceil$ denota la parte entera de α. Se debe considerar el uso de l a aproximación normal para $np > 10$ con $p \leq \frac{1}{2}$ y para $n(1-p) > 10$ con $p < \frac{1}{2}$.

Merece la pena comentar, que si $Y \sim Bin(n,p)$, entonces $n - Y \sim Bin(n, 1-p)$. Por tanto, para mejorar la eficiencia, uno puede elegir generar $X \sim Bin(n,p)$ iid de acuerdo a

$$X = \begin{cases} Y_1 \sim Bin(n,p) & si\ p \leq \frac{1}{2} \\ Y_2 \sim Bin(n,1-p) & si\ p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1.3.6.4 Distribución de Poisson

Si $X \sim Poi(\lambda)$ iid, su función de cuantía tiene la forma

$$f(n) = \frac{e^{-n}\lambda^n}{n!},\ n = 0, 1, \ldots$$

Donde λ es un parámetro positivo que representa la frecuencia esperada del fenómeno modelado por la distribución. Existe una relación muy estrecha entre las variables aleatorias de Poisson y la exponencial. En particular, una variable aleatoria X de Poisson puede ser interpretada como el máximo número de variables exponenciales independientes igualmente distribuidas (con parámetro λ) cuya suma no exceda 1. Esto es

$$X = \max\left\{ n : \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq 1 \right\}$$

Donde las $\{Y_i\}$ son independientes y $Exp(\lambda)$ distribuidas. Puesto que $Y_j = -\frac{1}{\lambda}\ln U_j$, con $U_j \sim U(0,1)$, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$X = \max\left\{ n : \sum_{j=1}^{n} -\ln U_j \leq \lambda \right\} = \max\left\{ n : \prod_{j=1}^{n} U_j \geq e^{-\lambda} \right\}$$

Esto conduce al siguiente algoritmo,(ver [56]):

1. Sea $n = 1$ y $a = 1$
2. Se genera $U_n \sim U(0,1)$ y $a = aU_n$
3. Si $a \geq e^{-\lambda}$, entonces $n = n + 1$ e ir al Paso 2

De otra manera, devuelve $X = n - 1$ como variable aleatoria Poi(λ)

1.3.7 Simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (sde) se usan en finanzas con el objetivo de modelizar la evolución de variables de naturaleza aleatoria como los tipos de interés, los precios de las acciones. La simulación de las sde son la piedra angular de la valoración de activos mediante el método de Monte Carlo, tal y como se ha visto en la introducción de esta sección. En este apartado se van a mostrar tres métodos diferentes para obtener simulaciones de la siguiente sde genérica:

$$\mathrm{d}X = a(X,t)\mathrm{d}t + \sigma(X,t)\mathrm{d}W_t \tag{1.57}$$

donde W_t es un movimiento Browniano estandar. Las propiedades del movimiento Browniano estandar son las siguientes:

1. $W_0 = 0$
2. La funcion $t \to W(t)$ es continua.
3. Los incrementos $W_t - W_{t-1}$ son independiente de $W_{t-1} - W_{t-2}$.
4. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ donde $N(a,b)$ es la distribución normal con media a y varianza b.

Cada uno de los métodos que se van a desarrollar a continuación se basan en:

1. La densidad de transición.
2. La solución exacta de la dinámica de la sde.
3. La solución aproximada de la dinámica de la sde.

Estos métodos simulan los valores de cada camino en un conjunto discreto de instantes de tiempo $t_1, \ldots, t_n$ y, mediante interpolación, se construyen trayectorias continuas. Se consideran los siguientes supuestos a la hora de las simulaciones:

- El instante inicial es $t_0 = 0$
- El valor inicial de la variable de estado es x_0
- Se divide el intervalo $[0, T]$ en n intervalos equiespaciados, esto es $t_0, t_1, \ldots, t_n$ donde $t_i - t_{i-1} = \Delta t = T/n$.

1.3.7.1 Densidad de la transición

Este método sólo puede ser realizado si se conoce la densidad de probabilidad $p(s, x_s|t, x_t)$ para cualquier par de instantes del tiempo consecutivos. En muchos procesos estocásticos, se tiene la capacidad de obtener la densidad o la función característica. En caso de tener acceso a la segunda, mediante inversión de Fourier se obtiene la densidad. Muchas modelizaciones del subyacente incluyen saltos. Los sde con saltos no están incluidas en (1.57), sin embargo si que son conocidas sus funciones características, por lo que este método es apropiado combinado con la inversón númerica de la misma. El algoritmo es el siguiente:

1. Se inicia con $X_0 = x_0$ en $t_0 = 0$
2. Para $i = 1, \ldots, n$ simula $x_i \sim p(t_i, \cdot|t_{i-1}, x_{i-1})$.
3. Devuelve $x_0, x_1, \ldots, x_n$ como una muestra del proceso X en $[0, T]$

1.3.7.2 Solución exacta de la SDE

Este método consite en discretizar el término estocástico de la sde (1.57). Asumiendo que la solución de la sde es: $X_t = F(x_0, t, W_{0,t})$ donde $W_{0,t} = \{W_s, t \leq 0 \leq t\}$. El algoritmo es el siguiente:

1. Se inicia con $X_0 = x_0$ y $W_0 = 0$ en $t_0 = 0$.
2. Para $i = 1, \ldots, n$ simula $W_i = W_{i-1} + \sqrt{\Delta t} z_i$, donde $z_i \sim N(0, 1)$ iid.
3. Devuelve $x_i = F(x_0, t_i, W_{0,t_i})$ para todo i.

Ejemplo: Si el precio del subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico: $\mathrm{d}X = rX\mathrm{d}t + \sigma X\mathrm{d}W_t$, entonces se tiene que $X_t = x_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ y por tanto mediante la discretización anterior se llega a que $x_i = x_{i-1}\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_i\right)$ o lo que es lo mismo, $x_i = x_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{i} z_j\right)$

1.3.7.3 Aproximación de la dinámica de la SDE

A veces no es posible obtener la solución exacta a la sde, por tanto, se va a plantear una discretización de **Euler-Maruyama** [54] de (1.57): $x_{i+1} - x_i = a(x_i, t_i)\Delta t + \sigma(x_i, t_i)\sqrt{\Delta t}z_i$ por tanto el algoritmo es el siguiente:

1. Se inicia con $X_0 = x_0$ y en $t_0 = 0$.

2. Para $i = 1, \ldots, n$ simula $x_{i+1} = x_i + a(x_i, t_i)\Delta t + \sigma(x_i, t_i)\sqrt{\Delta t}z_i$, donde $z_i \sim N(0, 1)$ iid.

3. Devuelve $x_0, x_1, \ldots, x_n$ como una muestra de X en $[0, T]$.

El esquema de Euler converge a la solución exacta de acuerdo a una norma $sup - L^2$, esto es, $\forall T > 0, \exists C$ tal que $\mathbb{E}\left(\sup_{t_i\in[0,T]} |x(t_i) - X(t_i)|^2\right) \leq C\Delta t$

Si se quiere aumentar la precisión, se puede añadir un término de segundo orden en la expansión en serie de la verdadera solución. Si se usa la fórmula de Itô, se puede reescribir (1.57) como

$$\mathrm{d}\ln X = \left(\mu(X, t) - \frac{1}{2}b(X, t)^2\right)\mathrm{d}t + b(X, t)\mathrm{d}W$$

Donde $\mu(X, t) = a(X, t)/X$ y $b(X) = \sigma(X, t)/X$ siempre y cuando $X > 0$ La solución de la sde es:

$$
\begin{aligned}
X_{t+\Delta t} &= X_t \exp\left\{\int_t^{t+\Delta t}\left(\mu(X_u,u)-\frac{1}{2}b(X_u,u)^2\right)\mathrm{d}u+\int_t^{t+\Delta t} b(X_u,u)\mathrm{d}W_u\right\}\\
&\approx X_t\left(1+\mu(X_t,t)\Delta t-\frac{1}{2}b^2(X_t,t)\Delta t+b(X_t,t)\Delta W_t+\frac{1}{2}b(X_t,t)^2(\Delta W_t)^2\right)\\
&= X_t+a(X_t,t)\Delta t+\sigma(X_t,t)\Delta W_t+\frac{1}{2}\frac{\sigma(X_t,t)^2}{X_t}((\Delta W_t)^2-\Delta t)\\
&\approx X_t+a(X_t,t)\Delta t+\sigma(X_t,t)\Delta W_t+\frac{1}{2}\sigma(X_t,t)\partial_x\sigma(X_t,t)((\Delta W_t)^2-\Delta t)
\end{aligned}
$$

Obteniendo así la aproximación de **Milstein** [72] para simular trayectorias de sde:
$x_{i+1} = x_i + a(x_i,t_i)\Delta t + \sigma(x_i,t_i)\sqrt{\Delta t}z_i + \frac{1}{2}\sigma^2(x_i,t_i)\Delta t(z_i^2-1)$

1.3.8 Reducción de farianza.

Los métodos de Monte Carlo han demostrado ser herramientas muy valiosas para calcular precios de derivados. Los valores derivados calculados mediante métodos de Monte Carlo, a menudo requieren calcular complejas integrales multidimensionales. Monte Carlo es atractivo en comparación con otros métodos de integración numérica, debido a la ventaja dominante de que su velocidad de convergencia es independiente de la dimensión del problema. Por otro lado, como inconveniente, es que para realizar cálculos sofisticados, hace falta un número sustancialmente grande de repeticiones para obtener resultados razonablemente precisos. Exactamente en este punto, las técnicas de reducción de la varianza (ver [39] y [50]) ocupan un lugar central. El objetivo de estos métodos, es aumentar la eficiencia y la precisión de los métodos de Monte Carlo, simplemente reduciendo la varianza de las estimaciones de la simulación.

1.3.8.1 Variables antitéticas

El método de las variables antitéticas reduce la varianza introduciendo una correlación negativa entre pares de muestras generadas aleatoriamente. El método puede tomar varias formas, pero la más usada está basada en la

observación de que si U es uniformemente distribuida en $[0,1]$, entonces $1-U$ también lo está. Las variables aleatorias U y $1-U$ forman un par de variables antitéticas, en el sentido de que un gran valor de una, implica un pequeño valor de la otra y viceversa. Estas observaciones pueden ser extendidas a otro tipo de distribución a través del método de la transformada inversa mencionado anteriormente: $F^{-1}(U)$ y $F^{-1}(1-U)$ se dice que son variables antitéticas de la distribución F, debido a que F^{-1} es una función monótona. De hecho, en el caso de distribuciones simétricas $F^{-1}(U)$ y $F^{-1}(1-U)$, tienen la misma magnitud pero distinto signo, por tanto en el caso de generar variables antitéticas de una distribución normal, bastaría con crear pares de $(z_i, -z_i)$. Para analizar este método con más precisión, se supone que se pretende estimar $\mathbb{E}[Y]$. Mediante este método, se genera una secuencia de pares de observaciones antitéticas $(Y_i, \tilde{Y}_i)$, entonces el estimador de variables antitéticas viene dado por:

$$\hat{Y}_{VA} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2}\right) \tag{1.58}$$

Es evidente observando el lado derecho de (1.58), que $\hat{Y}_{VA}$ es la media de las n variables aleatorias $\frac{Y_i+\tilde{Y}_i}{2}$. Y el teoréma central del límite implica que:

$$\frac{\hat{Y}_{VA} - \mathbb{E}[Y]}{\sigma_{AV}/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1)$$

Pero ¿ ante qué condiciones, un estimador de variables antitéticas se prefiere a un estimador de Monte Carlo basado en generaciones independientes de muestras? Para realizar esta comparación, se asume que el esfuerzo computacional de generar los pares $(Y_i, \tilde{Y}_i)$, es exactamente el doble de generar Y_i. Es decir, se ignora cualquier ahorro computacional como el de cambiar solamente de signo en el caso de funciones de densidad simétricas. Ante esta suposición, el esfuerzo computacional requerido para obtener $\hat{Y}_{VA}$, es el mismo requerido para obtener la misma media con $2n$ generaciones de Y_i independientes, y por tanto, es interesante comparar la varianza de estos dos

estimadores. Usar variables antitéticas reduce la varianza si se cumple que:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}[\hat{Y}_{VA}] < \mathrm{Var}\tfrac{1}{2n}\left[\textstyle\sum_{i=1}^{2n} Y_i\right] \quad \text{o lo que es lo mismo}\\ &\mathrm{Var}[\tilde{Y}_i + Y_i] < 2\mathrm{Var}[Y_i]\end{aligned}$$

Desarrollando un poco se tiene que $\mathrm{Var}[\tilde{Y}_i + Y_i] = 2\mathrm{Var}[Y_i] + \mathrm{Cov}[\tilde{Y}_i, Y_i]$, donde se usa que Y_i y $\tilde{Y}_i$ tienen exactamente la misma varianza al tener la misma distribución. Por tanto se reduce la varianza si $\mathrm{Cov}[\tilde{Y}_i, Y_i] < 0$ algo que por construcción del método se consigue.

1.3.8.2 Variables de control

El método del control de variables para la reducción de varianza es uno de los más efectivos y usados en la simulación de Monte Carlo. Este método explota la información sobre el error de estimación por Monte Carlo con un valor conocido para reducir el error de un estimado del cual se desconoce su valor.

Para describir este método, se toma $Y_1, \ldots, Y_n$ como una muestra de n simulaciones iid. Por ejemplo, Y_i puede ser el pay-off descontado de un derivado de la i-ésima trayectoria simulada del subyacente. Nuestro objetivo es calcular $\mathbb{E}[Y]$. Supongamos ahora que somos capaces de calcular a partir de cada Y_i otra variable X_i, de la cual sí se conoce $\mathbb{E}[X]$. Entonces, para un valor fijo de una constante b se define $Y(b) = Y - b(X - \mathbb{E}[X])$. Es fácil observar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(b) = \mathbb{E}[Y]$$

Cada $Y_i(b)$ tiene una varianza:

$$\mathrm{Var}[Y(b)] = \mathrm{Var}[Y - b(X - \mathbb{E}[X])] = \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 = \sigma^2(b) \quad (1.59)$$

Donde $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}[Y]$, $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X]$ y ρ_{XY} es el coeficiente de correlación entre X e Y. El estimador obtenido mediante variables de control de $\mathbb{E}[Y]$ tiene una

varianza $\sigma^2(b)/n$ la cual se minimiza encontrando el b^* que minimiza (1.59):

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]}$$

Sustituyendo este valor en (1.59), se obtiene que $\mathrm{Var}[Y(b)] = \mathrm{Var}[Y](1-\rho_{XY}^2)$, por lo que, cuanto mayor $|\rho_{XY}^2|$, mayor es la reducción de varianza.

1.3.9 Least Square Monte Carlo (LSMC)

LSMC es un método usado para resolver problemas de programación dinámica. El problema clásico donde se usa esta herramienta es la valoración de derivados de estilo americano, por tanto se va a introducir este método en este contexto. LSMC ha sido propuesto en diferentes variantes por diversos autores como Carriere [23], Longstaff y Schwatz [61] y Tsitsiklis y Van Roy [95], y en este apartado se muestran las ideas principales de sus artículos.

Calcular el precio de un derivado de estilo americano se resume a resolver el siguiente problema:

$$V(0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^\tau r(u)\mathrm{d}u}h(X_\tau)\right) \tag{1.60}$$

Donde los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan tiempos de paro tomando valores en $[0,T]$. En el método de LSMC se restringe a que los tiempos de paro sólo puedan ser en tiempos discretos $t_1, t_2 \ldots, t_m$, por lo que la ecuación (1.60) puede ser resuelta recursivamente mediante el siguiente problema de programación dinámica:

$$\begin{aligned} &V(t_n, X_{t_n}) = h(X_{t_n}) \\ &V(t_i, X_{t_i}) = \max\left(h(X_{t_i}), E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u)\mathrm{d}u}V(X_{t_{i+1}})\,|X_{t_i}\right]\right) \end{aligned} \tag{1.61}$$

Donde el valor esperado en (1.61) es lo que se denomina el valor de continuación y que se denorarán como $C(t_i, X_{t_i})$.

La idea del algoritmo de LSMC es sencilla, se basa en la idea de simular b caminos aleatorios del subyacente del derivado $\{X_{t_1}^j, X_{t_2}^j, \ldots, X_{t_m}^j\}$ con $j = 1, \ldots, b$ y así calcular el pay-off a vencimiento. Posteriormente y de

forma recursiva para cada uno de los caminos, se procede a aplicar (1.61), aproximando el valor de continuación mediante una regresión de combinaciones lineales de funciones del estado actual $\phi_k(X_{t_i})$ con $k = 1, \ldots, N$, con respecto a $e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(u)\mathrm{d}u} V(X_{t_{i+1}})$ que por abreviar se denotan como $DV(X_{t_{i+1}})$, esto es:

$$DV(X_{t_{i+1}}) = \sum_{k=1}^{N} \beta_{i,k}\phi_k(X_{t_i}) + \epsilon_i = \boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\phi}^\top + \epsilon_i \tag{1.62}$$

O lo que es lo mismo:

$$C(t_i, X_{t_i}) = E^{\mathbb{Q}}\left[DV(X_{t_{i+1}})\,|X_{t_i}\right] = \sum_{j=1}^{N} \beta_{i,k}\phi_k(X_{t_i})$$

Donde ϵ_i es el error cometido en la regresión en t_i, $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,N})$ son los coeficientes de la regresión estimados en t_i y $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1(X_{t_i}), \ldots, \phi_N(X_{t_i}))$ son los regresores en t_i.

Minimizar los errores mediante mínimos cuadrados en (1.62) implica que:

$$\boldsymbol{\beta}_i^T = [\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^\top]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top\mathbf{V} \tag{1.63}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1(X_{t_i}^1) & \phi_2(X_{t_i}^1) & \cdots & \phi_N(X_{t_1}^1) \\ \phi_1(X_{t_i}^2) & \phi_2(X_{t_i}^2) & \cdots & \phi_N(X_{t_i}^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(X_{t_i}^b) & \phi_2(X_{t_i}^b) & \cdots & \phi_N(X_{t_i}^b) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{V}^\top = (DV(X_{t_i}^1), DV(X_{t_i}^2), \ldots, DV(X_{t_i}^b))$$

Los coeficientes $\boldsymbol{\beta}_i$ estimados mediante la regresión en cada instante de tiempo t_i permiten conocer un estimador de los valores de continuación para cada uno de los caminos simulados en cada instante de tiempo t_i:

$$\hat{C}(t_i, X_{t_i}^j) = \boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\phi}^\top(X_{t_i}^j) \tag{1.64}$$

El algoritmo se resume de la siguiente manera:

1. Discretizar el intervalo $[0,T]$ en m intervalos equiespaciados $\Delta t = T/m$.

2. Simular b trayectorias independientes $\{X_{t_1}^j, X_{t_2}^j, \ldots, X_{t_m}^j\}$ del subyacente con $j = 1, \ldots, b$.

3. Calcular el pay-off a vencimiento: $\hat{V}_{t_m}^j = h(X_{t_m}^j), \quad j = 1, \ldots, b$

4. Mediante inducción recursiva, de $i = m-1, \ldots, 1$
   a) Dado el estimado $\hat{V}_{t_{i+1}}^j, \quad j = 1, \ldots, b$ calcular $\boldsymbol{\beta}_i^T = [\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^\top]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{V}$
   b) Calcular $\hat{V}_{t_i}^j = 1_{[h(X_{t_i}^j) \geq \hat{C}(t_i, X_{t_i}^j)]} h(X_{t_i}^j) + 1_{[h(X_{t_i}^j) < \hat{C}(t_i, X_{t_i}^j)]} DV(X_{t_{i+1}}^j)$ donde $\hat{C}(t_i, X_{t_i}^j)$ se calcula como en (1.64).

5. El precio del derivado viene dado como:

$$\hat{V}(0) = e^{-\int_0^{t_1} r(u)\mathrm{d}u} \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}(X_{t_1}^j) \right] \tag{1.65}$$

El uso de monomios o polinomios ortogonales del subyacente y del pay-off suele ser una práctica usual a la hora de escoger los regresores. Si la simulación del subyacente en el instante de tiempo t_i en la trayectoria j es S_{ij} y el pay-off $h(S_{i,j})$, un ejemplo (ver [39]) del uso de regresores para valorar un derivado sobre el subyacente podria ser: $\{1, S_{ij}, S_{ij}^2, S_{ij}^3\}$ o $\{1, S_{ij}, S_{ij}^2, S_{ij}^3, h(S_{ij})\}$.

1.3.10 Ejemplo

A continuación, se presenta el código Matlab a modo de ejemplo para valorar una opción de venta usando como regresores $\{1, S_{ij}, S_{ij}^2, S_{ij}^3, h(S_{ij})\}$:

```
function [Put,intervalo]=americanaLSMC(S0,K,r,sigma,T,b,m)
    dt = T/m;
    A=randn(b,m);
    S=zeros(b,m+1);
    S(:,1)=S0*ones(b,1);
    h=zeros(b,m+1);
    for j=2:m+1
            for i=1:b
                S(i,j) = S(i,j-1)*(1+r*dt+sigma*sqrt(dt)*A(i,j-1));
```

```
            h(i,j) = max(K-S(i,j),0);
        end
    end
    V=zeros(b,m+1);
    for i=1:b
        V(i,m+1) = h(i,m+1);
    end
    for j=m:-1:2;
        X = zeros(b,4);
        for i=1:b
            X(i,1)=1;
            X(i,2)=S(i,j);
            X(i,3)=S(i,j)^2;
            X(i,4)=S(i,j)^3;
            X(i,5)=h(i,j);
        end
        Y = zeros(b,1);
        Y(:,1) = exp(-r*dt)*V(:,j+1);
        beta=regress(Y,X);
        V(:,j)=X*beta;
        for i=1:b
            if V(i,j)>h(i,j)
                V(i,j)=exp(-r*dt)*V(i,j+1);
            else
                V(i,j)=h(i,j);
            end
        end
    end
    V0=exp(-r*dt)*mean(V(:,2));
%precio e intervalo de confianza
dest=std(V(:,2));
z=norminv(0.975,0,1);
alza=Put+z*dest/sqrt(b);
baja=Put-z*dest/sqrt(b);
intervalo=[baja,alza];
```

1.4 Modelos binomiales

En esta sección, se pretende mostrar un método computacionalmente simple para aproximar procesos de difusión mediante árboles binomiales, en el que los nodos crecen de formal lineal con el número de intervalos de tiempo.

Los modelos binomiales permiten valorar activos donde una fórmula cerrada no es accesible. Resolver un problema de valoración mediante un árbol binomial es equivalente la la resolucion de la EDP equivalente. Los modelos binomiales requieren métodos elementales a la hora de ser implementados y resultan pedagógicos cuando se introducen los primeros conceptos de valoración de activos financieros. Seguiremos para ello los pasos del artículo seminal de Nelson et al [76]. Para otros enfoques ver por ejemplo [19]

Dada la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}y_t = \mu(y,t)\mathrm{d}t + \sigma(y,t)\mathrm{d}W_t \tag{1.66}$$

Donde $\{W_t, t > 0\}$ es un movimiento Browniano estandar y $\mu(y,t)$ y $\sigma(y,t) > 0$ son la deriva y la desviación estandar de y_t e y_0 es la condición inicial. Nuestro objetivo es encontrar un proceso binomial que converja a la distribución del proceso (1.66) en el intervalo de tiempo $[0,T]$.

Lo primero que se hace es una partición del intervalo $[0,T]$ en n subintervalos iguales de longitud $h = T/n$. Para cada h se considera el proceso estocástico $\{y_{ht}\}$, que es constante entre nodos, pero que en cada nodo salta arriba o abajo con probabilidad q o $1-q$ respectivamente. Por ejemplo, si $q = 1/2$ y el salto tanto arriba como abajo tiene un tamaño de $\sqrt{h}$, es bien conocido que cuando $n \to \infty$, $\{y_{ht}\}$ converge a un movimiento Browniano.

Las probabilidades y los valores de y tras un salto hacia arriba o abajo en cada nodo se definen respectivamente como: $q_h(y,hk)$, $Y_h^+(y,hk)$ y $Y_h^-(y,hk)$. Satisfaciendo $0 \leq q_h(y,hk) \leq 1$ y $-\infty \leq Y_h^-(y,hk) \leq Y_h^+(y,hk) \leq \infty$. Para todo $y \in \mathfrak{R}^1 x[0,\infty)$ y todo $k = 0,1,\ldots,n$.

El proceso estocástico seguido por $\{y_{ht}\}$ viene dado por:

$$
\begin{aligned}
&y_{h0} = y_0 \ \text{ para todos los } h \\
&y_{ht} = y_{hk} \ \ kh \leq t < (k+1)h \\
&P[y_{(k+1)h} = Y_h^+(y_{hk}, hk)|y_{hk}] = q_h(y_{hk}, hk) \\
&P[y_{(k+1)h} = Y_h^-(y_{hk}, hk)|y_{hk}] = 1 - q_h(y_{hk}, hk) \\
&P[y_{(k+1)h} = c \neq Y_h^{\pm}(y_{hk}, hk)|y_{hk}] = 0
\end{aligned}
\tag{1.67}
$$

Como se puede apreciar, el proceso estocástico y_{ht} con valor inicial y_0 cambia de estado únicamente en los intervalos de tiempo $h, 2h, \ldots nh$. En cada salto el proceso puede hacer dos movimientos: hacia arriba a un valor $Y^+(y_{hk}, hk)$ o hacia abajo a un valor $Y_h^-(y_{hk}, hk)$, con sendas probabilidades $q_h(y_{hk}, hk)$ y $1 - q_h(y_{hk}, hk)$ respectivamente. El proceso descrito por (1.67) es una cadena de Markov.

Se necesitan los siguientes supuestos para garantizar la convergencia débil de y_{hk} a y_t:

1. Las funciones $\mu(y,t)$ y $\sigma(y,t)$ son continuas y $\sigma(y,t)$ es no negativa.
2. Con probabilidad 1, la solución de y_t es:

$$y_t = y_0 + \int_0^t \mu(y_s, s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(y_s, s)\mathrm{d}W_s$$

3. Para todo $T > 0$ y $\delta > 0$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \sup_{\substack{0\leq t\leq T \\ |y|\leq\delta}} |Y_h^{\pm}(y,t) - y| = 0 \\
&\lim_{h\to 0} \sup_{\substack{0\leq t\leq T \\ |y|\leq\delta}} |\mu_h(y,t) - \mu(y,t)| = 0 \\
&\lim_{h\to 0} \sup_{\substack{0\leq t\leq T \\ |y|\leq\delta}} |\sigma_h(y,t)^2 - \sigma(y,t)^2| = 0
\end{aligned}
$$

Con $\mu_h(y,t)$ y $\sigma_h(y,t)$ definidos como:

$$
\begin{aligned}
\mu_h(y,t) &= \{q_h(y,hk)[Y_h^+(y,hk) - y] + (1 - q_h(y,hk))[Y_h^-(y,hk) - y]\}/h \\
\sigma_h^2(y,t) &= \{q_h(y,hk)[Y_h^+(y,hk) - y]^2 + (1 - q_h(y,hk))[Y_h^-(y,hk) - y]^2\}/h
\end{aligned}
\tag{1.68}
$$

Con k igual a la parte entera de t/h.

Teorema 1: Bajo 1, 2 y 3, y_{hk} converge debilmente (en distribución) a y_t.

1.4.1 Modelo binomial computacionalmente simple

Se considera la transformación $X(y,t)$ que es diferenciable dos veces en y y una en t. Aplicando el lema de Itô se tiene que:

$$\mathrm{d}X(y,t) = \left(\mu(y,t)\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2(y,t)\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \left(\sigma(y,t)\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}W \tag{1.69}$$

Si ahora se escogen $X(y,t)$ de forma que satisfaga

$$X(y,t) = \int \frac{dy}{\sigma(y,t)} \tag{1.70}$$

Entonces el término

$$\left(\sigma(y,t)\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}W$$

de (1.69) pasa a ser $\mathrm{d}W$ y por tanto, la volatilidad instantánea del proceso $X(y,t)$ es constante. Elaborar entonces, un árbol binomial x_{hk} de $X(y,t)$ es relativamente sencillo. Para obtener el árbol binomial y_{hk} de y se realiza la transformación inversa:

$$Y(x,t) \equiv \{y : X(y,t) = x\} \tag{1.71}$$

Es fácil ver que $\partial Y/\partial x = \sigma(y,t)$ y atendiendo a la forma de x_{hk} y a (1.71) el árbol para y_{hk} toma la siguiente forma:

$$Y_h^{\pm}(x,t) = Y(x \pm \sqrt{h}, t+h) \tag{1.72}$$

Una expansión en serie de Taylor de $Y_h^{\pm}(x,t)$ entorno a $h=0$, muestra que el segundo momento de la distribución de y_{ht} definido como en (1.68) converge a la varianza instantánea cuando $h \to 0$. Finalmente se escoge $q_h(y,t)$ de tal

forma que ajustemos la deriva de la distribución como en (1.68). Por ello:

$$q_h(x,t) = \frac{h\mu(Y(x,t),t) + Y(x,t) - Y_h^-(x,t)}{Y_h^+(x,t) - Y_h^-(x,t)} \tag{1.73}$$

La especificación que se ha realizado de $Y(x,t)$, $Y_h^+(x,t)$, $Y_h^-(x,t)$ y $q(x,t)$ ha sido provisional y a menudo tiene que ser modificada en casos individuales. Por ejemplo $q_h(x,t)$ es una probabilidad, pero (1.73) puede no estar en el intervalo $[0,1]$ y por tanto se debe redefinir como:

$$q_h^*(x,t) = \max\{0, \min[1, q_h(x,t)]\} \tag{1.74}$$

En otros casos, se debe permitir a x saltar una cantidad superior a $\sqrt{h}$ para poder asegurar que la deriva se ajusta perfectamente. Además, el proceso de difusión puede tener un límite en 0 o en otra constante. Cuando el proceso llega a dicho valor ocurre que $\sigma(\cdot,t) = 0$ y por tanto (1.70) tiene que ser modificada.

El próximo objetivo es establecer formalmente las condiciones suficientes para que un árbol binomial computacionalmente simple satisfaga las condiciones del teorema 1. Primero se va a considerar el caso en el cual $\sigma(\cdot,\cdot)$, no tiene ninguna singularidad y posteriormente el caso en el que si las tiene.

