

MODELIZACIÓN DEL SPOT Y VALORACIÓN DE FUTUROS DEL GAS NATURAL

Ana Prieto Lucas

Trabajo de Investigación del
Programa de Doctorado Interuniversitario
en Finanzas Cuantitativas
nº 002

Tutor: Ángel León Valle

Julio 2003

Universidad Complutense de Madrid
Universidad del País Vasco
Universidad de Valencia

www.uv.es/qf

MODELIZACIÓN DEL SPOT Y VALORACIÓN DE FUTUROS DEL GAS NATURAL

Ana Prieto Lucas

Trabajo de Investigación del
Programa de Doctorado Interuniversitario
en Finanzas Cuantitativas
nº 002

Resumen

Éste es un trabajo empírico que consta de dos partes. En primer lugar, se modeliza, en tiempo discreto, el comportamiento de la serie de precios semanal del spot del gas natural. En un segundo lugar, y como parte central de esta investigación, se intenta modelizar el comportamiento de los contratos de futuros del gas natural mediante la contrastación de diversos modelos teóricos. La metodología utilizada para la estimación de los parámetros de estos modelos es la optimización con mínimos cuadrados ordinarios.

Abstract

This is an empirical paper with two different sections. The first one tries to model the behaviour of the natural gas spot prices. At the second section we use several theoretical models to model the natural gas futures contracts prices. The parameters of these models are estimated by ordinary least squares.

Este trabajo fue expuesto públicamente en el I Workshop en Finanzas Cuantitativas celebrado en la Universidad del País Vasco los días 26 y 27 de junio de 2003. Quisiera agradecer a Angel León toda la ayuda prestada para la realización de este trabajo así como las interesantes sugerencias y comentarios propuestos por Julio Lucia en el workshop antes citado. También me gustaría agradecer a la dirección de este doctorado el esfuerzo realizado durante estos dos cursos, así como a la Caja de Ahorros del Mediterráneo por el soporte económico recibido. Por último agradezco a mi familia, amigos y compañeros el apoyo, la ayuda y la paciencia que me han prestado.

ÍNDICE:

- 1.Introducción.
- 2.Modelos Spot
 - 2.1.Características
 - 2.2.Datos y estadísticos descriptivos
 - 2.3.Estimación del modelo spot
- 3.Mercado de futuros del gas natural
- 4.Modelos forward
 - 4.1.Modelos spot
 - 4.2.Modelo curva forward
- 5.Datos
- 6.Resultados
 - 6.1.Modelos spot
 - 6.2.Modelo curva forward
- 7.Conclusiones

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo es un trabajo empírico que consta de dos partes. En primer lugar, se modeliza el comportamiento de la serie de precios semanal del spot del gas natural y en un segundo lugar, como parte central de esta investigación, se intenta modelizar el comportamiento de los futuros del gas natural para distintos vencimientos. Para ello, contrastamos diversos modelos teóricos de futuros recogidos en Schwartz (1997) para las series de futuros existentes. La metodología aplicada en la estimación de los parámetros no va a ser la metodología del filtro de Kalman utilizada en Schwartz (1997) debido a la presencia de factores no observados, sino la metodología de Cortázar y Schwartz (2003) que consiste en estimar los parámetros mediante una optimización con mínimos cuadrados ordinarios. Esta metodología resulta ser mucho más sencilla que el filtro de Kalman y fácil de implementar en una hoja de cálculo de Excel utilizando la herramienta del Solver. Otra posible ventaja de esta metodología consiste en su fácil utilización por los “practioners” especializados en commodities.

Los apartados siguientes son: en la sección 2 la modelización del spot, en la sección 3 una breve descripción sobre el funcionamiento del mercado de futuros del gas natural, en la sección 4 una explicación detallada sobre los distintos modelos teóricos de comportamiento del futuro que vamos a utilizar posteriormente, en la sección 5 una descripción de los datos a utilizar, en la sección 6 los resultados obtenidos y finalmente en la sección 7 las conclusiones.

