LIBOR Market Model. Una aproximación al paradigma lognormal en la valoración de derivados sobre tipo s de interés.

Estanislao Silla Sancho

Trabajo de Investigación del
Programa de Doctorado Interuniversitario
en Finanzas Cuantitativas
nº 12

Julio 2003

Universidad Complutense de Madrid
Universidad del País Vasco
Universidad de Valencia

www.uv.es/qf

LIBOR Market Model. Una aproximación al paradigma lognormal en la valoración de derivados sobre tipos de interés.

Estanislao Silla Sancho

Trabajo de Investigación del
Programa de Doctorado Interuniversitario
en Finanzas Cuantitativas
nº 12

Resumen

El presente trabajo pretende describir la base del esquema de valoración de derivados sobre tipos de interés habitualmente conocido como LIBOR Market Model por medio de una profunda revisión bibliográfica. Para ello se comienza con una breve revisión histórica de la valoración de los mencionados activos financieros. A continuación, el núcleo central de la revisión consiste en exponer los supuestos e hipótesis intrínsecas del modelo, así como la relación de éstas con la valoración de los activos derivados de diversa índole, simples y complejos. Especial importancia tiene la hipótesis de naturaleza determinista tanto de las derivas como de la matriz de covarianzas de los tipos forward. En el punto octavo se trata hasta qué punto la hipótesis sobre las derivas resulta aceptable e inocua. En los siguientes se justifica por qué el punto clave en la especificación del modelo es determinar una forma funcional adecuada para las funciones de volatilidad y correlación instantáneas y se tratan diversas posibilidades al respecto. Finalmente se ejemplifican algunos de los puntos anteriores por medio de un ejercicio empírico que alisa la labor del autor de cara a futuras investigaciones.

Abstract

This task pretends to describe the base of the valuating interest rate derivatives scheme habitualy known as LIBOR Market Model via a deep bibliographic revision. In order to do so starts with a breef historic revision of the mentioned assets. Next, the central core of the revision cosists in exposing the intrinsec assumptions of the model and its relation with valuation of derivative assets of diverse kind, simple and complex. Special importance has the assumption of deterministic nature for the drifts as well as for the covariance matrix of forward rates. The eighth point treats the importance of accepting the assumption about deterministic nature of drifts. In the next points it’s justified why the central point in de specification of the model is determining a suitable functional form for the volatility and instantaneus correlation functions and several possibilities in regard to the matter are treated. Finally several of the previous points are exeplified via an empirical exercise that rolls out the author’s task for future researchings.

Este trabajo fue expuesto públicamente en el I Workshop en Finanzas Cuantitativas celebrado en la Universidad del País Vasco los dias 26 y 27 de junio de 2003. Quisiera agradecer a mi director, el dr. D. Eliseo Navarro Arribas la orientación y ayuda brindadas para con el tema y su compromiso con el mismo y futuras investigaciones, así como al dr. D. Juan Nave sus comentarios al respecto del trabajo. El autor agradece públicamente a la Generalitat Valenciana su patrocinio y al claustro del doctorado Qf su dedicación al mismo.

Contenido

1. Introducción y motivación.

En los últimos tiempos los mercados de derivados sobre tipos de interés se han desarrollado de manera importante tanto en lo que se refiere a volumen de negociación como a la complejidad y diversidad de los activos existentes. Desde que en 1973 Black y Scholes publicaron por primera vez su famosa fórmula, tanto la teoría como la práctica han evolucionado muy deprisa en la valoración de derivados en general y de derivados sobre tipos de interés en particular. En este contexto y desde el trabajo original de Heath, Jarrow y Morton (1989), el paradigma lognormal para la descripción de la dinámica de los tipos forward y el uso de la fórmula de Black para la valoración de derivados simples han ido ganando terreno hasta convertirse en un estándar con creciente aceptación.

A pesar de ello, no es mucha la investigación llevada a cabo en este campo en España, lo cual contrasta con la gran proliferación de trabajos teóricos en este sentido a nivel internacional, comenzando con Brace, Gatarek y Musiela (1997) y Jamshidian (1997). Paralelamente, y como comentan de Jong, Driessen y Pelser (2000), el volumen de trabajos teóricos existente contrasta con la escasa profusión que se observa en el plano de las investigaciones empíricas. Así, un investigador en nuestro país encuentra tres razones por las cuales este campo resulta atractivo. Dos son globales, el futuro que presenta este esquema de trabajo y la escasez de contrataciones empíricas. La otra, como ya hemos mencionado, es de índole local.

Siguiendo los dos grupos de motivaciones anteriores, y de acuerdo con el director del presente trabajo, el proyecto se abordó, originalmente, desde una doble vertiente teoricopráctica. No obstante, la escasez de tiempo disponible unida a la escasa disponibilidad de los datos necesarios para realizar un estudio empírico ortodoxo han ido relegando la parte empírica a un segundo plano. Finalmente se presenta una revisión de los diferentes trabajos teóricos estudiados junto con una ejemplificación práctica de algunos de los puntos tratados. Gran parte del trabajo realizado ha consistido, por tanto, en la selección, asimilación y homogeneización de puntos teóricos provinentes de diversas fuentes, hasta dotarlos de una estructura unitaria y autocontenida.

A pesar de lo anteriormente dicho, el presente estudio se enmarca en la última fase del primer ciclo del Doctorado en Finanzas Cuantitativas en el que el autor se encuentra inmerso. Es por ello que resulta una buena oportunidad para la introducción del doctorando en un campo que ya ha sido descrito como atractivo para el investigador, por lo que el autor espera que no sea sino el principio de una línea de investigación que se desarrollará en buena parte desde un perspectiva empírica.

2. Breve historia de la valoración de derivados sobre tipos de interés. Los orígenes del LMM.

El conjunto de técnicas que podríamos calificar de modernas para la valoración de derivados sobre tipos de interés comenzaron con el trabajo de Heath, Jarrow y Morton (1989). A partir de él se han desarrollado un conjunto de estrategias o variantes con un rasgo en común: el reconocimiento de que la evolución libre de arbitraje de cualesquiera variables de estado escogidas puede expresarse como una función de las volatilidades y, en su caso, covarianzas, de las variables de estado mismas.

Dichas variables de estado pueden ser tipos de interés instantáneos o discretos compuestos, tipos swap o forward.; pueden distribuirse de forma normal o lognormal. El numerario asociado puede ser un bono cupón cero, una cuenta del mercado monetario, etc.

Siguiendo a Rebonato (2002), podemos subdividir la relativamente corta historia de los derivados sobre tipos de interés en cuatro períodos. El primero de los cuales se refiere al empleo de las aproximaciones de Black y Scholes (1973), Black (1976) y Merton (1973). La variable de estado –precios de bonos, spot o forward, tipos de bonos, tipos forward o tipos swap futuros- se supone, invariablemente, lognormal, y la distribución resultante se integra sobre el pago terminal de una opción europea.

La aproximación de Black y Scholes con un bono como subyacente fue popular aunque desde muy pronto criticada como consecuencia del fenómeno de "convergencia a la par": la forma original de la fórmula de Black y Scholes requiere una volatilidad constante para el subyacente. Evidentemente, como el precio de un bono converge a la par a su vencimiento, su volatilidad no es constante. Este hecho se consideraba poco peligroso si el vencimiento de la opción era muy anterior al vencimiento del bono.

Para casos en que ambos vencimientos eran próximos, la solución era considerar como subyacente lognormal una cantidad no negociable, el rendimiento del bono. De esta forma se consigue evitar la convergencia a la par, aunque resulta difícil adaptar a un subyacente no negociable el razonamiento de Black y Scholes de estrategia dinámica autofinanciada que reproduce el pago final de la opción.

La aproximación lognormal presentaba problemas teóricos, entre ellos una difícil justificación financiera relativa a la valoración riesgo neutral. No obstante, la comunidad financiera no abandonó el modelo de rendimientos lognormales por razones teóricas. Las fórmulas de valoración de caps y swaptions, que empleaban tipos forward y swap lognormales, fueron ganando aceptación. Estas fórmulas, a diferencia de la aproximación lognormal de rendimientos, pueden justificarse teóricamente. No obstante, dicha justificación no apareció hasta los años noventa. Así, el mercado empleó de manera generalizada la fórmula de Black para opciones y swaptions europeas mucho antes de que se difundiese su justificación teórica.

En realidad, como en muchas ocasiones, parece que la teoría fue detrás de la práctica. La elección teóricamente no fundamentada del mercado convirtió la fórmula de Black para caplets y swaptions en el estándar. Dicho estándar fue fundamentado posteriormente con argumentos teóricos. De éste estándar proceden aproximaciones posteriores y más generales, como el LIBOR Market Model, capaces de valorar derivados sobre tipos de interés complejos de forma consistente con el mercado de caplets.

Volviendo al problema de convergencia a la par, la solución correcta era, claro está, emplear la fórmula de Black -y lo la de Black-Scholes-, con precios forward y volatilidad de dichos forwards como inputs. Este camino fue descuidado tanto por los traders “ingenuos” como por los más informados y sofisticados. Los primeros no apreciaban la diferencia entre Black y Black-Scholes, y pensaban que el fenómeno de convergencia a la par era relevante en ambos casos. Los segundos entendían la diferencia pero se daban cuenta, asimismo, de que la fórmula de Black no contemplaba algo importante: en realidad, a pesar de que los distintos precios forward de bonos se corresponden con activos diferentes, sabemos que esos precios se encuentran significativamente correlacionados.

Efectivamente, si un trader emplea dos volatilidades de precios forward de bonos como inputs para valorar dos opciones que expiran en momentos diferentes sobre bonos con el mismo plazo hasta el vencimiento, implícitamente está diciendo algo acerca de las volatilidades de los precios forward en el intervalo entre el primer y el segundo vencimiento. Sin embargo, el concepto “algo” resulta excesivamente vago y la relación entre las distintas volatilidades no es suficientemente fuerte como para tener una naturaleza determinista. Sin embargo, tampoco es lo suficientemente débil como para ser considerada completamente independiente. Esa vaguedad, fuente de insatisfacción con la aproximación de Black, resulta particularmente interesante si tenemos en cuenta que la aproximación moderna a la valoración de derivados puede padecer un exceso de concreción similar.

A medida que se desarrolló el mercado de derivados sobre el LIBOR, éste proporcionó, asimismo, interesantes desafíos de valoración. La demanda de productos derivados sobre el LIBOR venía, por un lado, de los gestores de obligaciones, que buscaban asegurarse un tipo de interés por medio de la compra de caps, y , por otro, de los emisores e inversores que buscaba mayores rendimientos propios o de los fondos que gestionaban por medio, respectivamente, de bonos canjeables o colocables (putables). Una primera consecuencia fue que el consenso de las firmas de inversión más activas en el campo se consolidó alrededor del uso de la fórmula de Black con tipos forward y swap lognormales. Ello no era necesario porque un caplet puede ser visto como una opción de compra sobre un tipo o una opción de venta sobre un bono, por lo que la elección de la aproximación de Black puede considerarse como un accidente histórico relevante.

Una segunda consecuencia de la demanda y producción de productos tipo opción fue que las casas de inversión se vieron como los compradores naturales de swaptions y los vendedores naturales de caps. Por supuesto ya se reconocía que se trataba de instrumentos íntimamente ligados: un tipo swap es una combinación lineal, aunque con carga estocástica de los tipos forward subyacentes. No obstante, las fórmulas de Black por sí mismas no proporcionan pista alguna sobre cuál debería ser la conexión: cada caplet sería perfectamente valorado en su propia medida forward.

La segunda etapa en la valoración de derivados todavía tuvo su origen en trabajos académicos, como Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross(CIR) (1985). Afrontaron la búsqueda de una descripción coherente y autocontenida para la multitud de instrumentos (opciones sobre bonos, caplets, swaptions, etc.). El supuesto clave era que la dinámica de toda la curva de tipos venía determinada por el tipo instantáneo a corto.

A pesar de que el éxito práctico de estos modelos era bastante limitado, su influencia fue considerable y, salvo algunas excepciones, todos los modelos desarrollados hasta Heath, Jarrow y Morton (1989) eran parte del mismo programa basado en tipos a corto.

Una combinación de factores compleja parece la causa de que tamaño esfuerzo se realizase en esta dirección. Los traders , no obstante, se sintieron atraídos por la idea de que unos modelos con una estructura simple y unos supuestos de partida describían la curva de tipos de manera aceptable. Este éxito parcial pero halagüeño se interpretó en ocasiones como un síntoma de que en el fondo debe ser correcto escoger los tipos a corto como el factor subyacente para la curva de tipos. Con perspectiva puede argumentarse que, como ha demostrado la copiosa investigación econométrica realizada, la evolución de la curva de tipos se explica en buena medida por su primer componente principal. Las ponderaciones de los diferentes tipos forward en este componente principal son aproximadamente constantes. Así pues, virtualmente cualquier tipo, y, por tanto, el tipo a corto, podría haberse tomado como una aproximación razonable del primer componente y, por tanto, de la curva de tipos entera.

La tercera fase es consecuencia inmediata de la primera y viene determinada por los trabajos de Black, Derman y Toy (1990) y Hull y White (1990), que extienden, respectivamente, las anteriores propuestas de Vasicek y CIR. La característica más relevante de este tipo de modelos fue la agregación de un término puramente determinista al componente de reversión a la media en la deriva del tipo a corto. De esta forma se consigue deshacerse de cualquier discrepancia que los componentes estocástico y de reversión a la media pudiesen permitir entre el mercado y el modelo.

Así, esta familia de modelos son capaces de reproducir cualquier curva de tipos pero no sirven para valorar directamente opciones plain vanilla –caplets y swaptions-. En realidad, si se implementaran como sus creadores recomiendan, esto es, con parámetros de volatilidad constantes, fallarían incluso en la valoración de caplets. De esta manera el objeto de estos modelos pasó de ser la definición de la forma de la curva de tipos a la evaluación de la sensatez de la estructura temporal de volatilidades del mercado. Como consecuencia, los traders de derivados simples sobre el LIBOR se encontraron por primera vez en posición de especular que, si la evolución de la curva de tipos estaba realmente marcada por el tipo a corto, si su deriva (ajustada por riesgo) tenía una forma con reversión a la media y si la volatilidad se había escogido correctamente, entonces el modelo podría proporcionar una idea de que los precios relativos de, por ejemplo, dos caplets, no pueden ser los que se observan en el mercado. La segunda generación de modelos provocó la primera posibilidad arbitraje con opciones conducida por un modelo.

Como cabe suponer, el tipo de profesionales que se mostraban insatisfechos con la segunda generación de modelos eran, por supuesto, los traders de derivados exóticos. A principios de los noventa, cuando los modelos de la familia BDT/HW integraban la principal corriente dentro de la comunidad financiera, multitud de nuevos derivados exóticos –swaptions bermuda, swaps con principales indexados, ratchet caps, callable inverse floaters, knock-out caps, index accruals...- se introdujeron en el mercado. Para los traders encargados de negociarlos, la mayor demanda para un nuevo modelo era la capacidad para valorar al menos la cobertura con opciones requerida para cada compra o venta en línea con el mercado plain-vanilla. Los traders de exóticos querían los precios de sus coberturas (caplets y/o swaptions) reproducidos por el modelo en línea con el mercado. En la primera mitad de los noventa, los mercados de caplets y de swaptions europeas aun se encontraban solidamente anclados en el esquema de Black.

Fue en este contexto cuando las primeras aplicaciones no triviales del modelo HJM empezaron a desarrollarse –y a emplearse- en los front offices. Como ya se dijo, el papel de trabajo original de HJM empezó a circular en 1987, aunque las primeas aplicaciones lo hicieron en 1993-94. Hay algunas razones que explican este retraso. El lenguaje complejo en el que el modelo fue formulado, el escaso desarrollo alcanzado por las técnicas numéricas o analíticas para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales y la escasa utilidad que las técnicas de árboles recombinates presentan frente a la naturaleza no markoviana de los procesos lognormales para tipos forward.

La aplicación clave frente a la escasa utilidad demostrada por la búsqueda de fórmulas cerradas y el empleo de árboles recombinantes es la simulación Monte Carlo. No se trataba de una técnica novedosa, pero hasta ese momento había gozado de una popularidad escasa.

Por otra parte, en un primer momento, el modelo HJM se consideraba difícil de calibrar. Por tanto, el siguiente problema para la difusión del modelo fue la calibración del mismo. El modelo HJM fue originalmente formulado en términos de tipos forward instantáneos, que no presenta una equivalencia evidente con ningún instrumento negociado en el mercado. Además el artículo de HJM mencionaba el hecho de que , en el límite del tiempo continuo y para verdaderos tipos forward lognormales, su proceso explota con probabilidad positiva. Esta afirmación, a menudo repetida y raras veces comprendida, actuó como un poderoso inhibidor del desarrollo de un modelo de mercado lognormal basado en HJM.

No obstante, los temores iniciales desaparecieron. Cuando el proceso se discretiza y se convierte en un tenor finito, la explosión lognormal desaparece. El mercado, más esclavo de la necesidad que dotado de una visión providente, se vio obligado, para valorar activos derivados sobre el LIBOR con la aproximación HJM, un camino que queda como sigue:

- Debe especificarse una partición para la curva de tipos por aquellos puntos en los que los acontecimientos relevantes para el precio ocurren. Se trata del tenor de los tipos forward. Debe suponerse que estos tipos forward discretos pueden considerarse como el equivalente en tiempo finito de los tipos forward instantáneos del HJM.
- Deben discretizarse , asimismo, las derivas de no-arbitrage. Al hacerlo, las integrales se transforman en sumatorios y tienen que simularse las integrales estocásticas en tiempo continuo usando cuadraturas estocásticas discretas.
- Puesto que debe escogerse un numerario, como extensión natural de la aproximación HJM, se toma el concepto de cuenta del mercado monetario discreta compuesta.
- Debe hacerse una suposición sobre la forma funcional de los tipos forward discretos. En este punto, se toma la aproximación lognormal, aproximación estándar para el mercad de opciones plain vanilla.

La anterior aproximación funcionó correctamente y, desde hace años, valorar correctamente una serie de caplets no ha requerido nada más que el uso de la fórmula de Black. Había nacido el LIBOR Market Model.

No obstante, estos caplets valorados mediante la fórmula de Black se valoran con distintas medidas, pertenecen a universos diferentes, y, por tanto, ningún otro derivado sobre el LIBOR podría valorarse al mismo tiempo de una forma consistente. Este es un problema no completamente resuelto y queda mucho trabajo por hacer en este sentido. Muy importante ha resultado se la contribución realizada en esta línea por artículos como los de Brace et al. (1995), Musiela y Rutkowsky (1997a) y Jamshidian (1997). Estos artículos muestran con claridad que cualquier implementación en tiempo continuo del modelo de HJM y, por tanto, en particular, la implementación lognormal, estaba especificada por las volatilidades instantáneas de los tipos forward discretos, así como por las correlaciones entre ellos.

De lo anterior se deduce que para cada uno de los puntos del tenor, es decir, para cada uno de los puntos sensibles para el precio, correspondería una matriz que tendría como elementos integrales de términos de covarianza; cada matriz contiene un número de elementos proporcional al cuadrado de los tipos forward aun vivos.

Por tanto, la recuperación de precios de mercado ha dejado de ser la prioridad para ceder su protagonismo al hecho de que cada una de las posibles elecciones para las funciones de volatilidad (varianzas y covarianzas instantáneas) de la mencionada matriz daría lugar a un precio distinto para productos exóticos. Nos encontramos ante un problema de exceso de grados de libertad en sentido de transparencia financiera.

Un punto fuerte de los modelos de mercado es que pueden ser equivalentemente empleados tanto para tipos forward como para tipos swap. Ello presenta dos consecuencias positivas importantes: por un lado, dada la facilidad con la que las volatilidades de mercado pueden recuperarse, el usuario puede estar seguro de que al menos una serie de instrumentos de cobertura (caplets o swaptions) puede ser valorada de manera exacta por el modelo. A continuación será una el usuario quién determine cuál de las volatilidades es más relevante para la valoración del producto exótico en cuestión. Asimismo, la mayoría de los productos exóticos requieren posiciones cubiertas tanto en caplets como en swaptions. Es por tanto extremadamente útil dar con la correcta matriz de volatilidades o matriz swaption, dada una aplicación basada en tipos forward, o qué estructura temporal de volatilidades de caplets es producida por la implementación basada en tipos swap escogida.

Aun más importante. Los modelos de mercado proporcionan al trader las herramientas perfectas para analizar la congruencia los dos derivados simples, caplets y swaptions. Ni que decir tiene que, para un creyente en la formación perfecta de los precios, los mercados son siempre congruentes, y la imposibilidad para valorar simultáneamente caplets y swaptions simplemente muestra la inadecuación del modelo empleado en la valoración. Alternativamente, si se cree que el modelo es correcto y funciona para devolver todos los precios, las volatilidades y correlaciones resultantes deberían reflejar el consenso del mercado para con dichas cantidades, sin importar cuan plausibles puedan parecer si se comparan, por ejemplo, con la evidencia histórica y estadística.