1.4.1.1 Ninguna singularidad en $\sigma(y,t)$

En este caso y como se ha expuesto anteriormente, se define $X(y,t)$ como:

$$\begin{aligned} X(y,t) &\equiv \int \frac{dy}{\sigma(y,t)} \\ x^U(t) &\equiv \lim_{y\to\infty} X(y,t) \\ x^D(t) &\equiv \lim_{y\to-\infty} X(y,t) \end{aligned}$$

Y se asumen los siguientes supuestos para que se cumplan las condiciones del teorema 1:

4. $x^U(t)$ y $x^D(t)$ son constantes, y la definición de la transformada inversa

se convierte en:

$$Y(x,t) = \begin{cases} y : X(y,t) = x & \text{si } x^L < x < x^U \\ \infty & \text{si } x^U \leq x \\ -\infty & \text{si } x \leq x^L \end{cases}$$

5. $\mu(y,t)$ y $\sigma(y,t)$ son continuas en todo punto. Para cada $R > 0$ y para cada $T > 0$ existe un número $\Lambda_{T,R} > 0$ tal que:

$$0 \leq \inf_{\substack{0 \leq t \leq T \\ |y| \leq R}} \sigma(y,t) - \Lambda_{T,R}$$

   Esta condición asegura la no singularidad de $\sigma(y,t)$.

6. y_t no puede ser explosivo, esto es:

$$\lim_{B \to \infty} P(\sup_{0 \leq t \leq T} |y_t| > B) = 0$$

7. Las primeras y segundas derivadas de Y respecto de x y t y de σ respecto de y y t tienen que estar bien definidas y acotadas.

Teorema 2: Bajo los supuestos 4-7 y para $h > 0$ se define el árbol binomial para x_{ht} con $x_{h0} = X(y_0, 0)$ como:

$$x_{h(k+1)} = \begin{cases} x_{hk} + \sqrt{h} & \text{con probabilidad } q_h^*(x_{hk}, hk) \\ x_{hk} - \sqrt{h} & \text{con probabilidad } 1 - q_h^*(x_{hk}, hk) \end{cases} \tag{1.75}$$

Se define el árbol $y_{hk} = Y(x_{hk}, hk)$. Por construcción el árbol es computacionalmente simple y converge en distribución al proceso y_t cuando $h \to 0$, donde y_t es la solución a (1.66).

1.4.1.2 Singularidad en $y = 0$: $\sigma(0,t) = 0$, $\mu(0,t) \leq 0$

En este caso, el coeficiente de difusión desaparece cuando $y = 0$ aunque la deriva del proceso puede ayudar a que y vuelva a un valor superior. Esta, es una especificación muy razonable ya que los precios de los activos o los tipos de

interés que se modelan con ecuaciones diferenciales estocásticas como (1.66), no son nunca (1.66). Para manejar esta situación, se tendrá que modificar algunos supuestos y definiciones anteriores.

Se define:

$$x^U(t) \equiv \lim_{y\to\infty} X(y,t)$$
$$x^D(t) \equiv \lim_{y\to 0} X(y,t)$$

Por tanto, suponiendo que x^L y que x^U son constantes, se tiene:

$$Y(x,t) = \begin{cases} y : X(y,t) = x & \text{si } x^L < x < x^U \\ \infty & \text{si } x^U \leq x \\ 0 & \text{si } x \leq x^L \end{cases}$$

En el caso que $\sigma(y,t)$ sea pequeño cerca de $y = 0$ y que $\mu(y,t)$ no sea demasiado pequeño, se necesitarán saltos múltipes para poder ajustar la deriva en el límite de la difusión. Se define entonces:

$$J_h^+(x,t) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ Y(x + j\sqrt{h}, t+h) - Y(x,t) \geq \mu(Y(x,t),t)h \end{cases} \tag{1.76}$$

y

$$J_h^-(x,t) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ \text{a) } Y(x - j\sqrt{h}, t+h) - Y(x,t) \leq \mu(Y(x,t),t)h \\ \text{o b) } Y(x - j\sqrt{h}, t+h) \leq 0 \end{cases} \tag{1.77}$$

Y se sustituye (1.72) por

$$Y_h^{\pm}(x,t) = Y(x \pm J_h^{\pm}(x,t)\sqrt{h}, t+h) \tag{1.78}$$

Los siguientes supuestos se tienen que cumplir para que el teorema 1 siga siendo válido:

8. Existe una función creciente, no negativa $\rho(u)$ tal que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 [\rho(u)]^{-2} \mathrm{d}u = \infty$$

Además, para cada $R > 0$ y $T > 0$, existe una constante $\Lambda_{T,R} > 0$ tal que:

$$\sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ |y|\leq R,\ |y^*|\leq R}} |\sigma(y^*,t) - \sigma(y,t)| - \Lambda_{T,R}\rho(|y^* - y|) \leq 0$$

$$\sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ |y|\leq R,\ |y^*|\leq R}} |\mu(y^*,t) - \mu(y,t)| - \Lambda_{T,R}|y^* - y| \leq 0$$

9. Se relaja el supuesto 7, permitiendo que $\sigma_t(0,t)$, $\sigma_y(0,t)$, $\sigma_{tt}(0,t)$, $\sigma_{yt}(0,t)$ sean infinito. Se impone también la restricción de que σ_y sea positivo en algún punto cercano a $y = 0$.

Teorema 3: Bajo los supuestos 4, 6, 8 y 9 y asumiendo $y_0 > 0$, se define x_{hk} e y_{hk} igual que en el teorema 2 pero sustituyendo (1.72) por (1.78). Por construcción, el árbol es computacionalmente simple y converge en distribución al proceso y_t cuando $h \to 0$, donde y_t es la solución a (1.66).

1.4.2 Ejemplo: CIR

Se considera el proceso de difusión autoregresivo utilizado por Cox, Ingersoll y Ross [29] para modelar los tipos de interés:

$$\mathrm{d}r = \kappa(\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r}\mathrm{d}W \tag{1.79}$$

Con $\kappa \geq 0$ $\mu \geq 0$ y la condición inicial $r = r_0$. La transformación necesaria es:

$$X(r) = \int \frac{dr}{\sigma\sqrt{r}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sigma}$$

Con $x_0 = X(r_0)$, y se define por tanto la transformada inversa:

$$R(x) \equiv \begin{cases} \frac{\sigma^2 x^2}{4} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \tag{1.80}$$

Y el árbol binomial r_{hk} que aproxima a r_t viene caracterizado por: $r_{h0} = r_0$, $Y^{\pm}(x_{hk}, hk)$ calculado según (1.78) y $q^*(x_{hk}, hk)$ segun (1.74):

$$J_h^+(x) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ 4h\kappa\mu/\sigma^2 + x^2(1-\kappa h) < (x + j\sqrt{h})^2 \end{cases}$$

$$J_h^-(x) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ \text{a) } 4h\kappa\mu/\sigma^2 + x^2(1-\kappa h) \geq (x - j\sqrt{h})^2 \\ \text{o b) } x - j\sqrt{h} \leq 0 \end{cases}$$

$$q_h^*(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{h\kappa(\mu - R(x)) + R(x) - R_h^-(x)}{R_h^+(x) - R_h^-(x)}\right] & \text{si } R_h^+(x) > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde: $R_h^{\pm} \equiv R(x \pm J_h^{\pm}(x)\sqrt{h})$.

1.4.3 Valoración de opciones

Es bien sabido, que a la hora de valorar opciones, la deriva $\mu(y,t)$ no afecta al valor de la opción. Dentro de la representación binomial del proceso de difusión seguido por un subyacente, $\mu(y,t)$ afecta a la probabilidad de un movimiento hacia arriba o hacia abajo en el árbol, pero esta probabilidad no entra en la valoración de derivados, ya que esta depende de unas pseudo-probabilidades calculadas de tal forma que no existan oportunidades de arbitraje. Bajo ausencia de arbitraje el subyacente evoluciona según un proceso de difusión riesgo neutral (ver [10]):

$$\mathrm{d}y_t^{rn} = r\mathrm{d}t + \sigma(y,t)\mathrm{d}W_t \tag{1.81}$$

Donde $r > 0$ es el tipo de interés compuesto continuo libre de riesgo. Si (1.81) satisface los supuestos del teorema 3, entonces se puede crear el árbol y_{hk}^{rn} que aproxima a y_t^{rn} de la misma forma que se ha especificado en el teorema 3. A fin de evitar oportunidades de arbitraje, se definen:

$$J_h^+(x,t) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ Y^{rn}(x + j\sqrt{h}, t+h) - \exp(rh)Y^{rn}(x,t) \geq 0 \end{cases} \tag{1.82}$$

$$J_h^-(x,t) = \begin{cases} \text{El } j \text{ mínimo impar entero positivo tal que:} \\ Y^{rn}(x - j\sqrt{h}, t+h)) - \exp(rh)Y^{rn}(x,t) \leq 0 \end{cases} \tag{1.83}$$

$$p_h(x,t) = \frac{\exp(rh)Y^{rn}(x,t) - Y_h^{rn-}(x,t)}{Y_h^{rn+}(x,t) - Y_h^{rn-}(x,t)} \tag{1.84}$$

Donde $p_h(x,t)$ es la probabilidad riesgo neutral. Si se sustituye en las expresiones anteriores $\exp(rh)$ por $1 + rh$, se obtienen las expresiones que se obtendrían directamente de aplicar el teorema 3 a (1.81). De hecho $\exp(rh) \approx 1 + rh$ cuando $h \to 0$. No se debe olvidar que el proceso (1.81) en sí mismo, no permite oportunidades de arbitraje y el uso de la medida equivalente de martingala, recae justamente en el uso de este proceso.

Para valorar un derivado $C(y,t)$, tanto de estilo europeo como americano mediante un árbol binomial, primero se tiene que construir el árbol tal y como se ha mostrado anteriormente, calculando las probabilidades riesgo neutrales y los posibles estados de la naturaleza que pueda tomar el subyacente en cada nodo. Una vez que se tiene el árbol del subyacente, procedemos a calcular el árbol binomial que sigue el valor del derivado $C(Y^{rn}, hk)$. Primero se calcula el pay-off al vencimiento del derivado en $T = nh$, esto es $C(Y^{rn}, hn) = V(Y^{rn}, hn)$ donde $V(\cdot,\cdot)$ es el pay-off que depende del subyacente a vencimiento de la opción. Si el derivado es de tipo europeo, se obtiene de forma recursiva el valor en cada nodo del árbol mediante:

Para k=$n-1, \ldots, 1$
$$C(Y^{rn}, hk) = \exp(-rh)\left[p\ C(Y^{rn+}, h(k+1)) + (1-p)C(Y^{rn-}, h(k+1))\right] \tag{1.85}$$

Donde Y^{rn}, Y^{rn+}, Y^{rn-} y p son funciones de x_{hk} y hk.

En el caso de que sea un derivado de tipo americano:

$$\begin{aligned}&\text{Para k}=n-1,\dots,1\\&C(Y^{rn},hk)=\exp(-rh)\left[p\ C(Y^{rn+},h(k+1))+(1-p)C(Y^{rn-},h(k+1))\right]\\&C(Y^{rn},hk)=\max\{C(Y^{rn},hk),V(Y^{rn},hk)\}\end{aligned} \tag{1.86}$$

En ambos casos el valor del derivado calculado en $t = 0$ mediante un árbol binomial viene dado por $V(y_0, 0) = C(Y^{rn}(x_0, h0), h0)$.

1.5 Métodos de Fourier

Los métodos basados en las transformadas de Fourier han sido muy usados en matemáticas, en física y en finanzas (ver [43] o [26]).

En los últimos años, este tipo de herramientas se han convertido en vitales para la valoración de derivados financieros (ver [22], [64], [59] [63] o [47]) y son el método natural cuando el modelado del subyacente se hace mediante procesos de Lévy. Esto es debido a que los procesos de Lévy están totalmente caracterizados por su función característica. Los subyacentes modelados mediante procesos de Lévy permiten una estructura más rica de los rendimientos de los activos permitiendo saltos, volatilidad estocástica, exceso de kurtosis o asimetría. Los métodos númericos usados son las transformadas rápidas de Fourier (FFT), que permiten con un coste computacional relativamente bajo calcular valores de derivados con diferentes pay-off y bajo distintos procesos de Lévy, utilizando una metodología común.

1.5.1 Propiedades de las transformadas de Fourier

Primero se presenta la definición de las transformadas de Fourier (TCF) y repasan sus propiedades más fundamentales. Sea $f(x)$ una función a trozos continua y real en $(-\infty, \infty)$ que satisface la siguiente condición de integrabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty \tag{1.87}$$

Entonces la transformada de Fourier de $f(x)$ está definida por:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) \mathrm{d}x \tag{1.88}$$

y la transformada inversa por:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\omega) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \mathrm{d}\omega \tag{1.89}$$

A continuación se presentan sus propiedades más interesantes:

1. Diferenciación: $\mathcal{F}[f'] = i\omega \mathcal{F}[f]$
2. Modulación: $\mathcal{F}[e^{i\lambda x} f] = \mathcal{F}[f](\omega + \lambda)$
3. Convolución: Si $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(x) \mathrm{d}y$ entonces $\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$
4. Relación de Parseval: Si $< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x) \mathrm{d}x$ entonces $< f, g >= \frac{1}{2\pi} < \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] >$

1.5.2 Transformada discreta de Fourier

Dada una secuencia $\{x_k\}$, $k = 0, \ldots, N-1$ se denota como transformada discreta de Fourier (TDF) a otra secuencia $\{X_k\}$, $k = 0, \ldots, N-1$ definida:

$$D_k\,[z] = X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-2\pi i j k / N} \tag{1.90}$$

La transformada discreta inversa viene dada por:

$$D_k^{-1}\,[X] = x_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j e^{2\pi i j k / N} \tag{1.91}$$

Si se escribe $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^\top$ y $\mathbf{X} = (Z_0, Z_1, \ldots, X_{N-1})^\top$, entonces (1.90) se puede escribir como:

$$\mathbf{X} = F^N \mathbf{x} \tag{1.92}$$

Donde $F^N_{k,j} = e^{2\pi i(j-1)(k-1)/N}$ con $1 \leq k, j \leq N$
El cálculo de $\mathbf{X}$ requiere N^2 operaciones, sin embargo si N es una potencia de 2, existen una familia de algoritmos llamados FFT (Fast Fourier Transform) que permiten calcular la TDF en $\frac{1}{2}N\log_2 N$ operaciones. Existe una amplia literatura acerca de estos métodos (ver [8]) y está incluido en paquetes de cálculo numérico como Matlab.

A continuación se introduce un esquema convencional para evaluar TCF mediante FFT. Asumamos que $f(x)$ es cero fuera del intervalo $(-a/2, a/2)$, definimos entonces $\Delta x = a/N$ y definimos las abscisas en el espacio de origen como $x_j = (j - N/2)\Delta x$ con $0 \leq j < N$. El eje de abscisas para el espacio de la transformada se define como $\omega_k = \frac{2\pi}{N\Delta x}(k - N/2)$ con $0 \leq k < N$. Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} F[f](\omega_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega_k x} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-ix_j\omega_k}\Delta x \\ &= \Delta x e^{\pi i(k-N/2)} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{\pi ij} e^{-2\pi ijk/N} = (-1)^k \Delta x D_k \left[\{(-1)^j f(t_j)\}\right] \end{aligned} \tag{1.93}$$

La última expresión en (1.93) muestra la relación que hay entre la TCF y TDF. Análogamente para la relación entre las transformadas inversas se obtiene:

$$F^{-1}[\hat{f}](x_k) \approx (-1)^k \frac{1}{\Delta x} D_k^{-1} \left[\{(-1)^j \hat{f}(\omega_j)\}\right] \tag{1.94}$$

1.5.3 Procesos de Lévy

Un proceso estocástico adaptado en el espacio real $\{X_t | t \geq 0\}$ con $X_0 = 0$ es llamado un proceso de Lévy (ver [84]) si cumple las siguientes propiedades:

1. Incrementos independientes. Para toda secuencia creciente de tiempos $t_0, t_1, \ldots, t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0} \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

2. Homogeneidad temporal: La distribución de $\{X_{t+s} - X_s; t \geq 0\}$ no depende de s.

3. Continuidad estocástica: Para cualquier $\epsilon > 0$, $P[X_{t+h} - X_t] \geq \epsilon] \to 0$ cuando $h \to 0$.

4. Son procesos de Cadlag.

Se asume ahora que $\{X_t | t \geq 0\}$ con $X_0 = 0$ es definido en un espacio de probabilidad riesgo neutral $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ dotado de una filtración completa $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$, entonces por el teorema de Lévy-Khintchine la función característica de X_t viene determinada por:

$$\Phi_X(\omega, t) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{i\omega X_t} \right] = \exp\left[t\Psi(\omega) \right] \tag{1.95}$$

Siendo $\Psi(\omega)$ el exponente característico

$$\Psi(\omega) = i\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega x} - 1 - x\omega 1_{|y|<1}) k(x) \mathrm{dx} \tag{1.96}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es la deriva del proceso, $\sigma \in \mathbb{R}+$ es el término de difusión y $k(x)$ es la densidad de los posibles saltos de magnitud x. El triplete $\{\mu, \sigma, k(x)\}$ especifica completamente un proceso de Lévy. Se observa que si se denomina $f_{X_t}(x)$ a la función de densidad del proceso de Lévy X_t entonces $\mathcal{F}[f_{X_t}](\omega) = \exp\left[t\Psi(-\omega) \right]$. Para obtener la condición de riesgo neutralidad, la deriva del proceso μ queda determinada una vez que el término de difusión y la densidad de Levy están especificadas. En particular se obtiene μ de tal manera que: $E^{\mathbb{Q}} \left[e^{X_1} \right] = e^r \Rightarrow \Psi(-i) = r$.

Acontinuación se presentan los exponentes característicos de algunos de los procesos de Lévy más usados en finanzas:

Geometric Brownian Motion:

$$\Psi(\omega) = i\omega\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2$$

Merton Jump Diffusion:

$$\Psi(\omega) = i\omega\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + \lambda \left(e^{i\omega\mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2\omega} - 1 \right)$$

Variance Gamma:

$$\Psi(\omega) = i\omega\mu - \frac{1}{\kappa}\log\left(1 - i\omega\nu\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\kappa\omega^2\right)$$

CGMY:

$$\Psi(\omega) = i\omega\mu + C\Gamma(-Y)\left[(M - i\omega)^Y - M^Y + (G - i\omega)^Y - G^Y\right]$$

1.5.4 Valoración de derivados bajo procesos de Lévy

Se denota por S_t y por $V(t, S_t)$ el del subyacente y del derivado en t respectivamente y por $\varphi(S_T)$ su pay-off a vencimiento. Siguiendo [47], se asume que el subyacente sigue bajo una medida riesgo neutral $\mathbb{Q}$ un proceso exponencial de Lévy $S_t = S_0 e^{X_t}$, donde X_t es un proceso de Lévy con triplete característico $\{\mu, \sigma, k(x)\}$. Entonces para que no existan oportunidades de arbitraje se cumple:

$$V(t, S_t) = E_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}V(T, S_T)\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\varphi(S_T)\right] \tag{1.97}$$

Donde el valor esperado se toma con respecto a la información o filtración $\mathcal{F}_t$ disponible en t y donde r es el tipo de interés libre de riesgo. La ecuación (1.97) implica que $v(t, X_t) = e^{r(T-t)}V(t, S_0 e^{X_t})$ se comporte como una martingala bajo la medida riesgo neutral $\mathbb{Q}$, esto es:

$$v(t, X_t) = E_t^{\mathbb{Q}}\left[v(T, X_T)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} v(T, X_t + x) f_{X_T - X_t}(x)\mathrm{d}x \tag{1.98}$$

Y si se usa la propiedad de los incrementos independientes, se obtiene que:

$$v(t, X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(T, X_t + x) f_{X_{(T-t)}}(x)\mathrm{d}x \tag{1.99}$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que $\mathcal{F}[f_{X_t}](\omega) = \exp\left[t\Psi(-\omega)\right]$ y aplicando la propiedad de la convolución se tiene que:

$$\mathcal{F}[v](t, \omega) = \mathcal{F}[v](T, \omega)e^{(T-t)\Psi(\omega)} \tag{1.100}$$

y por tanto:

$$v(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[v](T,\omega)e^{(T-t)\Psi(\omega)}\right\}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[\varphi](T,\omega)e^{(T-t)\Psi(\omega)}\right\}(x) \tag{1.101}$$

Donde en la última igualdad se ha usado que el valor de $v(T,X_T) = V(T,X_T) = \varphi(X_T)$. Finalmente se obtiene:

$$V(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[\varphi](T,\omega)e^{(T-t)\Psi(\omega)}\right\}(x) \tag{1.102}$$

Se puede utilizar una versión de (1.102) para valorar derivados de estilo americano. Para ello se discretiza el intervalo $[t,T]$ en M subintervalos equidistantes de longitud $\Delta t = \frac{T-t}{M}$ donde $t_n = n\Delta t$ con $n = 0,1,\ldots,M$ y se tiene en cuenta que $V(t,S_t) \geq \varphi(S_t)$. De esta forma y procediendo mediante un algoritmo backwards, se obtiene la siguiente relacción:

$$\begin{aligned} &v^M = V(t_M,x) = \varphi(x) \\ &\text{Para } n = M-1, M-2, \ldots, 0 \\ &v(t_n,x) = \max\left\{v^M, \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[v](t_{n+1},\omega)e^{\Delta t\Psi(\omega)}\right\}\right\}(x) \\ &V(t_n,x) = e^{-r\Delta t}v(t_n,x) \end{aligned} \tag{1.103}$$

Para valorar (1.102) y (1.103) numéricamente se hará uso de las expresiones (1.93) y (1.94), de esta forma (1.102) se obtiene mediante (ver [47]):

$$V(t,X_k) \approx e^{-r(T-t)}(-1)^k D_k^{-1}\left[\left\{D_j\left[\left\{(-1)^l\varphi(X_l)\right\}\right]e^{(T-t)\Psi(\omega_j)}\right\}\right] \tag{1.104}$$

1.5.5 Ejemplos

A continuación se presenta el código Matlab para la valoración de opciones de compra y de venta tanto europeas como americanas con los que se espera introducir de forma práctica todos los conceptos que se han visto en esta sección.

1.5.5.1 Opciones europeas

.

```
function [precio_compra,precio_venta] =...
    Fourier_Europea_BlackScholes(S, K, r, T, sigma, q, N)
dis=exp(-r*T);
%Espacio Real
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N);
v=0:(N-1);
x=(v-N/2)*dx;

%Espacio de Fourier
w=2*pi*(v-N/2)/(N*dx);

%Pay-off
s = S*exp(x);
ocompra = max(s-K,0);
oventa = max(K-s,0);

ind=(-1).^(v);
%Metodo de Fourier
char_exp_factor = ...
    exp((1i*(r-q-0.5*sigma^2).*w - 0.5*sigma^2*(w.^2))*T);
fftw('planner', 'measure');
ocompra=dis*real(ind.*ifft(fft(ind.*ocompra).*char_exp_factor));
oventa=dis*real(ind.*ifft(fft(ind.*oventa).*char_exp_factor));

%
precio_compra = interp1(s,ocompra,S,'cubic');
precio_venta = interp1(s,oventa,S,'cubic');
```

1.5.5.2 Opciones americanas

.

```
function [precio_compra,precio_venta] =...
    Fourier_Amer_BlackScholes(S, K, r, T, sigma, q, N,M)
```

```
dt=T/M;
%Espacio Real
x_min = -7.5; x_max = 7.5;
dx=(x_max-x_min)/(N);
v=0:(N-1);
x=(v-N/2)*dx;

%Espacio de Fourier
w=2*pi*(v-N/2)/(N*dx);

%Pay-off
s = S*exp(x);
ocompra = max(s-K,0);pocompra=max(s-K,0);
oventa = max(K-s,0);poventa=max(K-s,0);

ind=(-1).^(0:(N-1));
%Metodo de Fourier
char_exp_factor = ...
    exp((1i*(r-q-0.5*sigma^2).*w - 0.5*sigma^2*(w.^2)-r)*dt);
fftw('planner', 'measure');
for i=M-1:-1:0
   ocompra = real(ind.*ifft(fft(ind.*ocompra).*char_exp_factor));
   ocompra=max(ocompra,pocompra);
   oventa= real(ind.*ifft(fft(ind.*oventa).*char_exp_factor));
   oventa=max(poventa,oventa);
end
%
precio_compra = interp1(s,ocompra,S,'cubic');
precio_venta = interp1(s,oventa,S,'cubic');
```

Capítulo 2

Metodología para la estimación de la curva de tipos de interés: impacto en la valoración de derivados

2.1 Introducción

Los productos derivados de los tipos de interés, son extremadamente importantes ya que casi cualquier transacción financiera está expuesta a los mismos. Valorar este tipo de productos de forma correcta es un reto importante para la comunidad científica y financiera, y por tanto, establecer una metodología consistente y robusta, debería ser un objetivo común. En analogía con las opciones sobre acciones, los derivados sobre tipos de interés dependen de su subyacente, el tipo de interés. Sin embargo, la curva cupón cero (TSIR) no es observable al contrario que los precios de las acciones. Por tanto, la dificultad de la valoración ya no sólo radica en la elección de un proceso estocástico complejo para modelar su evolución, sino también en su estimación. Por otra parte, la importancia de la curva de volatilidades (VTS) ha crecido en las últimas décadas, particularmente debido a que se han convertido en factores clave en la valoración de cualquier clase de derivado de tipos de interés o en la medición

de riesgos financieros, donde medidas de riesgo como el VaR dependen crucialmente de dichas estimaciones. También resulta un input fundamental para implementar modelos de difusión de curvas como Hull y White [46] o Black Derman Toy [14], muy usados en la industria.

Uno de los principales problemas a la hora de estimar la VTS viene del hecho de que la TSIR no es observable. Debe ser estimada y por tanto requiere de una metodología particular. La estimación de la TSIR es un problema ampliamente estudiado en la literatura donde se han propuesto diferentes alternativas en los últimos 40 años (ver [96], [75], [68], [94], [87], [32] o [35]). Por el contrario, se ha prestado menos atención a la estimación de la VTS, (ver [62], [11], [80]), todos de la última década.

Díaz, Jareño y Navarro (DJN) [31], encuentran en su artículo que dependiendo de la metodología utilizada para estimar la TSIR existen diferencias significativas en las estimaciones de la VTS. Para estimar la TSIR, DJN usan un método paramétrico, Nelson y Siegel (NS) [75] y otro no paramétrico, Vasicek y Fong (VF) [96]. Una vez estimadas las TSIR, estiman las VTS mediante otras dos metodologías diferentes: Volatilidad histórica y EGARCH con una ventana móvil de 30 días. En su análisis concluyen que existen diferencias significativas entre las estimaciones de la volatilidad, sobre todo en el corto y en el largo plazo dependiendo de la metodología escogida para la estimación de la TSIR.

La metodología desarrollada por Nelson y Siegel es ampliamente utilizada por profesionales del mundo financiero, particularmente en bancos centrales y en publicaciones académicas. Entre sus ventajas encontramos que se trata de un modelo paramétrico que permite la interpolación y la extrapolación y sus parámetros tienen una interpretación económica.

Por otra parte, VF es uno de los métodos no paramétricos pioneros para ajustar la TSIR mediante splines exponenciales. VF es una metodología bastante flexible para ajustar muchas formas observadas de la curva y suficientemente robusto para reproducir curvas a plazo estables. VF fueron los primeros en proponer ponderaciones mayores en los errores de los precios de los bonos a corto plazo para el proceso de minimización de los errores cuadráticos medios usados en la estimación de la TSIR.

En el caso en que se aplique OLS en la estimación de la curva, en la medida en que la TSIR da igual importancia a los errores cometidos en la estimación de los precios de todos los bonos, se está dando más importancia a los errores en la estimación de los tipos de interés a largo plazo, por lo que el ajuste de la TSIR a corto plazo va a ser menos preciso. Por el contrario, si siguiendo la propuesta de VF, los errores se ponderan por la inversa de la duración de los bonos, se da mas importancia al ajuste de la curva en el corto plazo, aunque a costa de una mayor relajación en el largo plazo.

Una de las etapas en el estudio que se va a realizar en este artículo es calibrar árboles del tipo Black Derman Toy (BDT), con diferentes estimaciones de la TSIR y de la VTS con el objetivo de cuantificar las diferencias que se observan tanto en la estimación de valores de derivados de tipos de interés como sus delta[1] en función de la metodologá empleada para estimar la TSIR.

Para ello, se van a seguir los siguientes pasos. Se parte de una base de datos de bonos y letras del tesoro alemán emitidos entre 2005 y 2009 por la agencia alemana de deuda, Finanzagentur GmbH. En segundo lugar, para cada día se estiman las TSIR minimizando los errores de los precios de los bonos mediante las dos metodologías distintas usadas por DJN en su artículo, NS y VF, usando dos hipótesis alternativas sobre la varianza del error. Si se asume una estructura homocedástica en los errores de los precios de los bonos, la TSIR se estima mediante mínimos cuadrados ordinarios (OLS); alternativamente si se considera una estructura heterocedástica en los errores de los precios de los bonos, se utilizan mínimos cuadrados generalizados (GLS). Una vez que se tienen las estimaciones de la TSIR para cada uno de los días mediante las metodologías de NS OLS (NSU), NS GLS (NSW), VF OLS (VFU) y VF GLS (VFW) se procede a calcular las VTS.

Se usan dos metodologías distintas para obtener las estimaciones de la VTS. Por una parte, se usa una volatilidad histórica (desviación tipica) y por otra parte, la metodología GARCH, ambas con una ventana móvil de 30 datos[2]. Llegados a este punto, para cada uno de las fechas en la base de datos se dispone 4 estimaciones diferentes de la TSIR: NSU, NSW, VFU y VFW y

[1]Variación del precio del derivado respecto del tipo de interés.

[2]Para los primeros 30 datos no hay volatilidades calculadas.

para cada una de estas se tienen dos estimaciones de la VTS: Histórica (H) y GARCH (G). Por tanto, se disponen de 8 estimaciones de la VTS. Con ánimo de simplificar la notación, se usará la siguiente de ahora en adelante: NSUG será la TSIR estimada mediante NS OLS y la VTS mediante GARCH, VFWH será la TSIR estimada mediante VF GLS y la VTS mediante volatilidad histórica y así sucesivamente para las 8 estimaciones.

Para cada uno de los datos y con cada una de las 8 estimaciones se calibra un árbol BDT con el que se valorarán opciones sobre los bonos alemanes y se realizará un análisis comparativo sobre las discrepancias en los precios y en las deltas que se observan.

El resto del artículo se organiza de la siguiente manera: La sección 2 explica detalladamente la base de datos que se usa para el desarrollo del trabajo y se describen las metodologías para estimar las TSIR y las VTS. La sección 3 introduce los árboles de Black Derman Toy. La sección 4 introduce las opciones sobre bonos cupón cero y como valorarlas mediante un árbol BDT. La sección 5 presenta los resultados numéricos y finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo. En el apéndice se desarrolla, paso a paso, el algoritmo para la calibración del árbol BDT.