2. MODELOS SPOT.

En esta parte del trabajo se va a intentar estimar, en tiempo discreto, el comportamiento de la serie de precios spot del gas natural. Para su modelización es necesario tener en cuenta una serie de características propias que presenta los commodities (Escribano, Peña.y Villaplana (2002)). Por tanto, en primer lugar se describirán estas propiedades y en segundo lugar se realizará la estimación del modelo.

2.1 Características

Estacionalidad:

La demanda de electricidad en general está muy influenciada por la actividad económica y por las variaciones de las condiciones climáticas. Esto se refleja en los precios de la electricidad, y especialmente en los precios del gas natural, con fuertes subidas y bajadas de manera periódica, es decir con un comportamiento estacional. Pueden aparecer distintos tipos de estacionalidad: intradía, semanal, mensual, por estaciones. Este comportamiento estacional se asumirá que viene reflejado por factores deterministas y, puesto que los datos sobre los que se va a trabajar son semanales, solo se estudiará la estacionalidad mensual y por estaciones. Las funciones que se han elegido para reflejar este comportamiento estarán compuestas por variables dummies mensuales en un caso y por dummies estacionales en el otro. También se podrían utilizar funciones sinusoidales con este fin pero en muchos trabajos se demuestra que se obtienen resultados similares por lo que se ha elegido esta opción por ser la más sencilla.

Reversión a la media:

Se ha demostrado en numerosos trabajos que una propiedad importante que presentan los precios del gas natural es la de reversión a la media, es decir, el precio revierte a largo plazo a un determinado nivel.

Volatilidad y saltos:

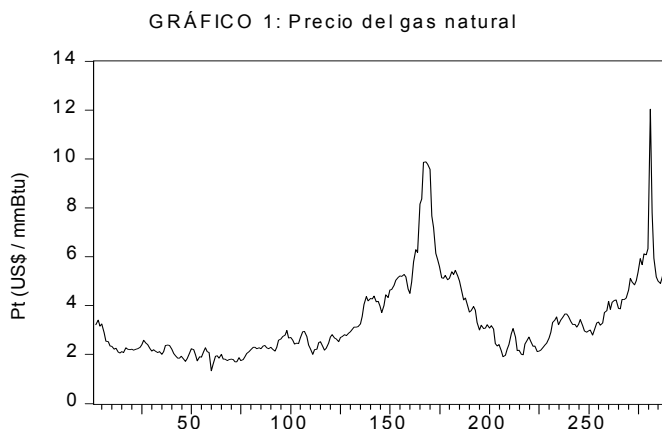
Los precios del gas natural frecuentemente presentan inesperados y repentinos cambios. Además, después de darse el salto no permanecen en el mismo nivel sino que vuelven al nivel anterior rápidamente. Este comportamiento se debe en muchos casos a las fluctuaciones en la demanda y la poca elasticidad de la oferta, debido a rigideces en el sistema de transmisión y

transporte. Estos saltos se suelen capturar mediante procesos de Poisson como proceso de difusión con saltos (véase Villaplana (2003)).

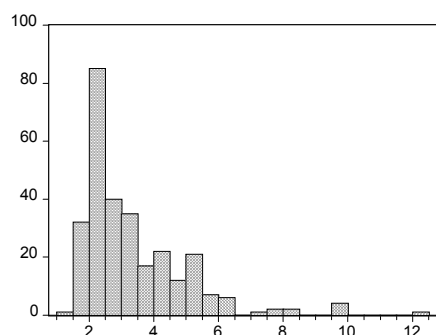
Otro aspecto importante que afecta a los precios de la electricidad es una alta y variable volatilidad así como volatility clustering. Estos comportamientos son consistentes con procesos donde la volatilidad es estocástica y autorregresiva, es decir con los modelos ARCH.