El tema es, en realidad, bastante más complejo que lo anterior: por un lado están los flujos naturales del mercado y por otro con "hábitat" favoritos que crean un exceso de demanda o de oferta para determinados productos. Para Rebonato, los ejemplos más obvios de esta descompensación son "la natural incongruencia intrínseca entre la demanda de opcionalidad tipo caplet (por parte de los gestores de obligaciones) y la producción de opcionalidad swaption (por parte de emisores e inversores en busca de rendimientos mayores que los plain vanilla) ". Dichas descompensaciones entre oferta y demanda deberían en teoría desaparecer por obra de los arbitrajistas. Sin embargo las ineficiencias y las restricciones del mercado reducen las posibilidades de los arbitrajistas para sacar partido de las discrepancias de precios. Aparentemente, estas restricciones e imperfecciones todavía son abundantes. En realidad, Rebonato opina que confiar ciegamente en la congruencia de los mercados de caplets y swaptions requiere un significativo acto de fe. Así, el tema del análisis conjunto de los dos mercados y su impacto en la calibración del modelo de mercado es uno de los temas más abiertos y comprometidos en este campo.

Un par más de comentarios parecen apropiados. En primer lugar es importante remarcar que el LIBOR Market Model, tal y como se conoce en la actualidad, es mucho más que una serie de ecuaciones para la evolución libre de arbitraje de los tipos forward o swap: incluye un conjunto rico de técnicas de calibración y de aproximación. Resulta importante, asimismo, considerar que justo cuando el modelo de mercado ha logrado la habilidad necesaria para valorar productos exóticos y, al mismo tiempo, valorar correctamente opciones plain vanilla abordables por el modelo de Black, el estándar de mercado se ha alejado del paradigma lognormal. Este alejamiento viene marcado por la aparición de sonrisas y muecas en las curvas de volatilidad implícita (ver Rebonato 1999c). Así, si quieren considerarse estos diferentes mecanismos de manera financieramente convincente, diferentes formas de modelización resultan necesarias.

3. La fórmula de Black y la valoración tradicional de derivados simples.

El más sencillo de los instrumentos existentes es el FRA (Forward Rate Agreement), en el que dos partes se comprometen en un momento t a intercambiar en el momento $T+\tau$ una cantidad de dinero proporcional a la diferencia entre un strike K y el tipo LIBOR para ese período $L(T, T+\tau)$. El factor de proporcionalidad viene dado por un nocional principal NP, también acordado en t. Así los pagos de un FRA vienen representados por:

$$Payoff(T+\tau) = NP[L(T,T+\tau) - K]\tau$$

Donde NP representa el valor del nocional principal. Por tanto, el valor presente de un FRA, calculado como el flujo de caja que ocurrirá en $T+\tau$ descontado hasta el momento T, puede representarse como:

$$PV_T = NP\frac{[L(T,T+\tau) - K]\tau}{[1 + L(T,T+\tau)\tau]}$$

El valor de un FRA en un momento anterior a T suele expresarse por medio del concepto de tipo forward, mediante la correspondencia evidente

$$f(T,T,T+\tau) \equiv L(T,T+\tau)$$

Así pues, las anteriores ecuaciones pueden rescribirse como:

$$Payoff(T+\tau) = NP[f(T,T,T+\tau) - K]\tau$$

$$PV_T = NP\frac{[f(T,T,T+\tau) - K]\tau}{[1+f(T,T,T+\tau)\tau]}$$

En el momento del acuerdo, el strike de un FRA se define de forma que su valor sea cero. Ello requiere un acuerdo del mercado acerca de la distribución de $f(T,T,T+\tau)$. Para ello debe tenerse en cuenta que el tipo $f(t,T,T+\tau)$ puede definirse, por medio de simples consideraciones de no arbitraje como

$$P(t,T) - P(t,T+\tau) = f(t,T,T+\tau)\tau P(t,T+\tau)$$

$$f(t,T,T+\tau) = \frac{P(t,T)/P(t,T+\tau) - 1}{\tau}$$

Por medio de esta relación, resulta fácil definir el valor de un FRA sin dejar lugar a ambigüedad alguna. El valor en t de un contrato FRA de strike K y con vencimiento en T es

$$PV_t = NP[f(t,T,T+\tau)\tau - K\tau]P(t,T+\tau)$$

Como la expresión anterior no se refiere al proceso subyacente , cualquier distribución de probabilidad tal que la esperanza en el momento t de $f(T,T,T+\tau)$ sea igual a $f(t,T,T+\tau)$ producirá el precio correcto para el FRA. Así pues, cualquier proceso, no necesariamente una difusión, tal que la condición anterior se cumpla será compatible con un precio de mercado para el FRA.

La opción simple ligada a un FRA es un caplet cuyo payoff en el momento $T+\tau$ viene dado por

$$Payoff_{T+\tau} = NP[f(T,T,T+\tau) - K]^{+}\tau$$

Lo habitual en el mercado, llegados a este punto es suponer, para valorar un caplet con payoff en $T+\tau$ como el de la ecuación anterior, que el valor del tipo forward con vencimiento en el momento T se distribuye de forma lognormal, con una varianza incondicional ligada a la volatilidad σ^2_{Black} , por medio de la siguiente relación

$$\ln[f(T,T,T+\tau)] \sim G(\mu, \sigma^2_{Black}T)$$

Donde G representa la distribución gausiana. Por las condiciones de no arbitraje mencionadas, sabemos que la esperanza en t de un tipo forward con vencimiento en T debe ser igual a $f(t,T,T+\tau)$, por lo que la expresión anterior, por tanto, puede rescribirse como

$$\ln[f(T,T,T+\tau)] \sim G(\ln[f(t,T,T+\tau)] - \frac{1}{2}\sigma^2_{Black}T, \sigma^2_{Black}T)$$

Integrando el payoff de un caplet sobre esta distribución lognormal se obtiene la fórmula de Black standard

$$PV_t = NP[f(t,T,T+\tau)N(h_1) - KN(h_2)]P(t,T+\tau)\tau$$

siendo

$$h_1 = \frac{\ln[f(t,T,T+\tau)/K] + \frac{1}{2}\sigma^2_{Black}(T-t)}{\sigma_{Black}\sqrt{(T-t)}}$$

$$h_2 = \frac{\ln[f(t,T,T+\tau)/K] - \frac{1}{2}\sigma^2_{Black}(T-t)}{\sigma_{Black}\sqrt{(T-t)}}$$

N representa la distribución normal acumulativa.

Un tratamiento similar puede darse a la definición de swaps y swaptions europeas: un swap es una acuerdo para el intercambio de un pago fijo por otro variable. La pata fija está constituida por una anualidad A, con pagos fijos K que se producen en momentos previamente especificados y aproximadamente equidistantes. Así, su valor puede expresarse como:

$$A_t(\{T_i\}) = NP * K\sum_{i=0}^{N-1} P(t,T_i+\tau)\tau$$

Con $T_i + \tau = T_{i+1}$. Como lo pata variable, FL, está formada por una colección de pagos, cada uno de los cuales será determinado por el vencimiento de un tipo LIBOR en una serie previamente especificada de fechas, entonces es simplemente igual al conjunto de tipos variables asociados con una serie de FRAs. Teniendo en cuenta resultados anteriores obtenidos con anterioridad, su valor en t viene dado por

$$FL_t = \sum_{i=1}^{n} NPf(t,T,T+\tau)\tau P(t,T+\tau)$$

El número pagos de la pata fija, N, y de la pata variable, n, no tienen por qué coincidir. En realidad suele considerarse que sí lo hacen para simplificar la notación.

Si el nocional principal NP es constante, entonces puede establecerse como unitario sin pérdida de generalidad y la ecuación anterior se simplifica a

$$FL_t = P(t,T_0) - P(t,T_n)$$

El tipo swap de equilibrio en t, SR_t, se define como el valor de la pata fija que en el momento t, hace que el valor de swap para el período $[T_{\exp}, T_{mat}]$ sea cero. Por tanto, viene dado por el siguiente ratio

$$SR(t,T_{\exp},T_{mat}) = FL_t / A_t$$

Reordenando término, la expresión anterior puede expresarse de manera alternativa como

$$SR(t, T_{\exp}, T_{mat}) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t, T_i, T_i + \tau)$$

con

$$w_i = \frac{P(t, T_i + \tau)\tau}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i + \tau)\tau} = \frac{P(t, T_i + \tau)\tau}{A_i}$$

Un swaption europeo no es sino una opción adquirida en un momento t, para entrar en el momento $T_{\exp}$ en un swap activo durante el período $[T_{\exp}, T_{mat}]$. La aproximación estándar de mercado supone que el tipo swap de equilibrio se distribuye de forma lognormal con una esperanza igual a su valor actual, es decir

$$\ln[SR(T_{\exp}, T_{\exp}, T_{mat})] \sim G(\ln[SR(t, T_{\exp}, T_{mat})] - \frac{1}{2}\sigma^2_{SR,Black} T_{\exp}, \sigma^2_{SR,Black} T_{\exp})$$

Donde $\sigma_{SR,Black}$ es la volatilidad de Black implícita para el tipo swap. El payoff en el momento $T_{\exp}$ del swaption es

$$Payoff_{T_{\exp}} = [SR(T_{\exp}, T_{\exp}, T_{mat}) - K]^+ A(t, T_{\exp}, T_{mat})$$

Donde $A(T_{\exp}, T_{\exp}, T_{mat})$ es el valor en el momento $T_{\exp}$ de los pagos producidos en el período $[T_{\exp}, T_{mat}]$. La integración de este payoff sobre la distribución lognormal del tipo swap a vencimiento proporcionan como resultado la fórmula de Black

$$PV_t = NP[f(t, T_{\exp}, T_{mat})N(h_1) - KN(h_2)]A(t, T_{\exp}, T_{mat})$$

Donde, en este caso

$$h_1 = \frac{\ln[f(t, T_{\exp}, T_{mat})/K] + \frac{1}{2}\sigma^2_{SR,Black}(T_{\exp} - t)}{\sigma_{SR,Black}\sqrt{(T_{\exp} - t)}}$$

$$h_2 = \frac{\ln[f(t, T_{\exp}, T_{mat})/K] - \frac{1}{2}\sigma^2_{SR,Black}(T_{\exp} - t)}{\sigma_{SR,Black}\sqrt{(T_{\exp} - t)}}$$

Hemos podido apreciar cómo, separadamente, podemos llegar a fórmulas de valoración tipo Black tanto para caplets como para swaptions, como se expone en Rebonato (1999b). No obstante, es preciso mencionar que suponer lognormalidad para ambos casos es inconsistente ya que, por ejemplo, un tipo swap, que es una combinación lineal de tipos forward, no puede ser lognormal si los tipos forward subyacentes lo son.

4. La valoración de derivados y la dinámica de los tipos forward.

A la hora de valorar un derivado, es esencial considerar que el valor actual del mismo es la esperanza descontada, bajo la adecuada medida de probabilidad, del mismo de su payoff. Si el derivado que quiere valorarse es de tipo europeo, y depende de la realización de un solo tipo forward, como un caplet, entonces la distribución de probabilidad requerida no es más que la distribución incondicional del tipo relevante.

Desgraciadamente existen pocos productos europeos. Para el resto de productos será necesario considerar una esperanza sobre una distribución de probabilidad multidimensional, lo cual requiere información acerca de la probabilidad condicional de ocurrencia conjunta de muchos tipos forward a diferentes vencimientos. Es decir, se requiere la probabilidad condicional de concurrencia de distintos tipos a distintos vencimientos $T_1, T_2, ..., T_n$ para valorar, por ejemplo, un swaption.

Además de cubrir la anterior demanda, sería muy deseable encontrar expresiones de valoración cerradas tanto para las distribuciones de probabilidad condicionales como incondicionales de los tipos forward. Además, resultaría especialmente práctico emplear distribuciones que dependieran de un número reducido de estadísticos descriptivos, como varianzas y covarianzas.

Para tratar de cumplir con las anteriores demandas, resulta particularmente atractivo tratar de imponer que al menos las distribuciones de probabilidad incondicional sean gaussianas. En realidad, dado que resulta recomendable forzar distribuciones en las que los tipos resulten siempre positivos, resulta apetecible modelar los logaritmos de los tipos forward como procesos gaussianos, dado el relativamente sencillo tratamiento analítico que se deriva de esta opción clásica.

No obstante, como hemos comentado, suponer exclusivamente que el logaritmo de los tipos forward presenta una distribución gaussiana no resuelve el problema de valoración de la mayoría de los activos derivados. Así pues, como paso siguiente, resulta natural suponer, si es posible, que todas las distribuciones de densidad condicionales son conjuntamente gaussianas.

Para profundizar en la idea anterior, sigamos a Rebonato(2002) y a Nielsen(1999). Consideremos un proceso estocástico N-dimensional X_t como

$$X_t = X(t) = \left\{ X_t^1, X_t^2, ..., X_t^N \right\}$$

Para una muestra de n elementos finitos del tiempo $T_1, T_2, ..., T_n$ del proceso vector , es decir, para una matriz aleatoria N*n-dimensional tal que

$$\left\{ X(T_1), X(T_2), ..., X(T_n) \right\}$$

El proceso vector X_t será gaussiano si la distribución de cada matriz muestral es conjuntamente normal, es decir, si la distribución incondicional conjunta de los elementos de la matriz muestral definida anteriormente es normal. Además, si el proceso X_t es gaussiano, entonces la distribución de toda matriz muestral se caracterizará porque el conocimiento completo se restringe a las distribuciones incondicionales de media y varianza.

Cualquier proceso condicionalmente gaussiano es gaussiano incondicionalmente. En particular, un proceso browniano generalizado, $B(t)$,

$$B(t) = B(0) + \mu t + \sigma Z(t)$$

es gaussiano y condicionalmente gaussiano. Así, un proceso browniano generalizado parece un candidato perfecto para la modelización de los logaritmos de los tipos forward. Más concretamente, tras identificar el vector $B(t)$ en la expresión anterior con el vector de elementos dado por el logaritmo de los tipos forward, sería útil poder escribir para cada tipo forward individual f_i

$$d\ln[f_i(t)] = \mu_i(t)dt + \sum_k \sigma_{ik}(t)dz_k(t)$$

con condiciones iniciales conocidas, $f_i(0)$, y siendo $dz_k(t)$ los incrementos en el momento t del proceso browniano estándar ortogonal tal que $E[dz_i(t)dz_j(t)] = \delta_{ij}(t)dt$.

Para estar seguros de que el proceso resultante será condicionalmente gaussiano parece razonable imponer condiciones sobre μ y σ. Para apreciar cuáles y de nuevo siguiendo a Nielsen (1999), es útil analizar las probabilidades de $\int \sum_k \sigma_{ik}(t)dz_k(t)$, empleando los siguientes teoremas:

T1. Si $\{\sigma_{jk}\}$ es una matriz determinista, de cuadrado integrable y (N*K)-dimensional, $\{Z_k\}$ un vector columna n-dimensional de procesos brownianos estándar, y s y t momentos tales que $t \geq s$, entonces la variable aleatoria N-dimensional $\{y_i\}$, $y_i \equiv \int_s^t \sum_k \sigma_{ik}(u)dz_k(u)$, es independiente de la filtración hasta el momento s, y se distribuye normalmente, con media cero y una matriz de covarianzas N*N cuyo elemento (i,j)-ésimo viene dado por $\int_s^t \sum_k \sigma_{ik}(u)\sigma_{jk}(u)du$. Además, el proceso y_i es tanto gaussiano como condicionalmente gaussiano.

De este teorema de deduce inmediatamente que, como el término de deriva es constante, es condición necesaria y suficiente para que el proceso X sea condicionalmente gaussiano que la matriz de volatilidades sea determinista. Con respecto al vector μ, debemos tener en cuenta el siguiente teorema:

T2. dado un proceso X de la forma

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma Z(t)$$

Si $\{\sigma_{jk}\}$es una matriz determinista, de cuadrado integrable y (N*K)-dimensional, $\{Z_k\}$un vector columna n-dimensional de procesos brownianos estándar, es condición suficiente para que el proceso X sea tanto gaussiano como condicionalmente gaussiano que el vector de deriva μ sea determinista.

Así pues, para que el proceso X sea gaussiano y condicionalmente gaussiano, es necesario que tanto el vector de deriva como la matriz de covarianzas sean deterministas. Si dichas condiciones se cumplen, la distribución conjunta de los tipos forward entre s y t puede modelizarse como

$$\ln[f(t)] \sim G(m, \Sigma)$$

Siendo

$$m_i = \ln[f_i(s)] + \mu_i$$

$$\Sigma_{ij} = [\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T]_{ij} = \int_s^t \sum_k \sigma_{ik}(u)\sigma_{jk}(u)du$$

En realidad, y desgraciadamente, como bien se indica en Rebonato(2002), la anterior aproximación no resulta posible en la mayor parte de los casos ya que los tipos forward sólo pueden suponerse lognormales bajo la medida de probabilidad apropiada. Para un numerario cualquiera, los términos de deriva de la difusión de los tipos forward existen. Siempre existe un numerario (un bono al descuento) posible dentro del universo de activos negociables tal que un tipo forward o swap puede representarse sin deriva y, por tanto, asumiendo volatilidad determinista, se distribuye como una función lognormal. No obstante, dicho numerario sólo es efectivo para un tipo forward al mismo tiempo, y todos los demás tipos forward tendrán deriva. No es posible encontrar un numerario (ni siquiera una combinación compleja de bonos al descuento) tal que varios tipos forward carezcan de deriva al mismo tiempo.

El LIBOR Market Model -Musiela y Rutkowsky, (1996)- está construido para reproducir exactamente los precios de los caplets obtenidos al considerar cada tipo forward individual como lognormal. Para cada uno de los caplets, por tanto, se considera un numerario diferente –el bono al descuento que madura en el momento del payoff final-. El uso de cualquier otro numerario introduciría una covarianza entre el bono al descuento y el payoff mismo, que tendría que compensarse alterando la deriva del tipo forward para que el precio del caplet siguiese recuperándose –este razonamiento puede ampliarse en Rebonato (1998)-. Así pues, no es posible encontrar un numerario que permita la medición de varios procesos de tipos forward de manera que resulten simultáneamente libres de deriva.

Por ello, dado que la deriva no puede eliminarse para más de un tipo forward, en general, como demuestra Rebonato(2002), el vector de derivas no es determinista, ya que cuando se imponen condiciones de no arbitraje, el vector de derivas en el momento t contiene los valores en el momento t de las variables de estado, $\{f_t\}$. Por tanto, la condición suficiente del teorema 2 no se cumple. Por tanto, el vector $\ln[f(t)]$ no es gaussiano condicional e incondicionalmente y, por ello, no existen fórmulas cerradas para las matrices de covarianzas.

Considerando las anteriores premisas, puede diseñarse el LMM tal y como lo conocemos. Para ello resulta imprescindible realizar una descripción detallada de la dinámica seguida por los tipos forward.

5. Descripción de la dinámica de los tipos forward.

El planteamiento del LMM requiere tipos forward sigan una dinámica como la siguiente

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu(f,t)dt + S(t)dw(t) \qquad (1)$$

Siendo

$\frac{df(t)}{f(t)}$ un vector n*1 de incrementos porcentuales de tipos forward.

$\mu(f,t)$ un vector n*1 de derivas, que pueden depender tanto del tiempo como de los mismos tipos forward

$dw(t)$ un vector n*1 de movimientos brownianos estándar correlados bajo la medida Q, que es la medida que implica el numerario escogido.

$S(t)$ una matriz diagonal n*n, cuyo i-ésimo elemento es igual a la volatilidad instantánea σ_i del i-ésimo tipo forward.

El concepto de volatilidad instantánea, esencial en esta construcción, es aquel que se relaciona con la volatilidad implícita de Black del instrumento en cuestión por medio de la siguiente relación:

$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du$$

Como ya se ha mencionado, siempre existe un numerario para un tipo forward que hace que tenga deriva cero. Cuando dicho tipo se ha escogido, la integración del payoff terminal del caplet asociado a dicho tipo forward sobre la densidad de probabilidad que implican las dos ecuaciones anteriores, directamente proporciona la fórmula de Black.

En particular, la anterior ecuación que expresa la dinámica de los tipos forward puede ser integrada para obtener el valor de cada tipo forward f_i en el momento t:

$$f_i(t) = f_i(0)\exp[\int_0^t \mu_i(\{f(u)\},u) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u)du + \int_0^t \sigma_i(u)dw_i(u)]$$

El punto clave que del cual la ecuación de dinámica de los tipos forward no proporciona información es la estructura de correlaciones entre los distintos tipos forward. Ello puede remediarse añadiendo el hecho de que los diferentes incrementos brownianos $dw_i(t)$ deben estar conectados por una matriz n*n de correlaciones instantáneas ρ

$$\rho dt = dwdw^T$$

donde $dw_i dw_i = \rho_{ij} dt$

Una descripción alternativa a la anterior, más simple y menos costosa desde un punto de vista computacional resulta redefiniendo la anterior de dinámica forward como

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu(f,t)dt + \sigma(t)dz(t) \tag{2}$$

Donde ahora

dz(t) es un vector de procesos brownianos ortogonales m*1.

$\sigma(t)$ es una matriz n*m cuyo j-ésimo elemento, $\sigma_{ij}(t)$, es igual a la ponderación el i-ésimo tipo forward los shocks aleatorios del j-ésimo proceso rector browniano ortogonal. Debe siempre cumplirse que $m \le n$.