2.2 Base de datos y metodología de estimación

Para el desarrollo de este artículo se ha utilizado la base de datos Thomsom Reuters de bonos y letras del tesoro alemanes emitidos por Finanzeagentur GmbH, la agencia de deuda alemana, desde octubre de 2005 a septiembre de 2009. Los vencimientos de las letras y los bonos disponibles para realizar el cálculo de las TSIR y las VTS son de 3 y 6 meses para las letras y de 1 a 10 años para los bonos. En la base de datos se dispone para cada día y para cada bono de la siguiente información: Fecha, vencimiento, precio, cupón y tasa interna de rentabilidad.

Las curvas cupón cero se estiman mediante dos métodos alternativos: Nelson y Siegel [75] y Vasicek y Fong [96]. NS es un modelo paramétrico bastante sencillo para la estimación de la TSIR en el sentido que impone una forma funcional a la estructura de tipos a plazo. Por el contrario, VF es una

metodología no paramétrica, basada en splines exponenciales. NS tiene ciertas ventajas sobre los métodos no paramétricos. Es simple, sus resultados son más estables y los parámetros tienen una interpretación económica. Sin embargo, el modelo VF permite un mayor grado de libertad y flexibilidad que los métodos paramétricos e incorporan potencialmente un mayor espectro de formas de curvas que el modelo de NS.

2.2.1 Funciones de Nelson y Siegel

Nelson y Siegel proponen un modelo paramétrico en el cual, la curva de los tipos a plazo instantáneo tiene la siguiente forma funcional:

$$f_t(m) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \exp\left(\frac{-m}{\tau_t}\right) + \beta_{t,2} \frac{-m}{\tau_t} \exp\left(\frac{-m}{\tau_t}\right) \tag{2.1}$$

Donde el subíndice t denota la fecha de cálculo, m es el plazo y $\overline{b} = [\beta_{t,i}, \tau_t]$ con $i = \{0, 1, 2\}$ es el vector de los cuatro parámetros de los que depende el modelo y que se estimará minimizando los errores de los precios de los bonos. La relación existente entre la curva a plazo instantánea y los tipos spot al contado, viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R_t(m, \overline{b}) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u)\, du \\ &= \beta_{t,0} + (\beta_{t,1} + \beta_{t,2}) \frac{\tau_t}{m} \left(1 - exp\left(\frac{-m}{\tau_t}\right)\right) + \beta_{t,2} exp\left(\frac{-m}{\tau_t}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

En este contexto, el precio de un bono k en el instante t, $P_{k,t}$, viene dado por:

$$P_{k,t} = \sum_{j=1}^{T_k} C_{k,j} \exp\left(-R_t(m_j, \overline{b}) \cdot m_j\right) + \epsilon_k = \sum_{j=1}^{T_k} C_{k,j} D_t(m_j, \overline{b}) + \epsilon_{k,t} \tag{2.3}$$

donde $C_{k,j}$ es el j-ésimo flujo de caja generado por el bono k pagadero m_j,

$D(m_j, \bar{b})$ es el factor de descuento dependiente de los parámetros de NS, $\epsilon_{k,t}$ es el error residual y T_k es el número total de flujos de caja generados por el bono k.

Una de las ventajas del modelo NS, es que se puede dar una interpretación de los parámetros. Si se calculan los límites cuando el vencimiento tiende tanto a cero como a infinito, se observa que el parámetro β_0 corresponde con el tipo de interés a largo plazo, β_1 es la diferencia entre el tipo a corto y el tipo a largo y los parámetros β_2 y τ están relacionados con la anchura y la posición de la joroba que muchas veces se observa en las curvas de tipos. En cuanto a las desventajas conocidas del modelo, cabrá destacar sus limitaciones para replicar todas las formas de curvas observadas en el mercado.

2.2.2 Splines de Vasicek Fong

Vasicek Fong proponen usar una transformación del argumento de la función de descuento $D(t)$, de tal manera que se pueda estimar la curva de tipos de una forma más sencilla, para ello proponen el siguiente cambio de variable:

$$m = \frac{-1}{\beta} \log(1 - x), \quad 0 \leq x < 1 \tag{2.4}$$

Y

$$D(m) = D\left(\frac{-1}{\beta} \log(1 - x)\right) = G(x) \tag{2.5}$$

Si $D(m)$ puede ser aproximado mediante una función exponencial, entonces $G(x)$ puede ser ajustada mediante splines polinomiales. El parámetro β ha sido interpretado por VF como el límite de los tipos a plazo. VF proponen estimar $G(x)$ mediante splines cúbicos. En este trabajo, se han utilizado dos nodos fijos y con el mismo número de vencimientos entre ellos a la hora de hacer la estimación con los splines.

A la hora de realizar la estimación, VF asumen un modelo heterocedástico en los errores de los precios. Siguiendo a Diaz, Jareño y Navarro, en el desarrollo de este trabajo se han usado dos alternativas en la estimación, considerando homocedasticidad y heterocedasticidad en los errores de los

precios, tanto en la estimación de los parámetros de NS, como en VF.

La matriz de varianzas covarianzas de los residuos viene dada por $\sigma^2\delta_{i,j}\omega_i^2$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker descrita en su forma usual:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j \\ 0 \text{ if } i \neq j \end{cases}$$

Con $\omega_i^2 = 1$ en el caso homocedástico y $\omega_i^2 = \left(\frac{\partial P_k}{\partial Y_k}\right)^2$ en el caso heterocedástico, donde Y_k es la tasa interna de rentabilidad del bono k.

2.2.3 Estimación de la volatilidad.

A partir de cada estimación de la TSIR, se obtienen series alternativas de los tipos spot cupón cero con vencimientos entre 3 meses y 10 años. Con estos datos, se utilizan dos métodos alternativos para estimar la volatilidad correspondiente a los tipos de interés en cada uno de estos plazos. El primer método, es una estimación histórica de la volatilidad, con una ventana móvil de 30 días para cada uno de los vencimientos de los 32 tipos spot [3]. El segundo método, considera un GARCH(1,1) de la familia de modelos de volatilidad condicional.

Resumiendo, se calculan las volatilidades según las siguientes metodologías:

-**Histórica** con una ventana móvil de 30 días. Se define $R_t(T)$ como el rendimiento compuesto continuo de un bono cupón cero amortizable en T años observado en t y se define su variación diaria como $u_t(T) = ln(R_t(T)) - ln(R_{t-1}(T))$. Se calcula la variación diaria de esta manera debido a que el modelo de Black Derman Toy es lognormal. De esta forma, la metodología para el cálculo de las volatilidades es consistente con el modelo de valoración. A partir de esta definición, se calcula la volatilidad histórica del tipo cupón cero con vencimiento en T en el instante t como:

[3]Estos tipos spot vienen a ser los siguientes: 1M, 2M, 3M, ..., 1Y, 1Y3M, 1Y6M, 1Y9M, 2Y, 2Y6M, 3Y, 3Y6M, ..., 10Y.

$$\sigma_{t,H}(T) = \left(\frac{1}{30} \sum_{j=t-30}^{t-1} \left(u_j(T) - \overline{u_t}(T) \right)^2 \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

donde $\overline{u}(T)$ es la media de $u_t(T)$ durante la ventana de 30 días.

-GARCH(1,1) con una ventana móvil de 30 días. En este caso la volatilidad viene dada por:

$$\sigma_{t,G}(T) = \omega + \alpha \sigma_{t-1,G}(T) + \beta u_{t-1}(T)^2 \tag{2.7}$$

Donde los parametros α y β son estimados por máxima verosimilitud, para posteriormente hacer una predicción de la volatilidad con un horizonte de un día.

2.3 Modelo de Black Derman Toy

El propósito de este artículo es mostrar que existen diferencias significativas en la valoración de derivados de tipos de interés en función de los inputs con los que haya sido calibrado el modelo de valoración. Para ello, se utiliza como modelo de valoración los árboles de Black, Derman y Toy, que se calibran mediante la TSIR y la VTS previamente estimadas. BDT es un modelo de valoración en tiempo discreto de no arbitraje y de un sólo factor (el tipo a corto plazo), diseñado para ser consistente en el instante de valoración con la TSIR y la VTS observada. Este modelo de evolución del tipo de interés fue desarrollado por Black, Derman y Toy [14] en 1990 y ha sido ampliamente usado en bancos e instituciones financieras de todo el mundo para la valoración de caps, floors, swaption, opciones sobre bonos o cualquier clase de derivado sobre los tipos de interés. El modelo BDT se basa en las siguientes suposiciones:

- Los cambios en los tipos de interés a diferentes los vencimientos están perfectamente correlados.
- Las tasas de retorno esperadas de todos los activos en un intervalo de tiempo son iguales.

- El tipo de interés a corto plazo está distribuido lognormalmente.
- No existen costes de transacción ni impuestos.

Al igual que el modelo original de Ho y Lee, BDT fue desarrollado algorítmicamente, describiendo la evolución de la estructura de tipos de interés en tiempo discreto mediante un árbol binomial. Aunque esta construcción algorítmica es más bien opaca con respecto a la evolución del tipo a corto, Jamshidian en [48] mostró que el modelo de BDT converge en tiempo continuo hacia un proceso estocástico que sigue la siguiente ecuación diferencial:

$$d\ln r = \left[\theta(t) - \frac{\partial\sigma(t)/\partial t}{\sigma(t)}\right] dt + \sigma(t)dz \tag{2.8}$$

El modelo de BDT incorpora dos funciones del tiempo independientes entre sí, $\theta(t)$ y $\sigma(t)$ escogidas, de tal modo, que el modelo ajuste la TSIR y la VTS observadas en el momento de la calibración. En contraste con los modelos de Ho y Lee [44] y Hull y White [46], BDT plantearon un modelo en el que la distribución de tipos de interés fuese lognormal, con el fin de evitar de forma natural que los tipos de interés fueran negativos.[4]. BDT es un modelo muy usado en la industria ya que es sencillo, permite su calibración de una forma rápida (ver [27]) y replica los precios de los bonos y sus volatilidades perfectamente.

Los árboles BDT se construyen de tal manera que una vez calibrados reproduzcan los precios y las volatilidades observadas de los bonos cupón cero. Si se particiona la TSIR en intervalos de amplitud Δt, entonces la variable modelada en un árbol BDT es el tipo de interés a un periodo Δt.

Inicialmente se discretiza la curva en $i = 1, \ldots, N$ intervalos iguales de longitud Δt y se definen las siguientes variables iniciales:

- $\mathbf{P(i)}$: Precio a tiempo cero de un bono cupón cero con vencimiento $i\Delta t$.
- $\mathbf{R(i)}$: Tipo de interés bajo capitalizacion contínua de un bono cupón cero con vencimiento en $i\Delta t$.

[4]Sin embargo, en la crisis actual hemos podido observar que diferentes bonos tanto alemanes como franceses se han negociados con tasas internas de rendimiento negativas

- $\sigma_{\mathbf{R}}(\mathbf{i})$: Volatilidad [5] a tiempo 0 del tipo de interés $R(i)$.

Partiendo de que se han estimado las TSIR mediante cuatro metodologías diferentes (VF y NS en su versión OLS y GLS) y las VTS mediante una volatilidad histórica y mediante la metodología GARCH, el próximo paso es calibrar el árbol BDT para cada una de las duplas TSIR y VTS. Para construir el árbol de forma eficiente se usará el procedimiento de inducción forward desarrollado por Jamshidian [48]. Jamshidian muestra que el tipo a corto, en un determinado instante de tiempo, para un proceso del tipo BDT viene dado por la siguiente expresión:

$$r(t) = U(t)\exp(\sigma(t)z(t)) \tag{2.9}$$

Donde $U(t)$ es la mediana de la distribución de r en el instante de tiempo t, $\sigma(t)$ es la volatilidad del tipo a corto en el instante t y $z(t)$ es el nivel del movimiento Browniano. Las probabilidades riesgo neutrales de cada una de las ramas del árbol son 1/2.

A tiempo $t = 0$ existe un único estado posible para el tipo de interés a corto plazo que se denota por $j = 0$. Un instante de tiempo posterior, Δt existen dos estados $j = -1$ y $j = 1$. Para un instante de tiempo general i, existen $(i+1)$ estados diferentes para el tipo de interés $j = -i, -i+2, \ldots, i-2, i$. De acuerdo con esta discretización, el tipo de interés a corto plazo se representa mediante un árbol donde los niveles del tipo de interés a corto plazo y el factor de descuento vienen representados respectivamente por:

$$r(i,j) = U(i)\exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}) \tag{2.10}$$

$$d(i,j) = \frac{1}{1 + r(i,j)\Delta t} \tag{2.11}$$

[5] No confundir con el tipo a corto y su volatilidad, denotados en este artículo por r y $\sigma(i)$ respectivamente. Adicionalmente se debe señalar que se trata de la volatilidad de las variaciones relativas del tipo de interés y se expresa porcentualmente.

donde $d(i,j)$ denota en el instante $i\Delta t$, en el estado j, el precio de un bono cupón cero que vence en $(i+1)\Delta t$. El factor de descuento es discreto en vez de continuo, de acuerdo con Sandmann y Sondermann (1994), que muestran la incompatibilidad de usar tipos de interes continuamente capitalizables en modelos lognormales.

Por tanto, para construir el árbol se necesita calcular para cada plazo $i\Delta t$ los valores $U(i)$ y $\sigma(i)$ de tal forma que sean consistentes con la TSIR y la VTS con las que se pretende calibrar el árbol. En el apéndice, se explica paso a paso como realizar la calibración del árbol.

2.4 Valoración de opciones sobre bonos cupón cero

Una vez que el árbol está calibrado, se puede proceder a valorar cualquier clase de derivado cuyo subyacente sean los tipos de interés. Con el fin de demostrar los propósitos de este artículo, se van a valorar opciones europeas sobre bonos cupón cero. Se denota el strike de la opción con K, el vencimiento de la opción por T y el vencimiento del bono por s, con $(T \leq s)$ y se definen n_s y n_T como el número de intervalos de tiempo discretos que hay en el árbol hasta el vencimiento del bono y de la opción respectivamente ($s = n_s\Delta t$ y $T = n_T\Delta t$). El primer paso para valorar la opción es calcular el valor del bono en cada uno de los nodos del árbol. Se denota por $P_s(i,j)$ el valor de un bono con vencimiento en s en el nodo (i,j). Entonces, se debe verificar que $P_s(n_s,j) = 1$ con $j = -n_s, -n_s+2, \ldots, n_s$. Mediante inducción hacia atrás, se obtiene el precio del bono para cada uno de los nodos :

$$P_s(i,j) = \frac{d(i,j)}{2}\left[P_s(i+1,j+1) + P_s(i+1,j-1)\right] \tag{2.12}$$

Una vez que se ha obtenido el árbol del bono cupón cero, se procede a evaluar el payoff de la opción para cada nodo j en el nodo de tiempo $i = n_T$ (ver [27]):

$$C_o(n_T, j) = \max\{P_s(n_T, j) - K, 0\} \quad \text{con } j = -n_T, -n_T + 2, \ldots, n_T \tag{2.13}$$

Finalmente se calcula el precio de la opción de la siguiente forma:

$$C_o(0,0) = \sum_j Q(n_T, j) C_o(n_T, j) \quad \text{con } j = -n_T, -n_T + 2, \ldots, n_T \tag{2.14}$$

Donde $Q(i,j)$ es el valor en $t = 0$ del activo Arrow-Debreu que paga una unidad monetaria en el nodo (i,j) y nada en el resto. En el apéndice se muestra el algoritmo para calibrar el árbol BDT y obtener el árbol de los precios de los activos Arrow-Debreu $Q(i,j)$.

Para estimar la delta[6] de la opción se realiza un desplazamiento paralelo de un punto básico[7] (*bp.*) a la TSIR estimada, tanto positivo como negativo. Se calcula el precio de la opción con el desplazamiento positivo de la curva C_o^u y con el negativo C_o^d y se calcula la delta de la opción a partir de la siguiente expresión:

$$\Delta = \frac{C_o^u - C_o^d}{2bp} \tag{2.15}$$

2.5 Resultados numéricos

En esta sección se demuestra que los árboles BDT calibrados con diferentes estimaciones de la TSIR y la VTS, proporcionan valores de los derivados y sus deltas significativamente diferentes. Se han calculado estimaciones de la TSIR usando cuatro metodologías diferentes mientras que se han usado dos para el cálculo de la VTS. Se dispone por tanto de 8 inputs alternativos para calibrar

[6] Técnicamente no se trata de la delta de la opción ya que ésta es la derivada del precio de opción con respecto al precio del bono subyacente. En este caso lo que se calcula es la sensibilidad del precio de la opción a desplazamientos paralelos de la curva de tipos de interés, y haciendo abuso del lenguaje la denotamos delta.

[7] Un punto basico se define como 0.0001

los árboles y valorar derivados de tipos de interés.

En Figura 2.1 y Figura 2.2 se presentan las estimaciones de la TSIR y la VTS respectivamente para los tipos a 1, 5 y 10 años mediante la metodología NSWG, usada posteriormente en este artículo como benchmark para comparar con el resto de metodologías.

El objetivo de estas figuras no es más que hacerse una idea, mediante los tipos de interés a diferentes plazos y sus volatilidades, de la posible forma que pueda tener TSIR y la VTS en el periodo muestral utilizado en este trabajo.

Tal y como se mencionó anteriormente, se van a valorar opciones sobre bonos cupón cero. Debido a los cambios diarios experimentados por la TSIR y la VTS, se escoge para cada día un strike diferente, siendo éste, el precio a plazo del bono subyacente de la opción con el mismo vencimiento que la opción y estimado mediante la TSIR usada como benchmark, NSW. Siendo más precisos, si queremos valorar un día t cualquiera de la base de datos una opción de compra con vencimiento en $t+T$ sobre un bono cupón cero con vencimiento $t+s$ y nominal unitario, el strike utilizado en la valoración mediante todas las metodologías vendrá dado por:

$$K_t = (1 + R_{t,t+s})^{-s}(1 + R_{t,t+T})^{T} \tag{2.16}$$

Donde $R_{t,t+s}$ y $R_{t,t+T}$ son los tipos de interés con vencimientos s y T calculados en el instante t respectivamente mediante la curva benchmark, NSW.

A continuación, se muestran los pasos a seguir con el fin de mostrar los resultados principales del artículo:

Paso 1: Para cada día de la base de datos, se procede a estimar la TSIR mediante las cuatro metodologías presentadas anteriormente: NSU,NSW, VFU y VFW.

Paso 2: Una vez que se dispone de la nueva base de datos, donde se tienen los tipos de interés a diferentes plazos, calculados con las diferentes metodologías, se calcula la VTS para cada uno de los días. Con ese fin, para cada metodología y para cada vencimiento, se calcula la volatilidad mediante una ventana móvil a 30 días, mediante la metodología GARCH(1,1) o mediante el cálculo histórico.

Paso 3: Se dispone ahora, para cada uno de los días de la base de datos, de

una curva de tipos de interés a varios plazos y sus respectivas volatilidades, calculados mediante varias metodologías, por lo que se cuenta con los inputs necesarios para poder calibrar el árbol BDT. Los árboles BDT construidos tienen una distancia variable entre los nodos dependiendo del plazo. De esta forma, los nodos del árbol que se encuentren en el intervalo de tiempo expresado en unidades anuales $[0, 1]$ tendrán una distancia entre ellos de $\Delta t = 1/12$, los que estén entre $[1, 3]$ tendrán una distancia de $\Delta t = 1/4$ y el resto de nodos estarán separados por un intervalo de amplitud $\Delta t = 1/2$.

Paso 4: Una vez que el árbol está calibrado para cada una de las metodologías y para cada uno de los días de la base de datos, se procede a calcular el árbol para el subyacente de la opción, el bono cupón cero, de acuerdo con (2.12) y posteriormente se calcula el precio de la opción según las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.16). Finalmente se calcula la delta de la opción de acuerdo con (2.15). Llegados a este punto, se tiene para cada día y para cada metodología los precios de la misma opción, es decir, mismo subyacente, vencimiento y strike. La única diferencia es que los árboles han sido calibrados por inputs obtenidos mediante metodologías diferentes.

Con el fin de ver la importancia que tiene el método de estimación de la TSIR en el cálculo de la VTS y en la valoración de derivados de tipos de interés, se han escogido de la base de datos 4 días en los que hemos estimado la TSIR mediante las 4 metodologías. Los resultados aparecen representados graficamente en la Figura 2.3.

A partir de dichas curvas, se calcula el valor de contratos a plazo con vencimiento de 1 año, sobre bonos cupón cero con vencimientos de 2 a 10 años y nominal de 100. El objetivo es ver como las diferencias en precios son muy pequeñas, ya que en la valoración de estos derivados no influye para nada el cálculo de la VTS. Los resultados se presentan en la Tabla 2.1.

Para cada uno de los días y para cada contrato a plazo, se muestra el precio mediante la metodología NSW y la máxima diferencia en términos relativos con las valoraciones derivadas de aplicar las otras tres metodologás alternativas en la estimación de la TSIR.

Como se puede apreciar, los resultados obtenidos por todas las metodologías son prácticamente similares en todas las fechas y para bonos con distintos

Fecha	2	4	6	8	10
30-09-05	97.1936	91.0866	84.9143	79.0164	73.4871
	(0.10%)	(0.22%)	(0.14%)	(0.39%)	(1.02%)
31-01-07	96.2087	88.9218	82.1231	75.8268	70.0087
	(0.07%)	(0.21%)	(0.40%)	(0.57%)	(0.77%)
08-11-07	96.3590	89.2179	82.3327	75.8694	69.8792
	(0.05%)	(0.16%)	(0.32%)	(0.55%)	(0.89%)
05-06-09	97.9589	91.5751	84.0350	76.6086	69.6961
	(0.10%)	(0.24%)	(0.57%)	(0.51%)	(0.21%)

Tabla 2.1: Valor de un contrato a plazo con vencimiento a un año sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años para 4 fechas distintas calculado con la TSIR obtenida mediante la metodología usada como benchmark, NSWG. Entre paréntesis se presenta el máximo error relativo entre el precio del contrato a plazo calculado con la metodología benchmark y el resto de las metodologías.

vencimientos. En la gran mayoría de los casos, los errores relativos son menores al 1%, una magnitud reducida si tenemos en cuenta que es el error máximo de entre todos los cálculos.

Si se realiza ahora el mismo ejercicio, pero valorando en vez de contratos a plazo con vencimiento a un año, opciones de compra con el mismo vencimiento, con strike calculado según (2.16) y con los mismos bonos subyacentes que los de la Tabla 2.1, los resultados que se obtienen son bien distintos. En la Tabla 2.2, se presentan los resultados de forma análoga a como se han presentado los de la Tabla 2.1, donde se ha usado como benchmark la metodología NSWG. Las diferencias que se obtienen entre metodologías ahora son substanciales. Se pueden ver gráficamente estos resultados en la Figura 2.4, donde para cada día se representan los precios de las opciones con vencimiento a un año sobre bonos cupón cero con distintos vencimientos empleando cada una de las metodologías.

Para poder entender las discrepancias tan grandes que se han obtenido, en la Figura 2.5 se observa para cada uno de los 4 días y para cada metodología, las VTS estimadas.

Una de las cuestiones que se pueden discutir del ejercicio anterior, es que la valoración de opciones sobre bonos se hace mediante una calibración a mercado de las volatilidades. En este ejercicio se pretende mostrar como la calibración del árbol es sensible a la TSIR aún manteniendo las volatilidades constantes.

Usando como proxy de las volatilidades de mercado, las volatilidades obtenidas mediante NSWH se calibran los árboles BDT para el día 5 de Junio

Fecha	2Y	4Y	6Y	8Y	10Y
30-09-05	0.0130	0.0370	0.0558	0.0720	0.0862
	(655%)	(433%)	(147%)	(93%)	(100%)
31-01-07	0.0040	0.0168	0.0261	0.0347	0.0429
	(147%)	(100%)	(100%)	(100%)	(100%)
08-11-07	0.0183	0.0467	0.0542	0.0583	0.0588
	(132%)	(83%)	(95%)	(99%)	(100%)
05-06-09	0.0252	0.0605	0.0790	0.1062	0.1294
	(196%)	(89%)	(99%)	(91%)	(65%)

Tabla 2.2: Valor de una opción de compra con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años para 4 fechas distintas calculado con la TSIR obtenida mediante la metodología usada como benchmark, NSWG. Entre paréntesis se presenta el máximo error relativo entre el precio de la opción calculado con la metodología benchmark y el resto de las metodologías.

05-06-09	2Y	4Y	6Y	8Y	10Y
NSW	0.0262	0.0592	0.0867	0.1136	0.1379
NSU	0.0002	0.0030	0.0305	0.1100	0.2219
VFW	0.0596	0.0127	0.0013	0.0123	0.1004
VFU	0.0707	0.0150	0.0006	0.0105	0.1235

Tabla 2.3: Valor de una opción de compra con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre un bono cupón cero con vencimientos entre 2 y 10 años. Los árboles se han calibrado según las TSIR obtenidas mediante las cuatro metodologías del artículo mientras que la volatilidad es la misma para todos obtenida mediante NSHW con afán de ser un proxy de las volatilidades de mercado.

del 2009 con cada una de las TSIR obtenidas por cada una de las 4 metodologías de estimación. Las TSIR calculadas para ese día, pueden verse gráficamente en la figura 2.3. El strike de la opción se ha calculado de manera análoga a como se ha hecho para las Tablas 2.1 y 2.2. Los resultados se presentan en la Tabla 2.3

Como se puede observar, los resultados siguen siendo tremendamente dispares y por lo tanto existe un impacto significativo en la calibración de las TSIR en la valoración de derivados de tipos de interés.

En el siguiente ejercicio, se ha calculado para cada día de la base de datos y para cada una de las metodologías, opciones con vencimiento a x años sobre bonos cupón cero con vencimiento a y años denotadas por $(O_x B_y)$ con $x = 1, 3, 5$ e $y = 3, 7, 10$. Así, si la opción vence en x años, al bono le restarán $y - x$ años hasta vencimiento. El strike de todas ellas, se ha calculado según (2.16).

O_1B_3	NSWG	NSUG	VFWG	VFUG	NSWH	NSUH	VFUH	VFWH
media	0.0341	0.101	0.0194	0.0356	0.0339	0.100	0.0192	0.0360
devstd	0.016	0.064	0.025	0.051	0.012	0.063	0.023	0.050
max	0.17	0.35	0.16	0.44	0.08	0.35	0.10	0.44
min	0.0002	0	0	0	0.0105	0.0005	0	0
VRM	0	3.99	0.74	0.98	0.45	4.0	0.96	1.13
D_1B_3								
media	-68.63	-129.70	-36.55	-60.64	-68.21	-128.80	-37.81	-61.13
devstd	8.16	44.42	38.70	47.89	5.50	42.96	38.46	47.48
max	-2.49	0	0	0	-15.70	-0.86	0	0
min	-178.02	-187.55	-149.86	-186.02	-127.69	-185.38	-149.52	-185.34
VRM	0	1.15	0.66	0.58	0.09	1.12	0.67	0.59

Tabla 2.4: Estadísticos del precio y las deltas de O_1B_3 calculados con las diferentes metodologías de estimación.

O_3B_7	NSWG	NSUG	VFWG	VFUG	NSWH	NSUH	VFWH	VFUH
media	0.0493	0.0340	0.0095	0.0052	0.0502	0.0339	0.0088	0.0045
devstd	0.0235	0.0364	0.0158	0.0129	0.0204	0.0345	0.0137	0.0095
max	0.1526	0.2246	0.1243	0.1792	0.1208	0.2174	0.1297	0.0910
min	0.0024	0	0	0	0.0229	0.0006	0	0
VRM	0	0.5474	0.9369	0.2616	0.8527	0.5982	0.8544	0.9307
D_3B_7								
media	-121.73	-82.40	-25.59	-12.06	-121.90	-84.02	-25.93	-11.92
devstd	8.97	51.44	29.77	20.83	4.99	48.77	29.11	19.90
max	-23.90	0	0	0	-94.23	-4.50	-0.0034	0
min	-182.95	-256.44	-223.70	-142.15	-134.06	-237.57	-210.71	-139.24
VRM	0	0.43	0.79	0.90	0.023	0.42	0.79	0.90

Tabla 2.5: Estadísticos del precio y las deltas de O_3B_7 calculados con las diferentes metodologías de estimación.

En las Tablas 2.4, 2.5 y 2.6 se muestran los estadísticos de los precios de las opciones y sus deltas calculados con las diferentes metodologías así como la media del valor absoluto de los errores relativos (VRM) de cada uno de los precios de las opciones con respecto a los precios obtenidos mediante la metodología NSWG.

Tal y como se puede observar en las Tablas 2.4, 2.5 y 2.6, los precios y las deltas le las opciones sobre bonos son muy diferentes dependiendo de la metodología usada para obtener las estimaciones de la TSIR y la VTS, presentando estadísticos muy diferentes. Se puede observar que la metodología usada para estimar la TSIR afecta mucho más en la valoración del derivado que la metodología usada para la estimación de la volatilidad.

O_5B_{10}	NSWG	NSUG	VFWG	VFUG	NSWH	NSUH	VFWH	VFUH
media	0.0621	0.0364	0.0132	0.0128	0.0631	0.0354	0.0121	0.0122
devstd	0.038	0.068	0.048	0.040	0.032	0.067	0.045	0.038
max	0.251	0.515	0.605	0.358	0.167	0.515	0.604	0.357
min	0.0008	0	0	0	0.0271	0	0	0
VRM	0	0.923	0.956	0.406	0.976	0.894	0.967	0.945
D_5B_{10}								
media	-136.85	-63.58	-17.95	-19.80	-137.87	-62.72	-17.82	-19.68
devstd	13.32	82.45	50.77	52.87	5.83	80.22	50.97	52.17
max	-8.23	0	0	0	-127.19	0	0	0
min	-238.67	-330.82	-317.56	-315.18	-152.20	-334.29	-317.58	-315.21
VRM	0	0.743	0.923	0.916	0.054	0.726	0.92	0.91

Tabla 2.6: Estadisticos del precio y las deltas de O_5B_{10} calculados con las diferentes metodologías de estimación.

Precisando más y a modo de ejemplo, consideremos las metodologías para la estimación de la TSIR, NSWG y NSWH por ejemplo. Las TSIR de ambas han sido estimadas mediante la misma metodología, NSW, mientas que las volatilidades han sido obtenidas de forma completamente distintas. Sin embargo, si observamos el valor medio de las opciones en el periodo considerado en la muestra, los errores relativos entre estas son mucho mas pequeños, que entre metodologías diferentes, véase NSWG y NSUG, en las que se ha utilizado diferentes métodos para la estimación de las TSIR, pero el mismo método para la estimación de la volatilidad. Esto es aplicable a cualquier par de las Tablas 2.4, 2.5 y 2.6.