2.2 Datos y estadísticos descriptivos

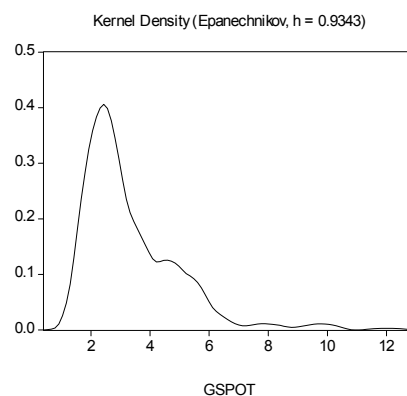
La serie de precios del spot es una serie de cotización en NYMEX de precios semanales del gas natural Henry Hub en el período entre el 24 de octubre de 1997 y 2 de mayo del 2003. En total tenemos una muestra de 289 observaciones. En el gráfico 1 se muestra esta serie temporal.



A continuación se presenta la salida en Eviews de los estadísticos descriptivos así como el histograma y la densidad kernel correspondientes.



Series: GSPOT	
Sample 2 289	
Observations 288	
Mean	3.350995
Median	2.805000
Maximum	12.03200
Minimum	1.340000
Std. Dev.	1.614775
Skewness	1.955212
Kurtosis	8.184848
Jarque-Bera	506.0889
Probability	0.000000



Podemos observar que la serie de precios no es normal, como lo demuestra el estadístico de Jarque–Bera con un p-valor igual a cero. La serie muestra además asimetría por la derecha y tiene colas largas como podemos observar en el valor de kurtosis. La presencia de una alta kurtosis podría justificar la introducción de modelos con salto (jump processes) aunque no va a ser objeto de estudio en este trabajo. Nótese también como la asimetría viene indicada por la diferencia de valores existente entre la media y la mediana además de la skewness. Por último podemos obtener una mejor visualización de la serie mediante la estimación del kernel.

A continuación presentamos el correlograma (AC) de la serie de precios para los primeros veinte retardos conjuntamente con su correlograma parcial (PAC).

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *****	. *****	1	0.945	0.945	259.83	0.000
. *****	. *	2	0.900	0.069	496.48	0.000
. *****	. .	3	0.859	0.014	712.53	0.000
. *****	. .	4	0.818	-0.010	909.16	0.000
. *****	. .	5	0.784	0.047	1090.5	0.000
. *****	. .	6	0.748	-0.027	1256.1	0.000
. *****	. .	7	0.718	0.040	1409.4	0.000
. *****	. .	8	0.684	-0.050	1548.8	0.000
. *****	* .	9	0.644	-0.069	1672.9	0.000
. *****	. *	10	0.625	0.160	1790.2	0.000
. *****	. .	11	0.605	0.019	1900.7	0.000
. *****	. .	12	0.586	-0.006	2004.6	0.000
. *****	. .	13	0.568	0.006	2102.7	0.000
. *****	. .	14	0.546	-0.028	2193.7	0.000
. *****	* .	15	0.520	-0.062	2276.5	0.000
. *****	. .	16	0.497	0.019	2352.3	0.000
. *****	. .	17	0.474	-0.010	2421.5	0.000
. *****	* .	18	0.447	-0.076	2483.5	0.000
. *****	. .	19	0.417	-0.032	2537.4	0.000
. *****	. .	20	0.386	-0.023	2584.0	0.000

Podemos observar a partir de la tabla anterior que la serie presenta una clara estructura AR(1) con fuerte persistencia pero no de carácter tan acusado como para decir que la serie es objeto de evidencia de raíz unitaria. El estadístico Q es el estadístico de Ljung-Box acompañado del p-valor en la última columna. Podemos observar como el estadístico anterior confirma la presencia de autocorrelación en la serie. Aplicando el test de Dickey-Fuller, reflejado en la tabla siguiente, a partir de E-Views, observamos que no hay evidencia de raíz unitaria al 10% pues el valor del estadístico es -2.63356 que resulta ser menor que el valor crítico al 10% que es -2.572.