Desde el punto de vista financiero, el elemento $\sigma_{ij}(t)$ es el responsable de los shocks ortogonales del j-ésimo browniano en el i-ésimo tipo forward. Para un i dado, el vector fila $\sigma_{ij}(t)$ puede interpretarse como la descomposición de la volatilidad del i-ésimo tipo forward en componentes asociados a distintos tipos de incertidumbre ortogonal (cambios en la curvatura de la curva de tipos, cambios en el nivel de la misma...

Esta nueva manera de expresar la evolución de los tipos forward es particularmente conveniente porque, como consecuencia de la ortogonalidad de los movimientos brownianos dz(t), inmediatamente puede expresarse la matriz de covarianzas entre tipos forward, Σ , como

$$\mathrm{cov}\left[\frac{df}{f}\right] = E\left[\frac{df_j}{f_j}\frac{df_k}{f_k}\right] = \Sigma = \sigma\sigma^T$$

Donde

$$\frac{df_j}{f_j} = \mu_i dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik} dz_k \tag{3}$$

Y la expresión de la covarianza se obtiene tomando esperanzas del producto de dos términos como el anterior y aplicando las reglas de Ito: $dz_i dt = 0$, $dtdt = 0$ y $dz_i dz_j = \delta_{ij}$.

Por supuesto, las representaciones (1) y (2) deben resultar equivalentes. En virtud de la ortogonalidad de los procesos brownianos $dz(t)$, los elementos de las matrices S y σ, deben estar conectados por medio de la relación

$$\sigma_i^2(t) \equiv \sigma_i^{inst}(t)^2 = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}^2(t) \tag{4}$$

Esta segunda forma de representar los tipos forward puede modificarse para llegar otra forma muy útil de representar dichos procesos. Si dividimos cada ponderación en la ecuación (3) por la volatilidad del i-ésimo tipo forward, obtenemos

$$\frac{df_j}{f_j} = \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^{m} \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i} dz_k = \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^{m} \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}^2}} dz_k = \mu_i dt + \sigma_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} dz_k \tag{5}$$

Donde se ha empleado la relación (4). En este caso, puede probarse que $bb^T = \rho$

Esta representación es muy útil porque descompone la responsabilidad de los tipos forward con respecto a los shocks ortogonales en dos componentes conceptualmente distintos. El primero, σ_i, depende exclusivamente de la volatilidad del tipo forward i-ésimo. Por tanto, está relacionado con su volatilidad implícita de mercado: para la correcta valoración de un caplet, la raíz cuadrada de σ_i tiene que ser igual a σ_i^{Black}. En cuanto al segundo componente, b_{ik}, está directamente relacionado con la estructura de correlaciones y puede relacionarse con la estructura de volatilidades estadísticamente asequible.

Hasta ahora nada se ha dicho acerca de las derivas $\mu(f(t),t)$, que contienen las condiciones de no arbitraje y que pueden depender, en general, depender de todos los tipos forward. Como hemos mencionado reiteradas veces, para cualquier tipo forward f_i existe un numerario (el payoff natural de f_i) tal que su término de deriva es exactamente cero. In este caso, para equivaler al precio de mercado de Black, tendrá que cumplirse

$$\sigma_{Black}^2(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du$$

Si la deriva es distinta de cero, y contiene las variables estocásticas f, la varianza incondicional del tipo forward dependerá de la deriva misma y, por tanto, del numerario escogido. No obstante, el precio de un activo no depende del numerario. Por tanto, de manera independiente del numerario y de su medida asociada, siempre puede emplearse la volatilidad instantánea que se deriva de la volatilidad implícita de Black para el caso de proceso sin deriva para valorar un caplet, ya que será valorado correctamente. Se trata de una observación aparentemente trivial pero importante ya que enfatiza el hecho de que aquello que determina el precio de un caplet es el componente de volatilidad, que no depende de la medida, y no la varianza incondicional del tipo forward, que sí lo hace. Ambas cantidades están relacionadas sólo en el caso de que el término de deriva sea constante o, al menos, dependiente de tiempo. Como también contiene variables de estado estocásticas f, la varianza y la volatilidad instantánea no resultan, en general, valores intercambiables.

6. Especificación de una versión concreta del LMM.

Una vez descrito el proceso de tipos forward, pueden realizarse algunas elecciones que caractericen una versión específica de LMM. Básicamente, y siguiendo a Rebonato (2002), deben realizarse tres tipos de especificación:

1. La elección de la forma particular de la función de volatilidad instantánea, σ_i, tal que

$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du \tag{6}$$

2. Elección del número de factores m

3. Asignación de la responsabilidad de los distintos tipos forward a los diferentes shocks brownianos, las distintas posibilidades para los coeficientes b_{ik}, de forma que

$$\sum_{k=1}^{m} b^2{}_{ik} = 1$$

El precio de un mismo caplet puede replicarse por medio del LMM a través de infinitas combinaciones de las tres elecciones anteriores. Con muchas de las posibles definiciones los precios de los caplets se replicarán exactamente, pero las dinámicas subyacentes para los tipos forward variarán de manera sustancial. Si se pasa de considerar caplets para la calibración del modelo a calibrar otros instrumentos más complejos, más información puede obtenerse acerca de la forma de las funciones de volatilidad instantánea, la matriz de correlaciones de mercado y el número de factores necesario para capturar de una manera adecuada las clases de formas -y de cambio en las mismas- de la curva de tipos. Sin embargo, ningún producto complejo proporciona información sobre uno de estos componentes a la vez.

Si se escoge la alternativa de representación integrada por la ecuación (2), con m=n, la integración de la correspondiente ecuación diferencial estocástica proporciona

$$f_i(t) = f_i(0)\exp[\int_0^t \mu_i(\{f(u)\},u) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u)du + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(u)dw_i(u)] \tag{7}$$

Volviendo a la definición de la matriz Σ, si denotamos por λ_i sus autovalores asociados y como $a_i, 1 \le i \le m$, con $a_i = \{a_{ki}, 1 \le k \le n\}$ a sus autovectores ortonormales, la ecuación anterior puede rescribirse como

$$f_i(t) = f_i(0)\exp[\int_0^t \mu_i(\{f(u)\},u) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u)du + \int_0^t \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda_k}\, a_{ik}(u)dz_k(u)]$$

Además, si se definen las cantidades $b_{ik}, 1 \le i \le n, 1 \le k \le m$, de forma que

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ik}^2 = 1$$

Entonces el precio de los caplets puede recuperarse siempre para cualquier número de factores simplemente estableciendo

$$f_i(t) = f_i(0)\exp[\int_0^t \mu_i(\{f(u)\},u) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u)du + \int_0^t \sigma_i(u)\sum_{k=1}^{m} b_{ik}(u)dz_k(u)]$$

En las tres últimas ecuaciones puede apreciarse que, para que los caplets sean valorados correctamente, debe cumplirse que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{ik}^2 = \sigma_i^2 \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^2 \qquad (8)$$

La expresión anterior ilustra cómo para determinar de manera unívoca las ponderaciones b_{ik}, no basta con obtener precios de caplets correctos y con imponer que los incrementos brownianos deban ser ortogonales entre ellos. El componente principal es una de una infinidad de posibles soluciones. Queda claro en la definición de los coeficientes $\{b_{ik}\}$ que si sólo se exige que los incrementos $\{dz_t\}$ sean ortogonales entre ellos, ninguno de los m vectores de elementos $b_{jk}, j = 1,2,...,m$, serán, en general, de norma 1 $(\sum_{k=1}^{m} b^2{}_{ik} \neq 1)$. Tampoco serán ortogonales entre ellos $(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}b_{ik} \neq 1)$.

7. Valoración de productos complejos por el LMM

Es evidente que las últimas expresiones presentadas son innecesariamente complejas si lo que se pretende es valorar caplets. No obstante, resulta imprescindible a la hora de tratar derivados más complejos.

Para ilustrar cómo los anteriores formalismos pueden usarse en la valoración, emplearemos el siguiente ejemplo extraído de Rebonato (2002): Consideremos un instrumento cuyo payoff depende de las realizaciones de los tipos forward en los momentos $T_1, T_2, ..., T_k$ de k eventos determinantes del precio. Llamemos al último evento T, y $F_{T_1}, F_{T_2}, ..., F_T$ la filtración natural generada por las reanudaciones de la serie discreta de tipos forward en los momentos de los acontecimientos influyentes en el precio. Es decir, la serie de información descrita por la filtración F_t se actualiza simplemente por el registro de las realizaciones de los tipos forward en sus fechas de vencimiento. Intuitivamente, en lo que al payoff se refiere, nada ocurre entre hoy, T_0, y el siguiente momento relevante para la formación del precio, T_1 o, más en general entre cualesquiera momentos relevantes en para el precio T_i y T_{i+1}. Si los tipos forward fuesen condicionalmente lognormales, y dadas las expresiones conocidas para expresar sus esperanzas y covarianzas, sería posible desarrollar la curva de tipos entera a partir de T_1, empleando, por ejemplo la ecuación (1), y adjuntando una probabilidad a cada realización conjunta de los tipos forward.

En el caso lognormal, y para el caso no trivial más simple, k=2, si la deriva fuese al menos dependiente del tiempo, sólo habría que desarrollar f_1 y f_2 de acuerdo con

$$f_1(T_1) = f_1(0)\exp(m_1\Delta t - \frac{1}{2}v_{1,1} + \sqrt{v_{1,1}}Z_1)$$
$$f_2(T_1) = f_2(0)\exp(m_2\Delta t - \frac{1}{2}v_{2,1} + \sqrt{v_{2,1}}Z_2)$$

Donde

$$m_1 = \int_0^{T_1} \mu_1(u)du$$
$$m_1 = \int_0^{T_1} \mu_2(u)du$$
$$v_{1,1} = \int_0^{T_1} \sigma_1^2(u)du$$
$$v_{1,2} = \int_0^{T_1} \sigma_2^2(u)du$$
$$Z_2 = Z_1\rho + \sqrt{(1-\rho^2)W}$$
$$\rho = \frac{\int_0^{T_1} \sigma_1(u)\sigma_2(u)\rho_{1,2}(u)du}{\sqrt{v_{1,1}v_{1,2}}}$$

Con μ_1 y μ_2 las derivas de los tipos forward 1 y 2, Z_1 y W dos variables independientes provinentes de N$(0, T_1)$. Para cualquier par $\{f_1(T_1), f_2(T_2)\}$ se puede asociar un resultado para una condición (se podría, por ejemplo, calcular un tipo swap a dos periodos y comprobar si está por encima o por debajo de una barrera). En otras palabras, dada la naturaleza de los payoffs, todo lo necesario es la evolución de los tipos forward desde un evento influyente en el precio hasta el siguiente, sin hacer uso de la realización de los procesos en algún momento intermedio.

Las densidades conjuntas pueden muestrearse empleando diversas técnicas numéricas, dependiendo del tipo de producto. En el caso de la simulación Monte Carlo, por ejemplo, esto puede significar que los pasos en la evolución de los tipos deben hacerse coincidir con los intervalos entre los acontecimientos influyentes en el precio o, tal vez pueda resultar suficiente con un “salto muy largo” –quizá de 15 o 20 años-, para la valoración del producto.

Es importante remarcar que, estrictamente, estas conclusiones sólo son válidas si los términos de deriva son constantes o, como mucho, funciones deterministas del tiempo.

Más adelante se explicará que las soluciones lognormales pueden emplearse incluso si este no es el caso.

Este razonamiento puede generalizarse para el caso de una curva de tipos entera, con n tipos forward, observada en el momento de k-ésimo acontecimiento relevante para el precio. Para determinar su distribución conjunta, lo único que importa son las derivas y las covarianzas marginales, $C(i,j,k+1)$, que podemos definir como

$$C(i,j,k+1) \equiv \int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{i,j}(u)du \text{ si } 0 \le k \le n-1 \text{ y } k \le i,j \le n$$

$$C(i,j,k+1) \equiv 0 \text{ si } \quad \text{i<k y/o j<k}$$

Si la curva de tipos inicial (en T_0) está descrita por n tipos forward, habrá, en general, n^2 elementos distintos de cero en la serie C(i,j,1), $(n-1)^2$ elementos positivos en C(i,j,2), etc. Puede apreciarse en las ecuaciones (5), (6) y (8), que

$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du = \sum_{r=1}^{i} C(i,i,r) \tag{9}$$

Si definimos una matriz TOTC con elementos dados por

$$TOTC(i,j) = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} C(i,j,k)$$

Se trata de una matriz que se construye por medio de la adición de matrices reales y simétricas. Es, en sí misma, una matriz simétrica n*n que, por tanto, puede ortogonalizarse. Es importante destacar que, como no hay dos tipos forward perfectamente correlados $(\rho_{ij} \neq 1.j,i : i \neq j)$, el procedimiento, en general producirá n autovalores y autovectores distintos, λ_i y a_i, $1 \le i \le n$, incluso si se han empleado en la construcción de la matriz TOTC menos factores que tipos forward. Por las propiedades de la ortogonalización de matrices reales simétricas, el sentido de la matriz de covarianzas original TOTC y de la nueva matriz ortogonalizada es el mismo. Esto último se relaciona, por medio de la ecuación (9), con el mercado de caplets por medio de la siguiente relación

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \sum_{i=0}^{n} \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{i} C(i,i,r)$$

Puede apreciarse que las matrices de varianzas marginales y totales, C y TOTC, juegan un papel central en la evolución de los tipos forward. Resulta por tanto natural tratar de establecer una conexión entre estas matrices y los tipos de productos exóticos que el LMM puede valorar. Dichos productos tienen en común tener payoffs medibles con respecto a la filtración generada por los tipos forward en una serie discreta de fechas (los acontecimientos influyentes en el precio).

Debe notarse además que, como se asume el conocimiento de las ecuaciones diferenciales estocásticas que explican la evolución de los tipos forward, ecuaciones (2) y (7), implícitamente se asume la posibilidad de construir las distribuciones individuales (marginales) y conjuntas de densidad de todos los tipos forward en los momentos de los acontecimientos influyentes en el precio. Además, si dichas derivas dependiesen exclusivamente del tiempo, y no de los tipos forward en sí mismos, sería posible muestrear directamente de estas densidades conjuntas, ya que los logaritmos de los tipos forward se distribuirían lognormalmente. Dicho muestreo, dependiendo de la naturaleza y dimensión del problema, puede hacerse por medio de una simulación Monte Carlo o por medio de una integración analítica.

La idea esencial a la hora de valorar productos complejos con el LMM es que deben tener payoffs medibles con respecto a la filtración natural generada por los tipos forward discretos en una serie de fechas, los acontecimientos relevantes en la formación del precio. Por otra parte, como se asume el conocimiento de las ecuaciones diferenciales estocásticas que gobiernan a los tipos forward mismos -ecuaciones (2) y (7)-, implícitamente se asume la capacidad de construir –numéricamente en última instancia- las densidades de probabilidad individuales (marginales) y conjuntas de todos los tipos forward en los momentos relevantes para la formación del precio. Es más, suponiendo que las derivas de los tipos forward dependiesen exclusivamente del tiempo –y no de los tipos forward en sí mismos-, inmediatamente se sabría como muestrear las densidades conjuntas, ya que los logaritmos de los tipos forward se distribuirían con una ley conjuntamente normal. La naturaleza y dimensionalidad del problema concreto es la que debe indicar si es preferible realizar una simulación Monte Carlo o llevar a cabo una integración analítica. En cualquier caso, todas las distribuciones conjuntas estarían perfectamente caracterizadas por las $O(N)$ esperanzas y $O(N^2)$ covarianzas en el momento de cada acontecimiento relevante para el precio.

8. Una clasificación de los productos valorables por el LMM.

Los productos susceptibles de ser valorados por medio del LMM pueden clasificarse en cuatro grupos, dependiendo de las características de sus payoffs (Rebonato 2002).

1. -Derivados dependientes de una serie de tipos forward (o swap) en las fechas de vencimiento T_i.

El payoff de estos productos, que tiene lugar en T_n, depende de la realización de una serie de tipos forward o swap en los momentos T_i $(1 \le i \le n)$.

Dentro de esta clasificación resulta conveniente distinguir entre aquellos productos cuyo payoff depende de la realización conjunta de tipos forward que en el momento del evento determinante del precio han vencido y aquellos que dependen de tipos que pueden no haber vencido todavía en ese momento. Los primeros pueden abordarse con técnicas “de salto largo”. Los segundos con técnicas “de salto muy largo”.

Todos los instrumentos que se incluyen en este apartado son de tipo obligación, sus payoffs dependen de las realizaciones de cantidades de mercado objetivas y observables, no del valor futuro de una expectativa descontada.

Un ejemplo es un swap de dos períodos con vencimiento K que puede cobrar vida en una sola fecha T, si el primer tipo forward en el swap (el tipo swap con vencimiento en T) vence por encima de una barrera H. Tras escoger la anualidad del swap A como numerario, la solución cerrada para el valor actual, PV, del problema puede expresarse como

$$PV = [SR(0,T)N(h_1) - KN(h_2)]A$$

Donde

$$h_1 = \frac{\ln[\tilde{f}(0,T)/H] - \frac{1}{2}v_f + v_{f,SR}}{\sqrt{v_f}}$$

$$h_2 = \frac{\ln[\tilde{f}(0,T)/H] - \frac{1}{2}v_f}{\sqrt{v_f}}$$

$$v_f = \int_0^T \sigma_f(u)^2 du$$

$$v_{f,SR} = \int_0^T \sigma_f(u)\sigma_{SR}(u)\rho_{f,SR(u)} du$$

$$A = \frac{1}{\prod_{k=0}^{3}[1 + \tilde{f}_k(0, T + k\tau, T + (k+1)\tau)\tau]}$$

Como es usual, N( ) denota la función normal acumulativa, SR(0,T) es el valor en el momento 0 del tipo swap para el swap que cobra vida si el tipo forward f vence por encima de H en el momento T, $\tilde{f}_k(0,T,T+\tau)$ es el valor en el momento cero del tipo forward con vencimiento en T y que paga en el momento $T+\tau$, después del ajuste de la deriva inducido por el numerario, τ es el tenor del swap, σ_f y σ_{SR} son, respectivamente, las volatilidades del tipo forward y del tipo swap, A es la anualidad fija del swap y $\rho_{f,SR}$ es la correlación instantánea entre el tipo swap y el tipo forward.

2. -Productos con pagos que dependen exclusivamente de un evento determinante en el precio y están determinados por una condición que puede estar determinada por el conocimiento de los valores de una serie de tipos forward que se extienden hasta un momento futuro $T_{\exp}$.

El más sencillo ejemplo de este tipo de casos es la evaluación de un swaption europeo en una implementación del LMM basada en tipos forward. En este caso, el valor de su payoff en el momento $T_{\exp}$ viene dado por

$$Payoff = (SR - K)^{+} A(T_{\exp}, T_{\exp+n})$$

$$SR = \frac{B(T_{\exp}, T_{\exp}) - B(T_{\exp}, T_{\exp+n})}{\sum_{k=1}^{n} B(T_{\exp}, T_{\exp+n})\tau}$$

$$B(T_{\exp}, T_{\exp+j}) = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{[1 + f(T_{\exp}, T_{\exp+k}, T_{\exp+k+1})\tau]}$$

$$A(T_{\exp}, T_{\exp+n}) = \sum_{k=1}^{n} B(T_{\exp}, T_{\exp+k})\tau$$

Donde SR denota el tipo swap con vencimiento en $T_{\exp}$, $A(T_{\exp}, T_{\exp+n})$ es la anualidad asociada, $B(T_{\exp}, T_{\exp+j})$ es el precio en el momento $T_{\exp}$ de un bono cupón cero que expira j períodos más tarde, y $f(T_{\exp}, T_{\exp+k}, T_{\exp+k+1})$ es el valor en el momento $T_{\exp}$ del tipo forward que vence k periodos después el momento $T_{\exp}$ y paga un período después.

En las expresiones puede apreciarse que el payoff es simplemente una función de las realizaciones de una serie de tipo forward en el momento $T_{\exp}$ del acontecimiento influyente en el precio, y ello condicionado a una particular realización de la curva de tipos obtenida. El payoff es independiente de la volatilidad futura. Es determinante para la clasificación de este ejemplo en este apartado el hecho de que, una vez se llega a $T_{\exp}$, no se calcula ninguna esperanza.