En la Figura 2.6 se puede ver el precio (arriba) y la delta (abajo) de una opción de compra con vencimiento a 1 año sobre un bono cupón cero con vencimiento a 3 años (O_1B_3) calculados con la metodología benchmark, NSWG, y la NSUG para cada uno de los días de la base de datos. A pesar de que la estimación se realiza a partir de la forma funcional de Nelson y Siegel, y que las volatilidades se estiman mediante la metodología GARCH, la consideración de la heteroscetascididad en los precios de los bonos, hace que las discrepancias en deltas y precios sean enormes, tal y como se puede observar en los estadísticos de la Tabla 2.4.

Con el fin de profundizar mejor en este análisis, se considera la ecuación (2.13). En el momento de la valoración de la opción de compra con vencimiento T sobre el bono cupón cero con vencimiento en s, los posibles estados de la

naturaleza que puede tener el bono son $P_s(n_T, j)$ con $j = -n_T, -n_T+2, \ldots, n_T$. El estado de la naturaleza donde $j = -n_T$ es donde el valor del bono es el mayor posible y $j = n_T$ es el estado de la naturaleza donde el bono tiene el menor valor posible. El strike K se ha calculado según (2.16), que no viene a ser más que el precio a plazo con vencimiento en s años sobre un bono con vencimiento en $s - T$.

En este artículo se denominan límites, al valor máximo y al mínimo del bono en los posibles estados de la naturaleza en el instante de tiempo donde vence la opción. En la Figura 2.7 se ilustran estos límites, para ambas metodologías, así como el strike con el que se han valorado las opciones, para una pequeño intervalo de la base de datos. En el segundo gráfico de la Figura 2.7 no hay más que una versión más detallada de la Figura 2.6, donde se muestran los precios de las opciones para las dos metodologías consideradas. Como se puede observar, el strike calculado según la metodología NSWG, está muy cerca del límite inferior obtenido mediante la metodología NSUG, por tanto, la opción estará muy en dinero y se observa el motivo por el cual la metodología NSUG calcula un precio mucho más alto que la metodología de referencia. En la misma figura se observan como los saltos de volatilidad típicos de la metodología GARCH, están claramente reflejados. Nótese que las distancias entre el límite superior e inferior de cada metodología aumenta o decrece según el día.

Por otra parte en la Figura 2.8 se muestra el precio y la delta de una opción de compra con vencimiento 3 años sobre un bono cupón cero con vencimiento 7 años calculados mediante las metodologías NSWG y NSWH. Tal y como se comentaba anteriormente, en la Figura 2.6 la metodología para obtener la TSIR es distinta, mientras que la metodología para calcular la VTS, es la misma, la GARCH(1,1). En la Figura 2.8 se ha hecho justamente lo contrario, se ha utilizado la misma metodología para calcular la TSIR, mientras que se ha usado una metodología diferente para calcular la VTS. En la Figura 2.8 observamos comportamientos similares entre los precios de las opciones calculados por medio de NSWG y NSWH, destacando el claro comportamiento de la estimación GARCH, en los precios obtenidos mediante NSWG. Sin embargo, en la Figura 2.6, se obtienen precios totalmente diferentes, aunque las

volatilidades se han calculado de la misma manera. Estos resultados arrojan una clara evidencia de que la metodología usada en la estimación de la curva de tipos de interés afecta significativamente a la estimación de la VTS y, como se muestra en este artículo, a la valoración de derivados de tipos de interés.

En la Figura 2.9 se observa el efecto GARCH, en los límites del árbol calibrado mediante la metodología NSWG con respecto a la metodología NSWH. En este caso, ambos árboles tienen el strike aproximadamente entre medias de los límites, lo cual tiene todo el sentido ya que el strike ha sido obtenido como un precio a plazo estimado a partir de la TSIR obtenida mediante la metodología NSW. Sin embargo, se puede observar como la metodología GARCH es más sensible a los cambios de volatilidad y se observa como las respuestas en precio a la volatilidad corresponden con un incremento en la distancia de los límites, mientras que el árbol calibrado con la metodología NSWH, ofrece respuestas más suaves a dichos cambios como era de esperar. Con respecto a las deltas de las opciones, se puede observar en la Tabla 4 y en la Figura 8, que solamente la metodología benchmark, NSWG y la NSWH tienen deltas similares con errores relativos del orden del 3%. El resto de las metodologías calculan deltas significativamente diferentes, algo bastante preocupante para gestores de carteras que usen datos calibrados de distinta manera, ya que este resultado, implicaría que tendrían coberturas muy diferentes.

En la Figura 2.10 podemos ver resultados más extremos. Mientras que la metodología NSGW da valor a la opción a vencimiento para cada uno de los días de la base de datos, la metodología VFGW da un valor 0 en la gran mayoria de los días. El mismo resultado se observa en la delta de la opción. Para entender bien este resultado, basta con observar la Figura 2.11, donde para la metodología VFWG, el strike de la opción está por encima, o muy pegado al límite superior (donde los precios de estado son muy bajos) del árbol, por lo que el valor de la opción es nulo en la mayoría de los casos.

2.6 Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido poner de manifiesto cómo la metodología empleada para el cálculo de la TSIR, tiene implicaciones que van mucho más allá de la capacidad de un modelo u otro para valorar simultáneamente el precio de los bonos en un instante de tiempo. En general, todas las metodologías producen muy buenos resultados de cara a la valoración de los bonos, aunque estos pueden depender de la forma de la TSIR, y de la mayor o menor flexibilidad de la forma funcional escogida para describir los mercados de deuda.

Sin embargo, a lo que apenas se le ha prestado atención en la literatura, es a las implicaciones que una u otra metodología pueda tener a la hora de describir variables financieras derivadas de la forma o de la dinámica de los tipos de interés. En este trabajo, se pone énfasis en las implicaciones que derivan de utilizar una metodología u otra en el cálculo de las las volatilidades de las series temporales de los tipos cupón cero estimados. Para evidenciar las consecuencias de estas diferencias en las volatilidades de los tipos de interés, se ha cuantificado desde un punto de vista económico valorando activos financieros que dependen de dicha volatilidad y, en particular, opciones sobre bonos cupón cero soberanos alemanes con diferentes fechas de ejercicio y utilizando como subyacentes bonos con distintos vencimientos.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la importancia crucial del método escogido para estimar la TSIR en el valor de estas opciones. Diferencias que pueden llegar a ser enormes. Otra implicación de esta cuestión es el impacto que usar una metodología u otra puede tener en el diseño de estrategia de cobertura con derivados. Para ello, se ha estimado la delta de las opciones anteriores, parámetro del que depende la cantidad de opciones a utilizar para cubrir posiciones frente al riesgo de variaciones de los tipos de interés. De nuevo, los resultados son sorprendentes en la media en que las diferencias entre el valor estimado de dichos parámetros puede ser abismal y afectar por tanto de manera crucial a la efectividad de las coberturas.

Con todo ello, lo que se ha puesto de manifiesto es que la metodología y los modelos empleados para estimar los tipos cupón cero en los mercados de deuda

soberana, tienen consecuencias que van más allá de la calidad en el ajuste de la propia curva, es decir, más alla de su capacidad para replicar el precio de los bonos en los mercados.

Pequeñas diferencias en la pendiente de la curva, en especial en los tramos a corto y largo plazo, pueden tener grandes consecuencias en otras variables fundamentales como los tipos forward o en la volatilidad de las series temporales de los tipos cupón cero.

No se pretende mostrar qué método es el más adecuado para ajustarse a las condiciones de mercado, ofreciendo una estimación más o menos precisa. Simplemente se busca dar a conocer que dependiendo de qué metodologías se usen en la estimación de la TSIR, se obtienen resultados totalmente diferentes tal y como se ha visto en las tablas y las figuras del artículo. La cuestión de qué método describe mejor las condiciones del mercado, se deja como una posible investigación futura.

Apéndice: calibración del árbol BDT

Mediante inducción hacia atrás (ver [48], [27]) se obtiene el precio en el periodo i en el estado de la naturaleza j del cualquier activo C a partir de la información en el periodo $i+1$:

$$C(i,j) = \frac{d(i,j)}{2}\left[C(i+1,j+1) + C(i+1,j-1)\right] \tag{2.17}$$

Donde $d(i,j)$ es el factor de descuento en el nodo (i,j). Se define como precio de estado o activo Arrow-Debreu $Q(k,m)$ el precio del activo que paga una unidad monetaria en caso de que el nodo (k,m) sea alcanzado y 0 en caso contrario. Se denota por $Q(i,j,k,m)$ como el precio en el nodo (i,j) de $Q(k,m)$. Teniendo en cuenta estas dos definiciones y que la ecuación anterior es válida para cualquier activo, entonces se tiene que para los activos Arrow-Debreu se cumple:

$$Q(i,j,k,m) = \frac{d(i,j)}{2}\left[Q(i+1,j+1,k,m) + Q(i+1,j-1,k,m)\right]$$

Manipulando esta expresión algebraicamente se obtiene:

$$\begin{aligned} Q(i,j,k+1,m) &= \frac{1}{2}[d(k,m-1)Q(i,j,k,m-1) \\ &+ d(k,m+1)Q(i,j,k,m+1)] \end{aligned}$$

Esta expresión es válida para cualquier par (i,j), especialmente para el par $(0,0)$. A partir de sencillas manipulaciónes, se obtiene la ecuación de inducción hacia delante en la que se basa la construcción del árbol presentada en este artículo:

$$\begin{aligned} Q(i,j) &= \frac{1}{2}[d(i-1,j-1)Q(i-1,j-1) \\ &+ d(i-1,j+1)Q(i-1,j+1)] \end{aligned} \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) es válida para todos los nodos i excepto en los nodos extremos (i,i) y $(i,-i)$, donde se cumple:

$$Q(i,i) = \frac{1}{2}d(i-1,i-1)Q(i-1,i-1)$$
$$Q(i,-i) = \frac{1}{2}d(i-1,-i+1)Q(i-1,-i+1)$$

El precio de un bono emitido al descuento y que vence en $(i+1)\Delta t$ puede ser expresado en términos de los precios de estado y de los factores de descuento obtenidos en el periodo i:

$$P(i+1) = \sum_j Q(i,j)d(i,j) = \sum_j Q(i,j)\frac{1}{1+U(i)\exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t})} \tag{2.19}$$

Con estas herramientas, el árbol tiene que ser calibrado, siendo consistente con la TSIR y la VTS observadas.

En el momento de valoración ($t = 0$ or $i = 0$), se conocen los tipos de interés y las volatilidades a todos los vencimientos. El punto de partida es $r(0,0) = R(1)$ y $\sigma(1) = \sigma_R(1)$. El siguiente paso es extender el árbol a cualquier periodo i donde se calcula $U(i)$ y $\sigma(i)$ de forma simultánea. Denotemos por $PU(i)$ y $PD(i)$ los precios del bono $P(i)$ con vencimiento en $i\Delta t$ en los nodos del árbol $(1,1)$ y $(1,-1)$ respectivamente, debido a un aumento

o descenso del tipo de interés ($RU(i)$ y $RD(i)$ respectivamente). El precio de los bonos y los tipos están relaccionados mediante la siguiente expresión:

$$R(i) = -\frac{1}{i} \ln P(i) \tag{2.20}$$

Mediante inducción hacia atrás, $PU(i)$,$PD(i)$ y $P(i)$ están relaccionados por:

$$P(i) = \frac{1}{1 + r(0,0)\Delta t} \left[0.5PU(i) + 0.5PD(i)\right] \tag{2.21}$$

La volatilidad en un modelo lognormal viene dada mediante:

$$\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t} = \frac{1}{2} \ln \frac{RU(i)}{RD(i)} \tag{2.22}$$

Teniendo en cuenta (2.20), (2.22) se puede escribir como:

$$\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t} = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln PU(i)}{\ln PD(i)} \tag{2.23}$$

Las ecuaciones (2.21) y (2.23) pueden ser resueltas simultáneamente hasta llegar a:

$$PD(i) = PU(i)^{exp\left(-2\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t}\right)} \tag{2.24}$$

Donde $PU(i)$ es la solución numérica a:

$$PU(i) + PU(i)^{exp\left(-2\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t}\right)} = 2P(i)\left(1 + r(0,0)\Delta t\right) \tag{2.25}$$

Se usará inducción hacia delante para asegurar la consistencia con la TSIR y la VTS inicial, teniendo encuenta que $QU(1,1) = QD(1,-1) = 1$.

Siguiendo el algoritmo propuesto por Clewlow y Strickland se realizan los siguientes pasos para la calibración:

Paso 1: Para $i = 2$ hasta N: Resolver numéricamente (2.24) y (2.25) para encontrar los valores de $PD(i)$ y $PU(i)$.

Paso 2: Para $i = 1$ hasta N:

- Mediante inducción hacia delante genenerar $QU(i,j)$ y $QD(i,j)$ como en (2.18) para $j = -i-1, -i+1, -i+3, \ldots, i+1$.

- Resolver (2.19) numéricamente para obtener $U(i)$ y $\sigma(i)$:

$$PU(i+1) = \sum_j QU(i,j) \frac{1}{1 + U(i)\exp(\sigma(i) j \sqrt{\Delta t})} \tag{2.26a}$$

$$PD(i+1) = \sum_j QD(i,j) \frac{1}{1 + U(i)\exp(\sigma(i) j \sqrt{\Delta t})} \tag{2.26b}$$

- Con los valores calculados de $U(i)$ y $\sigma(i)$, se calculan el tipo a corto y el factor de descuento para todo j en el instante de tiempo i como en (2.10).

Paso 3: Una vez calculado el árbol BDT para el tipo a corto, se procede a calcular los precios de estados mediante (2.18) con $Q(0,0) = 1$.

Figuras

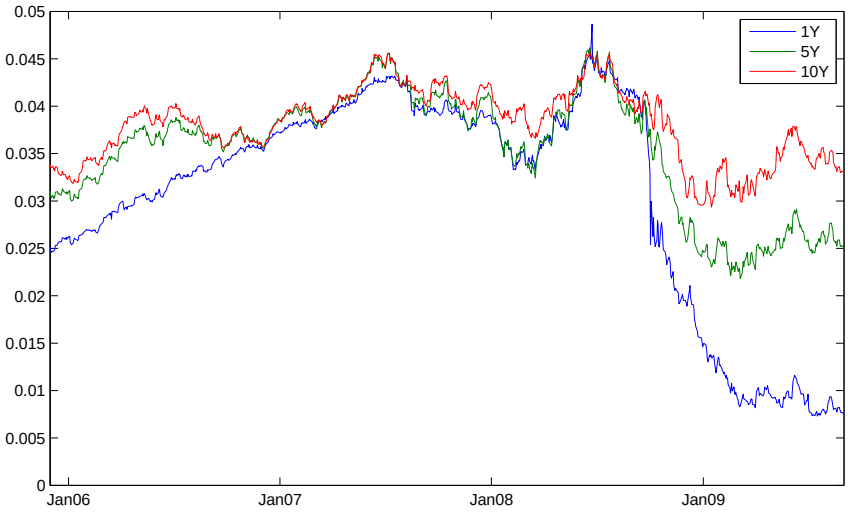

Figura 2.1: Tipos de interés a 1, 5 y 10 años. (NSWG)

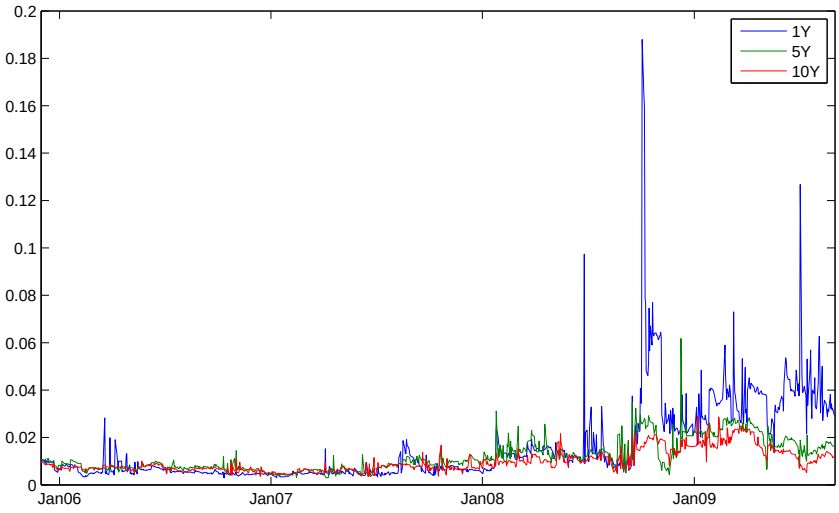

Figura 2.2: Volatilidades de los tipos a 1, 5 y 10 años. (NSWG)

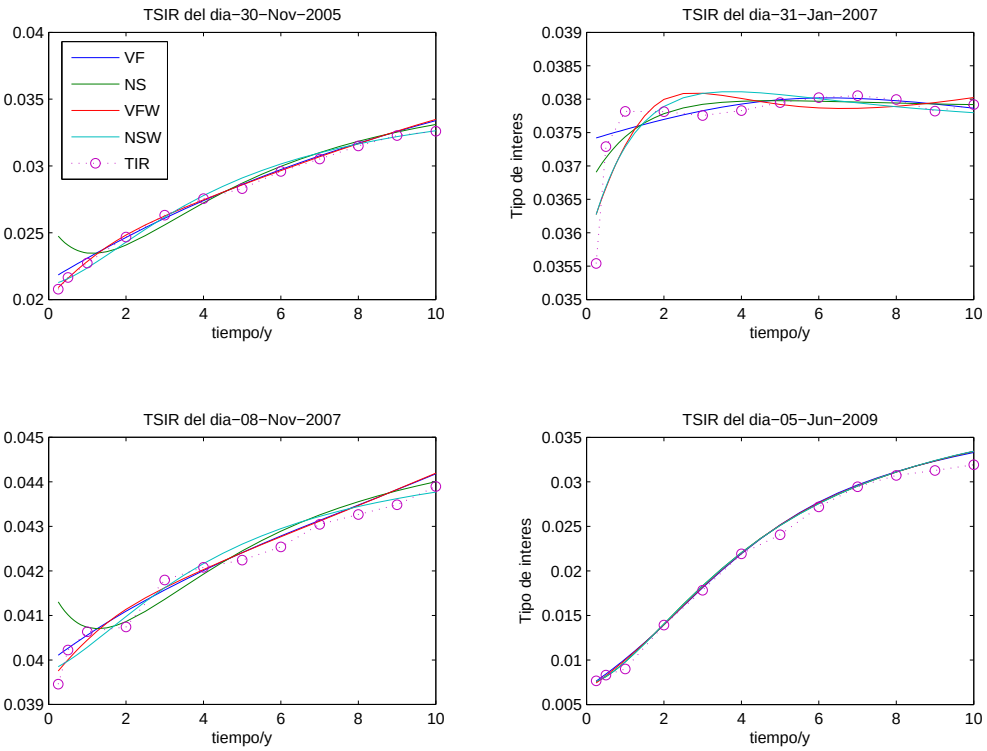

Figura 2.3: TSIR calculada por las 4 metodologías en 4 días distintos de la base de datos.

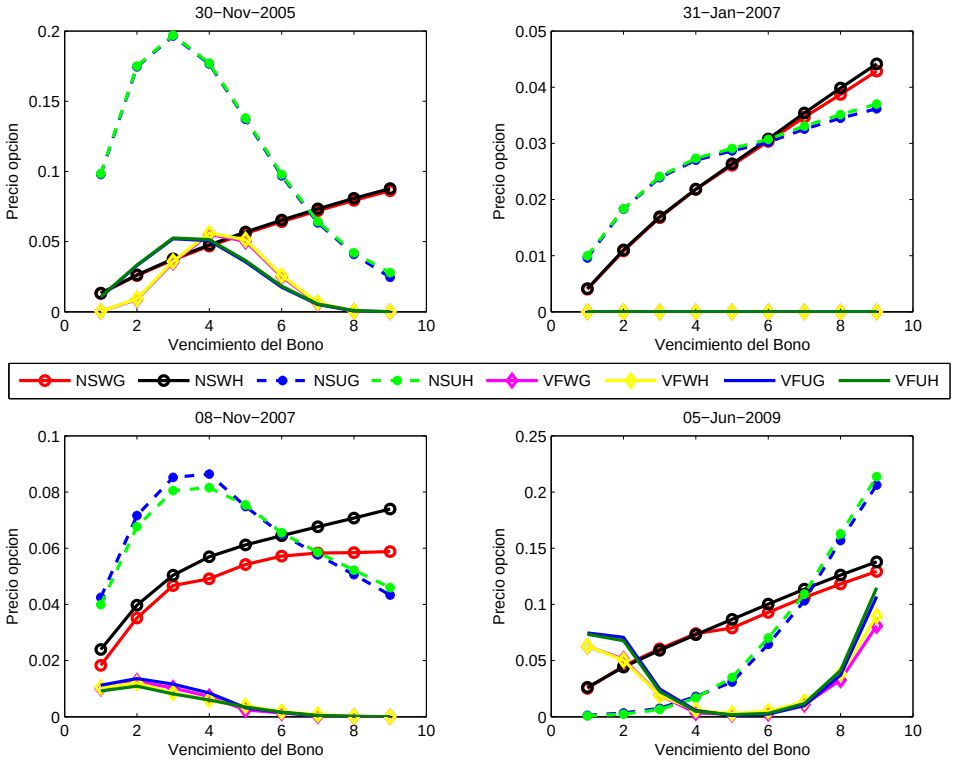

Figura 2.4: Precios de opciones con vencimiento a un año y strike calculado según (2.16), sobre bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 9 años calculados con las 8 metodologías de estimación presentadas en el artículo.

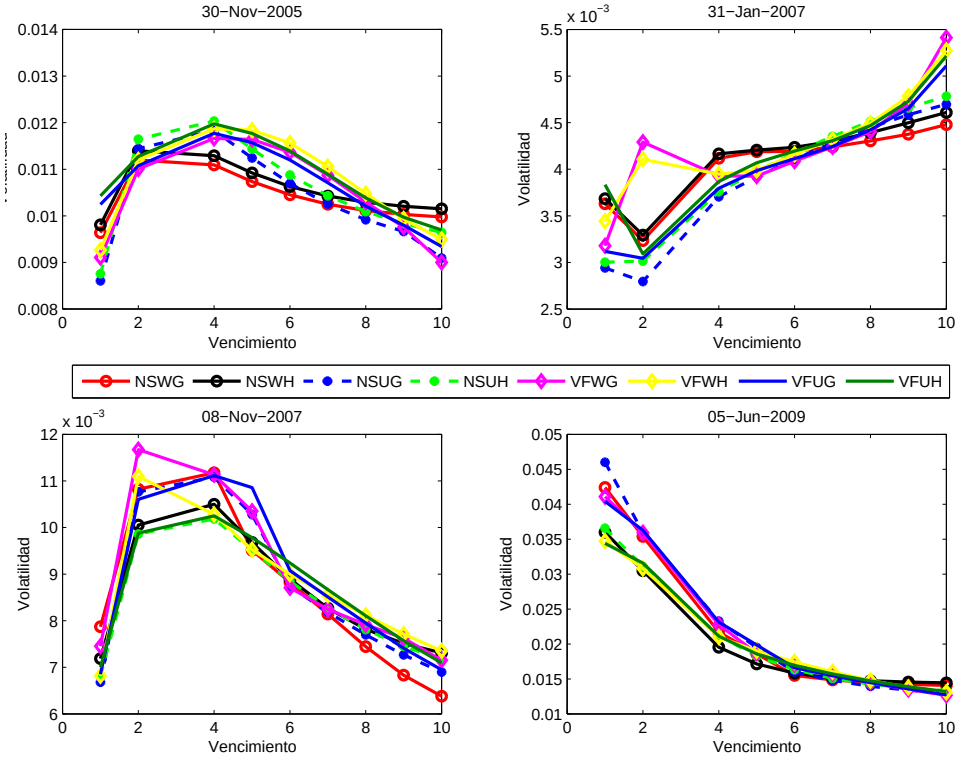

Figura 2.5: VTS para 4 días de la base de datos calculadas con las 8 metodologías de estimación presentadas en el artículo.

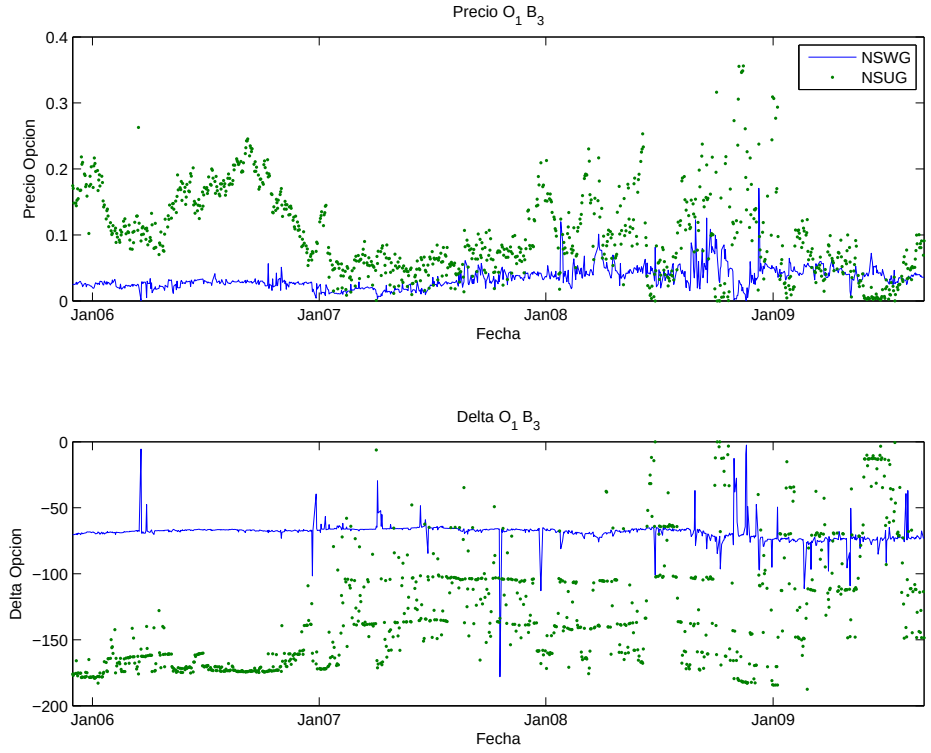

Figura 2.6: Precio y delta de O_1B_3 para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSUG.

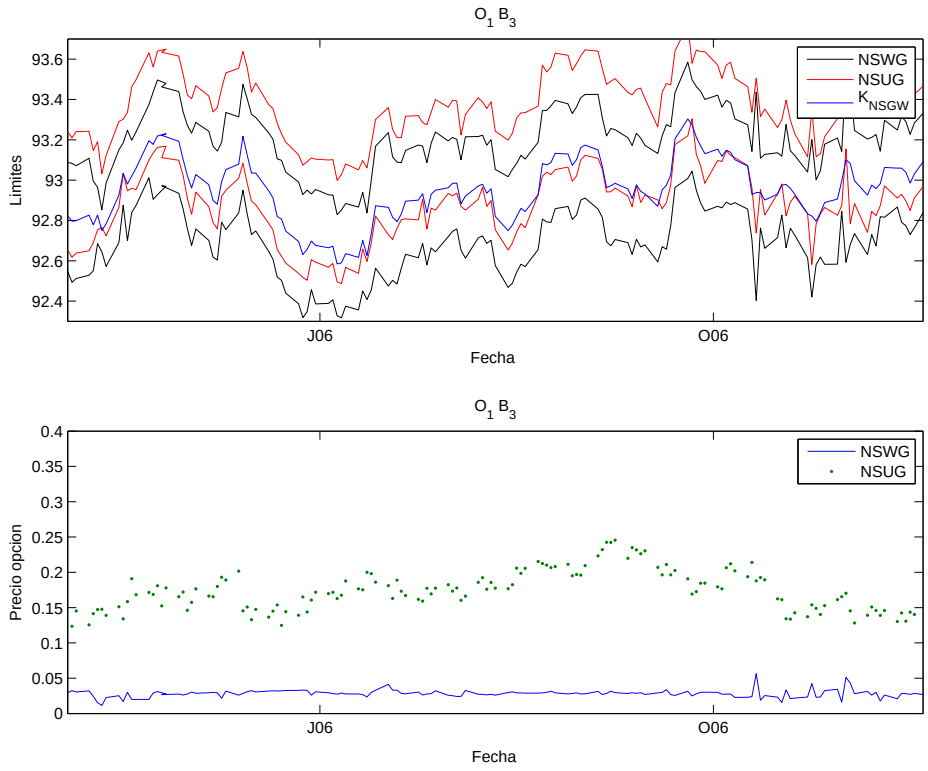

Figura 2.7: Límites y precio de O_1B_3 para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSUG.

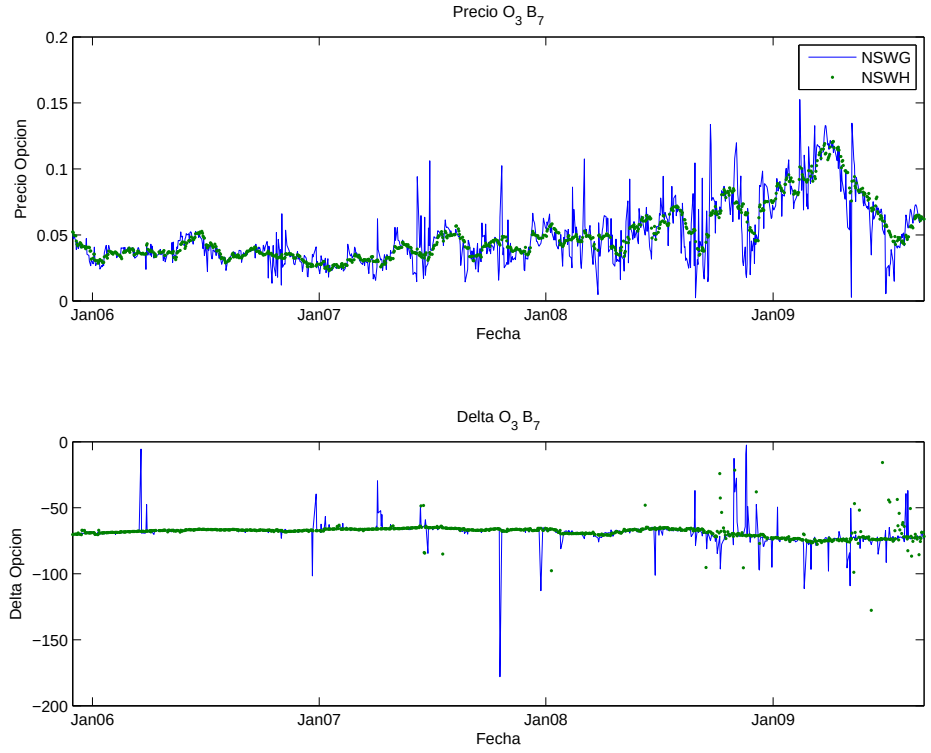

Figura 2.8: Precio y delta de O_3B_7 para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSWH.