Null Hypothesis: GAS has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=0)		
Augmented Dickey-Fuller test statistic	t-Statistic	Prob.*
	-2.633560	0.0874
Test critical values: 1% level	-3.452911	
5% level	-2.871367	
10% level	-2.572078	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

2.3 Estimación del modelo spot

Para ver el comportamiento estacional del serie presentamos dos alternativas. La primera es la modelización mensual (mediante 12 dummies indicando cada una de ellas el mes) y la segunda la modelización por estaciones del año (mediante 4 dummies). También se ha hecho para la serie en logaritmo obteniéndose resultados similares pero que no presentamos aquí. A continuación presentamos dos tablas recogiendo las 2 modalidades que acabamos de mencionar, incluyendo la estructura AR(1) significativa que hemos observado en el apartado anterior.

a) Dummies mensuales + AR(1)

Dependent Variable: GSPOT (precio)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 5 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D1	3.728956	0.682400	5.464472	0.0000
D2	3.777395	0.680535	5.550622	0.0000
D3	3.195897	0.677524	4.717024	0.0000
D4	3.322858	0.676527	4.911641	0.0000
D5	3.292961	0.676133	4.870289	0.0000
D6	3.409787	0.682260	4.997782	0.0000
D7	3.352296	0.687056	4.879219	0.0000
D8	3.530356	0.690921	5.109637	0.0000
D9	3.511124	0.693568	5.062405	0.0000
D10	3.696337	0.694580	5.321687	0.0000
D11	3.750502	0.689825	5.436890	0.0000
D12	3.735174	0.686588	5.440201	0.0000
AR(1)	0.952694	0.019029	50.06558	0.0000
R-squared	0.902250	Mean dependent var		3.358065
Adjusted R-squared	0.897984	S.D. dependent var		1.618608
S.E. of regression	0.516982	Akaike info criterion		1.562471
Sum squared resid	73.49934	Schwarz criterion		1.727813
Log likelihood	-211.9958	F-statistic		211.5243
Durbin-Watson stat	2.090782	Prob(F-statistic)		0.000000

Se observa que todas las dummies son significativas y de valores muy parecidos entre sí. Esto sugiere que no existe un efecto mensual debido a la enorme similitud en magnitud de los parámetros. Para asegurar esta idea se realiza el test de Wald donde se contrasta como hipótesis nula la igualdad de todos los parámetros de las dummies, aceptándose finalmente esta hipótesis de igualdad. El estadístico chi-cuadrado del contraste anterior es 9.26 con un p-valor de 0.6 a favor, por consiguiente, de la nula. Como conclusión, se sugiere la estimación de un modelo AR(1) con constante.

b) Dummies estaciones + AR(1)

Dependent Variable: GSPOT (precio)					
Method: Least Squares					
Sample(adjusted): 2 289					
Included observations: 288 after adjusting endpoints					
Convergence achieved after 4 iterations					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
DINV	3.472981	0.626107	5.546945	0.0000	
DPRIM	3.538792	0.625482	5.657707	0.0000	
DVER	3.416684	0.630577	5.418350	0.0000	
DOT	3.537189	0.631112	5.604691	0.0000	
AR(1)	0.950251	0.018985	50.05396	0.0000	
R-squared	0.899201	Mean dependent var		3.358065	
Adjusted R-squared	0.897776	S.D. dependent var		1.618608	
S.E. of regression	0.517508	Akaike info criterion		1.537626	
Sum squared resid	75.79158	Schwarz criterion		1.601219	
Log likelihood	-216.4181	F-statistic		631.1430	
Durbin-Watson stat	2.143430	Prob(F-statistic)		0.000000	

Observamos también que las estimaciones de los parámetros de las dummies son similares sugiriendo la no presencia de un efecto por estaciones. Aplicando el test de Wald del mismo modo que en el apartado anterior llegamos a la misma conclusión. En definitiva, mantenemos también la conclusión anterior de AR(1) con constante. Finalmente hay que indicar que las conclusiones obtenidas hasta el momento sobre la serie de precios se mantienen también para la serie en logaritmos.

Obsérvese finalmente como los R-cuadrados de las regresiones anteriores son similares explicando un 90 %. La estimación de AR(1) con constante se observa en la siguiente tabla.