Otra posibilidad dentro de este grupo, aunque de tipo compuesto, es un caption. Se trata de un instrumento que proporciona el derecho a adquirir en el momento $T_{\exp}$ una emisión n-periodal de caps con un strike K a un precio de X. Así pues, el momento $T_{\exp}$ se aprecia

$$Payoff = [CAP(T_{\exp}) - X]^{+}$$

$$CAP(T_{\exp}) = \sum_{K=1}^{n} Caplet_k(T_{\exp})$$

$$Caplet_k(T_{\exp}) = [\tilde{f}_k(T_{\exp})N(h_{1,k}) - KN(h_{2,k})]B(T_{\exp}, T_{k+1})$$

$$h_{1,h} = \frac{\ln(\tilde{f}_k / K) + \frac{1}{2} v_k}{\sqrt{v_k}}$$

$$h_{2,h} = \frac{\ln(\tilde{f}_k / K) - \frac{1}{2} v_k}{\sqrt{v_k}}$$

$$v_k = \int_{T_{\exp}}^{T_k} \sigma_k(u)^2 \, du \qquad\qquad T_k \geq T_{\exp}$$

Donde $\sigma_k(u)$ es la volatilidad instantánea del k-ésimo tipo forward en el momento u con $T_{\exp} \leq u \leq T_k$, $\tilde{f}_k(T_{\exp})$ es la realización del k-ésimo tipo forward en la medida asociada al numerario escogido y $B(T_{\exp}, T_{k+1})$ es el valor en el momento $T_{\exp}$ de un bono al descuento con vencimiento en el momento de pago del k-ésimo tipo forward. Para valorar este producto, la curva de tipos debe estar desarrollada hasta el momento del acontecimiento influyente en el precio, el vencimiento del caption. Esto podría hacerse en un sólo paso si los tipos forward fuesen conjuntamente lognormales. No es el caso.

Una vez la curva se ha desarrollado hasta el momento $T_{\exp}$, el agente decidirá, dada la particular realización de los tipos forward, si le resulta conveniente ejercer la opción, es decir, comparará X con la suma de los valores esperados condicionales en el momento $T_{\exp}$ de los caplets. Estos a su vez, pueden ser evaluados, dada la curva de tipos y las varianzas residuales v_k, aplicando la fórmula de Black a cada tipo forward $f_k(T_{\exp})$ para obtener el valor del cap.

Existe una diferencia importante en este segundo caso con respecto al primero del presente apartado: la evaluación del precio en el momento $T_{\exp}$ de varios caplets requiere conocer, no sólo los tipos forward, sino también v_k. No obstante, dado que el LMM supone volatilidades deterministas, dichas cantidades futuras no sólo son independientes de las realizaciones de la curva de tipos, sino que también son conocidas con exactitud, y por tanto pueden computarse en el momento T_0. Así pues el payoff es por tanto medible de nuevo con respecto a la filtración generada por las realizaciones de los tipos forward en el momento $T_{\exp}$.

Por supuesto, cada diferente especificación determinista de las funciones de volatilidad instantánea dará lugar a diferentes evoluciones futuras de la estructura temporal de volatilidades del modelo. La modelización de la estructura temporal de volatilidades es, en muchos casos, el tema clave cuando se trabaja con el LMM. A ello nos referiremos posteriormente.

3. -Productos dependientes de varios acontecimientos futuros influyentes en el precio.

El ejemplo principal dentro de este grupo son los swaptions Bermuda. En ellos está previamente especificada una serie de acontecimientos influyentes en el precio, que coinciden con los vencimientos de una serie de tipos forward o swap. En estas fechas T_i, debe examinarse una condición de equilibrio. De hecho, como en el caso del caption, la condición de ejercicio dependerá no sólo de la realización en T_i de una curva de tipos forward discretos, sino también de las expectativas apropiadas. Si hay más de una oportunidad de ejercicio, estas expectativas estarán anidadas, y las opciones resultantes serán de naturaleza compuesta.

El hecho de que en este caso el operador de esperanzas tiene como argumento una realización de la curva de tipos y una esperanza descontada tiene un significativo impacto computacional. Andersen (1999), Jaeckel (2000) y Broadie (2002) han tratado de abordar el problema.

4. -Productos que agrupan características propias de loa apartados 1 y 3.

Se trata de derivados muy complejos que sólo pueden resolverse por medio de inducción forward (Monte Carlo), asociada a una estimación de la frontera de ejercicio anticipado. Una vez esta cantidad ha sido aproximada, pueden aplicarse tanto técnicas de "salto largo" o de "salto muy largo". Un ejemplo "típico" de este tipo de activos es el "callable rachet capped floater".

9. Estudio de las derivas de los tipos forward.

Todos los desarrollos presentados hasta el momento se apoyan en el resultado del teorema 2, es decir, suponen una deriva determinista, constante o, a lo sumo, dependiente del tiempo. De no cumplirse esta condición, la serie de tipos forward necesaria para la valoración del payoff de cualquier derivado no sería conjuntamente lognormal, lo cual, aparentemente, invalida la posibilidad de representarlos de manera exacta por medio de una serie de vectores de esperanzas o matrices de covarianzas.

En realidad, las derivas contienen no sólo una dependencia temporal, sino que también dependen de la serie de tipos forward mismos, que son de naturaleza estocástica. Como la distribución resultante de los logaritmos de los tipos forward no es conjuntamente gaussiana, sino desconocida, es necesario buscar procedimientos que permitan abordar el problema.

El primer paso lógico es la derivación explícita de los términos de deriva. Para ello seguiremos el razonamiento de Rebonato(2002). Si llamamos $dz(t)$ al incremento de un movimiento browniano estándar bajo Q, y $dz_i(t)$ es el incremento de un movimiento browniano bajo Q_i, medida bajo la cual f_i es una martingala. Por medio del teorema de Girsanov, puede escribirse

$$df_i(t) = f_i(t)\sigma_i(t)dz_i(t)$$

$$z_i(t) = z(t) - \int_0^t \psi(\{\sigma(u)\})du$$

Así pues, para alguna función $\psi(\ )$ de las volatilidades deterministas de los tipos forward $\sigma(t)$, pueden reformularse relaciones ya vistas de la siguiente forma

$$dz_i(t) = dz(t) - \psi_i(\{\sigma(u)\})dt$$

$$\frac{df_i}{f_i} = \sigma_i(t)[dz(t) - \psi_i(\{\sigma(u)\})dt]$$

Esta última expresión puede integrarse, quedando una relación como la que sigue

$$f_i(t) = f_i(0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t [\sigma_i(u)^2 - \psi_i(\{\sigma(u)\})]du + \sigma_i(u)dz(u)\right\}$$

La anterior ecuación ofrece una interpretación del término de Girsanov $\psi_i(\{\sigma(u)\})$ dt como un ajuste en la deriva que transforma el tipo forward $f_i(t)$ en una Q-martingala. Para aquellas medidas Q tales que dicho ajuste en la deriva es distinto de cero, el término $\psi_i(\{\sigma(u)\})$ puede obtenerse como una función de las volatilidades ($\gamma()$) de procesos forward correctamente especificados. A su vez, éstos dependen de los tipos forward y de sus volatilidades instantáneas.

La volatilidades instantáneas en el LMM se asumen deterministas. Por ello, parece razonable pensar que resultaría un avance de importancia poder expresar el término de corrección de deriva de Girsanov $\psi_i(\{\sigma(u)\})$ como combinación de volatilidades y correlaciones de los tipos forward, que son directamente observables en el mercado, y no como volatilidades instantáneas, que no los son.

En general, dado un tipo forward o swap, puede definirse su payoff natural como una combinación lineal de activos negociados tal que el producto del tipo forward o swap y el payoff puede considerarse como un activo negociado. Como, en general, los tipos de interés se definen siempre como el ratio de dos carteras de activos, resulta bastante sencillo probar que un activo o cartera de activos con las propiedades del payoff natural existirá siempre.

En el caso de tipos forward y swap, las carteras que definen los tipos son la pata fija y la pata variable de un swap (de un swap uniperiodal, un FRA en el caso de un tipo forward):

$$f_i(t) = \frac{B_i(t) - B_{i+1}(t)}{B_{i+1}(t)\tau_i} \tag{10}$$

$$SR_i(t) = \frac{B_i(t) - B_{n_i+1}(t)}{\sum_{k=1}^{n_i} B_{i+1}(t)\tau_i} \tag{11}$$

Siendo $B_i(t)$ el valor en el momento t del un bono con vencimiento en T_i, n_i es el número de períodos en el i-ésimo swap, $B_i(t)-B_{n_i+1}(t)$ es el valor en el momento t del tipo variable de i-ésimo swap, y $B_{i+1}(t)\tau_i$ y $\sum_{k=1}^{n_i} B_{i+1}(t)\tau_i$ el valor en el momento t de las patas fijas del i-ésimo FRA y del i-ésimo tipo swap, respectivamente.

Partiendo de la idea de que para que exista ausencia de arbitraje es una condición necesaria y suficiente que exista una medida Q bajo la cual los precios relativos de todos los activos y carteras de activos sean Q-martingalas, y dado que se pretende encontrar derivas de no arbitraje para los tipos forward, el camino adecuado parece ser convertir los tipos forward en activos negociables e imponer la condición de martingala. En as ecuaciones (10) y (11) puede apreciarse cómo si se multiplica un tipo forward por el denominador de su definición, se obtiene otro activo o cartera, el numerador

$$f_i(t)B_{i+1}(t)\tau_i = B_i(t) - B_{i+1}(t)$$

Por tanto, el denominador $B_{i+1}(t)\tau_i$ es, por definición, el payoff natural. En ausencia de arbitraje, el payoff natural es el único numerario bajo cuya medida asociada Q, el tipo en cuestión es una Q-martingala: una medida así siempre existe como consecuencia de la ausencia de arbitraje asumida; es única porque el payoff natural es único. Por la unicidad del payoff natural, puede concluirse que, dada una medida Q bajo la cual un tipo forward o swap es una martingala, ningún otro tipo forward o swap puede ser simultáneamente una Q-martingala.

Todas las consideraciones anteriores proporcionan una idea de cómo el término de Girsanov $\psi_i(\{\sigma(u)\})$ que transforma un tipo forward arbitrario en una martingala puede obtenerse. El razonamiento para lograrlo consta de los siguientes pasos:

- El punto de partida es una serie de n tipos forward, con n+1 bonos al descuento asociados, que son los activos disponibles en el universo y un numerario arbitrario $N(t)$, del universo de activos disponibles.
- Se escoge el tipo forward $f_i(t)$ de la serie de n tipos forward y se construye el producto del tipo forward escogido y su payoff natural, $N_i(t)$, es decir, $N_i(t)f_i(t)$.
- Se construye el ratio $N_i(t)f_i(t)/N(t)$. Como tanto el numerador como el denominador son activos o carteras de activos, dicho ratio es un precio relativo Z(t). Si Z(t) es un precio relativo, la ausencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de una medida Q_N, dependiente de la elección del numerario N(t), bajo el cual Z es una martingala.
- Si denotamos $X_N(t) \equiv N_i(t)/N(t)$, usando notación diferencial de Ito y algunos cálculos, según Nielsen(1999), podemos obtener la siguiente expresión

  $$d[f_i(t)X_N(t)] = d[f_i(t)]X_N(t) + f_i(t)d[X_N(t)] + \langle f_i, X_N \rangle$$

  Donde $\langle f_i, X_N \rangle$ es la covariación entre f_i y X_N, que es finita y distinta de cero.

- Como X es una Q-martingala estrictamente positiva, puede expresarse como una martingala exponencial con términos de volatilidad porcentual $\gamma(t,T_N,T)$, es decir

$$dX(t,T_N,T)/X(t,T_N,T)=\gamma(t,T_N,T)dzQ_N(t)$$

- Como tanto f_i como X_N tienen variación cuadrática finita, la covarianza cuadrática entre f_i y X_N, es decir, el producto $(df_i/f_i)*(dX_N/X_N)$, está siempre bien definido, es finito, distinto de cero e igual a

$$\left\langle \frac{df_i}{f_i}\frac{dX_N}{X_N}\right\rangle = f_i(t)\sigma_i(t)X_N(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}dt$$

- Dadas las observaciones anteriores y si definimos

  $a \equiv f_i(t)X_N(t)$
  μ_a como la deriva de a
  μ_{X_N} como la deriva de X_N
  μ_{f_i} como la deriva de f_i

  Puede emplearse el lema de Ito para definir los procesos siguientes:

$$\frac{df_i}{f_i}=\mu_{f_i}dt+\sigma_i(t)dz_i$$

$$\frac{da}{a}=\mu_a dt+\sigma_a(t)dz_a \quad \text{con} \quad \mu_a=\mu_{f_i}+\mu_{X_N}+\sigma_i(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}$$

$$\frac{dX_N(t)}{X_N(t)}=\mu_{X_N}dt+\gamma(t,T_N,T)dz_{X_N}$$

- Como a y X_N son martingalas, entonces $\mu_a=\mu_{X_N}=0$, procede realizar el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
&\mu_a a=\mu_a f_i(t)X(t)=0\\
&=f_i(t)X_N(t)\mu_{X_N}+f_i(t)X_N(t)\mu_{f_i}+f_i(t)X_N(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}\\
&=0+\mu_{f_i}+\sigma_i(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}=0\\
&\mu_{f_i}=-\sigma_i(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}
\end{aligned}$$

Como este último resultado sólo requiere imponer ausencia de oportunidades de arbitraje, proporciona una respuesta general y formal al problema de encontrar una deriva que sitúe el i-ésimo tipo forward como libre de arbitraje. Así, dado un numerario N, todos los tipos forward evolucionan de acuerdo con

$$\frac{df_i(t)}{f_i(t)} = -\sigma_i(t)\gamma(t,T_N,T)\rho_{f_i,X_N}dt + \sigma_i(t)dz_i(t)$$

donde $dz_i(t)$ es el incremento de un proceso browniano estándar bajo la medida Q_N.

El anterior razonamiento puede parecer tortuoso e incómodo. Su gran ventaja es que puede ser extendido con facilidad a situaciones más complejas, como tipos swap y no forward o numerarios en moneda distinta.

La expresión anterior proporciona una solución al problema de la asignación de derivas a los tipos forward tal que el no existan posibilidades de arbitraje. En el mundo del LIBOR, no obstante, no existen activos negociados que proporcionen información acerca de la volatilidad del precio de un bono. Por tanto, no resulta obvia la forma de expresar el término de deriva en términos de información accesible de mercado, es decir, como estimar de información disponible en el mercado la volatilidad del precio relativo de los bonos y su correlación con el tipo forward mismo. Para ello definiremos el concepto de "corchete Vaillant", introducido por Rebonato(1998): dados dos movimientos brownianos geométricos x e y, se define el corchete Vailliant como

$$[x,y]_t \equiv \sigma_x(t)\sigma_y(t)\rho_{x,y}(t)$$

que presenta las siguientes propiedades

$$[x,y]=[y,x]$$

$$[x,yz]=[x,y]+[x,z]$$

$$[x,y]=-[x,1/y]$$

Estas propiedades pueden emplearse para expresar la volatilidad de X_N y su correlación con f_i en términos de volatilidades instantáneas y correlaciones entre los distintos tipos forward. La estrategia consiste en reconocer que, en el caso de tipos forward, el término X(t) será, en general, un proceso de precio forward, es decir, una cantidad de la forma $B_i(t)/B_j(t)$, donde los casos no triviales son aquellos en los que $i > j$ o $i < j$.

Si $i < j$, es decir, si el numerario escogido, el bono B_j, madura después del payoff del i-ésimo tipo forward, el proceso forward puede rescribirse como

$$\frac{B_i(t)}{B_j(t)} = \prod_{k=i}^{j-1} y_k$$
$$y_k \equiv (1+f_k\tau_k)$$

Si $i > j$, entonces el numerario, el bono B_j, madura antes del vencimiento del i-ésimo tipo forward. De forma equivalente, se escribe

$$\frac{B_i(t)}{B_j(t)} = \prod_{k=j}^{i-1} y_k^{-1}$$

Las propiedades del corchete Vailliant permiten, una vez definido $s \equiv i+1$, escribir, para el caso en el que el numerario es el bono al descuento con vencimiento en T_j -$N(t) = B_j(t)$-:

$$[f_i, X_N] = \left[f_i, \frac{N_i(t)}{N(t)} \right] = \left[f_i, \frac{B_s(t)}{B_j(t)} \right] = \left[f_i, \prod_{k=i}^{j-1} y_k \right] = \sum_{k=s}^{j-1} [f_i, y_k]$$

$$[f_i, X_N] = \left[f_i, \frac{N_i(t)}{N(t)} \right] = \left[f_i, \frac{B_s(t)}{B_j(t)} \right] = \left[f_i, \prod_{k=i}^{j-1} y_k^{-1} \right] = -\sum_{k=j}^{s-1} [f_i, y_k]$$

Como puede apreciarse en Nielsen(1999), llegados a este punto y si f_k y $y_k = (1 + f_k \tau_k)$ son semimartingalas estrictamente positivas y es siempre posible la representación de la forma

$$\frac{dy_k}{y_k} = \mu_{y_k} dt + \sigma_{y_k}(t) dz_k(t)$$

Entonces, una aplicación más allá del lema de Ito y algunas manipulaciones algebraicas permiten obtener el siguiente resultado: La deriva aplicable al i-ésimo tipo forward para que no existan oportunidades de arbitraje es:

$$\mu_{f_i} = \sigma_i(t) \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\sigma_k(t) \rho_{ik}(t) f_k(t) \tau_k}{1 + f_k(t) \tau_k} \qquad \text{si } i > j$$

$$\mu_{f_i} = -\sigma_i(t) \sum_{k=i+1}^{j} \frac{\sigma_k(t) \rho_{ik}(t) f_k(t) \tau_k}{1 + f_k(t) \tau_k} \qquad \text{si } i < j$$

$$\mu_{f_i} = 0 \qquad \text{si i=j}$$

Llegados a este punto, hemos logrado expresar las derivas de los tipos forward como combinación de magnitudes observables en el mercado. No obstante, esta forma de representación no hace sino confirmarnos aquello que ya sabíamos: las derivas no son una mera función del tiempo, sino que su expresión contiene a los tipos forward, estocásticos. Se confirma, por tanto, que no podemos suponer ninguna clase de distribución conjunta conocida para los tipos forward, que presentan una forma como la que sigue

$$f_i(t) = f_i(0)\exp\int_0^t \left[\sigma_i(t) \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\sigma_k(t)\rho_{ik}(t) f_k(t)\tau_k}{1+f_k(t)\tau_k} - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u) \right] du + \sigma_i(u) dz_i(u)$$

En realidad, ni siquiera es posible integrar la expresión de la deriva, ya que ni es exclusivamente función del tiempo, ni nos encontramos ante un proceso gaussiano. Dado que los términos estocásticos aparecen tanto en el numerador como en el denominador, resulta tentador realizar la siguiente aproximación

$$\int_0^t \sum_{k=j+1}^{i} \frac{\sigma_k(t)\rho_{ik}(t) f_k(t)\tau_k}{1+f_k(t)\tau_k} du = \sum_{k=j+1}^{i} \frac{f_k(0)\tau_k}{1+f_k(0)\tau_k} \int_0^t \sigma_i(u)\sigma_k(u)\rho_{ik}(u) du$$

Con ello se asume que la parte estocástica en su conjunto es constante. Para algunos autores, como Hull y White(2000). Rebonato(2002) argumenta que la supuesta inocuidad de tal suposición tan sólo es real si el tamaño de los pasos empleado para la simulación Monte Carlo es igual a la longitud del tenor, es decir, inferior al año.

10. Un punto clave: las funciones de volatilidad y correlación instantáneas.

Con base en los anteriores apartados, estamos ahora en condiciones de afirmar que a la hora de valorar derivados sobre tipos de interés por medio del LMM, el conjunto de tipos forward puede modelizarse con bastante precisión como una serie discreta de procesos conjuntamente gaussianos.

El único elemento de dichos procesos que queda por modelizar son las varianzas y covarianzas marginales entre los distintos tipos forward. ¿Por qué hay que modelizarlas? En principio, podría bastar con tratar de estimarlas por métodos no paramétricos y emplearlas como inputs iniciales del proceso de valoración. No obstante, ésta es una aproximación que cuenta con dos inconvenientes esenciales. El primero es el volumen de datos que deben estimarse y, por tanto, su intensidad computacional. Más aun, a la hora de valorar derivados complejos, este procedimiento supondría asumir que los precios de los caplets y de los swaptions europeas son perfectamente consistentes los unos con los otros. Este último punto no está garantizado en absoluto, por lo que esta manera de proceder lleva implícita la posibilidad de valoraciones inconsistentes.

Por tanto, resulta aconsejable disponer de una estructura razonable desde un punto de vista financiero que reduzca la gran cantidad de grados de libertad que la realidad del modelo plantea. Dicha estructura se sustenta sobre dos realidades. En primer lugar, los elementos de covarianza pueden expresarse como integrales de volatilidades y covarianzas instantáneas. Además, se emplean criterios financieros a la hora de establecer la forma que dichas formas funcionales deben presentar.

Parece claro, por tanto, que aquello que resulta más complicado a la hora de modelizar las volatilidades y covarianzas es la especificación de la forma de las funciones de volatilidad y correlación instantánea: si no son suficientemente flexibles, pueden fallar a la hora de producir un buen ajuste a los precios simplemente por faltarles flexibilidad para reproducir la realidad del mundo real. Por otra parte, una gran flexibilidad se consigue con un elevado número de parámetros de dudosa interpretación, que pueden hacer difícil concluir si el procedimiento de estimación ha producido una descripción sensata de la realidad financiera, o simplemente se ha forzado la réplica de los precios por medio de un modelo sobreparametrizado.