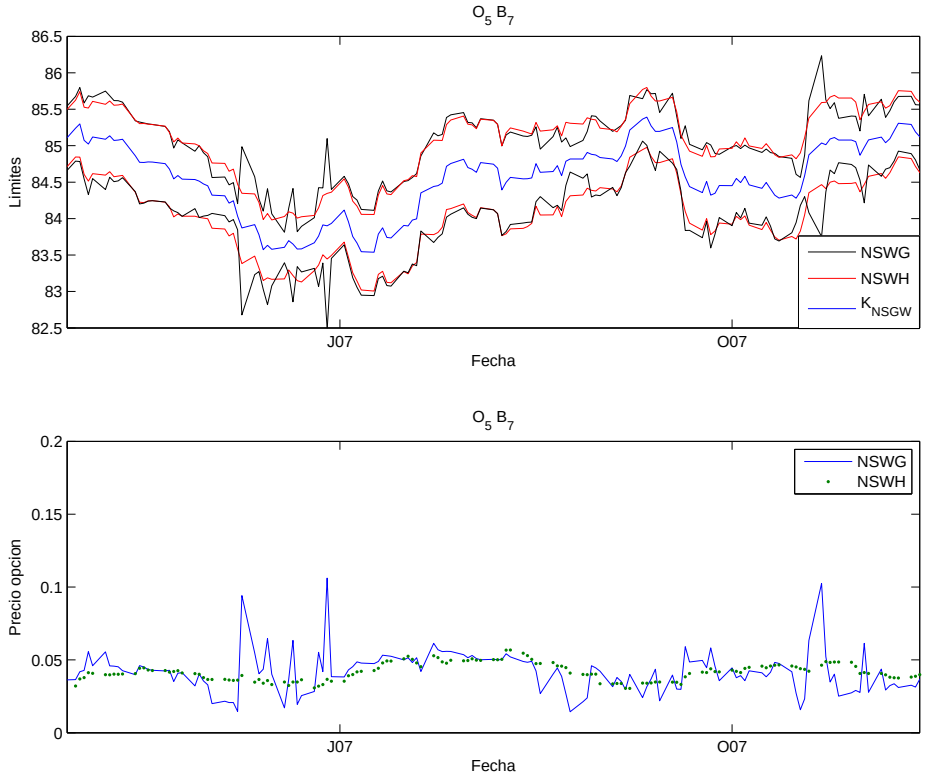

Figura 2.9: Límites y precio de O_3B_7 para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y NSWH.

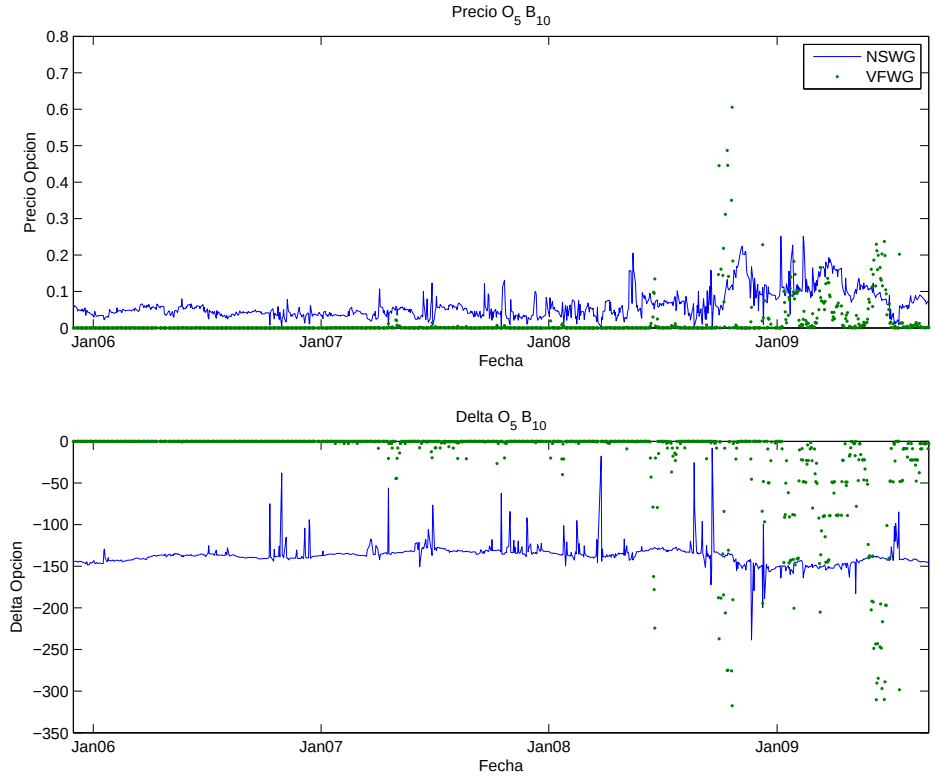

Figura 2.10: Precio y delta de O_5B_{10} para cada día de la base de datos obtenidos mediante NSWG y VFWG.

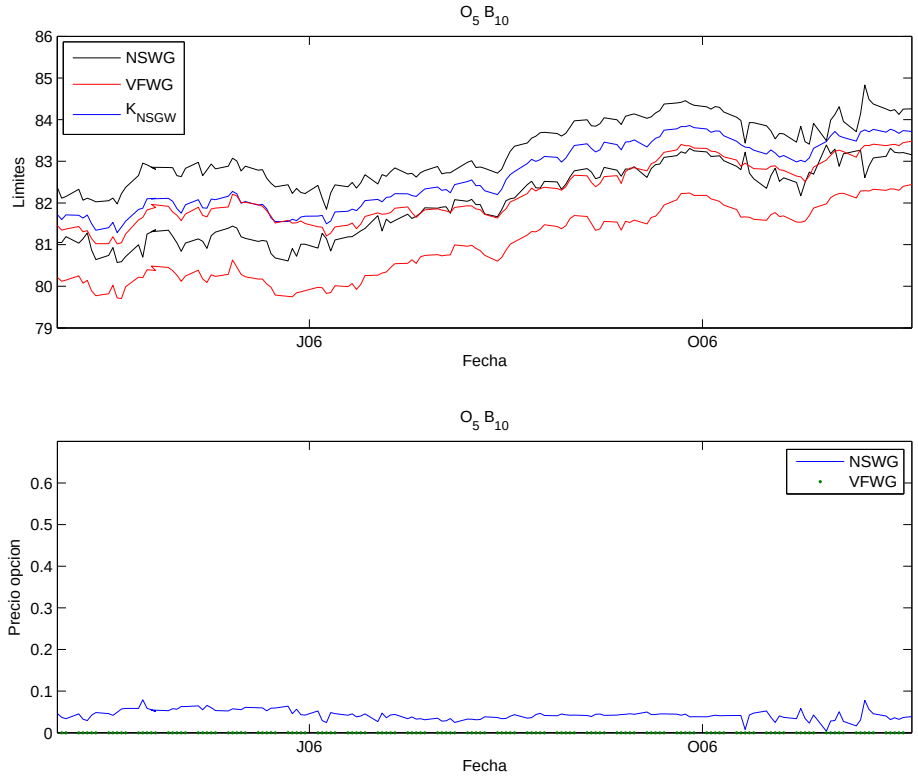

Figura 2.11: Límites y precio de O_5B_{10} para una ventana de la base de datos obtenidos mediante NSWG y VFWG.

Capítulo 3

A comparison between different numerical schemes for the valuation of unit-linked contracts embedding a surrender option

3.1 Introduction

Life insurance contracts are often very complex products that embed several types of options, more or less implicitly defined. The most popular implicit options are undoubtedly those implied by the presence of minimum guarantees in unit-linked life insurance. These options do not require any assumption on the policyholder behaviour unless early exercise features are also involved. Hence, their exercise is preference-free and their valuation resemble that of European-style Exotic options. The surrender option, the possibility for the policyholder to early terminate the contract and receive a cash amount (the surrender value), is instead deeply affected by the policyholder behaviour. This option has become a major concern for insurers, especially in recent years, as policyholders are becoming increasingly attentive to alternative investment

opportunities available in the market.

The surrender option is a typical American-style contingent-claim that does not admit a closed-form valuation formula, so that a numerical approach is called for. The valuation approaches proposed in the literature are based on binomial trees (see e.g. [3]), partial differential equations with free boundaries (PDE, e.g. [88]), or least squares Monte Carlo simulation (LSMC, [4, 5]). The aim of this study is to compare the prices of unit-linked policies obtained by means of these different approaches. In particular this allows us to test the goodness of the LSMC approach, that provides in absolute terms the most general and flexible method and is unaffected by the dimensionality of the problem. We take as benchmarks the other approaches, relying on well established convergence results but requiring customization to the specific model. We introduce and treat, in a unified way, both the case of single premium contracts, usually considered in the literature, and that of periodic premiums paid continuously over time.

The paper is structured as follows. In Sect. 2 we present our valuation framework defining, in particular, the valuation problem, that is an optimal stopping problem. In Sect. 3 we tackle this problem with the LSMC approach, by providing two alternative algorithms for solving it, as proposed by [5] for quite general contracts. In Sect. 4 we use the PDE approach to formulate the problem, which is then solved by finite differences. For the binomial approach we directly refer the reader to [3], while in Sect. 5 we present some numerical results.

3.2 Valuation framework

We analyse an endowment life insurance contract issued to a policyholder aged x at time 0. The contract provides a benefit B_T^{s} at the maturity T upon survival, or a benefit B_t^{d} in case of death at time t, with $0 < t \leq T$. Both benefits depend on the current value of a reference asset whose price at t is denoted by S_t. Hence

$$B_T^{\mathrm{s}} = f^{\mathrm{s}}(S_T), \quad B_t^{\mathrm{d}} = f^{\mathrm{d}}(t, S_t). \tag{3.1}$$

We consider both the case of single premium and that of periodic premiums paid upon survival. For the sake of simplicity, we assume that periodic premiums are paid continuously over the entire contract life at a rate π, so that in the interval $[t, t+\Delta]$ the amount of premiums paid is equal to $\pi\Delta$. Besides death and survival benefits, the policyholder is allowed to exit the contract before maturity, provided the policy has been in force for at least t^{w} years, with $0 \leq t^{\mathrm{w}} \leq T$. In this case he receives a benefit

$$B_t^{\mathrm{w}} = f^{\mathrm{w}}(t, S_t) \tag{3.2}$$

if surrender takes place at $t \geq t^{\mathrm{w}}$. Indeed, it is common practice for periodic premium contracts to require that the policyholder remains in the contract at least a few years (e.g. 2 or 3) in order to recover initial expenses.

The model is specified under a probability $\mathbb{Q}$, which is assumed to be an equivalent martingale measure. Hence, under $\mathbb{Q}$, the price of any traded security is given by its expected discounted cash-flows (see [33]). Discounting is performed at the risk-free rate r, assumed here to be constant.

We use a geometric Brownian motion to model the $\mathbb{Q}$-dynamics of the reference asset price, defined as

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t,$$

with (W_t) a Wiener process, $\sigma > 0$ the volatility parameter and $S_0 > 0$ given.

We denote by τ the time of death of the policyholder and by $m(t)$ its deterministic force of mortality. More precisely, $m(t)\mathrm{d}t$ denotes the instantaneous conditional probability of death at age $x+t$. Under $\mathbb{Q}$, it is assumed that τ and (W_t) are independent.

Let $\theta \geq t^{\mathrm{w}}$ be the time at which the policyholder decides to terminate the contract. Early termination can clearly occur only if the individual is still alive and the policy is still in force. Hence, surrender happens only if $\theta < \tau \wedge T$. The time θ is in general a stopping time with respect to the filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)$ jointly generated by (W_t) and τ, and we call it an *exercise policy*.

For a given exercise policy $\theta \geq t^{\mathrm{w}}$ and a fixed time $t \leq T$ such that the

contract is still in force (that is $t < \tau \wedge \theta$), the stochastic discounted benefit is given by

$$\begin{aligned} G_t(\theta) =& B^{\mathrm{s}}_T \, \mathrm{e}^{-r(T-t)} \, 1_{\tau>T,\theta\geq T} + B^{\mathrm{d}}_\tau \, \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} 1_{\tau\leq T\wedge\theta} \\ &+ B^{\mathrm{w}}_\theta \, \mathrm{e}^{-r(\theta-t)} 1_{\theta<T\wedge\tau} - \pi \int_t^T \mathrm{e}^{-r(u-t)} \, 1_{u<\tau\wedge\theta} \, \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where 1_A is the indicator of the set A and $\pi = 0$ in the single premium case. Note that in the periodic premium case the amount $G_t(\theta)$ is net of future premiums payable by the policyholder.

The time t value of the contract (net in the case of periodic premium) is given by the usual risk neutral formula:

$$V_t(\theta) = E^{\mathbb{Q}} \left[G_t(\theta) | \mathcal{G}_t \right], \quad t \leq T. \tag{3.4}$$

The independence of τ and (W_t) implies an alternative expression for the contract value (see [5] for a more general framework):

$$V_t(\theta) = 1_{\tau>t} E^{\mathbb{Q}} \left[\widehat{G}_t(\theta) | \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T, \tag{3.5}$$

where $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ is the filtration generated by (W_t) and, for $\theta > t$,

$$\begin{aligned} \widehat{G}_t(\theta) =& B^{\mathrm{s}}_T \, {}_{T-t}E^r_{x+t} \, 1_{\theta\geq T} + \int_t^T B^{\mathrm{d}}_u \, m(u) \, {}_{u-t}E^r_{x+t} \, 1_{\theta\geq u} \mathrm{d}u \\ &+ B^{\mathrm{w}}_\theta \, {}_{\theta-t}E^r_{x+t} \, 1_{\theta<T} - \pi \int_t^T {}_{u-t}E^r_{x+t} \, 1_{u<\theta} \, \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{3.6}$$

with ${}_qE^j_y = \mathrm{e}^{-j\,q} \, {}_qp_y = \mathrm{e}^{-j\,q - \int_0^q m(y-x+u)\mathrm{d}u}$ being the expected present value of a pure endowment with term q and interest rate j, interpretable as a *mortality risk adjusted discount factor*, and ${}_qp_y$ is the q-years survival probability for a life aged y.

Finally, the contract value at time 0, V_0^*, is obtained by solving the optimal stopping problem

$$V_0^* = \sup_\theta V_0(\theta), \tag{3.7}$$

where the supremum is taken over all $\mathbb{G}$-stopping times $\theta \geq t^{\mathrm{w}}$. As shown by [5], and with (3.5) in mind, the supremum can alternatively be taken over the corresponding set of $\mathbb{F}$-stopping times.

In the single premium case we define a fair contract when the premium, say U^*, coincides with its initial value, that is $U^* = V_0^*$. Since in the periodic premium case V_0^* is a net value, we say that the contract is fair if instead

$$V_0^* = 0. \tag{3.8}$$

Equation (3.8) implicitly defines a fair premium rate π^* that has to be found numerically through an iterative procedure.

In order to single out the fair premium for the surrender option, it is convenient to compute the fair premium for the corresponding European version of the contract, namely without the surrender option. To this end, we denote by V_0^{E} the time 0 value of the European contract, given by $V_0^{\mathrm{E}} = V_0(\infty)$ (see (3.4) and (3.5)). Then, the fair premium in the single premium case, say $U^{*\mathrm{E}}$, coincides with the initial value of the contract V_0^{E}. In the periodic premium case, instead, the fair premium $\pi^{*\mathrm{E}}$ solves the equation $V_0^{\mathrm{E}} = 0$. Finally, the fair premiums of the surrender option are given by $U^{*\mathrm{S}} = U^* - U^{*\mathrm{E}}$, $\pi^{*\mathrm{S}} = \pi^* - \pi^{*\mathrm{E}}$ respectively.

3.3 Least-squares Monte Carlo approach

The LSMC method, proposed by [61] for the valuation of American-style contingent claims, is based on the joint use of Monte Carlo simulation and Least Squares regression. We divide the interval $[0, T]$ in n subintervals of equal length $\Delta = T/n$, and let $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ with $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$. The contract can be surrendered at $t_i \in \mathbb{T}$, $t_i \geq t^{\mathrm{w}}$. Problem (3.7) is then replaced by its discretized version with the supremum computed over all stopping times $\theta \geq t^{\mathrm{w}}$ taking values in $\mathbb{T}$.

The LSMC approach relies on the dynamic programming principle and on estimating continuation values by regressing them against a set of suitable basis functions of the relevant state variables. In our setting we consider as state variables the reference asset price S (and related functions, see Sect. 3.5), and denote by $e = (e_1, \ldots, e_H)$ the set of basis functions. As in [5], we describe in what follows two alternative LSMC algorithms for solving (3.7). More in de-

tail, Algorithm 1 is based on definitions (3.3)-(3.4), and the supremum in (3.7) is taken over $\mathbb{G}$-stopping times. As shown in [5], this results in the backward procedure starting at each simulated time of death (or maturity, whichever comes first). Algorithm 2 is instead based on definitions (3.5)-(3.6) and the supremum in (3.7) is taken over $\mathbb{F}$-stopping times. In the description of the algorithms, we will add the superscript h to all simulated variables to denote their value in the h-th simulation.

Algorithm 1

- **Step 0** *(Simulation).* Simulate M paths of S over the time grid $\mathbb{T}$. Simulate further M times of death valued in $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$, where conventionally we set $\tau^h = \infty$ if the policyholder is alive at maturity.

- **Step 1** *(Initialization).* For $h = 1, \dots, M$, set $C_T^h = B_T^{\mathrm{s},h}$ if $\tau^h > T$ and $C_{\tau^h}^h = B_{\tau^h}^{\mathrm{d},h}$ if $\tau^h \leq T$.

- **Step 2** *(Backward iteration).* For $j = n-1, n-2, \dots, 0$,

  I *(Continuation values).* Set $I_j = \{1 \leq h \leq M : \tau^h > t_j\}$ and, for $h \in I_j$, set $C_{t_j}^h = C_{t_{j+1}}^h \mathrm{e}^{-r\Delta} - \pi\,(1 - \mathrm{e}^{-r\Delta}) r^{-1}$.

  II If $t_j \geq t^{\mathrm{w}}$:
  (Regression and comparison). Regress the continuation values $(C_{t_j}^h)_{h \in I_j}$ against $(e(S_{t_j}^h)_{h \in I_j})$, to obtain $\widetilde{C}_{t_j}^h = \beta_j^* \cdot e(S_{t_j}^h)$ for $h \in I_j$, where
  $$\beta_j^* = \arg\min_{\beta_j \in \mathbb{R}^H} \sum_{h \in I_j} \left(C_{t_j}^h - \beta_j \cdot e(S_{t_j}^h) \right)^2;$$
  if $B_{t_j}^{\mathrm{w},h} > \widetilde{C}_{t_j}^h$ then set $C_{t_j}^h = B_{t_j}^{\mathrm{w},h}$.

- **Step 3** *(Initial value).* Compute the time 0 value of the contract:
  $$V_0^* = M^{-1} \sum_{h=1}^M C_0^h.$$

In the following we need the expected present value of a continuous life annuity with term q and interest rate j, defined by ${}_q\bar{a}_y^j = \int_0^q {}_u E_y^j \, \mathrm{d}u$.

Algorithm 2

- **Step 0** *(Simulation).* Simulate M paths of S over the time grid $\mathbb{T}$.
- **Step 1** *(Initialization).* Set $C_T^h = B_T^{\mathrm{s},h}$ for $h = 1, \ldots, M$.
- **Step 2** *(Backward iteration).* For $j = n-1, n-2, \ldots, 0$,

  I *(Continuation values).* For $h = 1, \ldots, M$ let

  $$C_{t_j}^h = {}_{\Delta}E_{x+t_j}^r C_{t_{j+1}}^h + \int_{t_j}^{t_{j+1}} B_u^{\mathrm{d},h}\, m(u)_{u-t_j} E_{x+t_j}^r \mathrm{d}u - \pi\, {}_{\Delta}\bar{a}_{x+t_j}^r\,.$$

  II If $t_j \geq t^{\mathrm{w}}$:
  (Regression and comparison). Regress the continuation values $(C_{t_j}^h)_{h=1,\ldots,M}$ against $(e(S_{t_j}^h))_{h=1,\ldots,M}$ to obtain $\widetilde{C}_{t_j}^h = \beta_j^* \cdot e(S_{t_j}^h)$ for $h = 1, \ldots, M$, where

  $$\beta_j^* = \arg\min_{\beta_j \in \mathbb{R}^H} \sum_{h=1}^M \left(C_{t_j}^h - \beta_j \cdot e(S_{t_j}^h) \right)^2;$$

  if $B_{t_j}^{\mathrm{w},h} > \widetilde{C}_{t_j}^h$ set $C_{t_j}^h = B_{t_j}^{\mathrm{w},h}$.
- **Step 3** *(Initial value).* The time 0 value of the contract is:

  $$V_0^* = M^{-1} \sum_{h=1}^M C_0^h.$$

Algorithms 1 and 2 can be used to compute the value V_0^{E} of the European version of the contract by ordinary Monte Carlo. To this end, one has to skip the regression step 2 II in the above algorithms, or set $t^{\mathrm{w}} = T$.

3.4 Partial differential equation approach

In this Sect. we outline the partial differential equation (PDE) associated with the contract value, by using definitions (3.5) and (3.6) for it.

For $(t, S) \in [0, T] \times (0, \infty)$ denote by $v^*(t, S)$ the value at $t \leq T$ of a contract still in force, when $S_t = S$, so that $V^*(0) = v^*(0, S_0)$. By arbitrage free

principles, it can be proved that v^* solves the following linear complementary problem (See [38], [88] or [97]):

$$\begin{cases} (\mathcal{L}v^* + f^{\mathrm{d}}\, m - \pi)(v^* - f^{\mathrm{w}}) = 0 \\ \mathcal{L}v^* + f^{\mathrm{d}}\, m - \pi \leq 0 \\ v^* \geq f^{\mathrm{w}} \\ v^*(T, S) = f^{\mathrm{s}}(S) \end{cases}, \tag{3.9}$$

where the operator $\mathcal{L}$ is given by

$$\mathcal{L}v = -(r+m)v + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial S} S\, r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S^2\, \sigma^2$$

and f^{d} and f^{s} are the death and survival benefits defined in (3.1). In (3.9), f^{w} is defined by (3.2) for $t \geq t^{\mathrm{w}}$ while we set $f^{\mathrm{w}}(t, S) = -\infty$ for $0 \leq t < t^{\mathrm{w}}$. Note that this convention forces v^* to satisfy the PDE $\mathcal{L}v^* + f^{\mathrm{d}}\, m - \pi = 0$ for $0 \leq t < t^{\mathrm{w}}$. Together with the conditions in (3.9), one may need to add boundary conditions $v^*(t, 0) = g^0(t)$ and $v^*(t, +\infty) = g^{+\infty}(t)$ for $0 \leq t < T$. The functions g^0, $g^{+\infty}$ depend on f^{d}, f^{s}, f^{w} and whether the premium is single or periodic.

To simplify (3.9), we first transform the (t, S) plane into the (u, y) plane setting

$$\widetilde{v}^*(u, y) = v^*(t, S)\, ({}_{T-t}E^r_{x+t})^{-1}, \quad y = \log S + (T-t)r - u, \quad u = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}. \tag{3.10}$$

The original linear complementary problem (3.9) can then be rewritten as follows:

$$\begin{cases} \left(\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{v}^* - \widetilde{f}^{\mathrm{d}}\right)\left(\widetilde{v}^* - \widetilde{f}^{\mathrm{w}}\right) = 0 \\ \widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{v}^* - \widetilde{f}^{\mathrm{d}} \geq 0 \\ \widetilde{v}^* \geq \widetilde{f}^{\mathrm{w}} \\ \widetilde{v}^*(0, y) = \widetilde{f}^{\mathrm{s}}(0, y) \end{cases}, \tag{3.11}$$

for $y \in \mathbb{R}$ and $0 < u \leq T\frac{\sigma^2}{2}$, together with the boundary conditions

$\widetilde{v}^*(u,-\infty)=\widetilde{g}^{-\infty}(u)$ and $\widetilde{v}^*(u,+\infty)=\widetilde{g}^{+\infty}(u)$ for $0<u\leq T\frac{\sigma^2}{2}$, where

$$\widetilde{\mathcal{L}}=\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \widetilde{f}^{\mathrm{d}}(u,y)=\left(m(t)f^{\mathrm{d}}(t,S)-\pi\right)\ \frac{2}{\sigma^2}\left({}_{T-t}E^r_{x+t}\right)^{-1},\ \widetilde{f}^{\mathrm{s}}(u,y)=f^{\mathrm{s}}(S),$$
$$\widetilde{f}^{\mathrm{w}}(u,y)=f^{\mathrm{w}}(t,S)({}_{T-t}E^r_{x+t})^{-1},\ \widetilde{g}^{-\infty}(u)=g^0(t),\ \widetilde{g}^{+\infty}(u)=g^{+\infty}(t)$$

with (t,S) on the right hand side of these equalities expressed through (u,y) according to the transformation defined in (3.10). Note that the price $v^{*\mathrm{E}}$ of the contract without surrender option can be similarly found by solving the ordinary PDE $\mathcal{L}v^{\mathrm{E}}+f^{\mathrm{d}}m=\pi$. Problem (3.11) can now be solved using a standard finite difference algorithm (see, e.g., [33]).

3.5 Numerical examples

In this Sect. we present some numerical results for the fair (single and periodic) premium of a contract embedding a surrender option. We consider an insured aged $x=40$ at time 0 and assume for m a Weibull force of mortality, that is $m(t)=c_1^{-c_2}c_2(x+t)^{c_2-1}$, with parameters $c_1=83{,}6904$ and $c_2=8{,}2966$ as in [5]. We apply both algorithms described in Sect. 3.3 to compute contract values by LSMC, and take as benchmark the values obtained by solving (3.9).

In the LSMC scheme we consider a vector of basis functions of the form $(S_t)^{n_1}(B^{\mathrm{w}}_t)^{n_2}$ with $n_1+n_2\leq 2$. It is well known that the choice of the type and number of basis functions adopted in the regression step plays a relevant role. An extensive analysis of its implications on robustness and convergence and its interaction with the number of simulations can be found in [2, 74, 92, 93]. A further investigation in the context of the present work to assess the impact of the choice made above would be required, and we leave it to future research.

In the LSMC method the time grid consists of 2 intervals per year and we run 800 000 simulations (20 groups of 40 000 simulations each) using antithetic variables to reduce the variance (see [39]). In the finite difference scheme we adopt a grid with 200 steps in the time dimension and 400 in the reference asset dimension. With the binomial model we fix 250 steps per year (see [3]). In the numerical experiments we choose the following set of basic parameters:

the maturity $T = 20$, the risk-free rate $r = 4\%$, the initial value of the reference asset $S_0 = 100$ and its volatility $\sigma = 20\%$.

Single Premium. We assume here that $t^{\mathrm{w}} = 0$ and that the contract provides guarantees given by

$$B_T^{\mathrm{s}} = f^{\mathrm{s}}(S_T) = F_0 \max\left\{\frac{S_T}{S_0}, \mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,T}\right\}, \quad B_t^{\mathrm{i}} = f^{\mathrm{i}}(t, S_t) = F_0 \max\left\{\frac{S_t}{S_0}, \mathrm{e}^{r^{\mathrm{i}}\,t}\right\}$$

for i=d,w, where F_0 is the principal of the contract. The European value of the contract admits a closed form expression (see [17, 18]) given by

$$V_0^{\mathrm{E}} = U^{*\mathrm{E}} = \frac{F_0}{S_0}\left(S_0 + \int_0^T \mathrm{put}(t, S_0\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t})\,{}_tp_x\, m(t)\mathrm{d}t + \mathrm{put}(T, S_0\mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,T})\,{}_Tp_x\right),$$

where ${}_zp_y = \mathrm{e}^{-\int_0^z m(y-x+u)\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-c_1^{-c_2}((y+z)^{c_2}-y^{c_2})}$ and $\mathrm{put}(t, K)$ is the time 0 value of the European put with maturity t, strike K, underlying S in the Black-Scholes model (see [13]). In all the numerical examples we set $r^{\mathrm{s}} = r^{\mathrm{d}} = r^{\mathrm{w}} = 2\%$ and $F_0 = S_0$. To solve problem (3.9), the appropriate boundary conditions are: for $0 \le t < T$

$$\begin{aligned} g^0(t) =& F_0 \max\Big\{\sup_{t\vee t^{\mathrm{w}}\le u<T}\left(\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t}\,{}_{u-t}\bar{A}_{x+t}^{r-r^{\mathrm{d}}} + \mathrm{e}^{r^{\mathrm{w}}\,t}\,{}_{u-t}E_{x+t}^{r-r^{\mathrm{w}}}\right), \\ & \mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t}\,{}_{T-t}\bar{A}_{x+t}^{r-r^{\mathrm{d}}} + \mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,t}\,{}_{T-t}E_{x+t}^{r-r^{\mathrm{s}}}\Big\}, \qquad g^{+\infty} = F_0\,\frac{S_t}{S_0}, \end{aligned}$$

where ${}_q\bar{A}_y^j = \int_0^q {}_sE_y^j\, m(y-x+s)\mathrm{d}s$ is the expected present value of a term life assurance payable at the time of death for a policyholder aged y, with term q years and interest rate j.

In the case considered in the numerical examples ($r^{\mathrm{s}} = r^{\mathrm{d}} = r^{\mathrm{w}} \doteq r^{\mathrm{g}} \le r$ and $t^{\mathrm{w}} = 0$) it is easy to see that

$$g^0(t) = F_0\,\mathrm{e}^{r^{\mathrm{g}}\,t}\max_{t\le u\le T}\bar{A}_{x+t:\overline{u-t}|}^{r-r^{\mathrm{g}}} = F_0\,\mathrm{e}^{r^{\mathrm{g}}\,t},$$

where $\bar{A}_{y:\overline{q}|}^j = {}_q\bar{A}_y^j + {}_qE_y^j$ is the expected present value of an endowment.