Dependent Variable: GAS (precio)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 3 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.493466	0.614473	5.685306	0.0000
AR(1)	0.950380	0.018842	50.44054	0.0000
R-squared	0.898949	Mean dependent var		3.358065
Adjusted R-squared	0.898595	S.D. dependent var		1.618608
S.E. of regression	0.515431	Akaike info criterion		1.519293
Sum squared resid	75.98135	Schwarz criterion		1.544731
Log likelihood	-216.7782	F-statistic		2544.248
Durbin-Watson stat	2.141481	Prob(F-statistic)		0.000000

El estadístico Ljung-Box para 20 retardos, LB(20), aplicado sobre la serie de residuos de la regresión anterior, es de 8.58 con un p-valor de 0.98 indicando la ausencia de autocorrelación en la serie de residuos. Esto indicaría que la serie AR(1) es suficiente para la modelización de la serie de precios y también, aunque no lo exponemos aquí, de la serie en logaritmo.

Finalmente analizamos la posible evidencia de heterocedasticidad condicional en las series de precio y log-precio. Observando la serie de residuos al cuadrado en la serie de precios observamos que existe una pequeña estructura en los cuadrados siendo el LB (20) para los residuos al cuadrado de 42 con un p-valor correspondiente de 0.002. Mientras para la serie de log-precio el LB (20) para los residuos al cuadrado es 29.5 con un p-valor de 0.0508. Esto indica que a un 5% no existe evidencia de estructura en la serie de residuos al cuadrado del log-precio. No obstante, si aplicamos una estructura ARCH(1) o GARCH(1,1), por ejemplo, para la serie de precios tenemos que el proceso de la varianza condicional es explosivo no teniendo mucho sentido. Imponiendo estas misma estructura para la serie de log-precio, obtenemos que la parte ARCH resulta ser no significativa como puede verse en las siguientes salidas de E-Views.

a) AR(1)+ARCH(1)

Dependent Variable: LNGAS (log-precio)				
Method: ML - ARCH (Marquardt)				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Variance backcast: ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.783876	2.213852	0.805779	0.4204
AR(1)	0.995496	0.013419	74.18365	0.0000
Variance Equation				
C	0.006678	0.000264	25.30244	0.0000
ARCH(1)	0.099423	0.060939	1.631511	0.1028
R-squared	0.952117	Mean dependent var		1.121154
Adjusted R-squared	0.951611	S.D. dependent var		0.406103
S.E. of regression	0.089332	Akaike info criterion		-2.060223
Sum squared resid	2.266386	Schwarz criterion		-2.009349
Log likelihood	300.6721	F-statistic		1882.381
Durbin-Watson stat	1.821702	Prob(F-statistic)		0.000000

Obsérvese la no significatividad del ARCH (1) sobre la serie del log-precio. Un resultado similar de no significatividad obtenemos para un ARCH (2), etc.

b) AR(1)+GARCH(1,1)

Dependent Variable: LNGAS (log-precio)				
Method: ML - ARCH (Marquardt)				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Variance backcast: ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.265449	0.568387	2.226386	0.0260
AR(1)	0.988984	0.013932	70.98714	0.0000
Variance Equation				
C	0.002405	0.001389	1.731311	0.0834
ARCH(1)	0.088308	0.055163	1.600875	0.1094
GARCH(1)	0.593161	0.214473	2.765671	0.0057
R-squared	0.952300	Mean dependent var		1.121154
Adjusted R-squared	0.951626	S.D. dependent var		0.406103
S.E. of regression	0.089319	Akaike info criterion		-2.060578
Sum squared resid	2.257724	Schwarz criterion		-1.996985
Log likelihood	301.7232	F-statistic		1412.483
Durbin-Watson stat	1.816826	Prob(F-statistic)		0.000000

Nuevamente obsérvese como el parámetro del ARCH(1) no es significativo mientras el parámetro del GARCH(1) es significativo. Por último una estimación GARCH(1,2) también se ha realizado resultando ser no significativo el parámetro del GARCH(2). En definitiva, el modelo GARCH (1,1) que se presenta aquí resulta ser no explosivo para la serie de precios del log-precio y sería el candidato.

En resumen, el modelo que candidato sobre el la serie log-precio es un modelo AR(1) con constante y estructura GARCH (1,1) presentado en la última tabla.