Aparentemente una forma funcional sobreparametrizada pero que devuelve correctamente los precios de los derivados simples empleados para la calibración podría parecer un candidato adecuado para la valoración de activos complejos con el LMM. El peligro de este tipo de razonamiento estriba en el hecho de que el esquema de volatilidad determinista no es la realidad misma. En el mundo real, las volatilidades y correlaciones no son deterministas, pueden producirse saltos estocásticos en las mismas, etc. Por tanto, una perfecta réplica de precios de derivados simples no garantiza una adecuada valoración de derivados complejos.

La cosa no acaba aquí. Incluso si el proceso para los tipos forward fuese una difusión, las volatilidades fuesen deterministas y las volatilidades instantáneas perfectamente conocidas por el trader a partir de la información disponible en el mercado, los productos exóticos no dependen sólo de las volatilidades, sino también de los elementos de covarianza derivados. Incluso para una serie de fija de integrales de volatilidades instantáneas al cuadrado, estos elementos de covarianza no dependen sólo de la función de correlación instantánea, sino también de los detalles de la dependencia temporal de las funciones de volatilidad. Si sólo se permite la negociación en bonos y caplets, el mercado no es completo en volatilidades instantáneas. Si se añaden swaptions europeos, se añade información adicional, pero la introducción de la dependencia de sus precios con respecto a las correlaciones instantáneas impide la plena completitud del mercado. Este razonamiento está ampliado en Rebonato(1999c).

Como los mercados no son completos en volatilidades y correlaciones instantáneas, los derivados sencillos disponibles para el trader no permiten copar la dependencia temporal de las volatilidades instantáneas por medio de estrategias de negociación, y la estrategia de réplica sólo funcionará si su idea acerca de la forma funcional de las volatilidades y correlaciones instantáneas es correcta.

Es por ello que el trader tiene que preocuparse por la plausibilidad financiera de los supuestos que tiene que hacer acerca de las cantidades cuyos valores no pueden bloquearse debido a la falta de completitud del mercado en volatilidades y correlaciones instantáneas. En particular, debe preocuparse acerca de la calidad de los supuestos de los inputs fundamentales del modelo (volatilidades y correlaciones) que están en la base de la falta de completitud. Así, es de vital importancia encontrar descripciones adecuadas para las funciones de volatilidad y correlación, además de formas adecuadas para las funciones de volatilidad y correlación instantánea.

A la hora de especificar una forma funcional para dichas funciones instantáneas, en particular, para las volatilidades instantáneas, la primera pregunta que hay que hacerse es cuántos factores son necesarios para valorar productos exóticos de una manera realista. En general, se admite que son necesarios muchos factores para producir una decorrelación significativa entre los tipos. Hay mucho de verdad en ello, pero a veces se pasa por alto que aquello que influencia el precio de un producto exótico no son las funciones de volatilidad o correlación instantánea per se, sino el elemento de covarianza o, equivalentemente, la correlación terminal relacionada,

$$\bar{\rho}_{ij}(T) = \frac{\int_0^t \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{ij}(u)du}{\sqrt{v_i v_j}}$$
$$v_i = \int_0^t \sigma_i^2(u)du \tag{12}$$

La expresión anterior deja claro que, como las volatilidades instantáneas no son constantes, una decorrelación significativa puede estar causada por volatilidades dependientes del tiempo incluso en presencia de correlación instantánea perfecta. Esto puede ocurrir, por ejemplo, si la volatilidad de un tipo forward i, σ_i toma valores grandes cuando la volatilidad del tipo j es pequeña y viceversa.

La ecuación anterior muestra que, de hecho, para valores razonables de la correlación instantánea, $\rho(t)$, el intento de producir decorrelación puede frustrarse con facilidad tanto por la baja decorrelación entre tipos forward contiguos como porque las volatilidades instantáneas no muestran una dependencia temporal significativa. Así pues, añadir factores ciegamente no es necesariamente la forma más efectiva para obtener la deseada decorrelación terminal.

La ecuación (12) muestra que es posible obtener una decorrelación terminal significativa incluso con un modelo de un sólo factor. No obstante, emplear un número reducido de factores no resulta siempre deseable. Le elección del número de factores más adecuada depende de la creencia que el usuario del LMM tenga acerca del comportamiento de las volatilidades instantáneas.

11. Distintas hipótesis acerca de las funciones de volatilidad instantánea.

Son muchas y variadas las posibilidades a la hora de modelizar las funciones de volatilidad instantánea de un tipo forward. En principio, podría ser una función determinista de:

- El tiempo, $\sigma_{inst}(t)$.
- El tiempo restante hasta el vencimiento del tipo forward, $\sigma_{inst}(T)$
- Características específicas del tipo forward, como el mismo tipo forward $f_\tau$en algún momentoτ, además de otros factores, $\sigma_{inst}(T) = g(\tau, T, f_\tau)$.
- De la historia competa de la curva y sus factores determinantes hasta el momento t, descritos por la filtración F_t, $\sigma_{inst}(F_t)$.
- Las realizaciones futuras de los procesos estocásticos como, por ejemplo, los procesos brownianos. Es decir, la volatilidad instantánea puede representarse como una difusión o proceso con salto en sí misma.

Para el ajuste de una difusión, la condición más importante es, en general, la integrabilidad del cuadrado de la función de volatilidad instantánea. El otro requisito esencial es que la volatilidad debe ser un proceso adaptado (su valor en el momento t no debe depender de la realización de ninguna cantidad estocástica en algún momento $\tau > t$). Finalmente, para garantizar la existencia de una única solución de la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, T)dz_t$$

deben imponerse condiciones Lipschitz y de crecimiento a μ y σ. Este tema puede ampliarse en Duffie(1996).

Con anterioridad hemos caracterizado el LMM imponiendo la necesidad de que las funciones de volatilidad instantánea de los tipos forward sean, necesariamente, funciones deterministas del tiempo. Así pues, como esta elección está hecha, tan sólo queda buscar una forma funcional de cuadrado integrable adecuada para reproducir el comportamiento de las volatilidades. Por tanto, de todas las posibilidades anteriormente mencionadas, es necesario que se cumpla que

$$\sigma_{inst} = \sigma_{inst}(t, T) \tag{13}$$

De esta expresión se deduce que los tipos forward pueden responder de manera diferente en un mismo punto y frente al mismo shock browniano como consecuencia de tener vencimientos diferentes (T). De la misma forma, el mismo tipo forward puede responder de manera diferente a shocks brownianos de idéntica magnitud para diferentes valores de su tiempo hasta el vencimiento (T-t). Ambas características resultan deseables, ya que se aproximan a la realidad empírica.

Un aspecto importante en la construcción de un modelo de mercado es, por tanto, la especificación de qué valores deben asumir las volatilidades de tipos forward distintos cuando, a medida que avanza el tiempo, uno tras otro, los distintos tipos forward alcanzan un mismo plazo hasta el vencimiento. Ello suponiendo que los distintos tipos forward presenten una volatilidad similar para plazos hasta el vencimiento iguales. Alternativamente el trader puede creer que el futuro no se parecerá al pasado inmediato por alguna razón. Este tipo de creencia puede orientarse de dos maneras: el trader puede pensar que todos los tipos forward serán más o menos volátiles en el futuro, o puede pensar que los tipos forward con ciertos vencimientos pueden volverse más o menos volátiles que otras posiciones en la estructura temporal de volatilidades.

La representación funcional de la función de volatilidad instantánea puede ser temporalmente homogénea, si depende exclusivamente del tiempo hasta el vencimiento (T-t), o no homogénea, en otro caso. Resulta un tema controvertido, también en este aspecto, determinar cuál es la mejor de las representaciones para la función de volatilidades instantáneas.

Para una estructura temporal de volatilidades dada, si el trader quiere asegurarse de que es homogénea temporalmente, entonces tiene que asegurarse de que

$$\int_0^T \sigma_{inst}(u, T)^2 du = \int_\tau^{T+\tau} \sigma_{inst}(u, T+\tau)^2 du$$

Para todo τ. Puede demostrarse que si esta condición se cumple, entonces la ecuación (13) se reduce a

$$\sigma_{inst}(t,T)=\sigma_{inst}(T-t) \tag{14}$$

La polémica surge porque, en ocasiones, si quiere recuperarse exactamente una estructura temporal de volatilidades dada, no es posible con una función $\sigma_{inst}(T-t)$. Esto puede verse de la siguiente manera. La condición de que los precios actuales del mercado de caplets debe recuperarse con exactitud es lo mismo que pedir que la siguiente relación se cumpla

$$\int_0^T \sigma_{inst}(T-u)^2\,du=\sigma_{Black}^2(T)T$$

para cualquier T. Concretamente, la condición de valoración para el caplet que vence dentro de $T+\tau$ es

$$\int_0^{T+\tau} \sigma_{inst}(u,T)^2\,du=\sigma_{Black}^2(T+\tau)(T+\tau)$$

Por su parte, de la ecuación (14) puede derivarse el siguiente razonamiento

$$\int_0^T \sigma_{inst}(T-u)^2\,du=\sigma_{Black}^2(T)T=\int_\tau^{T+\tau} \sigma_{inst}(u,T+\tau)^2\,du$$

Un ratio de las siguientes expresiones nos muestra lo siguiente

$$\frac{\sigma_{Black}^2(T+\tau)(T+\tau)}{\sigma_{Black}^2(T)T}=1+\frac{\int_0^{\tau}\sigma_{inst}(u,T)^2\,du}{\int_\tau^{T+\tau}\sigma_{inst}(u,T+\tau)^2\,du} \tag{15}$$

El segundo miembro de la anterior ecuación es una cantidad estrictamente mayor que cero para cualquier elección de σ_{inst}. Esto debe cumplirse para cualquier τ arbitrario, y por tanto la cantidad $\sigma_{Black}^2(T)T$, evaluada desde la actual estructura temporal de volatilidades, tiene que ser una función estrictamente creciente con T para poder estar seguro de que, al mismo tiempo, los precios actuales de los caplets se recuperan correctamente y de que la estructura temporal de volatilidades puede evolucionar de manera homogénea con respecto al tiempo. La cantidad exógena $\sigma_{Black}^2(T)$, viene dada por el mercado y no es siempre creciente. Por tanto, no es siempre posible satisfacer la relación (15) para una función de la forma $\sigma_{inst}(T-t)$.

Queda por tanto explicado que, si la función de volatilidad instantánea tiene la forma $\sigma_{inst}(T-t)$, entonces las cantidades $\sigma_{Black}^2(T)T$ deben ser estrictamente crecientes. Como, por otra parte, las volatilidades implícitas las proporciona el mercado, es necesario estudiar cuándo pueden replicarse precios de caplets via funciones de volatilidad instantánea homogéneas temporalmente.

Una vez determinadas qué formas de las funciones de volatilidad son o no compatibles con una evolución temporalmente homogénea de la estructura temporal de volatilidades, es el momento de establecer la correspondencia entre ambas cantidades en el LMM, que se formula con volatilidad determinista.

Como los precios de los productos que se pretende valorar, que tienen payoffs dependientes de un número finito de acontecimientos influyentes en el precio, dependen de los elementos de covarianza marginal, entonces dos funciones de volatilidad σ^1 y σ^2, tales que

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma^1(T_j,u)\sigma^1(T_i,u)\rho_{ij}(T_j,T_i,u)du = \int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma^2(T_j,u)\sigma^2(T_i,u)\rho_{ij}(T_j,T_i,u)du$$

proporcionarán los mismos elementos de covarianza y los mismos precios. Para una función de correlación dada, si estas igualdades se satisfacen para cualquier par de tipos forward (i y j) y para cualquier acontecimiento influyente en el precio (k), las dos funciones σ^1 y σ^2 serán equivalentes. Si la misma relación debe cumplirse para cualquier función de correlación, entonces las dos funciones de volatilidad deben ser, desde un punto de vista práctico, idénticas y se llamarán “indistinguibles”. En particular, dos funciones de volatilidad indistinguibles cumplirán que

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma^1(T_j,u)^2 du = \int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma^2(T_j,u)^2 du$$

para cualquier j y k. Puede probarse que cualquier elemento de una serie de volatilidades instantáneas indistinguibles da lugar a estructuras de volatilidad presentes y futuras idénticas.

12. Apreciaciones cualitativas acerca de la forma de las funciones de volatilidad instantánea.

A la hora de escoger formas adecuadas para las funciones de volatilidad instantánea es conveniente tratar de hacerse una idea de la forma de la curva de volatilidades instantáneas dividiendo el espectro de vencimientos en tres partes. La primera se corresponde aproximadamente con el vencimiento del primer o los dos primeros contratos. La segunda debería expandirse hasta los doce o dieciocho meses. Finalmente, la tercera parte se corresponde con los vencimientos posteriores. Las tres partes deberían corresponderse con distintas variabilidades de las funciones de volatilidad instantánea.

La primera de las partes tiene dos modalidades. Por un lado, en épocas de normalidad las acciones inesperadas por parte de la autoridad monetaria, no son anticipadas por el mercado e influencian la primera parte de la curva de tipos. Por ello, las volatilidades instantáneas de los tipos forward cercanos al vencimiento serán, en general, relativamente bajas. La situación se invierte en momentos de incerteza, el continuo análisis llevado a cabo por el mercado de la información relacionada con el comportamiento futuro de los tipos forward puede generar pronunciadas reversiones de las expectativas y del principio de la curva de tipos. La transición entre los períodos de normalidad y excitación y la posterior vuelta a la normalidad resulta muy rápida. Así, por tanto, parece plausible pensar que los tipos forward en este primer segmento pueden tener volatilidades bajas (condiciones normales) o muy altas (condiciones de incerteza).

Por su parte, el tercero de los segmentos es el más estable de todos y presenta una volatilidad relativamente baja porque, como es de suponer, la llegada de información económica diaria no puede tener, salvo en condiciones excepcionales, un gran impacto en las expectativas de un tipo forward a, digamos, diez años.

Finalmente, el segmento en el que la llegada de información tiene un impacto mayor es el segmento intermedio, entre seis y dieciocho meses. Es, por tanto, normal que sea este segmento el que presente habitualmente una volatilidad mayor, llegando, en muchas ocasiones, a un máximo para los tipos forward a un año del vencimiento. Así pues, la estructura temporal de volatilidades de los tipos forward presenta, en condiciones normales, forma "de joroba". Ello debe tenerse en cuenta a la hora de diseñar una forma adecuada para la función determinista de volatilidad instantánea.

13. Posibilidades concretas para las funciones de volatilidad instantánea.

La anterior visión de la estructura temporal de volatilidades lleva implícita la necesidad de aceptar la existencia de una clara dependencia temporal para las funciones de volatilidad instantánea. Con la intención de estudiar posibles formas funcionales para las funciones de volatilidad instantánea, y de acuerdo con los razonamientos anteriores y el resto de literatura existente, Rebonato(2002) analiza seis posibles formas funcionales:

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(t) \tag{16}$$

$$\sigma_{inst}(t,T) = g(T) \tag{17}$$

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(t)g(T) \tag{18}$$

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(T-t)g(T) \tag{19}$$

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(T-t)g(t) \tag{20}$$

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(T-t)g(t)f(T) \tag{21}$$

Donde, como es de suponer, h y g representan formas funcionales distintas.

La elección (16) asume que las volatilidades de los distintos tipos forward no dependen del vencimiento de los mismos, sino que son una función pura del tiempo. De acuerdo con esta especificación, cuando la información económica llega al mercado, todos los tipos forward reaccionan de la misma manera. Se trata de una forma de volatilidad instantánea con escaso fundamento económico. No obstante, se trata de una aproximación muy utilizada en los inicios del LMM, probablemente por motivos numéricos.

La posibilidad que representa la ecuación (17) es, probablemente, la más simple de implementar. Es por ello que históricamente ha sido muy empleada. La única forma de valorar correctamente todos los caplets siendo las volatilidad instantánea una función pura del tipo forward individual, es imponer para todo T

$$g(T) = \sigma_{Black}(T)$$

Se trata de una opción diametralmente opuesta a la representada por (16). La condición anterior garantiza que la estructura temporal de volatilidades completa será recuperada para cualquier serie arbitraria de precios de caplets. Esta elección, no obstante, presenta problemas de justificación financiera. Por un lado un tipo forward dado tendrá la misma volatilidad a lo largo de su vida, independientemente del plazo restante hasta el vencimiento. Como consecuencia de ello, la estructura temporal de volatilidades de hoy cambiará casi seguramente su forma en el futuro.

Como consecuencia de lo anterior, la forma (17) será en general incapaz de reproducir una evolución temporalmente homogénea de la estructura temporal de volatilidades. Así, esta opción, a pesar la simplicidad computacional que aporta, resulta restrictiva desde un punto de vista matemático y financiero. No obstante, puede resultar interesante porque algunas observaciones heurísticas y argumentos empíricos indican que la evolución de la curva de tipos que implica es muy similar a la obtenido empleando el modelo BDT, por lo que puede resultar adecuada para valorar swaptions bermuda.

La combinación de (16) y (17), propuestas simplificadoras y opuestas, puede proporcionar aproximaciones mucho más flexibles y realistas. La más simple de las combinaciones posible es (18). Esta definición divide las innovaciones financieras de un tipo forward en un componente puramente dependiente del tiempo y otro específico del tipo forward individual. Con esta elección, valorar correctamente un caplet implica imponer que, para cualquier T,

$$g(T)^2 = \frac{\sigma_{Black}^2(T)T}{\int_0^T h(u)^2 du}$$

Esta expresión muestra que, para una función arbitraria escogida h( ) y una estructura temporal de volatilidades exógena, siempre puede encontrarse una función g( ) que asegura la valoración simultánea de todos los caplets.

Esta opción suele resultar rechazada como consecuencia de su incapacidad para producir, en general, una evolución temporalmente homogénea de la estructura temporal de volatilidades. En efecto, cuando $\sigma_{Black}^2(T)T$ es una función estrictamente creciente de T, no suele resultar posible replicar el precio de las series de caplets.

La especificación (19) resulta una reformulación de la anterior, y su condición de valoración del mercado de caplets es

$$g(T) = \frac{\sigma_{Black}^2(T)T}{\int_0^T h(T-u)^2 du}$$

Y la condición de homogeneidad temporal se expresa de la siguiente manera

$$g(T+\tau)^2 \int_{\tau}^{T+\tau} h(T+\tau-u)^2 du = g(T)^2 \int_{\tau}^{T+\tau} h(T-u)^2 du$$

Puede apreciarse que la única forma funcional g( ) para la cual la anterior expresión se cumple con cualquier T es

$$g(T) = k$$

Así, a la hora de elegir entre las modalidades (18) y (19), parece lógico decantarse por la segunda si se pretende replicar los precios de mercado con homogeneidad temporal aproximada. Lo habitual es escoger los parámetros de h( ) y luego buscar una g( ) lo más constante posible a través de los distintos tipos forward.

La forma (20) divide la volatilidad instantánea en dos componentes, uno puramente dependiente del tiempo $g(t)$, y otro que depende del plazo hasta el vencimiento del caplet

$$\sigma_{inst}(t,T) = h(T-t)g(t)$$

El grado de reacción de todos los tipos forward ante la llegada de información económica está, por tanto, modulada a través del tiempo por la misma función $g(t)$: a través de la función h( ) todos los tipos forward tienen un grado de reacción que depende de su plazo hasta el vencimiento, pero, como función del tiempo, todos en conjunto pueden volverse más o menos sensibles a la información. Se trata, por tanto, de una descripción mucho más apetecible que las anteriores desde un punto de vista financiero. La condición de valoración del mercado de caplets, es ahora

$$\sigma_{Black}^2(T)T = \int_0^T g(u)^2 h(T-u)^2 du$$

Obsérvese que no es posible sacar la función g(t) de la integral. La solución computacional es suponerla constante par cada intervalo $[T_k, T_{k+1}]$. Esta elección, no obstante, debe implementarse con cuidado porque, si el intervalo de integración es largo, la decorrelación terminal puede alterarse de manera significativa.

Finalmente, la expresión (21) combina los rasgos de la anterior con un término específico de cada tipo forward $f(T)$. Este término suele calibrarse de manera residual, ya que el procedimiento recomendado pasa por situar todo el poder explicativo posible en $h(T-t)$, posteriormente en $g(t)$ y finalmente en $f(T)$.

14. Tratamiento de la función de correlación instantánea.

Una vez tratado el tema de las volatilidades instantáneas, resulta necesario hablar de las funciones de correlación instantánea. Ambos componentes forman la matriz de covarianzas de los tipos forward, esencia del LMM tal y como se ha formulado.

En general, la función de correlación presenta dependencia funcional del tiempo y de las fechas de vencimiento de los tipos forward.

$$\rho_{ij} = \rho(t, T_i, T_j) \tag{21}$$

Para que el elemento de covarianza

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{ij}(u)du$$

esté bien definido, deben escogerse funciones de volatilidad de cuadrado integrable. Por supuesto, es necesario que el planteamiento tenga sentido

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

Como en el caso de las volatilidades instantáneas, es en general una característica conveniente para la correlación instantánea mostrar un comportamiento temporalmente homogéneo. Así, las funciones con las que se trabaja presentan alguna de las siguientes estructuras

$$\begin{gathered} \rho_{ij} = \rho(T_i - t, T_j - t) \\ \rho_{ij} = \rho(T_i - T_j) \end{gathered} \tag{22}$$

A pesar de la similitud de los planteamientos descritos por las expresiones (21) y (22) con la correspondiente descripción realizada de las volatilidades instantáneas, la tarea de modelizar la correlación instantánea es considerablemente más compleja por varias razones.