Periodic Premium. Here we take $t^{\mathrm{w}} = 3$ years. The contract provides

guarantees given by

$$B^{\mathrm{s}}_T = f^{\mathrm{s}}(S_T) = F_0 \max\left\{\frac{S_T}{S_0}, \mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,T}\right\}, \quad B^{\mathrm{i}}_t = f^{\mathrm{i}}(t,S_t) = \frac{t}{T} F_0 \max\left\{\frac{S_t}{S_0}, \mathrm{e}^{r^{\mathrm{i}}\,t}\right\}$$

for i=d,w, where now B^{w} is relevant only for $t \geq t^{\mathrm{w}}$. Hence benefits in case of death or surrender follow a pro-rata rule. The fair premium rate for the European contract admits the following closed form expression, that can be obtained through an argument similar to the one used in the single premium case:

$$\pi^{*\mathrm{E}} = \frac{F_0\left[\left(S_0 + \mathrm{put}(T, S_0\mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,T})\right)\,{}_Tp_x + \int_0^T \frac{t}{T}\left(S_0 + \mathrm{put}(t, S_0\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t})\right)\,{}_tp_x\, m(t)\mathrm{d}t\right]}{S_0\,{}_T\bar{a}^r_x}.$$

Again, we set $r^{\mathrm{s}} = r^{\mathrm{d}} = r^{\mathrm{w}} \doteq r^{\mathrm{g}} = 2\%$ and $F_0 = S_0$. To solve problem (3.9), the appropriate boundary conditions are now: for $0 \leq t < T$

$$g^0(t) = \max\Bigg\{\frac{F_0}{T}\left(\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t}\left(t\,{}_{T-t}\bar{A}^{r-r^{\mathrm{d}}}_{x+t} + {}_{T-t}(\bar{I}\bar{A})^{r-r^{\mathrm{d}}}_{x+t}\right) + \mathrm{e}^{r^{\mathrm{s}}\,T}\,{}_{T-t}E^{r-r^{\mathrm{s}}}_{x+t}\right) - \pi\,{}_{T-t}\bar{a}^r_{x+t},$$
$$\sup_{t\vee t^{\mathrm{w}}\leq u<T}\left(\frac{F_0}{T}\left[\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}\,t}\left(t\,{}_{u-t}\bar{A}^{r-r^{\mathrm{d}}}_{x+t} + {}_{u-t}(\bar{I}\bar{A})^{r-r^{\mathrm{d}}}_{x+t}\right) + \mathrm{e}^{r^{\mathrm{w}}\,t}\,{}_{u-t}E^{r-r^{\mathrm{w}}}_{x+t}\right] - \pi\,{}_{u-t}\bar{a}^r_{x+t}\right)\Bigg\},$$
$$g^{+\infty}(t) = \max_{t\vee t^{\mathrm{w}}\leq u\leq T}\left(\tfrac{F_0}{T}\tfrac{S_t}{S_0}\left(t + (\bar{I}\bar{A})^0_{x+t:\overline{u-t}|}\right) - \pi\,{}_{u-t}\bar{a}^r_{x+t}\right),$$

where ${}_q(\bar{I}\bar{A})^j_y = \int_0^q {}_sE^j_y\, m(y-x+s)\, s\,\mathrm{d}s$ and $(\bar{I}\bar{A})^j_{y:\overline{q}|} = {}_q(\bar{I}\bar{A})^j_y + q\,{}_qE^j_y$ are the expected present values of an increasing term assurance payable at the time of death and an increasing endowment, for a policyholder aged y, term q years and with instantaneous interest rate j.

In the case considered in the numerical examples it can be shown that

$$g^0(t) = \max_{t\vee t^{\mathrm{w}}\leq u\leq T} b^0_t(u), \quad g^{+\infty}(t) = \max\left\{b^{+\infty}_t(t\vee t^{\mathrm{w}}),\ b^{+\infty}_t(T)\right\}$$

where

$$b^0_t(u) = \frac{F_0}{T}\,\mathrm{e}^{r^{\mathrm{g}}\,t}\left(t\,\bar{A}^{r-r^{\mathrm{g}}}_{x+t:\overline{u-t}|} + (\bar{I}\bar{A})^{r-r^{\mathrm{g}}}_{x+t:\overline{u-t}|}\right) - \pi\,{}_{u-t}\bar{a}^r_{x+t},$$
$$b^{+\infty}_t(u) = \frac{F_0}{T}\frac{S_t}{S_0}\left(t + (\bar{I}\bar{A})^0_{x+t:\overline{u-t}|}\right) - \pi\,{}_{u-t}\bar{a}^r_{x+t}.$$

Results. In Table 3.1 we report the results for the fair single premium U^* and the fair periodic premium rate π^* obtained by applying the LSMC Algorithm 1 (A1 column), Algorithm 2 (A2), the PDE approach (PDE) and the binomial model (B), as well as the fair premium for the European version of the contract $U^{*\mathrm{E}}$ and $\pi^{*\mathrm{E}}$ respectively (E), for different levels of the risk-free rate r. We notice that, as expected, the fair single premiums U^* and $U^{*\mathrm{E}}$ decrease with r. Recall, in fact, that these premiums are simply the initial value of the liabilities of the insurance company (with and without surrender option). As for the fair periodic premiums, we notice instead an increasing trend, apart from the case of the European contract when r is very close (or equal) to the guaranteed rate r^{g}. This pattern has a less intuitive explanation. The fair periodic premium π^* ($\pi^{*\mathrm{E}}$ respectively) is the (unique) zero of a decreasing function of π (π^{E}), that represents the initial American (European) contract net value. For a given level of π (π^{E}), this function is the difference between the fair values of the insurance company liabilities and the policyholder liabilities, both decreasing with r. The first component can be further split into the fund value and the value of the guarantee (American or, respectively, European, 'Titanic' put option, see [70]). While the fund value is independent of r, the value of the guarantee decreases with it. Under realistic assumptions for the contract parameters, in particular when the guaranteed rate r^{g} is (sufficiently) below r, the value of the guarantee is relatively small with respect to the fund value, that represents the predominant component of the insurer's liability. In this case the premium component prevails on the guarantee component, unless the periodic premium is unreasonably low, making thus the contract value increasing with r. To compensate this, the fair periodic premium increases as well. For unrealistic contract parameters (in which the guaranteed rate is very close to, or even above, r), instead, the guarantee component can be important and prevail on the premium component not only for small levels of π (π^{E}). This can produce a contract value decreasing with r, hence a fair periodic premium decreasing as well. In Table 3.1 this happens only for European contracts, but in other experiments (not reported here) where we have kept $r \leq r^{\mathrm{g}}$ this happens also for American contracts. Moreover, from Table 3.1 we observe that the sensitivity of all premiums with respect to r is

	Single premium					Periodic premium				
$r\%$	A1	A2	PDE	B	E	A1	A2	PDE	B	E
2.0	134.117	134.340	134.207	134.179	134.179	8.958	8.967	8.967	8.956	8.136
	(0.221)	(0.223)				(0.001)	(0.001)			
2.5	129.306	129.508	129.442	129.422	128.083	9.074	9.070	9.101	9.088	8.128
	(0.238)	(0.238)				(0.002)	(0.002)			
3.0	125.681	125.827	125.821	125.801	122.916	9.212	9.213	9.252	9.237	8.157
	(0.227)	(0.217)				(0.002)	(0.002)			
3.5	122.681	122.848	122.898	122.879	118.569	9.353	9.353	9.423	9.403	8.222
	(0.230)	(0.222)				(0.002)	(0.002)			
4.0	120.297	120.471	120.483	120.466	114.937	9.513	9.509	9.610	9.584	8.321
	(0.235)	(0.244)				(0.001)	(0.001)			
4.5	118.278	118.494	118.463	118.443	111.927	9.704	9.700	9.808	9.780	8.455
	(0.228)	(0.241)				(0.001)	(0.001)			
5.0	116.573	116.743	116.748	116.729	109.450	9.913	9.911	10.021	9.989	8.619
	(0.220)	(0.228)				(0.001)	(0.001)			
5.5	115.106	115.269	115.288	115.263	107.430	10.142	10.139	10.248	10.212	8.814
	(0.228)	(0.226)				(0.001)	(0.001)			
6.0	113.809	114.037	114.026	114.001	105.796	10.389	10.388	10.488	10.446	9.035
	(0.207)	(0.221)				(0.001)	(0.001)			

Tabla 3.1: Numerical results, interest rate (in brackets standard errors)

	Single premium					Periodic premium				
T	A1	A2	PDE	B	E	A1	A2	PDE	B	E
10.0	116.919	116.937	117.176	117.172	114.559	15.045	15.046	15.009	15.004	13.896
	(0.108)	(0.110)				(0.001)	(0.001)			
12.5	118.142	118.154	118.297	118.293	114.937	12.859	12.862	12.867	12.853	11.678
	(0.146)	(0.135)				(0.001)	(0.001)			
15.0	119.027	119.080	119.181	119.175	115.080	11.374	11.374	11.428	11.408	10.191
	(0.179)	(0.162)				(0.001)	(0.001)			
17.5	119.782	119.825	119.898	119.886	115.064	10.335	10.336	10.387	10.369	9.125
	(0.187)	(0.186)				(0.001)	(0.001)			
20.0	120.297	120.471	120.483	120.466	114.937	9.513	9.509	9.607	9.584	8.321
	(0.235)	(0.244)				(0.001)	(0.001)			
22.5	120.685	120.936	120.967	120.942	114.734	8.889	8.881	8.987	8.967	7.693
	(0.126)	(0.154)				(0.002)	(0.001)			
25.0	121.279	121.578	121.372	121.333	114.480	8.376	8.373	8.494	8.466	7.187
	(0.258)	(0.274)				(0.002)	(0.001)			
27.5	121.515	121.810	121.708	121.656	114.197	7.948	7.943	8.075	8.046	6.767
	(0.351)	(0.414)				(0.001)	(0.001)			
30.0	121.532	121.999	121.985	121.919	113.901	7.581	7.571	7.718	7.684	6.410
	(0.260)	(0.324)				(0.001)	(0.001)			

Tabla 3.2: Numerical results, maturity (in brackets standard errors)

rather strong, as expected, that the value of the surrender option is almost never negligible (apart from the single premium case when $r = 2\%$), and that the American premiums obtained with the different numerical approaches are very close to each other.

In Table 3.2 we show similar results as before (for single and periodic fair

	Single premium					Periodic premium				
σ%	A1	A2	PDE	B	E	A1	A2	PDE	B	E
10.0	107.355	107.544	107.495	107.477	103.685	7.986	7.985	7.995	7.973	7.505
	(0.083)	(0.092)				(0.000)	(0.000)			
12.5	110.442	110.657	110.602	110.586	106.248	8.341	8.344	8.360	8.339	7.691
	(0.112)	(0.111)				(0.001)	(0.001)			
15.0	113.714	113.928	113.847	113.829	109.050	8.711	8.714	8.755	8.733	7.894
	(0.142)	(0.144)				(0.001)	(0.001)			
17.5	117.031	117.214	117.157	117.137	111.970	9.102	9.106	9.172	9.149	8.106
	(0.191)	(0.192)				(0.001)	(0.001)			
20.0	120.297	120.471	120.483	120.466	114.937	9.513	9.509	9.609	9.584	8.321
	(0.235)	(0.244)				(0.001)	(0.001)			
22.5	123.600	123.760	123.804	123.782	117.906	9.931	9.921	10.061	10.036	8.537
	(0.293)	(0.278)				(0.002)	(0.002)			
25.0	126.762	126.862	127.092	127.066	120.844	10.351	10.348	10.528	10.503	8.750
	(0.321)	(0.301)				(0.002)	(0.002)			
27.5	129.546	129.752	130.328	130.298	123.730	10.804	10.791	11.010	10.984	8.960
	(0.463)	(0.453)				(0.002)	(0.002)			
30.0	132.521	132.550	133.500	133.464	126.547	11.267	11.237	11.504	11.477	9.164
	(0.553)	(0.433)				(0.002)	(0.002)			

Tabla 3.3: Numerical results, volatility (in brackets standard errors)

premiums), when the contract maturity changes. In the single premium case, of course, the initial value of the American contract (U^*) increases with its maturity. Recall in fact that the guarantee component is an American Titanic put, while the fund component is independent of T. This is not true, instead, for European contracts (in particular for the European Titanic put): in this case $U^{*\mathrm{E}}$ initially increases, reaches a maximum for $T = 15$ years and after decreases. The influence of T on the fair single premium is not so strong, while it becomes very important in the periodic premium case, in which the premium is halved when the maturity increases from 10 to 30 years. The periodic premium is decreasing, because the longer is the contract duration, the longer is the period in which the payment for the insurance company liabilities is split. Also, in this table, we can see that the different numerical approaches for computing the American contract value do not lead to significant differences in the results. Recall, in particular, that when computing the fair periodic premium two approximations are involved: the first concerns the contract value, the second the zero search, and numerical errors could propagate.

In Table 3.3 we report the results for different levels of the reference fund volatility parameter σ. In this case, as expected, both single and periodic premiums strongly react to changes in the volatility parameter, increasing

	Single		Periodic	
	A1	A2	A1	A2
interest rate	0.141	0.013	0.743	0.752
maturity	0.174	0.027	0.846	0.881
volatility	0.268	0.129	1.058	1.107

Tabla 3.4: Relative root mean squared errors in percentage

with it. The other results (comparison between different numerical approaches, value of the surrender option) are similar to those of the previous tables.

Finally, in Table 3.4 we report the mean relative errors of the LSMC results with respect to the benchmark, that is the value obtained with the PDE approach.

Capítulo 4

A dynamic programming algorithm for the valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits in variable annuities

4.1 Introduction

Variable annuities are very flexible life insurance contracts that package several types of options and guarantees, at policyholder discretion. Typically, a lump sum premium is paid at contract inception and is invested in one or more mutual funds chosen by the policyholder among a range of alternative opportunities. Then this initial investment sets up a reference portfolio ('policy account') and each option or guarantee is financed by periodical deductions from the policy account value.

Guarantees are commonly referred to as GMxBs (Guaranteed Minimum Benefit of type 'x'), where 'x' stands for accumulation (A), death (D), income (I) or withdrawal (W). In particular, GMABs and GMDBs provide guarantees in the accumulation phase, prior to retirement, although sometimes the GMDB

is offered also after retirement. In a GMIB, that consists of a (possibly indexed, or participating) deferred life annuity, the guarantee usually concerns the annuitized amount or the annuitization rate. However, GMABs and GMDBs can be found also in other types of life insurance contracts such as unit-linked or participating policies, and GMIBs become, after conversion, traditional life annuities. The GMWB, instead, is undoubtedly the most interesting feature of variable annuities and is the most popular rider selected by variable annuity customers, see [58]. GMWBs are similar to an income drawdown, because they entitle the policyholder to make periodical withdrawals from her account, even when the account value is reduced to 0. Typically, this guarantee concerns the entire initial investment of the policyholder, that can be withdrawn within a given period of time. At the end of the withdrawal period, or at death, any remaining fund in the reference portfolio is paid back to the policyholder or to her estate. Recently, Guaranteed Lifelong Withdrawals (GLW), protecting the policyholder against the risk of underfunding due to high longevity, have been introduced in the market.

When a variable annuity contains a GMWB (or GLW) rider, there is an amount, fixed or time-dependent, that the policyholder is entitled to withdraw at some specified dates (typically, annually or semiannually). Withdrawals below this fixed amount are allowed, while withdrawals above this amount, if permitted, are subject to a penalty. Then, the prediction of the policyholder behaviour is a key-element in the valuation of such guarantee. In particular, under the so called 'static' (or 'passive') approach, it is assumed that the policyholder withdraws exactly the amount contractually specified (see [71]). The 'dynamic' approach assumes instead that the policyholder chooses the amounts to withdraw according to some optimal policy. In-between these two approaches there is the 'mixed' one, coined by [6], that assumes a static behaviour with respect to the choice of the withdrawal amounts, but a dynamic one with respect to surrender decisions.

General information on variable annuity features can be found in [58] and [1]. The market for variable annuities have been steadily growing in the past 20 years. However, sales fell during the recent financial crisis and many companies offering these products had to eventually exit the business as a

result of poor, or lack of, hedging of the guarantees attached.

In this paper we present a dynamic programming algorithm aimed at pricing a variable annuity with a GMWB under the dynamic approach. This algorithm is general enough to allow for different levels of policyholder rationality in her withdrawal behaviour so that, in particular, the static and the mixed approach can be accomodated as special cases. Variants and extensions of the basic GMWB contract are easily dealt with. We overcome some well-known problems arising from assuming normality of the reference fund returns, as very often done in the literature, by putting ourselves in a general Lévy framework. This class of stochastic processes is flexible enough to allow for jumps and other desirable properties displayed by the empirical distribution of asset returns (such as fat tails and skewness) and is straightforward to implement. We present extensive numerical examples and compare the results obtained for different market and contractual parameters, policyholder behaviours, as well as for different types of Lévy processes.

The paper is structured as follows. In Section 4.2 we review the existing literature on GMWBs, focussing in particular on the dynamic approach. In Section 4.3 we describe the variable annuity contract and the discrete time framework adopted for the valuation. In Section 4.4 we briefly introduce and recall the main properties of Lévy processes. In Section 4.5 we develop the dynamic programming algorithm and in Section 4.6 we present the numerical results. Finally, Section 4.7 concludes the paper.

4.2 Review on the literature on GMWBs

The pricing and hedging variable annuity contracts has attracted the interest of many academics and practitioners. This review focuses on GMWBs and GLWs and in no way claims to be exhaustive. We classify in Table 4.1 the papers of which we are aware according to the following features: type of benefit (GMWB, GLW), assumption on policyholder behaviour (static* - to be explained below - mixed or fully dynamic), statistical assumption on fund return distribution and numerical tool used for the evaluation.

With the term *static** we extend the static behaviour described in the

introduction by including any fixed withdrawal or surrender strategy. More precisely, in this class we include deterministic strategies (such as the static discussed before), strategies based on the value of state variables (eg withdrawal or surrender behaviours based on the moneyness of the guarantees) that is, in the language of stochastic processes, adapted strategies, and also randomization of such strategies. As opposed to the mixed or fully dynamic behaviour, the static* approach is not the result of an optimization process. We point out that the static* approach, frequently adopted by practitioners in the analysis of products and e.g. in profit testing exercises, is appealing, somewhat intuitive and straightforward to implement even under sophisticated assumptions on the evolution of the state (market, mortality, ...) variables. However, it is undoubtedly hard to anticipate correctly the policyholder behaviour, e.g. to specify her policy as a function of the moneyness of the guarantees (see [55], [52] and [1] for the different factors influencing lapse and surrender rates). On the other hand, the dynamic approach overcomes this subjective side by taking a worst case scenario from the insurer's point of view, but is subject to the curse of dimensionality and hence very often forces to adopt a very simple setup. Looking at Table 4.1, one can see that few papers go beyond the assumption of normality for the fund returns. Notable exceptions are [25], where the jump diffusion model of Merton is considered, and [20] and [37], where regime switching type processes are used. These contributions use partial differential equations to solve the corresponding optimization problem.

Paper	Rider	PH behaviour	Fund process	Tool
Boyle et al. (2005) [16]	GMWB	static*	GBM	MC
Milevsky and Salisbury (2006) [71]	GMWB	static/dynamic	GBM	PDE
Bauer et al. (2008) [9]	GMWB	static*	GBM	MC
Chen and Forsyth (2008) [24]	GMWB	dynamic	GBM	PDE
Dai et al. (2008) [30]	GMWB	dynamic	GBM	PDE
Chen et al. (2008) [25]	GMWB	dynamic	GBM/Merton	PDE
Shah and Bertsimas (2008) [86]	GLW	static	SIR+SV	quasi analytic/MC
Peng et al (2012) [79]	GMWB	static	SIR	analytical/MC
Belanger et al. (2009) [20]	GMWB	dynamic	RS	PDE
Piscopo (2009) [81]	GLW	static	GBM	MC
Bacinello et al. (2011,2012) [6, 7]	GMWB/GLW	static/mixed	SIR+SV+SM	(LS)MC
Kling et al (2011) [53]	GLW	static*/mixed	SV	(LS)MC
Piscopo and Haberman (2011) [82]	GLW	static	GBM+SM	MC
Moening and Bauner (2011) [73]	GMWB	dynamic	GBM	DP
Steinorth and Mitchell (2012) [91]	GLW	dynamic	GBM	DP
Holz et al. (2012) [45]	GMWB/GLW	static*/mixed	GBM	DP/MC
Forsyth and Vetzal (2012) [37]	GLW	dynamic	RS	PDE

Tabla 4.1: GMWB=Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit, GLW=Guaranteed Lifelong Withdrawal; GBM=Geometric Brownian Motion, Merton=Merton Jump Diffusion model, RS=Regime Switching, SIR=Stochastic Interest Rates, SV=Stochastic Volatility, SM=Stochastic Mortality; PDE=Partial Differential Equations, DP=Dynamic Programming, MC=Monte Carlo LSMC=Least-Squares Monte Carlo

In this paper, we show how an approach based on dynamic programming can accomodate any fund return distribution within the class of Lévy processes, allowing therefore a great variety of statistical features such as kurtosis and skewness.

4.3 The structure of the contract

4.3.1 Description

Although there are different ways in which a GMWB can be arranged within a variable annuity contract, in what follows we focus on a specific case, that is the most common in practice. At contract inception, the policyholder pays a lump-sum premium, that is invested in a well diversified mutual fund, hence a reference portfolio backing the variable annuity is set up in this way. The current value of this portfolio defines the first of two accounts which the policyholder is entitled to, called 'personal sub-account'. After that, the policyholder has the right to make periodical withdrawals from the reference portfolio, even if her personal account value is reduced to zero. Usually the total withdrawals guaranteed during the life of the contract amount to her whole initial investment. Then, in this case, the guarantee becomes effective if the reference portfolio is completely exhausted before the initial premium has been totally recouped. The second account, called 'guarantee account', keeps updated the total amount of money that the policyholder is still guaranteed for withdrawals. The cost of the guarantee is financed by periodical deductions from the personal account value ('insurance fees'). The amount that the policyholder is entitled to withdraw at each withdrawal date is usually subject to a withdrawal level, fixed or time-dependent, over which some penalty is applied. At maturity, the policyholder (or her estate) receives the maximum between the balance of the personal account and the guarantee account.

When the contract contains a surrender option, the policyholder is allowed to terminate the contract before maturity. In this case she receives a cash amount, called surrender value, usually equal to the balance of the personal account with a proportional penalty if it is higher than the specified withdrawal

level. We notice that there is an important difference between surrender and withdrawal of all the guarantee account ('total withdrawal'), at least when the balance of the personal account is higher than that of the guarantee account. In case of surrender, in fact, the contract ceases to exist, while in case of total withdrawal the contract remains still in force if the personal account is not completely exhausted, and the insurance fee continues to be applied. Then, at maturity, the balance of the personal account is entirely paid back. Moreover, after total withdrawal the policyholder may still decide to surrender the contract before maturity if she values that the periodical application of the insurance fee prevails on the (lump sum) surrender penalty.

Finally, we observe that the introduction of mortality risk can be easily handled in the dynamic programming algorithm, as we will see in Sections 4.3.4 and 4.5. We refer, more in detail, to the case in which the contract expires before maturity (and before surrender) if the insured dies, with the payment of a lump sum benefit specified in the contract, typically equal to the balance of one of the two accounts or to the maximum between them.

4.3.2 Model and valuation

We now formalize what just described. Let A_t and W_t denote the time t guarantee account and personal account respectively, before any decision at t is made. Moreover, let S_t denote the unit price at time t of the reference fund, U the lump sum premium, T the maturity of the policy.

Assume that withdrawals are allowed only at times t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, with $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{N-1} < t_N = T$, where t_0 denotes the inception of the contract.[1] The return on the fund over (t_i, t_{i+1}), $i = 0, \ldots, N-1$, is then

$$R_{t_i} = \frac{S_{t_{i+1}} \mathrm{e}^{q(t_{i+1}-t_i)}}{S_{t_i}} - 1,$$

where q is the dividend yield, assumed to be constant. Let θ_{t_i} denote the decision made at time t_i by the policyholder. In the simplest case, θ_{t_i} is just

[1] If t_0 coincides, instead, with the end of an accumulation period and U is the (possibly guaranteed) accumulation benefit, then t_0 could be included in the set of possible withdrawal times.

the amount withdrawn at t_i, but examples involving other types of decisions can be considered. For the moment we think of θ_{t_i} as some element of a set of admissible decisions Θ_{t_i}, which can depend on the current value of the state variables A_{t_i} and W_{t_i}.

The accounts evolve according to the following equations:

$$W_{t_{i+1}} = g_1(W_{t_i}, R_{t_i}, \theta_{t_i}), \tag{4.1}$$

$$A_{t_{i+1}} = g_2(W_{t_i}, A_{t_i}, \theta_{t_i}), \tag{4.2}$$

for some nonnegative functions g_1, g_2. Hence $W_{t_{i+1}}$ is determined by the current personal account value, the fund return and the decision, while $A_{t_{i+1}}$ depends on the current value of both accounts and the decision. The initial conditions are $W_0 = A_0 = U$.[2] The cash flow paid to the policyholder at t_i, $i = 1, \ldots, N-1$, is denoted by C_{t_i} and depends on the current decision and state variables, written

$$C_{t_i} = g_3(W_{t_i}, A_{t_i}, \theta_{t_i}) \tag{4.3}$$

for a nonnegative function g_3. For $i = N$, $C_{t_N} = C_T$ is specified separately, typically as a function of W_T, A_T.[3]

Let π denote a possible sequence of (withdrawals) decisions, i.e. $\pi = \left(\theta_{t_1}, \theta_{t_2}, \ldots, \theta_{t_{N-1}}\right)$ with $\theta_{t_i} \in \Theta_{t_i}$. The initial value of the cash flows generated from holding the GMWB variable annuity and adopting the sequence of decisions π is given by:

$$V_0^{\pi} = E\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-r\,t_i}\, C_{t_i}\right], \tag{4.4}$$

where E denotes the expectation taken under a suitable risk-adjusted measure and r is the (assumed constant) risk-free rate. Finally, the no-arbitrage value

[2] For $i = 0$, we set conventionally $\theta_0 = \theta_{t_0} = 0$, so that W_{t_1} and A_{t_1} are determined only by the single premium U and the first period return R_{t_0}.

[3] Different type of contracts, or more general frameworks, can be represented with a similar scheme, by adding state variables and their state equations. The functions g_i, $i = 1, 2, 3$, may depend on these additional variables as well.

of the variable annuity is given by:

$$V_0 = \sup_{\pi} V_0^{\pi}, \tag{4.5}$$

where the supremum is taken over all sequences $\pi = \left(\theta_{t_1}, \theta_{t_2}, \ldots, \theta_{t_{N-1}}\right)$ of withdrawal decisions satisfying the constraint $\theta_{t_i} \in \Theta_{t_i}$ and where the personal and guarantee account satisfy (4.1)-(4.2). This approach assumes that the policyholder behaves rationally and acts so as to maximize the expected present value of all the cash flows generated by the GMWB variable annuity. This problem can be solved using the dynamic programming algorithm, as explained in Section 4.5. In the rest of this section, we exemplify the framework introduced by specifying the set of admissible decisions and the state equations.

4.3.2.1 Dynamic withdrawals

At any date t_i, $i = 1, \ldots, N-1$, the policyholder can choose to withdraw any amount θ_{t_i} up to the guarantee account A_{t_i}, that is the decision set is $\Theta_{t_i} = [0, A_{t_i}]$. The evolution of the accounts between t_i and t_{i+1}, equations (4.1)-(4.2), is now given by

$$W_{t_{i+1}} = \max\left\{W_{t_i} - \theta_{t_i}, 0\right\}(1 + R_{t_i})(1 - \varphi(t_{i+1} - t_i)), \tag{4.6}$$

$$A_{t_{i+1}} = A_{t_i} - \theta_{t_i}, \tag{4.7}$$

where φ is the insurance fee, applied while the contract is still in force. Note that once W_t or A_t hits the value 0, they stay at this value thereafter. Hence withdrawals continue while the guarantee account is positive, even if the personal account is insufficient.

Although the policyholder can withdraw any amount $0 \leq \theta_{t_i} \leq A_{t_i}$, a proportional penalty at rate κ_1 applies in case withdrawals exceed a withdrawal level G, which is typically equal to $\frac{A_0}{N}$.[4] The cash flow paid to the policyholder,

[4] An alternative to (4.7) is to specify the guarantee account evolution including a reset

equation (4.3), now becomes

$$C_{t_i} = \begin{cases} \theta_{t_i} & \text{if } 0 \leq \theta_{t_i} \leq G \\ G + (1-\kappa_1)(\theta_{t_i} - G) & \text{if } \theta_{t_i} > G \end{cases}$$
$$= \theta_{t_i} - \kappa_1 \max\{\theta_{t_i} - G, 0\}. \tag{4.8}$$

Note that the penalty charge is applied on the portion of θ_{t_i} exceeding G. At maturity, the policyholder receives the maximum between the remaining balance in both accounts, that is $C_{t_N} = \max\{W_T, A_T\}$.

4.3.2.2 Static withdrawals

The policyholder is constrained to withdraw the amount G, provided this is lower than the guarantee account, or the guarantee account otherwise. This behaviour is obtained by setting the set of decisions at t_i as the singleton $\Theta_{t_i} = \{\min\{G, A_{t_i}\}\}$. The accounts and cash-flow are still defined by (4.6), (4.7) and (4.8). More generally, the static* approach defined in Section 4.2 corresponds to fixing a sequence π of withdrawal decisions, and the value of the contract is then V_0^π.

As shown in [71], under the static approach the variable annuity contract can be decomposed (in the case $t_i = i$ and $G = W_0/T$) into an immediate annuity with instalment G and maturity T and a Quanto-Asian put option corresponding to the guarantee of receiving at maturity the policyholder account net of the last instalment, if positive. More specifically, the pay-off of the put option is

$$W_0 \frac{1}{Y_T} \max\{1 - \overline{Y}_T, 0\},$$

provision in case of withdrawals above G (see for instance [71]):

$$A_{t_{i+1}} = \begin{cases} A_{t_i} - \theta_{t_i} & \text{if } 0 \leq \theta_{t_i} \leq G \\ \max\{\min\{A_{t_i} - \theta_{t_i}, W_{t_i} - \theta_{t_i}\}, 0\} & \text{if } \theta_{t_i} > G \end{cases}.$$

The extension to a time dependent withdrawal level is straightforward, while the inclusion of reset provisions on the guaranteed withdrawal amount requires an additional state variable.

where

$$Y_t = S_t^{-1}(1-\varphi)^{-t}, \qquad \overline{Y}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t.$$

4.3.2.3 Dynamic+surrender

We introduce the possibility of surrendering the GMWB before maturity. Without loss of generality, we assume that surrender can take place only at the discrete withdrawal dates t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Letting $\theta_{t_i} = \mathrm{s}$ denote the decision to surrender the contract at t_i, the set of possible choices for the policyholder is enlarged and becomes $\Theta_{t_i} = [0, A_{t_i}] \cup \{\mathrm{s}\}$. The state equations and the cash flow now need to be redefined. The amount received by the policyholder in case of surrender is given by the personal account value W_{t_i}, net of a penalty κ_2 applied as before to the portion of W_{t_i} exceeding G (or A_{t_i}, if less). We then modify definition (4.8) as follows:

$$C_{t_i} = \begin{cases} \theta_{t_i} & \text{if } 0 \le \theta_{t_i} \le G \\ \theta_{t_i}(1-\kappa_1) + \kappa_1 G & \text{if } \theta_{t_i} > G \\ W_{t_i}(1-\kappa_2) + \kappa_2 \min\{G, A_{t_i}, W_{t_i}\} & \text{if } \theta_{t_i} = \mathrm{s} \end{cases}. \tag{4.9}$$

The state equations now just reflect the fact that, in case of surrender, the accounts are set to 0, that is

$$W_{t_{i+1}} = \begin{cases} \max\{W_{t_i} - \theta_{t_i}, 0\}\,(1+R_{t_i})(1-\varphi(t_{i+1}-t_i)) & \text{if } 0 \le \theta_{t_i} \le A_{t_i} \\ 0 & \text{if } \theta_{t_i} = \mathrm{s} \end{cases}, \tag{4.10}$$

$$A_{t_{i+1}} = \begin{cases} A_{t_i} - \theta_{t_i} & \text{if } 0 \le \theta_{t_i} \le A_{t_i} \\ 0 & \text{if } \theta_{t_i} = \mathrm{s}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Note that, provided $\kappa_2 \ge \kappa_1$, surrender is never optimal if $W_{t_i} \le A_{t_i}$.