3. MERCADO DE FUTUROS DEL GAS NATURAL.

El mercado de futuros NYMEX del gas Natural tiene las siguientes características:

Las unidades en las que se negocian estos contratos son 10000 millones de British thermal units (MMBtu) y el pago se realiza en dólares y céntimos (por MMBtu).

Las fluctuaciones máxima y mínima que se le permite tener al precio son las siguientes: la mínima es de 0.001 dólares (0.1 céntimo) por MMBtu la máxima, sin embargo está en los 1.5 dólares por MMBtu (15000 dólares por contrato) para los dos primeros meses. En el caso de un movimiento de 0.75 dólares por MMBtu en alguno de los dos primeros meses de contrato, el límite para el resto de meses se queda en 0.75 dólares por MMBtu

Los meses de negociación actualmente son 36 meses consecutivos y la negociación termina tres días antes del primer día del mes de entrega.

Existen unos límites en las posiciones que se pueden tomar: No se puede exceder los 7000 contratos para todos los meses combinados ni los 1000 contratos en los últimos tres días de negociación en el spot month o 5000 en cualquier mes.

La entrega se efectúa en Henry Hub, un lugar situado en el estado de Louisiana, Estados Unidos. El vendedor es el responsable de trasladar el gas natural hasta este punto y el comprador lo es desde este lugar a cualquier otro. La cuota corre a cuenta del vendedor.

El periodo de entrega establecido es el siguiente: La entrega no debe efectuarse antes del primer día del mes de entrega y de debe llevar a cabo no después del último día del mes de entrega. Sin embargo existe un procedimiento alternativo de entrega: si el comprador y el vendedor acuerdan consumir la entrega en condiciones diferentes a las acordadas en un principio en el contrato pueden llevarla a cabo después de presentar una notificación al Exchange.

4. MODELOS FORWARD.

Esta parte del trabajo consta de dos secciones. En la primera se tratará de modelizar los precios de contratos forward a partir de modelos spot (Schwartz (1997), Lucia y Schwartz, (2001)) y en la segunda estos contratos se modelizarán directamente a partir de la curva forward (Clewlow y Strickland (2000)). Los datos que se utilizarán en ambos casos son las cotizaciones de precios semanales de los futuros del gas natural en Henry Hub que cotizan en NYMEX.

4.1. Modelos spot.

a) Modelo

En esta sección se considerarán aquellos modelos que explican el comportamiento de los contratos derivados de los precios de la electricidad a partir del comportamiento del precio de la electricidad (spot). Los precios de estos derivados (en nuestro caso únicamente se estudiarán los contratos forward) se obtienen a partir de una fórmula analítica que depende de los precios spot.

El modelo teórico que se analizará está basado en los modelos de uno, dos y tres factores de Schwartz (1997).

En el modelo de un factor propuesto por Schwartz asume que el precio del spot sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma Sdz$$

Si definimos una nueva variable X como $X = \ln S$ y aplicamos el Lema de Ito, podemos observar que el logaritmo del precio viene caracterizado por un proceso Ornstein-Uhlenbeck:

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$
$$\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

Este modelo, bajo la medida equivalente de martingala tiene la siguiente forma:

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dz^*$$

donde $\alpha^* = \alpha - \lambda$, y λ es el precio de riesgo de mercado (que se supone constante). dz^* es el movimiento browniano geométrico bajo la medida equivalente de martingala.

Suponiendo un tipo de interés constante, el precio de los futuros (o forward) con vencimiento en T es el precio esperado del subyacente en T bajo la medida equivalente de martingala. Por lo tanto, se obtiene fácilmente que:

$$F(S, T) = \exp \left[e^{-\kappa T} \ln S + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \right]$$

El modelo de dos factores considera que, tanto el precio del spot como el convenience yield son variables estado que siguen un proceso de reversión a la media.