En primer lugar, el precio de los derivados complejos depende exclusivamente de la función de correlación. Por el contrario, el derivado vanilla por excelencia, el caplet, depende exclusivamente de las funciones de volatilidad instantánea. Así, los inputs de calibración resultan considerablemente más complejos. Los únicos instrumentos sencillos que muestran alguna sensibilidad a las funciones de correlación instantánea son los swaptions europeos. Los precios de éstos dependen de elementos de covarianza del tipo

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{ij}(u)du \tag{23}$$

Por tanto, la función de correlación siempre aparece junto a alguna clase de función de volatilidad instantánea. Como estas son, en general, dependientes del tiempo, esta conjunción hace difícil la estimación de la función de correlación desde los precios de los swaptions.

La dificultad puede expresarse como sigue. Es posible expresar el valor de la correlación terminal entre los tipos forward i y j, $\bar{\rho}_{ij}(T)$, en términos de la matriz de covarianzas (23) como

$$\bar{\rho}_{ij}(T)=\frac{\int_0^T \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{ij}(u)du}{\sqrt{v_i(T)v_j(T)}}$$

con

$$v_i(T)=\int_0^T \sigma_i(u)^2\,du$$

Esta ecuación muestra que es la correlación terminal y no la instantánea la que directamente afecta el precio de los swaptions, y ésta a su vez está influenciada tanto por la correlación instantánea como por la dependencia temporal de las volatilidades. Para los valores típicos de correlación instantánea entre tipos forward observada en el mercado, no obstante, la correlación terminal está influenciada por el comportamiento de las volatilidades instantáneas al menos tanto como de las correlaciones instantáneas (Rebonato 1999c). Como consecuencia, distintas combinaciones de volatilidades instantáneas y correlaciones instantáneas pueden dar lugar a valores muy similares para la correlación terminal y, por tanto, a la misma matriz de covarianzas y al mismo precio para el swaption.

Asimismo, existe otra razón por la que extraer información acerca de la función de correlación desde los precios de los swaptions es difícil. Un tipo swap puede escribirse como una combinación lineal de tipos forward

$$SR(t)=\sum_{i=1}^{n} w_i f_i(t)$$

donde $f_i(t)$ es el i-ésimo tipo forward y las ponderaciones w_i vienen dadas por

$$w_i=\frac{B_{i+1}\tau_i}{\sum_{i=1}^{n} B_{j+1}\tau_j}$$

Donde B_i es el bono al descuento con vencimiento en la fecha de vencimiento del i-ésimo tipo forward., τ_i es el tenor y n es el número de tipos forward en el swap. Si cada tipo forward sigue una difusión con una volatilidad instantánea $\sigma_i(t)$, y los movimientos brownianos dw conductores de los tipos forward están ligados por $E[dw_i dw_j]=\rho_{ij}$, entonces la expresión para la volatilidad instantánea del tipo swap $\sigma_{SR}(t)$, puede escribirse como (Rebonato(2002))

$$\sigma_{SR}(t)^2 = E\left[\left(\frac{dSR}{SR}\right)^2\right] = E\left[\sum_j\sum_k \varsigma_j(t)\varsigma_k(t)\sigma_j(t)\sigma_k(t)dw_j dw_k\right]$$

Con

$$\varsigma_j = \frac{(w_j + \sum_{r=1}^{n} \partial w_r / \partial f_j) f_j}{\sum_{r=1}^{n} w_r f_r}$$

Si aceptamos el siguiente resultado (Rebonato(2002)): para el propósito de estimación la volatilidad de los tipos swap, las cantidades estocásticas ς_j pueden asumirse como deterministas (constantes) e iguales a su valor actual $\varsigma_j(0)$, entonces la volatilidad instantánea de un tipo swap puede aproximarse por medio de la siguiente expresión

$$\sigma_{SR}(t)^2 \cong \sum_j\sum_k \varsigma_j(0)\varsigma_k(0)\sigma_j(t)\sigma_k(t)E[dw_j dw_k]$$

De esta expresión general pueden derivarse algunos casos especiales:

a. Si existe correlación perfecta, $E[dw_j dw_k] = 1$ para cualquier j, k

$$\sigma_{SR}(t)^2 \cong \left[\sum_j \varsigma_j(0)\sigma_j(t)\right]^2$$

b. Si no existe correlación fuera de los elementos de la diagonal, $E[dw_j dw_k] = \delta_{jk}$

$$\sigma_{SR}(t)^2 \cong \sum_j [\varsigma_j(0)\sigma_j(t)]^2$$

c. Idéntica correlación $\rho < 1$ para los elementos de fuera de la diagonal, $E[dw_j dw_k] = \delta_{jk} + (1-\delta_{jk})\rho$

$$\sigma_{SR}(t)^2 \cong \sum_j [\varsigma_j(0)\sigma_j(t)]^2(1-\rho) + \rho\left[\sum_j \varsigma_j(0)\sigma_j(t)\right]^2$$

Por tanto, el cuadrado de la volatilidad instantánea de los tipos swap en el caso de idéntica correlación, es una combinación lineal de los dos casos anteriores.

Estudios y observaciones muestran que, en línea con las dificultades anteriormente comentadas, el precio de un swaption europeo es virtualmente independiente de la forma de la función de correlación. Además, lo que es aun más importante, está influido en un grado muy similar por la correlación instantánea y por la dependencia temporal de las volatilidades instantáneas de los tipos forward. En la práctica, es por tanto muy difícil extraer información acerca de la matriz de correlaciones instantáneas a partir de los precios de los swaptions europeos.

Existe, asimismo, un problema adicional y con orígenes totalmente distintos a la hora de modelizar las correlaciones. Se trata de los generales problemas que existen a la hora de obtener funciones de correlación estadísticamente robustas. Ello se debe al hecho de que las series requeridas de cambios en los tipos forward deben obtenerse de partes diferentes de la curva de tipos y de distintos instrumentos: depósitos de efectivo LIBOR a muy corto plazo, contratos de futuros para vencimientos intermedios y tipos swap de equilibrio para vencimientos entre dos años y el final de la curva LIBOR. Ello a pesar de que la curva de tipos entera normalmente se conoce como curva LIBOR (y de ahí, el nombre de LMM). Crear una curva a partir de diferentes segmentos no proporciona un resultado perfecto, y cada segmento está dominado por tipos distintos de trader. Además de estos problemas de segmentación, las series históricas que se necesitan para la estimación suelen contener tipos de depósitos LIBOR, precios de futuros y tipos swap cuyos mercados cierran a horas distintas. Como consecuencia, la correlación estimada de series diarias puede presentar problemas de falta de sincronización.

Incluso si una superficie de correlaciones instantáneas pudiera ser realmente estimada, el trader podría encontrarse aun con problemas de modelización por una razón completamente diferente: las posibles formas de la función de correlación instantánea son muy dependientes del número de factores que se emplean para conducir la dinámica de la curva de tipos. Por tanto, para un pequeño número de factores, la capacidad para reproducir una función de correlación instantánea exógena puede ser bastante limitada.

15. Posibilidades de modelización de la correlación instantánea.

Los estudios empíricos llevado a cabo por Fisher el al.(1994) y Longstaff et al.(2000) permiten extraer algunas conclusiones acerca de la forma de las correlaciones empíricas de los tipos forward:

- La función de correlación entre los primeros tipos forward y aquellos con un vencimiento posterior parece tener forma convexa.

- Suele darse convexidad negativa para la parte de la función de correlación relacionada con los últimos tipos forward.

- Asintóticamente, la correlación parece tender a niveles reales positivos, $\lim_{j \to \infty} \rho_{1,j} = K, K > 0$

Una vez descritas las principales características cualitativas relativas a las funciones de correlación, el siguiente paso consiste en especificar posibles formas funcionales que capten este comportamiento. Es importante señalar este respecto ciertas limitaciones intrínsecas de los modelos con pocos factores a la hora de recuperar una forma arbitraria para la función de correlación. Para ello puede resultar conveniente examinar el caso no trivial más simple, el LMM con dos factores:

$$\frac{df_i}{f_i} = \mu_i(t)dt + \sigma_{i1}dz_1 + \sigma_{i2}dz_2$$

Donde los shocks brownianos se consideran, como es habitual, ortogonales, $dz_i dz_j = \delta_{ij}dt$. Si la volatilidad instantánea del i-ésimo tipo forward se denota como $\sigma_i(t)$, entonces podemos rescribir el proceso anterior como

$$\frac{df_i}{f_i} = \mu_i(t)dt + \sigma_i(b_{i1}dz_1 + b_{i2}dz_2)$$

Donde debe satisfacerse la restricción $b_{i1}^2 + b_{i2}^2 = 1$ para cualquier serie arbitraria de valores reales dependientes de los tipos forward ϑ_i como consecuencia de que

$$b_{i1} = \sin(\vartheta_i)$$
$$b_{i2} = \cos(\vartheta_i)$$

Calcular la correlación entre dos tipos forward significa obtener

$$\rho_{ij} = \frac{E[df_i / f_i, df_j / f_j]}{\sqrt{v_i v_j}}$$
$$v_i = E[df_i / f_i, df_j / f_j]$$

Como consecuencia de la ortogonalidad ya mencionada de los movimientos brownianos, puede obtenerse de manera inmediata que

$$\rho_{ij} = \sin(\vartheta_i)\sin(\vartheta_j) + \cos(\vartheta_i)\cos(\vartheta_j)$$

Que implica, usando la identidad trigonométrica $\sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(x - y)$, que

$$\rho_{ij} = \cos(\vartheta_i - \vartheta_j)$$

Si la dependencia de la función angular ϑ_i con respecto del tipo forward es lo suficientemente suave, entonces para una la implementación bifactorial de LMM, su correlación debe comportarse como una función coseno. Además, la decorrelación entre dos parejas de tipos forward (i,j) y (r,s) separadas por la misma diferencia en vencimientos ($|T_i - T_j| = |T_r - T_s|$) sólo pueden ser diferentes si la dependencia de θ con respecto a i contiene términos superiores a los lineales. Si dichos términos superiores a los lineales no están presentes, entonces siempre se tendrá que $\rho_{ij} = \rho_{rs}$ para cualesquiera i, r, j, s tales que $|T_i - T_j| = |T_r - T_s|$. Un cálculo simple muestra en realidad que, para obtener una convexidad positiva en el origen, la dependencia no lineal debe ser bastante pronunciada.

Las anteriores conclusiones pueden generalizarse con facilidad: si se lleva a cabo la ortogonalización de una matriz de correlaciones n*n y tan sólo se retienen los primeros $m < n$ componentes, se está descartando los componentes de alta frecuencia de la "señal". Si este es el caso, no resulta sorprendente, por tanto, que el modelo de correlación resultante, obtenido reteniendo un pequeño número de componentes principales, no presentará la capacidad de cambiar rápidamente alrededor del origen. Lo que resulta más sorprendente es que el número de frecuencias necesario para reproducir globalmente un comportamiento simples bastante alto (Rebonato(1999a)).

Lo anterior no hace sino reforzar la idea de que la modelización de las correlaciones instantáneas es todavía un tema absolutamente abierto, muchas veces obviado en la práctica y en el que se aplican todavía aspectos cualitativos. A continuación se describirán algunas propuestas de formas funcionales para las correlaciones instantáneas. Se tratará de un enfoque paramétrico, ya que una aproximación no paramétrica, aunque teóricamente aceptable, presenta problemas numéricos de tal magnitud que parece resultar inabordable.

Como la información empírica y fiable es escasa, puede parecer poco provechoso asignar un comportamiento dependiente del tiempo, sin incluir otras consideraciones, para la matriz de correlaciones. La forma funcional con dependencia más general será del tipo

$$\rho(t, T_i, T_j) = \rho(T_i - t, T_j - t)$$

Asimismo, resulta financieramente deseable que la máxima decorrelación asintótica entre tipos forward en la misma moneda sea un valor positivo LongCorr

$$\lim_{p \to \infty} \rho_{1,p} = LongCorr$$

Además, resulta deseable que la matriz ρ cumpla las siguientes propiedades:

1. La función $\rho_{i,i+p}$ debe se, para un p fijo, una función creciente de i. Esto es equivalente a exigir que la función de correlación muestre convexidad decreciente a medida que se aproxima el vencimiento del primer tipo forward.

2. Las dinámicas de la curva de tipos producidas por las volatilidades y correlaciones escogidas debe ser tal que sus movimientos deben ser explicables por los tipos de deformaciones ortogonales "canónicas" de los desplazamientos paralelos, cambios en la inclinación y en la curvatura, en este orden de importancia (como se obtienen en un análisis de componentes principales).

Los requerimientos anteriores encuentran su justificación en la lógica financiera. Además, el modelo de función escogido debe satisfacer los requerimientos matemáticos de una función de correlación. Así pues:

- $\rho_{ii} = 1$ para todo i

- $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ para todo i,j

- $\rho_{ij} = \rho_{ji}$

- La matriz $[\rho]$ debe ser definida positiva.

Dados estos requisitos, todas las funciones propuestas serán de la familia exponencial. Dichas formas funcionales, extraídas de Rebonato(2002), son las siguientes:

$$\begin{aligned}\rho_{ij}(t) &= LongCorr + (1 - LongCorr)\exp[-\beta\left|(T_i - t) - (T_j - t)\right|] \\ &= LongCorr + (1 - LongCorr)\exp[-\beta\left|T_i - T_j\right|]\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\rho_{ij}(t) = LongCorr + (1 - LongCorr)\exp[-\beta\left|(T_i - t)^\gamma - (T_j - t)^\gamma\right|] \\ &t \leq \min(T_i, T_j)\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\rho_{ij}(t) = LongCorr + (1 - LongCorr)\exp[-\beta\left|(T_i - T_j\right| + \alpha\max(T_i, T_j)] \\ &t \leq \min(T_i, T_j)\end{aligned} \tag{26}$$

La primera forma funcional es un caso particular de la segunda ($\gamma = 1$); No obstante, este valor del exponente hace que la dependencia temporal, de t, desaparezca. Ello presenta características computacionales deseables, aunque también algunas implicaciones financieras poco deseables. Desde un punto de vista numérico, la dependencia temporal de la correlación instantánea permite rescribir los elementos de covarianza como sigue:

$$\int_0^T \sigma_i(u)\sigma_j(u)\rho_{ij}(u)du = \rho_{ij}(T_i, T_j)\int_0^T \sigma_i(u)\sigma_j(u)du$$

Para muchas de las funciones de volatilidad que se emplean, la integral sobre las funciones de volatilidad puede computarse analíticamente, y la ausencia del término de correlación bajo el símbolo integral simplifica las cosas. Sin embargo esta característica también está en el origen de la falta de atractivo de la especificación (24): a medida que el tiempo avanza, la decorrelación entre dos tipos forward separados por una diferencia fija vencimiento se mantiene, sin importar si el primero de los tipos vence dentro de un año o dentro de diez. Además, la convexidad de la función de correlación a través de la diagonal principal no puede cambiar de signo si $\gamma = 1$. Ello no es cierto para $\gamma < 1$.

En cuanto a la especificación (26), digamos que el término α, si se escoge correctamente, proporciona la capacidad de hacer que la velocidad del descenso en la correlación depender de la posición en la curva de los dos tipos forward (más concretamente del vencimiento del tipo forward a más largo plazo). Se trata de una característica deseable. Desgraciadamente, ni (25) ni (26) proporcionan una matriz de correlaciones definida positiva, y el usuario tiene que comprobar si los valores propios son positivos para cualquier elección en los parámetros. Ello puede suponer un serio inconveniente si se lleva a cabo una optimización numérica.

En los casos anteriores, la correlación viene definida por un pequeño conjunto de parámetros: la correlación asintótica, LongCorr, la constante de caída, β, y, tal vez, α o γ. Una característica común de las tres aproximaciones es que la estructura de correlaciones que definen es homogénea temporalmente. Se trata de un rasgo anidado en la forma funcional desde un principio, ya que no es probable que un trader conozca la evolución temporal de la estructura de correlaciones. La dependencia temporal en la correlación puede introducirse por medio de parámetros dependientes como $\beta(t)$ o $LongCorr(t)$. No obstante, hay que tener cuidado a la hora de intentar incluir dependencia temporal de un ajuste con swaptions europeas: la dependencia de estos instrumentos en la correlación es tan suave que, en presencia de un inevitable ruido, las funciones $\beta(t)$ y $LongCorr(t)$ tenderán a parecer excesivamente irregulares.

16. Una aproximación práctica al LMM

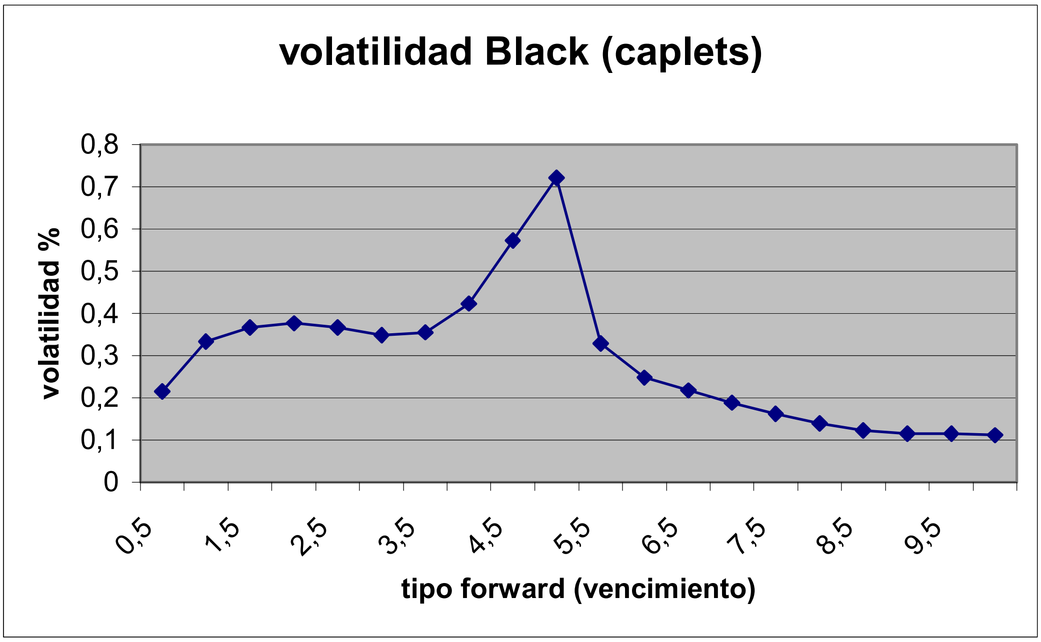
La parte práctica de este trabajo ha buscado la aplicación de la mayor parte posible de conocimientos sobre el tema adquiridos teóricamente. Como afirman los autores de Jong et al. (2000), la extraordinaria proliferación de estudios teóricos sobre el tema contrasta con la relativa escasez de estudios empíricos existentes sobre el mismo.

Mucho más limitador que la escasez de aplicaciones empíricas existentes ha resultado la imposibilidad, esperemos que transitoria, de disponer de datos de precios de derivados sobre tipos de interés susceptibles de ser valorados por medio de estos modelos, como caplets y swaptions. Se trata de una limitación insalvable y que prácticamente condena a todo cálculo posterior a una función didáctica, ejemplificadora. No obstante, el autor no resta importancia a los resultados, que le han permitido conocer el terreno en el que se movía, asentar los conocimientos teóricos anteriores y visualizar líneas futuras de investigación, como se comenta al final de este epígrafe.

Es relativamente reciente el rumor que afirma que en un breve periodo de tiempo todas las entidades de crédito que oferten hipotecas a sus clientes tendrán la obligación de ofertarles también la posibilidad de convertirlas de tipo variable a tipo fijo, con el objetivo estratégico de evitar que una brusca subida del EURIBOR, referencia para los tipos hipotecarios, repercuta en la endeudada economía española en forma de impagos masivos que puedan poner en peligro la solvencia del sistema financiero y la confianza de los agentes económicos en el mismo. Como veremos, los cálculos realizados, pueden interpretarse como el coste que implica asegurar una hipoteca (por medio de un cap) o convertirla de tipo fijo a tipo variable (por medio de un swaption.), por más que el tenor finalmente empleado, por comodidad, es $\tau = 1$ año, y las hipotecas suelen revisarse con frecuencia semestral.

Los datos disponibles más cercanos a los necesarios han resultado ser las construcciones diarias de la Estructura Temporal de Tipos de Interés, de contado, disponibles en la web del área de Economía Financiera de la Universidad de Castilla la Mancha. De todos los años de Estructuras Temporales construidas, se escogió en la versión preliminar de este trabajo el más cercano, el 2002, con un total de 253 días o curvas de tipos con datos para los siguientes plazos: 0, 1, 2, ..., 12 meses y 2, 3, ..., 15 años. Me refiero a la fuente -www.uclm.es/area/aef/WebEttis- para los detalles acerca del proceso de estimación de las mismas.