4.3.2.4 Mixed (static+surrender)

As in the static approach, the policyholder is behaving passively with respect to partial withdrawals, but can choose to surrender in a dynamic fashion. The decision set at t_i is now $\Theta_{t_i} = \{\min\{A_{t_i}, G\}, \mathrm{s}\}$, while the cash flow and the state equations (4.9)-(4.11) are unchanged.

4.3.3 Fair pricing and comparison

Recall that the cost of the guarantee is charged to the policyholder through the application of the proportional insurance fee rate φ to the personal sub-account. Hence the contract is fairly priced if and only if its initial value V_0, computed under any of the approaches introduced in 4.3.2.1-4.3.2.4, coincides with the initial premium U. Then, the fair fee rate φ^* can be defined as a solution of the following equation:

$$V_0(\varphi) = U \tag{4.12}$$

where, with a slight abuse of notation, we explicitly indicate that V_0 is a function of the proportional fee rate φ.

Denote now by V_0^{dynamic}, V_0^{static}, $V_0^{\text{surrender}}$ and V_0^{mixed} the initial values of the contract under each of the assumptions in 4.3.2.1-4.3.2.4, and by φ^{dynamic}, φ^{static}, $\varphi^{\text{surrender}}$ and φ^{mixed} the corresponding fair fees. It is clear that

$$V_0^{\text{static}} \leq V_0^{\text{dynamic}} \leq V_0^{\text{surrender}}, \qquad \varphi^{\text{static}} \leq \varphi^{\text{dynamic}} \leq \varphi^{\text{surrender}}.$$

The same inequalities hold when V_0^{dynamic} and φ^{dynamic} are replaced respectively by V_0^{mixed} and φ^{mixed}. No direct comparison seems possible between values and fees computed under the dynamic and mixed approach. The spread $V_0^{\text{dynamic}} - V_0^{\text{static}}$ can be interpreted as the extra cost, in terms of single premium, required to add to the 'static' contract (the policyholder can only withdraw the amount G and receive the remaining personal account at maturity) the possibility to withdraw any amount up to the personal account.

Similar interpretations apply to the difference $V_0^{\text{surrender}} - V_0^{\text{mixed}}$ or to the corresponding spreads computed in terms of fair fees, while the differences $V_0^{\text{mixed}} - V_0^{\text{static}}$ and $V_0^{\text{surrender}} - V_0^{\text{dynamic}}$ can be seen as the extra cost required to add the surrender option to the 'static' and 'dynamic' contract respectively.

4.3.4 Mortality risk

We assume now that, if the insured dies before maturity T, the contract prematurely expires with the payment of a death benefit. To simplify the treatment, we suppose that, in case of death between two withdrawal dates t_i and t_{i+1}, the death benefit, denoted by $D_{t_{i+1}}$, is paid at t_{i+1}, after which the values of the personal and guarantee account are set to 0.

If the contract does not include a GMDB, the death benefit is given by the personal account, i.e. $D_{t_{i+1}} = W_{t_{i+1}}$. If instead a GMDB is included, in case of death there is a guaranteed amount $G^{\text{d}}_{t_{i+1}}$ so that the death benefit is $\max\{G^{\text{d}}_{t_{i+1}}, W_{t_{i+1}}\}$. The guaranteed amount can be computed, for instance, according to:[5]

- $G^{\text{d}}_{t_{i+1}} = A_{t_{i+1}}$ (return of premium net of withdrawals);
- $G^{\text{d}}_{t_{i+1}} = \max\{G^{\text{d}}_{t_i} - \theta_{t_i}, 0\}\mathrm{e}^{r^{\text{d}}(t_{i+1}-t_i)}$ with $G^{\text{d}}_0 = A_0$ (roll-up of residual premium at some interest rate r^{d}).

4.4 Lévy processes framework

In order to model the fund value, we start with a stochastic process $(X_t)_{t\geq 0}$, with $X_0 = 0$, defined on the basic probability space equipped with the risk neutral measure introduced in the previous section. We assume that X_t is a Lévy process, that is X_t has right-continuous with left limits paths, $X_s - X_t$ is independent of $(X_u)_{0\leq u\leq t}$ and is distributed as X_{s-t}, for $0 \leq t < s$. For a comprehensive description of Lévy processes, their properties and applications we refer to [28] and [84]. Lévy processes are a combination of a linear drift, a

[5] Of course $G^{\text{d}}_{t_{i+1}}$ is meaningless if $\theta_{t_i} = \text{s}$, being the contract no longer in force after surrender. Note moreover that the valuation of the GMDB guarantee with a roll-up of premium would require to treat G^{d}_t as a state variable.

Brownian motion, and a jump process. A Lévy process (X_t) is determined by its characteristic function

$$\Phi_t(u) := E\left[\mathrm{e}^{iuX_t}\right] = [\Phi_1(u)]^t$$

and, in particular, all moments of X_t can be numerically recovered from the knowledge of Φ_t, when they are not available in closed form. If Φ_t is integrable, then X_t has density given by:

$$f_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-izx}\Phi_t(z)\mathrm{d}z.$$

We model the reference portfolio value S_t as an exponential Lévy process:

$$S_t = S_0\mathrm{e}^{(r-q+d)t+X_t},$$

where q is the dividend yield and $d = -\frac{1}{t}\ln\Phi_t(-i) = -\ln\Phi_1(-i)$ represents the adjustment so that $(S_t\,\mathrm{e}^{-(r-q)t})$ is a martingale under the risk-neutral measure.

In the numerical experiments we consider the following examples of Lévy processes, commonly used in finance applications, although we could in principle use any exponential Lévy model to represent the fund dynamics.

1. Geometric Brownian Motion (GBM)

$$\Phi_t(u) = \exp\left(iu\mu t - \frac{1}{2}\,\sigma^2u^2t\right),$$

with $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

2. Merton Jump Diffusion (MJD)

$$\Phi_t(u) = \exp\left(iu\mu t - \frac{1}{2}\,\sigma^2u^2t + \lambda t\left(\mathrm{e}^{ium-\frac{1}{2}\,c^2u^2} - 1\right)\right),$$

with μ, $m \in \mathbb{R}$, σ, c, $\lambda > 0$.

3. Variance-Gamma (VG)

$$\Phi_t(u) = \exp\left(-\frac{t}{\nu}\ln\left(1 - iu\mu\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \nu\right)\right),$$

with $\mu \in \mathbb{R}$, σ, $\nu > 0$.

4. Carr, Geman, Madan, Yor (CGMY)

$$\Phi_t(u) = \exp\left(c\,\Gamma(-y)\,t\left[(m - iu)^y - m^y + (g + iu)^y - g^y\right]\right),$$

with $g, m \geq 0$, $c > 0$, $y < 2$ and Γ is the gamma function.

Example (1) is a pure diffusion, without jump component. A jump component in the equity returns is introduced by [69] through a compound Poisson process, leading to Example (2), where λ denotes the jump intensity and m and c are the mean and standard deviation of the log jump sizes, assumed to be normally distributed. This jump component produces a finite number of jumps within any finite time interval, i.e., the process exhibits finite activity, allowing to capture rare and large events such as market crashes or corporate defaults. However, market prices can also experiment very frequent jumps of different sizes within any finite time interval. This property is captured by infinite activity processes, e.g. by Example (3), which is a pure jump process with infinite activity and paths of finite variation. The Variance-Gamma process was first introduced by [67] and [66], and then extended by [65]. Here, in Example (3), we refer to this latter extension. In particular, the VG process can be seen as a Brownian motion with constant drift μ and volatility σ,[6] with a stochastic time change defined through a gamma process with unit mean rate and variance rate ν. Alternatively, the VG can also be seen as the difference between two independent gamma processes with suitable parameters. This process has a lot of desirable properties consistent with empirical evidence; it allows, e.g., to control skewness and kurtosis of the return distribution and to correct some biases in option pricing implied by the [13] model. A further generalization of the VG process is the [21] model

[6]The original model by [67] was instead without drift.

(CGMY), given by Example (4), that allows for both a diffusion and a jump component. Moreover, it can be suitably parametrized in order to capture finite or infinite activity as well as finite or infinite variation.

4.5 Dynamic programming algorithm

The value of the GMWB is found by implementing the following standard dynamic programming algorithm for discrete stochastic control problems (see e.g. [12] and [85]). As we act in a Markovian framework, for each t_i, $i = 1, \dots, N$, and each value of the guarantee account A_{t_i} and personal account W_{t_i}, we denote the no-arbitrage value at date t_i of the variable annuity as $V(t_i, A_{t_i}, W_{t_i})$. The initial value of the GMWB, that is the solution of (4.5), is found by solving the Bellman recursive equation, which proceeds backward in time for $i = N-1, \dots, 1$:

$$V(t_i, A_{t_i}, W_{t_i}) = \sup_{\theta \in \Theta_{t_i}} E\left[C_{t_i} + \mathrm{e}^{-r(t_{i+1}-t_i)} V(t_{i+1}, A_{t_{i+1}}, W_{t_{i+1}}) \middle| A_{t_i}, W_{t_i}\right],$$

$$V(t_N, A_{t_N}, W_{t_N}) = \max\{A_{t_N}, W_{t_N}\}.$$

Note that the equations for the cash-flow and the accounts are given by (4.6)-(4.8) (or (4.9)-(4.11)). The initial value of the contract is then found by computing

$$V_0 = E\left[\mathrm{e}^{-r(t_1-t_0)} V(t_1, A_{t_1}, W_{t_1}) \middle| A_{t_0} = U, W_{t_0} = U\right].$$

When mortality is taken into account (see Section 4.3.4), the Bellman equation for the value function V (provided mortality and the financial variables are independent) becomes

$$V(t_i, A_{t_i}, W_{t_i}) =$$

$$= \sup_{\theta \in \Theta_{t_i}} \Bigg\{ C_{t_i} + {}_{t_{i+1}-t_i}p_{x+t_i} E\left[\mathrm{e}^{-r(t_{i+1}-t_i)} V(t_{i+1}, A_{t_{i+1}}, W_{t_{i+1}}) \middle| A_{t_i}, W_{t_i}\right]$$

$$+ {}_{t_{i+1}-t_i}q_{x+t_i} E\left[\mathrm{e}^{-r(t_{i+1}-t_i)} D_{t_{i+1}} \middle| A_{t_i}, W_{t_i}\right] \Bigg\}, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$V(t_N, A_{t_N}, W_{t_N}) = \max\{A_{t_N}, W_{t_N}\},$$

where x is the age of the insured at time $t_0 = 0$, ${}_up_y$ is the (risk-neutral) probability of surviving age $y + u$ conditional on surviving age y, while ${}_uq_y = 1 - {}_up_y$ is the corresponding death probability. The initial value of the contract is then

$$\begin{aligned} V_0 =& {}_{t_1}p_x E\left[\mathrm{e}^{-rt_1} V(t_1, A_{t_1}, W_{t_1}) \middle| A_0 = W_0 = U\right] \\ &+ {}_{t_1}q_x E\left[\mathrm{e}^{-rt_1} D_{t_1} \middle| A_0 = W_0 = U\right]. \end{aligned}$$

Note that, if there is no GMDB ($D_{t_{i+1}} = W_{t_{i+1}}$) and $\theta \neq$ s, the expected discounted payoff in case of death simplifies to

$$E\left[\mathrm{e}^{-r(t_{i+1}-t_i)} D_{t_{i+1}} \middle| A_{t_i}, W_{t_i}\right] = \max\{W_{t_i} - \theta, 0\}(1 - \varphi(t_{i+1} - t_i)),$$

and is 0 for $\theta =$ s.

The execution of the algorithm requires a discretization over the state variables W and A and interpolation of the value function over the resulting grid in order to compute the expectation (see for instance [49]). As the density of the 1 year log return can be straightforwardly computed through Fourier inversion, the expectation can be calculated via numerical integration.

4.5.1 Algorithm

We outline the algorithm employed to value a GMWB variable annuity under the dynamic+surrender approach. The valuation under the alternative approaches described in 4.3.2.1, 4.3.2.2 and 4.3.2.4 requires minor and obvious modifications.

Step 0. For each $i = 0, \ldots, N$, discretize the state space $[0, A_0]$ for A_{t_i} and $[0, \infty)$ for W_{t_i}:

$$\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_H\}, \; a_1 = 0 < a_2 < \ldots < a_H = A_0,$$

$$\mathbb{W} = \{w_1, \ldots, w_K\},\ w_1 = 0 < w_2 < \ldots < w_K.$$

Step 1. Start at $t_N = T$ by setting $V(t_N, a_h, w_k) = \max\{a_h, w_k\}$ for each $(a_h, w_k) \in \mathbb{A} \times \mathbb{W}$.

Step 2. Proceed backwards: for $i = N-1, \ldots, 1$

I - interpolate the $H \cdot K$ triplets $(a_h, w_k, V(t_{i+1}, a_h, w_k))$, $h = 1, \ldots, H$ and $k = 1, \ldots, K$, to construct the function $\widetilde{V}(t_{i+1}, a, w)$ for $0 \leq a \leq A_0$ and $w \geq 0$;

II - for each $(a_h, w_k) \in \mathbb{A} \times \mathbb{W}$ compute

$$V(t_i, a_h, w_k) = \sup_{\theta \in \Theta_{t_i}} \left\{ C_{t_i} + 1_{\theta \neq \mathrm{s}}\, \mathrm{e}^{-r(t_{i+1}-t_i)} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}\left(t_{i+1}, \widetilde{a}, \widetilde{b}\right) f_1(z)\mathrm{d}z \right\},$$

where

$$C_{t_i} = \begin{cases} \theta - \kappa_1 \max\{\theta - G, 0\} & \text{if } 0 \leq \theta \leq a_h \\ w_k(1-\kappa_2) + k_2 \min\{G, a_h, w_k\} & \text{if } \theta = \mathrm{s} \end{cases},$$

$$\widetilde{a} = a_h - \theta,$$

$$\widetilde{b} = \max\{w_k - \theta, 0\}\mathrm{e}^{(r-q+d)(t_{i+1}-t_i)+z}(1 - \varphi(t_{i+1} - t_i)).$$

Computing the sup in II requires discretization of the control set Θ_{t_i} to select the supremum.

Step 3. The value of the contract at inception is

$$V_0 = \mathrm{e}^{-r\,t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}\left(t_1, U, U\mathrm{e}^{(r-q+d)t_1+z}(1-\varphi\, t_1)\right) f_1(z)\mathrm{d}z.$$

Note that f_1 and d have been introduced in Section 4.4 and can be computed before implementing the above algorithm. The density f_1 is obtained through inversion of the characteristic function Φ_1 (see [8]). The constant d can then be calculated via numerical integration. Similarly, numerical integration (e.g. simple trapezoidal rule or Gauss quadrature) can be used to compute the integrals in Step 2.II and Step 3 of the algorithm.

4.6 Numerical results

We fit the four models introduced in Section 4.4 to option prices on the S&P 500 observed on 31 December 2012, using maturity specific interest rates and dividend yields. We consider both call and put options for maturities up to 2 years, and discard options too far in or out of the money. When not available in closed form, plain vanilla option prices in a Lévy framework can be computed easily using Fourier inversion techniques, see for instance [47]. The fitting results in the parameter estimates are contained in Table 4.2, together with other key statistics.[7] The densities of the 1 year log return for the different estimated models are displayed in Figure 4.1.[8]

model	GBM	Merton	VG	CGMY
	$\sigma = 0.1361$	$\sigma = 0.1114$	$\sigma = 0.1301$	$c = 0.6817$
		$\lambda = 0.5282$	$\mu = -0.3150$	$g = 18.0293$
		$m = -0.1825$	$\nu = 0.1753$	$m = 57.6250$
		$c = 0.1094$		$y = 0.8000$
volatility (%)	13.61	21.58	18.53	15.59
skewness	0	2.1783	-0.7430	-0.3156
kurtosis	3	9.9050	3.9237	3.2743

Tabla 4.2: Parameters of the Lévy processes obtained by calibration to S&P 500 option prices

From Figure 4.1 and Table 4.2 one can observe that the calibration leads to notable differences among the four models here considered. Nevertheless, the simplest and the most sophisticated model, namely GBM and CGMY, are relatively close to each other, both in terms of moments and numerical results (see Tables 4.3-4.5). On the other hand, the Merton and VG models, although they differ in terms of skewness and kurtosis, produce comparable results that are always much higher than those obtained with the GBM and CGMY. This can be imputed to the heavier tail displayed by the Merton and VG models, so that the guarantees implicit in the GMWB are underpriced by models that are not able to capture extreme movements in the fund process.

[7] Moments related to Lévy processes can be straigthforwardly computed using cumulants, see [28].

[8] In the CGMY model we fix $y = 0.8$, implying a finite variation, infinite activity process.

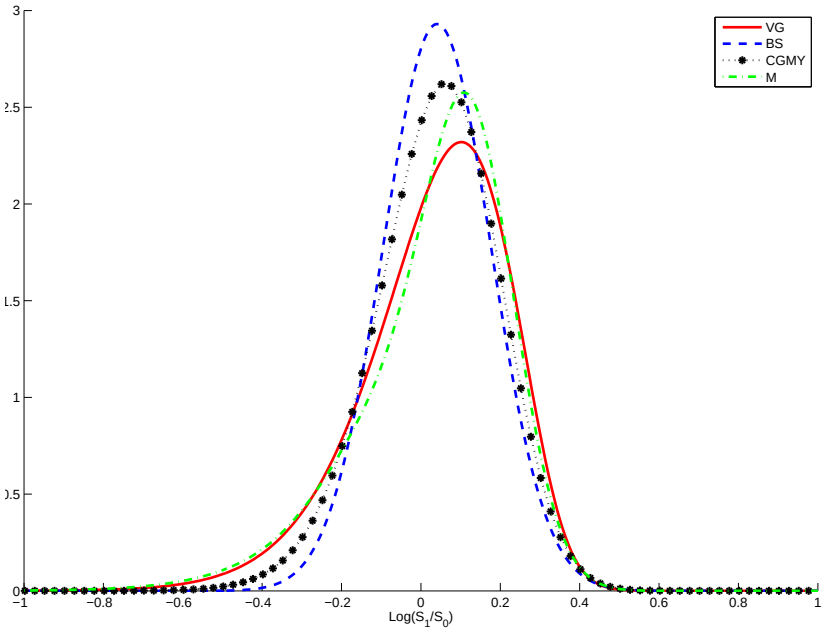

Figura 4.1: Density of 1 year log return

A comparative static analysis is performed for the contract value and fair fees for the different models and contract parameters, market interest rate and policyholder behaviour. If not otherwise mentioned, we use the CGMY model and the following parameter values as *benchmark case*: $t_i = i$, $T = 20$, $r = 5\%$, $\kappa := \kappa_1 = \kappa_2 = 5\%$, $q = 0$, $U = 100$, $G = U/T$. In Table 4.3 we report the fair fee rates $\varphi^{\text{surrender}}$ and, in brackets, φ^{dynamic}, in basis points, for different levels of the market interest rate r. Similar results are reported in Table 4.4, for different maturities T, and in Table 4.5, for different values of the penalty rate κ.

The fair fee rates $\varphi^{\text{surrender}}$ and φ^{dynamic} decrease with r, as expected. Note that the fee required to compensate the surrender option, given by the spread $\varphi^{\text{surrender}} - \varphi^{\text{dynamic}}$, decreases with r in each model. In particular, this spread ranges from 42-173 b.p when $r = 3\%$ to 0-55 b.p. when $r = 7\%$. The surrender option is not priced by the GBM model for $r \geq 5\%$ and by the CGMY model for $r \geq 7\%$, confirming the importance of the fund distribution tail.

Similar findings can be seen in Table 4.4, as contracts with a longer

r (%)	3	4	5	6	7
GBM	115	61	38	29	22
	(73)	(50)	(38)	(29)	(22)
Merton	323	251	193	144	104
	(150)	(117)	(91)	(73)	(59)
VG	318	243	181	130	89
	(145)	(112)	(86)	(68)	(54)
CGMY	197	128	79	45	35
	(103)	(74)	(54)	(42)	(35)

Tabla 4.3: $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different risk-free interest rates.

T	10	15	20	25	30
GBM	72	49	38	31	26
	(72)	(49)	(38)	(30)	(26)
Merton	215	200	193	189	186
	(158)	(115)	(91)	(77)	(66)
VG	205	188	181	177	174
	(150)	(109)	(86)	(72)	(62)
CGMY	107	85	79	75	72
	(101)	(71)	(54)	(43)	(38)

Tabla 4.4: $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different contract maturities.

maturity, with or without the surrender feature, require a lower fee to be fair. As T increases, several effects on the contract value can be highlighted, and the overall impact is negative. Firstly, the insurance fee is applied over a longer period; secondly, the GMWB guarantee has a lower value since the market rate is higher than the minimum interest rate guaranteed on the personal account, which in our examples is 0% as $G = U/T$; finally, the guarantee is offered over a longer period, and this instead has a positive impact on the contract value. Unlike Table 4.3, here the spread $\varphi^{\text{surrender}} - \varphi^{\text{dynamic}}$ increases with the contract duration, in line with the fact that American options premiums increase with the time to maturity, even though, in our case, this higher value

κ (%)	0	2.5	5	7.5	10
GBM	543	181	38	30	24
	(183)	(72)	(38)	(30)	(24)
Merton	803	428	193	79	62
	(262)	(147)	(91)	(72)	(62)
VG	821	429	181	70	58
	(262)	(144)	(86)	(67)	(58)
CGMY	665	284	79	44	37
	(216)	(103)	(54)	(44)	(37)

Tabla 4.5: $\varphi^{\text{surrender}}$ (φ^{dynamic}) in b.p., for different penalties.

is recovered on average over a longer period.[9] An exception is the GBM model under which, for the combination of parameters under scrutiny (in particular $r = 5\%$, $\kappa = 5\%$), surrendering the contract is never optimal.

The penalties for non guaranteed withdrawals or surrender have an obvious depressing effect on the fair fee rates, as can be seen in Table 4.5. Recall in fact that, for fair contracts, there is a trade-off between φ and κ, since the cost of the GMWB guarantee is recouped through the fee and the penalty. If no penalty is applied the fair fee turns out to be extremely high, in particular if surrender is allowed, while for exceedingly high penalties all models show that surrendering the contract is never optimal. One is lead to think that, for these penalty levels, withdrawing amounts greater than G is always not optimal. Also the spread $\varphi^{\text{surrender}} - \varphi^{\text{dynamic}}$ decreases with κ, as $\varphi^{\text{surrender}}$ is more sensitive than φ^{dynamic} to changes of κ. Again, the GBM produces the lowest fair fees, and only for low penalties the surrender decision may be convenient.

Coming now to the differences among the valuation approaches described in Sections 4.3.2.1-4.3.2.4, in Table 4.6 we report the results pertaining the fair fee rate obtained for different penalty levels. Note that these results have been constructed using the CGMY model. We observe that the possibility of acting dynamically, i.e. withdrawing amounts different from G, has always a significant impact on the cost of the guarantee, as measured by the difference

[9]Due to the surrender feature, this period can be shorter than the time to maturity.

κ (%)	0	2.5	5	7.5	10
φ^{static}	13	13	13	13	13
φ^{mixed}	51	13	13	13	13
φ^{dynamic}	216	103	54	44	37
$\varphi^{\text{surrender}}$	665	284	79	44	37

Tabla 4.6: Fair fees in b.p., benchmark case, for different penalties and policyholder behaviours.

$\varphi^{\text{dynamic}} - \varphi^{\text{static}}$ in the case of 'European' contracts (without surrender) and by $\varphi^{\text{surrender}} - \varphi^{\text{mixed}}$ in the case of 'American' contracts (including surrender). However, since for high penalties the surrender option does not require an additional fee ($\varphi^{\text{mixed}} = \varphi^{\text{static}}$, $\varphi^{\text{surrender}} = \varphi^{\text{dynamic}}$), this extra value seems to be mainly due to the possibility of withdrawing amounts lower than G, rather than higher. From another point of view, there seems to be a compound effect on fees when guarantees are combined. For instance, when $\kappa = 2.5$, adding the surrender option to a 'static' contract has no cost (under the CGMY model), while adding the same option to a 'dynamic' contract requires an extra cost of 181 b.p. .

In Table 4.7 we report the values V_0^{static} and V_0^{dynamic} for different penalty levels, assuming no fees are subtracted from the personal account. Then, the difference between these contract values and $U = 100$ represents the total cost of the GMWB guarantee that should be charged as a lump sum at inception. The difference under the static approach (independent of the penalty level) is particularly important, while in the dynamic approach optimal decisions are driven also by the fees and hence would be different if a fee were applied. We do not report the corresponding American contract values (i.e. under mixed and dynamic+surrender approaches) because they are equal to the corresponding European values. Indeed, if no fee is charged, on one hand one has nothing to gain in case of surrender because she does not receive more than the personal account that, net of partial withdrawals, grows on average at the market interest rate. On the other hand, she looses the GMWB guarantee, that is the possibility of withdrawing money in the future while the guarantee account is still positive even if the personal account is not. In addition, if $\kappa > 0$

the portion of personal account exceeding G (or A_t, if less) is penalized, while there are no penalizations if one withdraws amounts less than G in the future and remains in the contract until maturity. From Table 4.7 we notice that,

κ (%)	0	2.5	5	7.5	10
V_0^{static}	101.63	101.63	101.63	101.63	101.63
V_0^{dynamic}	107.44	106.90	106.14	105.45	104.83

Tabla 4.7: Comparison of contract values under different policyholder behaviours, benchmark case, for different penalties when $\varphi = 0$.

in the dynamic approach, the contract values are slightly decreasing with κ, while the difference between V_0^{dynamic} and V_0^{static} can be substantial, even when $\kappa = 10\%$. We argue that, when $\kappa = 10\%$, the difference $V_0^{\text{dynamic}} - V_0^{\text{static}} = 3.2$ is mainly due to the possibility of withdrawing less than guaranteed amount G, while, when $\kappa = 0$, the extra difference $107.44 - 104.83 = 2.61$ is imputable to the possibility of withdrawing more than G. We observe that the cost of the guarantee in the static approach is moderate, due to the relatively high spread between the market interest rate and the minimum guaranteed rate rewarding the guarantee account over a period of 20 years. The value of the Quanto-Asian put (see Section 4.3.2.2), that is the difference between the contract value $V_0^{\text{static}} = 101.63$ and the expected present value of the annuity of guaranteed withdrawals $G = 5$, equal to 61.64, almost 40% of the single premium U, is instead substantial.

Let us now introduce mortality in the contract. We consider a male aged $x = 55$ years at inception and derive his one-year survival probabilities p_{x+i}, $i = 0, 1, ...T - 1$, from the PNML00 (Pensioners, males, Normal, lives) provided by the CMI (Continuous Mortality Investigation). Then we stress these probabilities replacing them with p_{x+i}^{α}, $\alpha \geq 0$, that is equivalent to multiplying by α the mortality intensity. In Table 4.8 we report the results obtained with the CGMY model, in terms of fair fee rates, under the various approaches here considered for different values of the parameter α and the contract maturity T, when the death benefit is given by the personal account value (hence no death guarantee). For comparison, we report also the values for

$\alpha = 0$, corresponding to a contract without mortality. In Table 4.9 we report similar results, but only under the dynamic+surrender approach and for the case in which the contract embeds a GMDB given by the maximum between the values of personal and guarantee account. From Tables 4.8 and 4.9 we do

T	10	15	20	25	30
	φ^{static}				
$\alpha = 0.0$	49	24	13	8	5
$\alpha = 0.5$	48	23	12	7	4
$\alpha = 1.0$	47	22	11	6	4
$\alpha = 2.0$	45	20	9	5	2
	φ^{mixed}				
$\alpha = 0.0$	49	24	13	8	5
$\alpha = 0.5$	48	23	12	7	4
$\alpha = 1.0$	47	22	11	6	4
$\alpha = 2.0$	45	20	9	5	2
	φ^{dynamic}				
$\alpha = 0.0$	101	71	54	43	38
$\alpha = 0.5$	102	72	56	46	41
$\alpha = 1.0$	103	73	57	49	44
$\alpha = 2.0$	104	75	61	53	50
	$\varphi^{\text{surrender}}$				
$\alpha = 0.0$	107	85	79	75	72
$\alpha = 0.5$	108	86	79	75	73
$\alpha = 1.0$	108	86	79	75	73
$\alpha = 2.0$	108	87	80	76	74

Tabla 4.8: Fair fee in b.p., benchmark case, for different contract maturities and mortality tables obtained by stressing the one-year survival probabilities using $p_y^{(\alpha)} = p_y^{\alpha}$.

not see a great impact of mortality on the contract fair fees, and we also do not notice a significant increase when we introduce a GMDB guarantee. Moreover, the effect of mortality (higher as α increases) is not clear: for European contracts the fair fee rate decreases with α, while it increases for American contracts. Actually mortality could have an effect similar to the introduction of the surrender option (transition from φ^{static} to φ^{mixed} for European contracts, and from φ^{dynamic} to $\varphi^{\text{surrender}}$ for American ones). However, on one hand the

T	10	15	20	25	30
$\alpha = 0.0$	107	85	79	75	72
$\alpha = 0.5$	108	86	79	76	73
$\alpha = 1.0$	109	87	80	77	74
$\alpha = 2.0$	110	89	82	78	76

Tabla 4.9: $\varphi^{\text{surrender}}$ in b.p. for a GMDB contract, benchmark case, for different contract maturities and different mortality tables obtained by stressing the one-year survival probabilities using $p_y^{(\alpha)} = p_y^{\alpha}$.

'optimal' time of death unfortunately cannot be chosen by the policyholder, as happens for surrender, and this would push the fees down, but, on the other hand, mortality is not penalized, as instead happens for surrender.

4.7 Conclusions

In this paper we present a dynamic programming algorithm for the valuation of variable annuities with Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits. A very crucial aspect underlying the valuation of such products is to predict how the policyholder behaves with respect to her withdrawal decisions. Our algorithm is general enough to encompass different levels of rationality in the policyholder behavior, so that it results particularly suitable to meet different purposes of an insurance company (e.g., for pricing purposes it is reasonable to assume an approach based on the worst case scenario, while for realistic risk-management valuations an intermediate approach seems to be more appropriate). Moreover, the algorithm can be used with or without mortality risk, i.e., with or without the presence of a (possibly guaranteed) death benefit, and can be easily extended in order to include other policyholder decisions in addition to those concerning her withdrawal behavior (e.g., switching between different reference portfolios, acquisition of new guarantees or cancellation of existing ones). Another important contribution of our paper with respect to the existing literature concerns the model assumptions governing the evolution of the reference portfolio. In this respect not only we go beyond the classical Black and Scholes (1973) model, but put ourselves in the general class of Lévy

processes. In the numerical section we perform a sensitivity analysis choosing as examples four different types of Lévy processes. This analysis highlights the cruciality of the specific assumption adopted in the valuation, i.e., the model risk, and in particular the fact that GMWB guarantees are underpriced by models that are not able to capture extreme movements in the fund process.

Capítulo 5

Summary, conclusions and contributions

In this dissertation different numerical methods are used to solve different challenging problems in finance. Among others numerical methods, we have been used binomial trees, Monte Carlo simulation, partial differential equations, Fourier methods or stochastic control. This thesis consists of three independent articles where the main components are summarized below.

5.1 Methodology for the estimation of the interest rate curve: impact on valuation of derivatives

5.1.1 Summary

In this paper we demonstrate that the methodology used to estimate the interest rate curves and volatilities significantly affects the valuation of interest rate derivatives as well as their deltas. To prove our hypothesis, bond options are valued using Black Derman Toy trees, using as inputs interest rate curves and volatilities estimated with different methodologies.

5.1.2 Conclusions and contributions

In this paper we show that the methodology used for calculating the term structure of interest rates (TSIR) has implications that go far beyond the capacity of one model or another to evaluate simultaneously the price of the bonds in an instant of time. In general, all the methodologies produce very good results, although bond prices may depend on the shape of the TSIR, and the degree of flexibility of the functional form chosen to describe the debt markets. However, little attention has been given in literature to the implications of the methodology in describing the variables derived from the shape or the dynamics of interest rates.

In this paper, we put emphasis on the implications of using a methodology or another, can have on the volatility of the time series of the estimated zero coupon rates. To demonstrate the consequences of differences in volatilities of interest rates, we proceeded to quantify from an economic standpoint, valuing financial assets that depend on such volatility, and in particular, options on German sovereign zero coupon bonds with different exercise dates, and using as underlying bonds with different maturities.

The results highlight the crucial importance of the method chosen to estimate the TSIR in the value of these options. Differences that can become huge.

Another implication of this issue, is the impact that using a methodology or another can have on the design of derivatives hedging strategies. To demonstrate this, we calculate the delta of the same options. This parameter indicates the number of options you have to buy or sell to hedge a position to changes in interest rates. Again the results we get are amazing and therefore crucially affect the effectiveness of the hedge.

It has become clear that the methodology and models used to estimate the zero coupon rates on sovereign debt markets have consequences that go beyond the quality of the fit of the curve itself, ie beyond its ability to replicate the price of the bonds in the markets. Small differences in the slope of the curve, especially in the short and long term, can have a major impact on other key variables as forward rates or volatility of the time series of zero coupon rates.

We do not intend to show which method is best suited to meet market conditions offering a more or less accurate estimate. Simply intend to show that depending on which methodologies are used in the estimation of the TSIR, the results are totally different such as seen in the tables and figures of the article. The question of which method best describes the market conditions, is left as a possible future research.

5.2 A comparison between different numerical schemes for the valuation of unit-linked contracts embedding a surrender option

5.2.1 Summary

In this paper we describe and compare different numerical schemes for the valuation of unit-linked contracts with and without surrender option. We implement two different algorithms based on the Least Squares Monte Carlo method (LSMC), an algorithm based on the Partial Differential Equation Approach (PDE) and another based on Binomial Trees. We introduce a unifying way to define and solve the valuation problem in order to include the case of contracts with premiums paid continuously over time, along with that of single premium contracts, usually considered in the literature. Finally, we analyse the impact on the fair premiums of the main parameters of the model.

5.2.2 Conclusions and contributions

In this paper we compare the prices of unit-linked policies with and without surrender option obtained by means of different approaches. We implement two different algorithms based on the Least Squares Monte Carlo method (LSMC), an algorithm based on the Partial Differential Equation Approach (PDE) and another based on Binomial Trees. In particular we pretend to test the goodness of the LSMC approach, that provides in absolute terms the

most general and flexible method and is unaffected by the dimensionality of the problem. We take as benchmarks the other approaches, relying on well established convergence results but requiring customization to the specific model. We introduce and treat, in a unified way, both the case of single premium contracts, usually considered in the literature, and that of periodic premiums paid continuously over time.

We conclude that the American premiums obtained with the different numerical approaches are very close to each other, in particular the relative errors of the LSMC with respect the benchmark, that is the value obtained with the PDE approach.

We notice that, as expected, the fair single premiums U^* and $U^{*\mathrm{E}}$ decrease with r. Recall, in fact, that these premiums are simply the initial value of the liabilities of the insurance company (with and without surrender option). As for the fair periodic premiums, we notice instead an increasing trend, apart from the case of the European contract when r is very close (or equal) to the guaranteed rate r^{g}. Moreover, we observe that the sensitivity of all premiums with respect to r is rather strong, as expected, that the value of the surrender option is almost never negligible (apart from the single premium case when $r = 2\%$), and that the American premiums obtained with the different numerical approaches are very close to each other.

We show similar results as before (for single and periodic fair premiums), when the contract maturity changes. In the single premium case, of course, the initial value of the American contract (U^*) increases with its maturity. This is not true, instead, for European contracts (in particular for the European Titanic put): in this case $U^{*\mathrm{E}}$ initially increases, reaches a maximum for $T = 15$ years and after decreases. The influence of T on the fair single premium is not so strong, while it becomes very important in the periodic premium case, in which the premium is halved when the maturity increases from 10 to 30 years. The periodic premium is decreasing, because the longer is the contract duration, the longer is the period in which the payment for the insurance company liabilities is split.

Finally we report the results for different levels of the reference fund volatility parameter σ. In this case, as expected, both single and periodic

premiums strongly react to changes in the volatility parameter, increasing with it.

5.3 A dynamic programming algorithm for the valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits in variable annuities

5.3.1 Summary

In this paper we present a dynamic programming algorithm for pricing variable annuities with Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits (GMWB) under a general Lévy processes framework. The GMWB gives the policyholder the right to make periodical withdrawals from her policy account even when the value of this account is exhausted. Typically, the total amount guaranteed for withdrawals coincides with her initial investment, providing then a protection against downside market risk. At each withdrawal date, the policyholder has to decide whether, and how much, to withdraw, or to surrender the contract. We show how different levels of rationality in the policyholder's withdrawal behaviour can be modelled. Finally, we perform a sensitivity analysis comparing the numerical results obtained for different contractual and market parameters, policyholder behaviours, and different types of Lévy processes.

5.3.2 Conclusions and contributions

In this paper we present a dynamic programming algorithm for the valuation of variable annuities with Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits. A very crucial aspect underlying the valuation of such products is to predict how the policyholder behaves with respect to her withdrawal decisions. Our algorithm is general enough to encompass different levels of rationality in the policyholder behavior, so that it results particularly suitable to meet different purposes of an insurance company (e.g., for pricing purposes it is reasonable to assume an

approach based on the worst case scenario, while for realistic risk-management valuations an intermediate approach seems to be more appropriate). Moreover, the algorithm can be used with or without mortality risk, i.e., with or without the presence of a (possibly guaranteed) death benefit, and can be easily extended in order to include other policyholder decisions in addition to those concerning her withdrawal behavior (e.g., switching between different reference portfolios, acquisition of new guarantees or cancellation of existing ones). Another important contribution of our paper with respect to the existing literature concerns the model assumptions governing the evolution of the reference portfolio. In this respect not only we go beyond the classical Black and Scholes (1973) model, but put ourselves in the general class of Lévy processes. In the numerical section we perform a sensitivity analysis choosing as examples four different types of Lévy processes. This analysis highlights the cruciality of the specific assumption adopted in the valuation, i.e., the model risk, and in particular the fact that GMWB guarantees are underpriced by models that are not able to capture extreme movements in the fund process.

Capítulo 5

Resumen, conclusiones y contribuciones

En esta tesis se plantean diferentes métodos numéricos con el fin de resolver problemas de naturaleza compleja en finanzas. Entre otros métodos numéricos, se han usado árboles binomiales, ecuaciones en derivadas parciales, métodos de Fourier y control óptimo estocástico. Consta de tres artículos independientes donde los principales resultados quedan resumidos en los siguientes puntos:

5.1 Metodología para la estimación de la curva de tipos de interés: impacto en la valoración de derivados

5.1.1 Resumen

En este artículo se demuestra que la metodología usada para estimar las curvas de tipos de interés y sus volatilidades afectan significativamente a la valoración de derivados de tipos de interés así como en sus deltas. Para probar esta hipótesis se han valorado opciones sobre bonos soberanos usando árboles de Black, Derman y Toy, usando como inputs para su calibración las curvas de tipos de interés y de volatilidades estimadas con diferentes metodologías.

5.1.2 Conclusiones y contribuciones

El objetivo de este trabajo ha sido poner de manifiesto cómo la metodología empleada para el cálculo de la TSIR, tiene implicaciones que van mucho más allá de la capacidad de un modelo u otro para valorar simultáneamente el precio de los bonos en un instante de tiempo. En general, todas las metodologías producen muy buenos resultados de cara a la valoración de los bonos, aunque estos pueden depender de la forma de la TSIR, y de la mayor o menor flexibilidad de la forma funcional escogida para describir los mercados de deuda.

Sin embargo, a lo que apenas se le ha prestado atención en la literatura, es a las implicaciones que una u otra metodología pueda tener a la hora de describir variables financieras derivadas de la forma o de la dinámica de los tipos de interés. En este trabajo, se pone énfasis en las implicaciones que derivan de utilizar una metodología u otra en el cálculo de las las volatilidades de las series temporales de los tipos cupón cero estimados. Para evidenciar las consecuencias de estas diferencias en las volatilidades de los tipos de interés, se ha cuantificado desde un punto de vista económico valorando activos financieros que dependen de dicha volatilidad y, en particular, opciones sobre bonos cupón cero soberanos alemanes con diferentes fechas de ejercicio y utilizando como subyacentes bonos con distintos vencimientos.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la importancia crucial del método escogido para estimar la TSIR en el valor de estas opciones. Diferencias que pueden llegar a ser enormes. Otra implicación de esta cuestión es el impacto que usar una metodología u otra puede tener en el diseño de estrategia de cobertura con derivados. Para ello, se ha estimado la delta de las opciones anteriores, parámetro del que depende la cantidad de opciones a utilizar para cubrir posiciones frente al riesgo de variaciones de los tipos de interés. De nuevo, los resultados son sorprendentes en la media en que las diferencias entre el valor estimado de dichos parámetros puede ser abismal y afectar por tanto de manera crucial a la efectividad de las coberturas.

Con todo ello, lo que se ha puesto de manifiesto es que la metodología y los modelos empleados para estimar los tipos cupón cero en los mercados de deuda

soberana, tienen consecuencias que van más allá de la calidad en el ajuste de la propia curva, es decir, más alla de su capacidad para replicar el precio de los bonos en los mercados.

Pequeñas diferencias en la pendiente de la curva, en especial en los tramos a corto y largo plazo, pueden tener grandes consecuencias en otras variables fundamentales como los tipos forward o en la volatilidad de las series temporales de los tipos cupón cero.

No se pretende mostrar qué método es el más adecuado para ajustarse a las condiciones de mercado, ofreciendo una estimación más o menos precisa. Simplemente se busca dar a conocer que dependiendo de qué metodologías se usen en la estimación de la TSIR, se obtienen resultados totalmente diferentes tal y como se ha visto en las tablas y las figuras del artículo. La cuestión de qué método describe mejor las condiciones del mercado, se deja como una posible investigación futura.

5.2 Comparación de diferentes métodos numéricos para la valoración de contratos unit-linked con opciones de cancelación anticipada

5.2.1 Resumen

En este artículo se describen y se comparan diferentes métodos numéricos para la valoración de contratos unit-linked con y sin opción de cancelación. Se han implementado dos algoritmos diferentes basados en la metodología Least Squares Monte Carlo (LSMC), un algoritmo basado en Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) y otro basado en árboles binomiales. Se introduce una metodología unificada para valorar contratos unit-linked tanto con pago de prima continua como pago único de la misma. Finalmente se analiza el impacto que tienen los parámetros del modelo en las primas de los contratos.

5.2.2 Conclusiones y contribuciones

En este artículo se comparan los precios de contratos unit-linked con y sin opción de cancelación obtenidos mediante diferentes aproximaciones. Se han implementado dos algoritmos diferentes basados en la metodología Least Squares Monte Carlo (LSMC), un algoritmo basado en Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) y otro basado en árboles binomiales. En particular se pretende testear la bondad de los algoritmos de tipo LSMC, ya que estos algoritmos son los más generales y flexibles y no se ven afectados por la dimensionalidad del problema. Se han tomado como benchmark para la comparación otras aproximaciones basándonos en su contrastada convergencia, pero que requieren una reformulación completa para cada modelo. Se introduce y se trata de forma unificada los contratos de prima única, comunmente considerados en la literatura y los contratos de prima continua.

Concluimos que las primas de los contratos con opciones de cancelación (estilo Americano) obtenidas mediante los diferentes métodos numéricos tienen errores relativos muy pequeños, en particular las primas obtenidas con LSMC con respecto al benchmar (método EDP).

Nos damos cuenta, como se preveía, que las primas únicas U^* y $U^{*\mathrm{E}}$ son decrecientes con el tipo de interés r. Cabe de destacar que estas primas son simplemente el valor inicial de estos contratos con y sin opción de cancelación, respectivamente. En el caso de las primas continuas, observamos sin embargo una tendencia creciente, además del caso de los contratos sin opciones de cancelación cuando el tipo de interés r es muy cercano o igual al tipo garantizado r^g. Por otra parte, se observa que la sensibilidad de las primas a los tipos de interés es bastante fuerte, que el valor de la prima de cancelación es prácticamente insignificante (aparte de la prima única cuando $r = 2\%$), y que las primas con opciones de cancelación obtenidas por los diferentes métodos numéricos son muy parecidas.

Obtenemos resultados similares (para primas únicas y continuas) cuando variamos el vencimiento del contrato. En el caso de primas únicas, el valor del contrato que incluye la prima de cancelación (U^*) aumenta con el vencimiento. Esto no es verdad sin embargo para los contratos sin opciones de cancelación,

en cuyo caso $U^{*\mathrm{E}}$ aumenta hasta que alcanza su máximo en $T = 15$ años y después decrece. La influencia de T en los contratos de prima única no es muy grande, mientras que alcanza su importancia en el caso de las primas continuas, donde el valor de la prima se ve reducido a la mitad cuando el vencimiento del contrato pasa de 10 a 30 años.

Finalmente, se reportan resultados para diferentes niveles de referencia de la volatilidad del fondo σ. En este caso, tal y como esperábamos, tanto la prima única como la continua, cambian fuertemente con la volatilidad, creciendo con ella.

5.3 Algortimo de programación dinámica para la valoración de guaranteed minimum withdrawal benefits en variable annuities

5.3.1 Resumen

En este artículo se presenta un algoritmo de programación dinámica para valorar variable annuities con Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits (GMWB) bajo el marco general de los procesos de Lévy. El GMWB le proporciona al tenedor de la póliza realizar reintegros periódicos de la cuenta de su póliza aunque el valor de su cuenta esté a cero. Típicamente, la cantidad garantizada coincide con la inversión inicial, ofreciendo al tenedor de la póliza protección contra los mercados bajistas.

En cada fecha en la que está permitido realizar reintegros de la cuenta, el tenedor de la póliza debe decidir si lo realiza, así como la cantidad, si prefiere cancelar el contrato o si por el contrario, decide no hacer nada. En el artículo se muestra cómo modelizar diferentes niveles de racionalizad del tenedor de la póliza a mismo tiempo que se realiza un análisis de sensibilidades comparando diferentes resultados numéricos en función de diferentes parámetros contractuales y de mercado, comportamientos del tenedor de la póliza y de los diferentes procesos de Lévy considerados.

5.3.2 Conclusiones y contribuciones

En este artículo se presenta un algoritmo de programación dinámica para la valoración de GMWB. Un aspecto crucial que subyace en la valoración de éste tipo de productos es predecir la clase de comportamientos que podrá tener el tenedor de la póliza con respecto a los reintegros a realizar en su cuenta a lo largo de la vida del producto. Nuestro algoritmo es lo suficientemente general como para adaptar diferentes tipos de nivel de racionalidad por parte del tenedor de la póliza, lo que lo hace muy útil para satisfacer diferentes necesidades que pueda tener una compañia de seguros (por ejemplo para la valoración es razonable asumir el peor escenario, mientras que para una gestión del riesgo, una aproximación intermedia resulta más apropiada). Por otra parte, el algoritmo puede ser usado incluyendo riesgo de mortalidad, con o sin la presencia de un seguro de vida (posiblemente garantizado) y puede ser fácilmente extendido con el el fin de incluir otro tipo de decisiones que pueda tomar el tenedor de la póliza (por ejemplo, cambiar de fondo, adquirir nuevas garantías o cancelar alguna de las existente). Otra contribución importante de nuestro artículo radica en que los modelos usados para la modelización del subyacente van más allá del modelo de Black and Scholes (1973), usando el marco mucho más general de los procesos de Lévy. Este análisis resalta la importancia crucial de los supuestos iniciales a la hora de realizar la valoración, esto es, riesgo de modelo y en particular que los GWMB están infraestimados por modelos que no son capaces de capturar los movimientos extremos en el proceso del fondo subyacente.

Bibliografía

[1] T. Abbey and C. Henshall. Variable annuities. Presented to the Staple Inn Actuarial Society, 2007.

[2] Nelson Areal, Artur Rodrigues, and Manuel R Armada. On improving the least squares monte carlo option valuation method. *Review of Derivatives Research*, 11(1-2):119–151, 2008.

[3] A.R. Bacinello. Endogenous model of surrender conditions in equity-linked life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(2):270–296, 2005.

[4] A.R. Bacinello, E. Biffis, and P. Millossovich. Pricing life insurance contracts with early exercise features. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(1):27–35, 2009.

[5] A.R. Bacinello, E. Biffis, and P. Millossovich. Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees. *Quantitative Finance*, 10(9):1077–1090, 2010.

[6] A.R. Bacinello, P. Millossovich, A. Olivieri, and E. Pitacco. Variable annuities: A unifying valuation approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3):285–297, 2011.

[7] A.R. Bacinello, P. Millossovich, A. Olivieri, and E. Pitacco. Variable annuities as life insurance packages: A unifying approach to the valuation of guarantees. In M. Vanmaele, G. Deelstra, A. De Schepper, J. Dhaene,

W. Schoutens, S. Vanduffel, and D. Vyncke, editors, *Actuarial and Financial Mathematics Conference. Interplay between Finance and Insurance*, pages 3–15. Koninklijke Vlaamse Academie van Belgie, Brussel, 2012.

[8] D.H. Bailey and P.N. Swarztrauber. A fast method for the numerical evaluation of continuous Fourier and Laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(5):1105–1110, 1994.

[9] D. Bauer, A. Kling, and J. Russ. A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities. *Astin Bulletin*, 38(2):621–651, 2008.

[10] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus: An introduction to derivative pricing*. Cambridge university press, 1996.

[11] Sonia Benito and Alfonso Novales. A factor analysis of volatility across the term structure: the spanish case. 2005.

[12] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, third edition, 2005.

[13] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

[14] Fischer Black, Emanuel Derman, and William Toy. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial analysts journal*, pages 33–39, 1990.

[15] George EP Box and Mervin E Muller. A note on the generation of random normal deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29(2):610–611, 1958.

[16] P. Boyle, T. Draviam, and Y. Liu. Variable annuity guarantees: The GMWB. Presentation at the Fourth Annual IFID Conference, Available for download at www.ifid.ca, 2005.

[17] P.P. Boyle and E.S. Schwartz. Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts. *The Journal of Risk and Insurance*, 44(4):639–660, 1977.

[18] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3(3):195–213, 1976.

[19] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer, 2006.

[20] A.C. Blanger, P.A. Forsyth, and G. Labahn. Valuing the guaranteed minimum death benefit clause with partial withdrawal. *Applied Mathematical Finance*, 16(6):451–496, 2009.

[21] P. Carr, H. Geman, D.B. Madan, and M. Yor. The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75(2):305–332, 2002.

[22] P. Carr, D.B. Madan, and R.H. Smith. Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2:61–73, 1999.

[23] Jacques F Carriere. Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance: mathematics and Economics*, 19(1):19–30, 1996.

[24] Z. Chen and P.A. Forsyth. A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB). *Numerische Mathematik*, 109(4):535–569, 2008.

[25] Z. Chen, K. Vetzal, and P.A. Forsyth. The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(1):165–173, 2008.

[26] Umberto Cherubini, Giovanni Della Lunga, Sabrina Mulinacci, and Pietro Rossi. *Fourier transform methods in finance*, volume 524. Wiley. com, 2010.

[27] Les Clewlow and Chris Strickland. *Implementing derivatives models*. Wiley New York, 1998.

[28] R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, 2004.

[29] John C Cox, Jonathan E Ingersoll Jr, and Stephen A Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 385–407, 1985.

[30] M. Dai, Y.K. Kwok, and J. Zong. Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities. *Mathematical Finance*, 18(4):595–611, 2008.

[31] Antonio Diaz, Francisco Jareno, and Eliseo Navarro. Term structure of volatilities and yield curve estimation methodology. *Quantitative Finance*, 11(4):573–586, 2011.

[32] Francis X Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2):337–364, 2006.

[33] D. Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton, third edition, 2001.

[34] J Douglas Faires and Richard Burden. Numerical methods, brooks. *Cole, 2nd edn., Pacific Grove, Calif., USA*, 1998.

[35] Damir Filipović. *Term-structure models: A graduate course*. Springer, 2009.

[36] George S Fishman and Louis R Moore, III. An exhaustive analysis of multiplicative congruential random number generators with modulus 2ˆ31-1. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(1):24–45, 1986.

[37] P. Forsyth and K. Vetzal. A methodology for the valuation of guaranteed lifelong withdrawal benefits. Working Paper, University of Waterloo, 2012.

[38] A. Friedman and W. Shen. A variational inequality approach to financial valuation of retirement benefits based on salary. *Finance and Stochastics*, 6(3):273–302, 2002.

[39] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.

[40] Anne Greenbaum. *Iterative methods for solving linear systems*, volume 17. Society for Industrial & Applied, 1997.

[41] J Michael Harrison and David M Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408, 1979.

[42] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.

[43] Victor Henner, Tatyana Belozerova, and Kyle Forinash. *Mathematical methods in physics: partial differential equations, Fourier series, and special functions*. CRC Press, 2009.

[44] Thomas SY Ho and SANG-BIN LEE. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5):1011–1029, 1986.

[45] D. Holz, A. Kling, and J. Russ. GMWB for life: An analysis of lifelong withdrawal guarantees. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, 101(3):305–325, 2012.

[46] John Hull and Alan White. One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. *Journal of financial and quantitative analysis*, 28(2), 1993.

[47] K.R. Jackson, S. Jaimungal, and V. Surkov. Fourier space time-stepping for option pricing with lévy models. *The Journal of Computational Finance*, 12(2):1–29, 2008/09.

[48] Farshid Jamshidian. Forward induction and construction of yield curve diffusion models. *The Journal of Fixed Income*, 1(1):62–74, 1991.

[49] K. Judd. *Numerical Methods in Economics*. MIT Press, 1998.

[50] Herman Kahn and Andy W Marshall. Methods of reducing sample size in monte carlo computations. *Operations Research*, 1(5):263–278, 1953.

[51] Ioannis Karatzas and Steven Eugene Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer, 1991.

[52] J. Kent and E. Morgan. Dynamic policyholder behaviour. Presented to the Staple Inn Actuarial Society, 2008.

[53] A. Kling, F. Ruez, and J. Russ. The impact of policyholder behaviour on pricing, hedging, and hedge efficiency of withdrawal benefit guarantees in variable annuities. Working Paper, University of Ulm, 2011.

[54] Peter E Kloeden and RA Pearson. The numerical solution of stochastic differential equations. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 20(01):8–12, 1977.

[55] C. Knoller, G. Kraut, and P. Schoenmaekers. On the propensity to surrender a variable annuity contract - an empirical analysis of dynamic policyholder behaviour. Munich Risk and Insurance Center Working Paper No. 7, 2011.

[56] D Knuth. The art or computer programming, vol. 2. *Reading: Addison-Wesley*, 1981.

[57] Pierre L'ecuyer. Efficient and portable combined random number generators. *Communications of the ACM*, 31(6):742–751, 1988.

[58] M.C. Ledlie, D.P. Corry, G.S. Finkelstein, A.J. Ritchie, K. Su, and D.C.E. Wilson. Variable annuities. *British Actuarial Journal*, 14(2):327–389, 2010.

[59] Roger W Lee. Option pricing by transform methods: extensions, unification and error control. *Journal of Computational Finance*, 7(3):51–86, 2004.

[60] D Lehmer. Random number generation on the brl highspeed computing machines. *Math. Rev*, 15:559, 1954.

[61] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.

[62] Francis A Longstaff and Eduardo S Schwartz. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, 47(4):1259–1282, 1992.

[63] R. Lord, F. Fang, F. Bervoets, and C.W. Oosterlee. A fast and accurate FFT-based method for pricing early-exercise options under lévy processes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(4):1678–1705, 2008.

[64] Roger Lord and Christian Kahl. Optimal fourier inversion in semi-analytical option pricing. 2007.

[65] D.B. Madan, P. Carr, and E.C. Chang. The Variance Gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2(1):79–105, 1998.

[66] D.B. Madan and F. Milne. Option pricing with V.G. martingale components. *Mathematical Finance*, 1(4):39–55, 1991.

[67] D.B. Madan and E. Seneta. The Variance Gamma (V.G.) model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4):511–524, 1990.

[68] J Huston McCulloch. Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44(1):19–31, 1971.

[69] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):125–144, 1976.

[70] M.A. Milevsky and S.E. Posner. The Titanic option: valuation of the guaranteed miminum death benefit in variable annuities and mutual funds. *The Journal of Risk and Insurance*, 68(1):93–128, 2001.

[71] M.A. Milevsky and T.S. Salisbury. Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):21–38, 2006.

[72] Grigorii Noikhovich Milstein. *Numerical integration of stochastic differential equations*, volume 313. Springer, 1995.

[73] T. Moenig and D. Bauer. Revisiting the risk-neutral approach to optimal policyholder behaviour: A study of withdrawal guarantees in variable annuities. Working Paper, University of Ulm, 2011.

[74] Manuel Moreno and Javier F Navas. On the robustness of least-squares monte carlo (lsm) for pricing american derivatives. *Review of Derivatives Research*, 6(2):107–128, 2003.

[75] Charles R Nelson and Andrew F Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, pages 473–489, 1987.

[76] Daniel B Nelson and Krishna Ramaswamy. Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models. *Review of Financial Studies*, 3(3):393–430, 1990.

[77] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2003.

[78] Stephen K. Park and Keith W. Miller. Random number generators: good ones are hard to find. *Communications of the ACM*, 31(10):1192–1201, 1988.

[79] J. Peng, K.S. Leung, and Y.K. Kwok. Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rates. *Quantitative Finance*, 12(6):933–941, 2012.

[80] Christophe Perignon and Christophe Villa. Sources of time variation in the covariance matrix of interest rates*. *The Journal of Business*, 79(3):1535–1549, 2006.

[81] G. Piscopo. The fair price of Guaranteed Lifelong Withdrawal Benefit option in Variable Annuity. *Problems and Perspectives in Management*, 7(4):79–83, 2009.

[82] G. Piscopo and S. Haberman. The valuation of lifelong withdrawal benefit options in variable annuity contracts and the impact of mortality risk. *North American Actuarial Journal*, 15(1):59–76, 2011.

[83] Reuven Y Rubinstein and Dirk P Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. Wiley. com, 2011.

[84] Wim Schoutens. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley, 2003.

[85] A. Seierstad. *Stochastic Control in Discrete and Continuous Time*. Springer, 2009.

[86] P. Shah and D. Bertsimas. An analysis of the guaranteed withdrawal benefits for life option. SSRN Working Paper, Available for download at http://ssrn.com/abstract=1312727, 2008.

[87] Gary S Shea. Interest rate term structure estimation with exponential splines: a note. *The Journal of Finance*, 40(1):319–325, 1985.

[88] W. Shen and H. Xu. The valuation of unit-linked policies with or without surrender options. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36(1):79–92, 2005.

[89] Steven E Shreve, P Chalasani, and S Jha. *Stochastic calculus for finance*, volume 1. Springer New York, 2004.

[90] Steven E Shreve, P Chalasani, and S Jha. *Stochastic calculus for finance*, volume 2. Springer New York, 2004.

[91] P. Steinorth and O.S. Mitchell. Valuing variable annuities with guaranteed minimum lifetime withdrawal benefits. Pension Research Council Working Paper 2012-03, The Wharton School, University of Pennsylvania, 2012.

[92] Lars Stentoft. Assessing the least squares monte-carlo approach to american option valuation. *Review of Derivatives research*, 7(2):129–168, 2004.

[93] Lars Stentoft. American option pricing using simulation: An introduction with an application to the garch option pricing model. *Available at SSRN 2021193*, 2012.

[94] Lars EO Svensson. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1994.

[95] John N Tsitsiklis and Benjamin Van Roy. Regression methods for pricing complex american-style options. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 12(4):694–703, 2001.

[96] Oldrich A Vasicek and H Gifford Fong. Term structure modeling using exponential splines. *The Journal of Finance*, 37(2):339–348, 1982.

[97] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, 1993.

[98] Young. *Iterative methods for solving partial difference equations of elliptical type*. PhD thesis, Harvard University, 1950.

[99] You-lan Zhu, Xiaonan Wu, and I-Liang Chern. *Derivative securities and difference methods*. Springer, 2004.