El problema de tal elección resultó se que, como veremos, la estimación de las volatilidades dinámicas de los tipos forward hasta el vencimiento resultaba imposible, ya que, en el caso extremo, calcular la volatilidad del tipo $f(10, 11)$ requiere diez años de datos diarios. Si el único año considerado es el 2002, sólo es posible calcular con exactitud la volatilidad hasta el vencimiento del tipo forward con vencimiento superior a un año. Por ello, a la hora de calcular la volatilidad hasta el vencimiento de los diferentes tipos forward, de manera similar a la que se describe a continuación, se obtenía una curva anómala, con un pico difícilmente explicable desde un punto de vista teórico y nada acorde con lo descrito en la literatura, que se refiere a una forma “de joroba”, creciente hasta el año o año y medio y decreciente, auque tendente a un valor positivo, en los vencimientos posteriores. La curva anómala a la que nos venimos refiriendo es la siguiente:



El rótulo del gráfico es explícito. La volatilidad de Black de un caplet se corresponde, al menos desde un punto de vista teórico, con la volatilidad lo largo de toda su vida del tipo forward con el mismo vencimiento.

Resulta conveniente precisar que la periodicidad de esta curva original se corresponde con un tenor de $\tau = 0.5$ años, a diferencia de las que veremos a continuación. Asimismo, la estructura de las splines empleadas para ajustar los valores para todos los vencimientos forward sigue una estructura con dos nudos fijos en t=0.5 y 5 años, quedando como sigue

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \alpha_1[(t-0.5)^+]^3 + \alpha_2[(t-5)^+]^3$$

Esta estructura spline, sin dejar de resultar satisfactoria, también ha sido mejorada en esta versión definitiva. Sin más preámbulos, pasemos a describir, paso a paso, el trabajo realizado en esta versión definitiva.

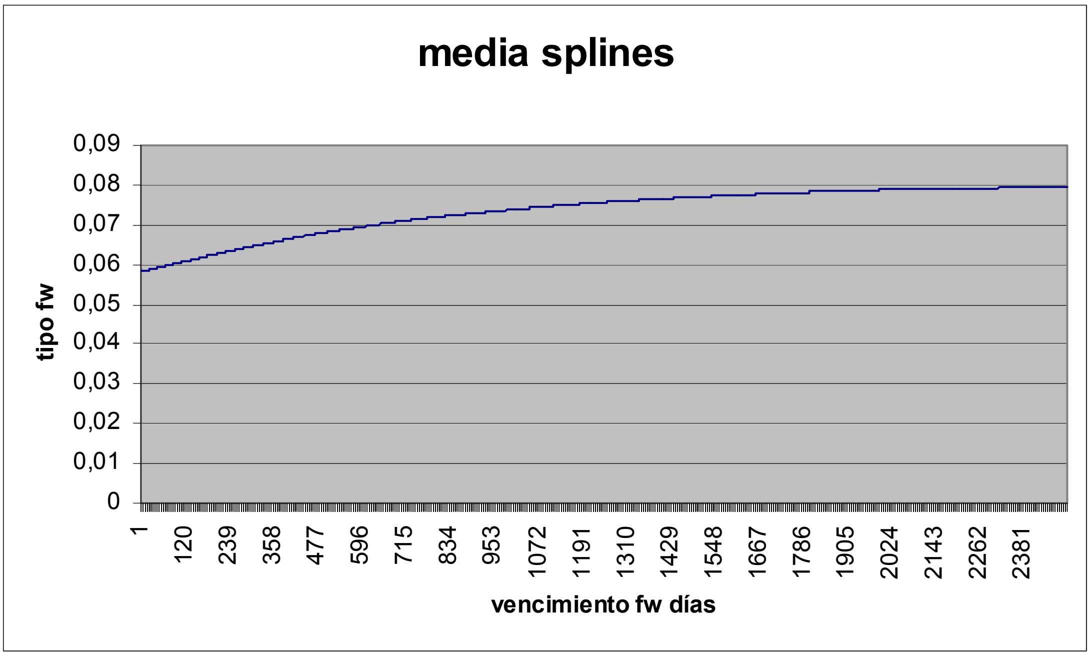
Así pues, para poder estimar las volatilidades de los distintos tipos forward a lo largo de toda su vida, es necesario remontarse hasta el año 1993, para contar con la longitud de observaciones diarias necesaria. Concretamente, se dispone de 2502 estructuras forward que se corresponden con datos de estructuras forward entre el día 5-1-93 y el 30-12-2002.

La periodicidad de los datos disponibles en las ETTIs no se corresponde con la deseada ya que, como veremos, resulta ideal disponer de datos con periodicidad diaria. La salida natural en este caso consiste en la obtención de los tipos forward disponibles $f\,(0.5,1)$, $f\,(1,2)$, ..., $f\,(10,\ 11)$ para, a partir de ellos, aproximar las curvas de tipos forward completas a partir de funciones splines.

En concreto, se han empleado funciones spline de tercer orden, con un solo nudo N variable, que se sitúa para cada una de ellas, en el lugar más adecuado siguiendo el criterio de MCO

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \alpha_1 [(t-N)^+]^3$$

El ajuste obtenido es bueno. El siguiente gráfico resume las 2502 curvas spline, cada una de las cuales contiene datos para forwards $f(T,T+1)$ para cada uno de los días entre 1 día y diez años.



Las curvas spline habilitan al investigador para poder estudiar la evolución de un tipo forward a medida que se acerca su vencimiento. En efecto, el concepto de difusión es un concepto dinámico y, por tanto, si se quiere valorar un caplet por medio de la fórmula de Black de una manera ortodoxa, entonces resulta necesario disponer de la volatilidad de Black, para así resolver analíticamente la consabida fórmula

$$PV_t = NP[f(t,T,T+\tau)N(h_1) - KN(h_2)]P(t,T+\tau)\tau$$

$$h_1 = \frac{\ln[f(t,T,T+\tau)/K] + \frac{1}{2}\sigma^2_{Black}(T-t)}{\sigma_{Black}\sqrt{(T-t)}}$$

$$h_2 = \frac{\ln[f(t,T,T+\tau)/K] - \frac{1}{2}\sigma^2_{Black}(T-t)}{\sigma_{Black}\sqrt{(T-t)}}$$

Cuando, como en este caso, no se dispone de datos reales de mercado, no se dispone de la volatilidad de Black, por lo que resulta necesario recurrir a una estimación. La estimación supone emplear ya el esquema del LMM, puesto que es necesario suponer alguna forma concreta para las funciones de volatilidad instantánea del proceso lognormal de los tipos forward

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu(f,t)dt + \sigma(t)dw(t)$$

donde

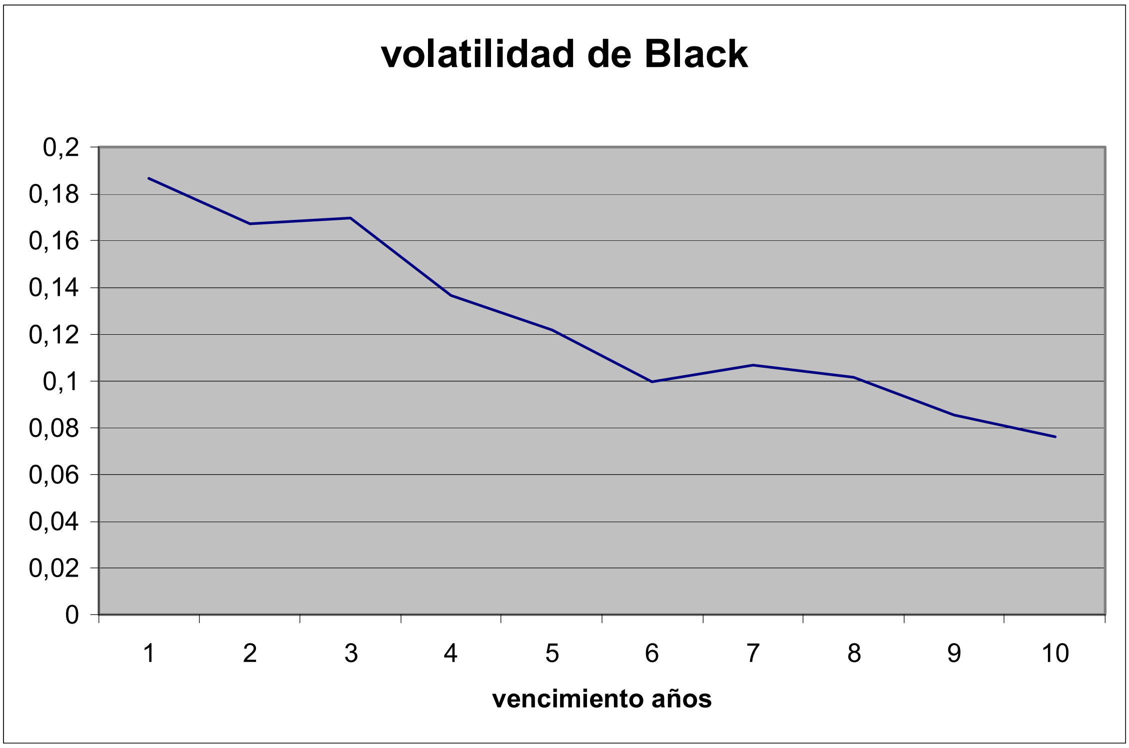
$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du$$

Podemos apreciar cómo la volatilidad instantánea $\sigma_i(t)$ es un una función determinista del tiempo, por lo que el dato representado por la fórmula de Black contiene, en principio, información acerca de la volatilidad del tipo forward desde su nacimiento hasta su vencimiento.

Para nuestros propósitos, disponiendo de tipos forward, sin el apoyo empírico de volatilidades de Black, y con el propósito de obtener volatilidades de Black para la valoración de caplets virtuales, no existe una salida más fácil y satisfactoria que realizar lo que luego definiremos como calibración exacta sin reversión y que consiste en considerar una constante como la volatilidad instantánea de los tipos forward para cada uno de los vencimientos.

En nuestro caso, esa constante puede calcularse como la volatilidad media de cada uno de los tipos forward a lo largo de los años considerados o hasta su vencimiento si éste es anterior al final del año. Por ejemplo, para calcular la volatilidad de Black para el forward f (1,2) se calculará la volatilidad de la serie f_1(1, 2), f_2(1, 2), ..., f_{250}(1, 2), en la que el subíndice se refiere al número de días transcurridos hasta el vencimiento, que se produce en el primer año, 250 días. Los datos anteriores se corresponden, el primero con el tipo $f(250{,}500)$ de la primera spline, el segundo con el tipo $f(249{,}499)$ de la segunda spline, y así sucesivamente, el último se corresponde con el tipo $f(0{,}250)$ en la spline 250. Las cifras de éstos últimos forward expresan días y no años, como cabe suponer.

De esta manera puede obtenerse una volatilidad de Black para cada uno de los tipos forward $f(1,\ 2)$, $f(2,\ 3)$, ..., $f(10,\ 11)$ con base en las splines obtenidas. Dichas volatilidades quedan como sigue



Puede apreciarse cómo la volatilidad de los tipos forward no es en absoluto creciente con el tiempo. La anterior figura no presenta la típica forma de joroba que se describen autores como Rebonato(2002) o de Jong et al. (2000) porque la cúspide de la "joroba" se encuentra entre el año y el año y medio hasta el vencimiento. Por tanto, tal cúspide se corresponde con las primeras observaciones del gráfico y desde ella, la curva sólo puede ser decreciente. La forma de joroba es una realidad empírica que debe tenerse muy en cuenta a la hora de modelizar la volatilidad de los tipos forward por medio de funciones de volatilidad instantánea, que es la clave de la calibración del modelo.

Apréciese la diferencia entre el gráfico anterior y el que se obtuvo en la versión preliminar del trabajo. El apuntamiento que aparece hacia la mitad de la curva preliminar, que no se corresponde con las regularidades empíricas observadas en la literatura, probablemente se deba al hecho de que, para un cálculo teóricamente correcto de las volatilidades de Black, habría que considerar la evolución de las volatilidades instantáneas hasta el vencimiento del último tipo forward

$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u)du$$

En ese caso la serie empezaba y acababa en el 2002 y, por ello, sólo se dispone de una año completo de datos, por lo que la expresión anterior se ha aproximado como

$$\sigma^2_{Black}(T_i)T_i = \int_0^{\min[T_i,1]} \sigma_i^2(u)du$$

Hecha esta salvedad, podemos emplear la fórmula de Black y, a partir de las volatilidades de Black anteriores, obtener los precios que el mercado debería haber dado a principios del año 1993 para caplets de un año de duración y con vencimiento en 1, 2,..., 10 años. Estos precios, para un strike de 0.15 son

Vencimiento caplet	**Precio**
1	**0,001156333**
2	**0,001622645**
3	**0,002067445**
4	**0,00077947**
5	**0,00023675**
6	**7,23913E-06**
7	**9,06748E-07**
8	**6,32706E-10**
9	**0**
10	**0**

Apréciese cómo los caplets más caros son aquellos que presentan un vencimiento más inminente. Ello se debe, como cabe suponer, al hecho de que las curvas de tipos en el año 93 ya auguraban una bajada futura de los mismos, por lo que la probabilidad de que los tipos en 9 o 10 años rebasasen el 15% ya en el 93 aparece como despreciable y el correspondiente caplet presenta valor nulo.

Un cap es una suma de caplets

$$c = \sum_{i=1}^{n} PV_i$$

Por lo que, agregando los datos anteriores, podemos llegar a la conclusión de que asegurar una hipoteca a 10 años a principios del año 1993 –Referenciada al tipo variable sin margen adicional, éste puede añadirse fácilmente de manera aditiva- debería haber costado 0,00587079 veces el nominal de la misma.

Un esquema similar puede aplicarse a la hora de valorar swaptions por medio de la fórmula de Black. Así, la fórmula de Black aplicable a swaptions queda como sigue

$$PV_t = NP[f(t,T_{\exp},T_{mat})N(h_1) - KN(h_2)]A(t,T_{\exp},T_{mat})$$

Donde, en este caso

$$h_1 = \frac{\ln[f(t, T_{\exp}, T_{mat})/K] + \frac{1}{2}\sigma^2_{SR,Black}(T_{\exp} - t)}{\sigma_{SR,Black}\sqrt{(T_{\exp} - t)}}$$

$$h_2 = \frac{\ln[f(t, T_{\exp}, T_{mat})/K] - \frac{1}{2}\sigma^2_{SR,Black}(T_{\exp} - t)}{\sigma_{SR,Black}\sqrt{(T_{\exp} - t)}}$$

Por supuesto, esta fórmula toma como variable de estado el tipo swap, SR

$$SR(t, T_{\exp}, T_{mat}) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t, T_i, T_i + \tau)$$

con

$$w_i = \frac{P(t, T_i + \tau)\tau}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i + \tau)\tau} = \frac{P(t, T_i + \tau)\tau}{A_i}$$

Es por ello que para que resulte correcta, dicho tipo swap debe resultar lognormal con volatilidad $\sigma_{SR,Black}$. De ello se deduce un problema de inconsistencia con respecto al procedimiento anterior para la valoración de caplets por medio de la fórmula de Black, que suponía lognormalidad para los tipos forward.

Un tipo swap es una combinación lineal de tipos forward, como se aprecia en la anterior relación. Por tanto, si los tipos forward tienen una dinámica lognormal, entonces resulta imposible una dinámica lognormal para los tipos swap. Se trata de una evidencia sobradamente conocida pero habitualmente ignorada, como resulta natural, ya que con el paradigma lognormal no se pretende describir con exactitud la dinámica de un tipo u otro, sino realizar una aproximación razonable y que permita una solución analítica inmediata.

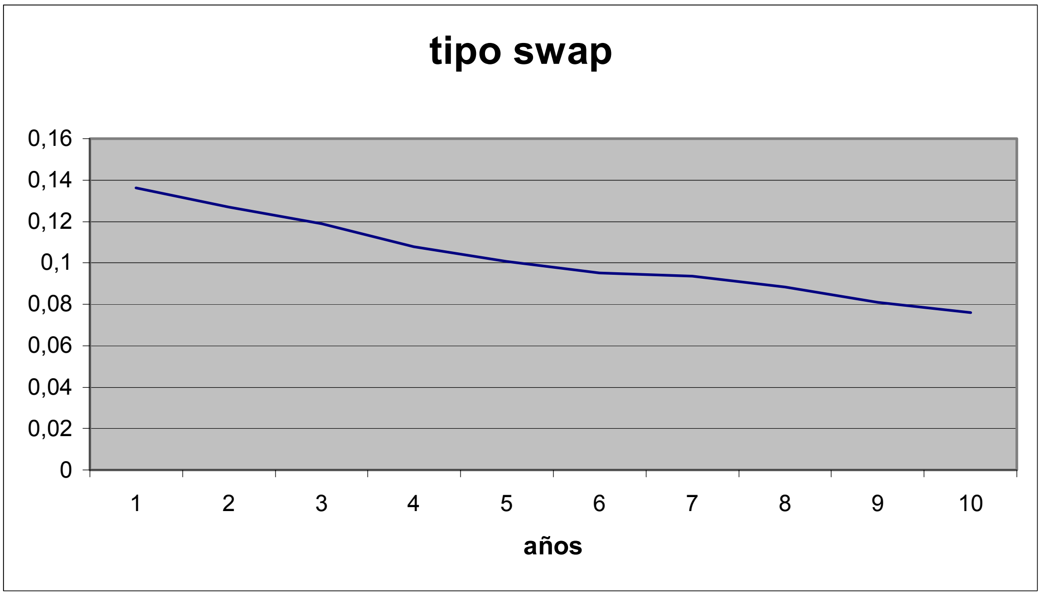
Con ese razonamiento en mente, pueden construirse swaptions sintéticos a partir de las curvas de tipos forward disponibles. La expresión anterior permite obtener la media de los tipos swap para los distintos vencimientos t_0 hasta un final fijo a los 10 años. Por su parte, la volatilidad puede deducirse como una media ponderada de las volatilidades de los tipos forward

$$\sigma_s^2 = \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

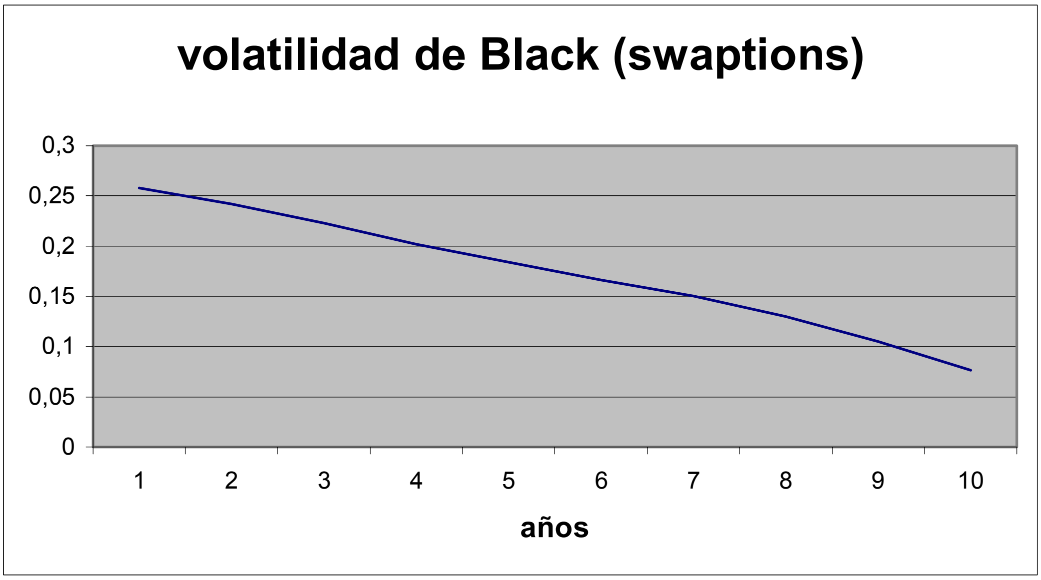
$$w_i = \tau P(t, t_i) / \sum_{i=1}^{n} \tau P(t, t_i)$$

En esta expresión puede observarse como para la valoración de swaptions, como para la valoración de derivados sobre tipos de interés en general, no sólo es relevante una adecuada modelización de las volatilidades de los tipos forward, sino también de las correlaciones entre los mismos.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, y con base en las volatilidades de Black obtenidas anteriormente a partir de tipos tipos forward, se han construido swaptions sintéticos por medio de las fórmulas anteriores. La media de los tipos swap obtenida queda recogida en el siguiente gráfico



La obtención de las volatilidades de Black para los swaptions respectivos pasa por la obtención previa de la matriz de varianzas y covarianzas de los tipos forward. Una vez obtenidos ,y según la relación anteriormente descrita, se obtiene una curva de volatilidades como la que sigue, que se basa en los supuestos de calibración exacta sin reversión equivalentes a los empleados para calcular las volatilidades de Black para los caplets.



Con estas volatilidades, ya resulta inmediata la aplicación de la fórmula de Black, que proporciona los siguientes precios para los swaptions con distintas fechas de inicio

Vencimiento swaption	**Precio**
1	**0,006865**
2	**0,005419**
3	**0,001769**
4	**4,12E-05**
5	**7,55E-08**
6	**1,54E-12**
7	**1,22E-17**
8	**0**
9	**0**
10	**0**

Es decir, a principios del 1993 convertir una hipoteca a tipo variable sin margenes comerciales y a 10 años a un tipo fijo del 15% debería haber costado 0,006865 veces su valor nominal. La misma operación el año 1993 pero con efectos a partir del tercer año contaría 0,001769. Nótese cómo el swaption más caro es aquel que vence el primer año y su precio es algo superior al del cap. Tal relación de precios carece de sentido, ya que en un mercado financiero, si ambos precios son equivalentes, se diría que existe una oportunidad de arbitraje porque el cap domina al swaption. Esta inconsistencia de precios corrobora la inconsistencia teórica existente al aplicar la fórmula de Black tanto para valorar caplets como para valorar swaptions.

La clave para la valoración de derivados por medio del LMM consiste en emplear derivados líquidos y simples, vanilla –caplets o swaptions-, junto con datos relativos a la estructura de tipos forward que complementen el hecho de que la evolución de su volatilidad en el tiempo no hasta el vencimiento no es observable, para calibrar los parámetros de las funciones de volatilidad y correlación instantáneas que caracterizan a las dinámicas de los tipos forward subyacentes, y emplear esta calibración en la valoración de derivados complejos.

Qué forma dar a dichas funciones es un tema complejo y muy debatido. Una de las pocas aplicaciones empíricas existentes del LMM es la de de Jong et al.(2000). En dicho trabajo se afronta la calibración de cuatro posibles funciones de volatilidad instantánea. En el presente trabajo se han empleado las mismas formulaciones que en el artículo, seis en total.

Es preciso hacer notar que todas las estructuras empleadas son temporalmente no homogéneas. La calibración exacta de una estructura de volatilidades ($IV^c(T_n)$), como, en este caso, la observada en el mercado de caplets, requiere que $IV^c(T_n)\sqrt{T_n}$ sea estrictamente creciente con el vencimiento del caplet T_n. El autor ha comprobado que no es éste el caso. Por tanto, se han empleado estructuras no homogéneas para obtener una réplica exacta de la curva de volatilidades. Asimismo también se han empleado estructuras que no permiten una calibración exacta y que se justifican por su simplicidad a la vez que por el hecho de que la calibración exacta tiende a ser excesivamente sensible al ruido en las curvas de volatilidad observadas.

Así pues, describiré brevemente las diferentes estructuras de volatilidad instantánea, que se calibran por medio de la siguiente igualdad

$$(T_n - t) IV^c(T_n)^2 = \int_t^{T_n} \gamma_n(t)^2 \, dt$$

En ella $IV^c(T_n)$ representa la volatilidad de Black implícita en el mercado de caplets y $\gamma_n(t)$ representa la función de volatilidad instantánea. En este caso, todos los caplets se consideran desde su inicio, t=0, y la anterior expresión puede simplificarse como

$$T_n IV^c(T_n)^2 = \int_0^{T_n} \gamma_n(t)^2 \, dt$$

Pues bien, a la hora de especificar diferentes formas para $\gamma_n(t)$, se ha optado por lo siguiente:

a. Calibración exacta sin reversión

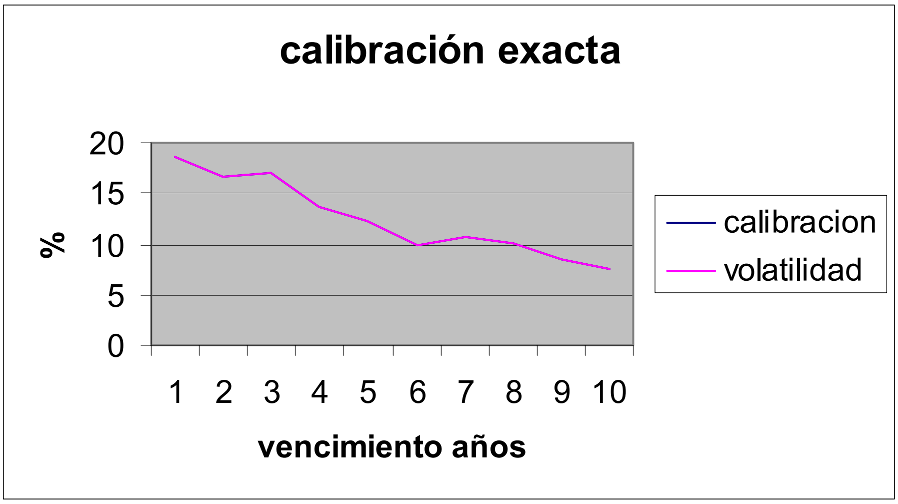
$$\gamma_n(t) = \gamma_n$$

La calibración resulta inmediata y se realiza con base en la siguiente igualdad

$$\gamma_n = IV^c(T_n)$$

Como puede apreciarse, existe una volatilidad instantánea distinta para cada uno de los vencimientos de los caplets. Puesto que la función de volatilidad no es más que una constante igual a la volatilidad empírica observada en el mercado de caplets, y dicha volatilidad empírica cambia cada día, si en la negociación se han empleado datos provenientes de más de un día de negociación, como es habitual, entonces las funciones de volatilidad instantánea cambiarán cada día.

Como es de esperar, la calibración exacta devuelve exactamente las volatilidades –y por tanto los precios- de mercado.



No deja de resultar paradójico el hecho de calibrar de manera exacta unas volatilidades implícitas de Black que en realidad ya se han obtenido por ese método. Obviando este detalle, los resultados habrían sido idénticos en otro caso.

b. Calibración exacta con reversión.

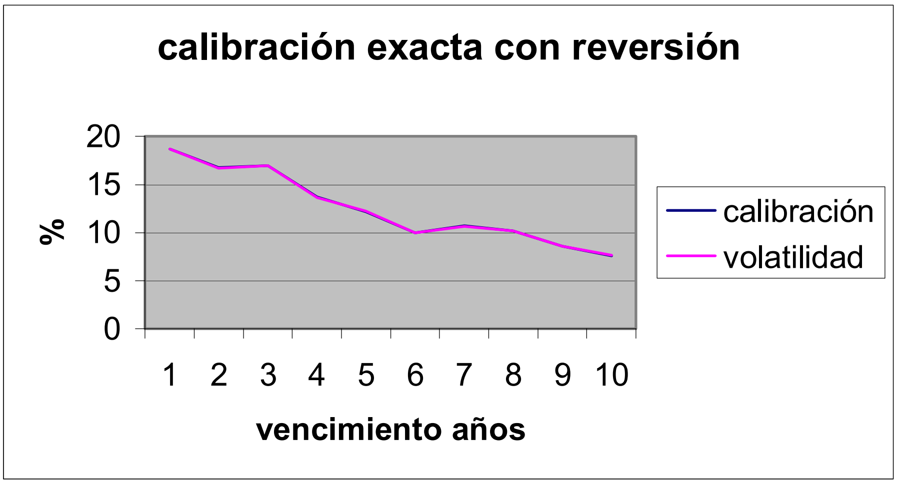
$$\gamma_n(t) = e^{-\kappa(T_n - t)}\gamma_n$$

Se trata de una versión más sofisticada de la especificación anterior, que ya no supone que la volatilidad de un caplet es la misma a lo largo de su evolución hasta el vencimiento, sino que existe una reversión a la media representada por el parámetro κ, que hace que los tipos forward disminuyan con su vencimiento.

Para un κ dado, al estimación se realiza como

$$\gamma_n \equiv IV^c(T_n)\sqrt{\frac{2\kappa T_n}{1-e^{-2\kappa T_n}}}$$

A la hora de replicar las volatilidades y, por tanto, los precios del mercado esta especificación no puede superar a la anterior



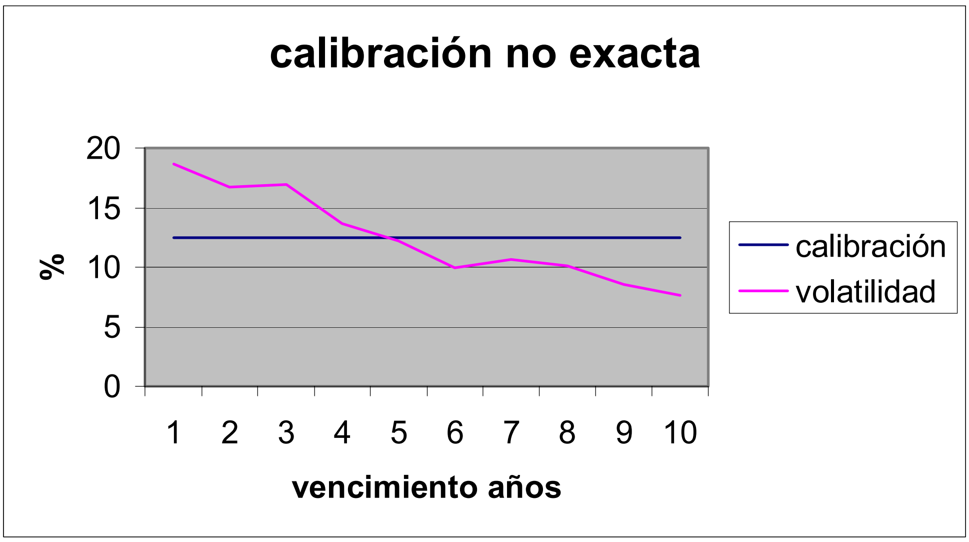
No obstante, la información adicional proporcionada por el parámetro de reversión hace que la esta especificación supere a la anterior a la hora de valorar otros activos derivados.

c. Calibración no exacta sin reversión.

Es la más simple de las especificaciones posibles, ya que supone que la volatilidad de los distintos tipos forward es constante hasta su vencimiento e igual para todos los vencimientos posibles.

$$\gamma_n(t) = \gamma$$

Como hemos podido ver, las volatilidades de los tipos forward no son idénticas independientemente de su vencimiento, por lo que esta especificación no es susceptible de calibrar exactamente la estructura de volatilidades.



d. Calibración no exacta con reversión

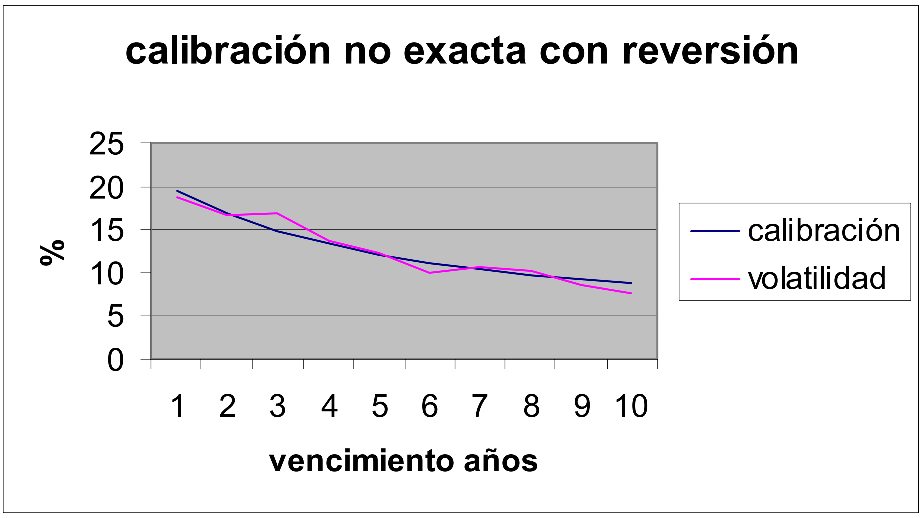
$$\gamma_n(t) = e^{-\kappa(T_n - t)}\gamma$$

Resulta una extensión en el sentido ya visto de incorporar el hecho empírico de reversión a la media de los tipos forward. Se trata de una aproximación temporalmente homogénea y no exacta, como la anterior.

Su calibración, como se puede suponer, se realiza como

$$\gamma \equiv IV^c(T_n)\sqrt{\frac{2\kappa T_n}{1 - e^{-2\kappa T_n}}}$$

En este caso sí puede apreciarse gráficamente cómo el parámetro de reversión contribuye a un mejora ajuste de las volatilidades calibradas.



e. Calibración con dos factores.

Las propuestas anteriores pueden combinarse para dar lugar a estructuras más completas y, en principio, susceptibles de permitir valoraciones de activos complejos de mayor calidad.

Pueden permitir una calibración exacta o no, según se desee.

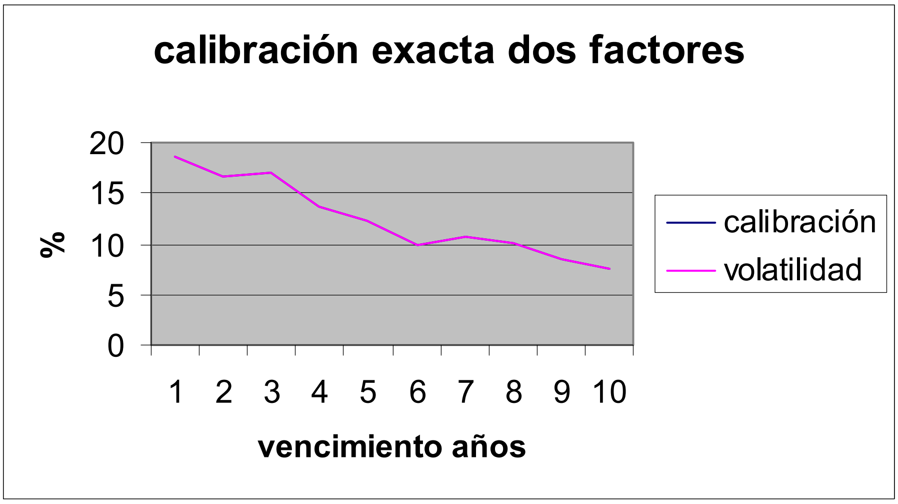
$$\gamma_{1,n}(t) = \gamma_1$$
$$\gamma_{2,n}(t) = e^{-\kappa(T_n - t)}\gamma_2$$

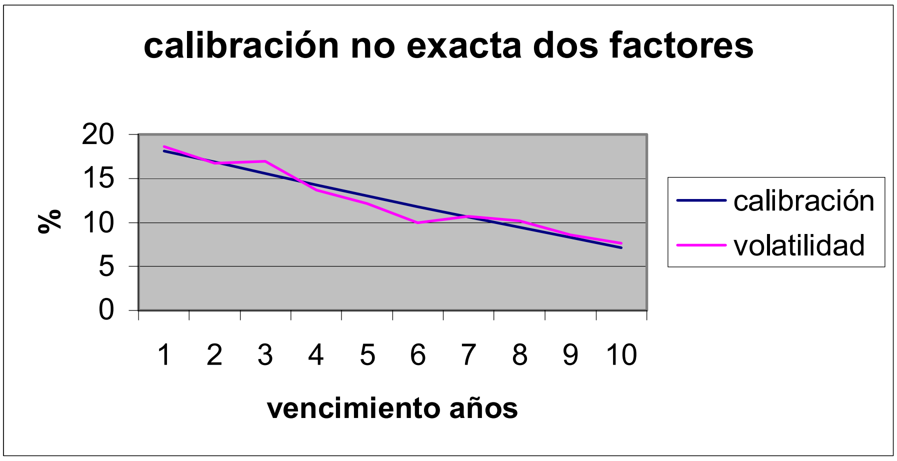
O bien, para devolver exactamente los precios que se observan en el mercado

$$\gamma_{1,n}(t) = \gamma_{1,n}$$
$$\gamma_{2,n}(t) = e^{-\kappa(T_n - t)}\gamma_2$$

Valorar hasta qué punto una u otra especificación para la función de volatilidad instantánea es más adecuada requiere, además de su calibración, su posterior uso para valorar activos derivados distintos de los empleados para la misma.

En este caso, los ajustes quedan como sigue





Si dispusiésemos de datos de mercado reales, entonces tendría sentido emplear las anteriores volatilidades instantáneas calibradas en el mercado de caplets para valorar swaptions con base en la siguiente aproximación de Brace el al. (1997):

Si Δ es la matriz de covarianzas de los tipos forward, entonces

$$Swptn(t,T_l,m,k)=\sum_{j=1}^{m}\delta_j P_{j+1}(t)[L_j(t)N(-s-d_j+\Gamma_j)-kN(-s-d_j)]$$

$$\Delta \approx \Gamma\Gamma^T, \Gamma \in R^{mx1}$$

$$d_i=\sum_{j=1}^{i}\frac{\delta_j L_j(t)}{1+\delta_j L_j(t)}\Gamma_j, i=1,...,m$$

donde s resuelve

$$\sum_{k=2}^{m+1} c_k\left[\prod_{j=1}^{k-1}(1+\delta_j L_j(t)\exp(\Gamma_j(s+d_j)-0.5\Gamma_j^2))\right]^{-1}=1$$

$$c_j=k\delta_{j-1}, j=2,...,m$$

$$c_{m+1}=1+k\delta_m$$

Precisamente la posterior labor investigadora del autor, enmarcada en su tesis doctoral, pasa presumiblemente por comparar la adecuación de las diferentes estructuras de modelización de la volatilidad instantánea, de las anteriormente descritas y de otras no incluidas en este trabajo, para la valoración de derivados sobre tipos de interés en el mercado doméstico.

De manera previa a lo anterior parece recomendable un estudio acerca de la coherencia de las estructuras temporales de volatilidad de los mercados de bonos y de activos derivados para el mismo mercado. En efecto, dado que los derivados sencillos no son activos plenamente negociables y, por tanto, no es posible observar la evolución de su volatilidad hasta el vencimiento, a la hora de calibrar funciones de volatilidad instantánea, se emplean tanto datos procedentes del mercado de derivados, concretamente volatilidades de Black, como datos extraídos de la estructura temporal de tipos de interés, de manera similar a cómo se ha hecho en este trabajo. Así, para la correcta valoración de derivados por medio del Libor Market Model, resulta conveniente que ambas estructuras temporales de volatilidad sean coherentes al menos en su forma, ya no tanto en su nivel. El autor se encuentra ya trabajando en este último tema.

17. Referencias

Andersen L (1999) “a simple approach to the pricing of Bermudan swaptions in the multi-factor LIBOR Market Model”, *Journal of Computational Finance,* 3 (2), 5-32

Black F (1976) “the pricing of commodity contracts”, *Journal of Financial Economics,* 3, 167-79

Black F, Scholes M (1973) “The pricing of options on corporate liabilities”, *Journal of Political Economy,* 81,637-59

Black F, Derman E, Toy W (1990) “A one-factor model of interest rates and its aplication to Treasury bond options”, *Financial Analyst journal,* 46, 33-39

Brace A, Gatarek D, Musiela M (1997) “The market model of interest rate dynamics”, *Mathematical Finance,* 7, 127-54

Broadie (2002), “New Methods for Pricing American and Bermudan Options: the Fast Gauss Transform Lattice Methods and the Prima-Dual Simulation Method” Gobal Derivatives Conference-Barcelona, mayo 2002

Cox J, Ingersoll J E, Ross S A (1985) “A theory of the term structure of interest rates”, *Econometrica,* 53, 385-407

De Jong F, Driessen J, Pelsser A (2000) “LIBOR and Swap Market Models for the Pricing of Interest Rate derivatives: An Empirical Analysis” Working Paper, University of Amsterdam.

Duffie D (1996) *Dynamic asset Pricing Theory,* 2nd edn, Priceton University Press, Priceton, NJ

Fisher M, Nyehka D, Zevros D (1994) “Fitting the term structure of interest rates with smooth splines”, Working paper, US Federal reserve Board, Enero

Heath D, Jarrow RA, Morton A (1989) “Bond picing and the term structure of interest rates: a new metodology”, Working Paper (revised edition), Cornell University.

Hull J, White A (1990) “Pricing of Iterest Rate Derivatives Seurities” *Te Review of Financial Studies*, 3, 573-592

Hull J, White A (2000) “The essentials of LMM” *Risk Magazine,* (Diciembre)

Jaekel P (2000) “a simple method to evaluate Bermudan swaptions in the LIBOR market model framework”, Working Paper Royal bank of scotland quantitative research Centre

Jamshidian F (1997) “LIBOR and swap models and measures”, *Finance and Stochastic*, 1 (4), 293-330

Longstaff F A, Santa-Clara P, Scwartz E S "The relative valuation of caps and swaptions: theory and empirical evidence" Working Paler, UCLA

Merton R (1973) "The theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economic and Management science,* 4, 177-86

Musiela M, Rutkowski M (1997) "Continuous-time structure models: forward-measure approach", *Finance and Stochastic,* 1 (4), 261-92

Nielsen L T (1999) *Pricing and Hedging of Derivatives Securities,* Oxford University Press, Oxford.

Rebonato R (1998) *Interest rate Option Models, 2nd* edn, John Wiley, Chichester

Rebonato R (1999a) "On the instantaneous calibration of multi-factor lognormal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix" *Journal of Computational Finance*, 2 (4), 5-27

Rebonato R (1999b) "On the pricing implications of the joint log-normality assumption for the cap and swaption markets", *Journal of Computational Finance,* 2 (3) 30-52

Rebonato R (1999c) *Volatility and Correlation,* John Wiley, Chichester

Rebonato R (2002) *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives*, Priceton University Press.

Vasicek O (1977) "An equlibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Eonomics,* 5, 177-88.