Si definimos S como el precio spot del gas natural y δ como el convenience yield instantáneo, Schwartz (1997) propone la siguiente dinámica para ambos:

$$\begin{aligned} dS &= (\mu - \delta)Sdt + \sigma_1 dz_1 \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2 \\ dz_1 \text{ y } dz_2 &\sim N(0, dt^{1/2}) \quad dz_1 dz_2 = \rho dt \end{aligned}$$

En este modelo, μ representa el rendimiento total a largo plazo, κ el coeficiente de reversión a la media, α el convenience yield a largo plazo, σ_1 y σ_2 las volatilidades del precio spot y del convenience yield respectivamente y ρ es el coeficiente de correlación de los dos procesos estocásticos. Bajo la probabilidad neutral al riesgo, el modelo adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_1 dz_1^* \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho dt \end{aligned}$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo y λ es el precio de riesgo del convenience yield.

A partir de estos procesos se puede deducir que los precios de los futuros tienen que satisfacer la siguiente ecuación en diferencias parciales:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 F_{\delta\delta} + \sigma_1 \sigma_2 \rho S F_{S\delta} + (r - \delta) S F_S + [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda] F_\delta - F_T = 0$$

sujeto a la condición terminal: $F(S, \delta, 0) = S$.

La solución a esta ecuación diferencial (Jamshidian and Fein (1990) y Bjerksund (1991)) es la siguiente:

$$F(S, \delta, T) = S \exp \left[-\delta \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \left(r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} \right) T + \frac{1}{4} \frac{\sigma_2^2}{\kappa^3} \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{\kappa^3} + \left(\hat{\alpha} \kappa + \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa} \right) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa^2} \right]$$

donde:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

Los autores Cortazar y Schwartz (2003) presentan una modificación de este modelo con el objeto de reducir el número de parámetros a estimar. Definen dos nuevas variables de estado y y v . y la definen como la diferencia entre el convenience yield instantáneo, δ , y el convenience yield a largo plazo, α y v como la diferencia entre el rendimiento total a largo plazo, μ , y el convenience yield a largo plazo, α , (es decir la apreciación del precio a largo plazo):

$$y \equiv \delta - \alpha$$

$$v \equiv \mu - \alpha$$

El modelo se transforma en:

$$dS = (v - y)Sdt + \sigma_1 dz_1$$

$$dy = -\kappa y dt + \sigma_2 dz_2$$

$$dz_1 dz_2 = \rho dt$$

De este modo el rendimiento esperado instantáneo del spot viene definido como $(v-y)$ donde v se puede interpretar como el rendimiento del spot esperado a largo plazo e y como la desviación de los rendimientos de los precios spot de su valor a largo plazo. Esta definición de las variables permite una interpretación mucho mas intuitiva del modelo que la que nos proporciona el modelo con el convenience yield.

En este modelo los autores tratan ambos factores, S e y como variables estado no negociables por lo que, para escribirlo bajo la probabilidad neutral al riesgo asignan un precio de riesgo (risk premim) a cada factor (λ_i es el precio de riesgo del factor i). El modelo de dos factores modificado tiene la siguiente forma bajo la probabilidad neutral al riesgo:

$$dS = (v - y - \lambda_1)Sdt + \sigma_1 dz_1^*$$

$$dy = (-\kappa y - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^*$$

$$dz_1^* dz_2^* = \rho dt$$

El modelo de tres factores que presenta Schwartz (1997) añade al modelo de dos factores un tercer factor: el tipo de interés instantáneo, r . Supone que r sigue un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Bajo la medida neutral al riesgo el modelo de tres factores propuesto por Schwartz (1997) es el siguiente:

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_1 Sdz_1^* \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dr &= a(m^* - r)dt + \sigma_3 dz_3^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho_{12} dt; \quad dz_2^* dz_3^* = \rho_{23} dt; \quad dz_1^* dz_3^* = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

siendo a y m^* la velocidad de ajuste y el tipo de interés a corto plazo bajo la neutralidad al riesgo respectivamente.

Sin embargo, en este modelo, Schwartz (1997) no estima el tipo de interés libre de riesgo a partir de los precios de los forward sino de los precios de los bonos. Por este motivo, Cortazar y Schwartz (2003) proponen otro modelo de tres factores que tiene como base el modelo modificado de dos factores explicado anteriormente. Este modelo de tres factores introduce como tercer factor el rendimiento a largo plazo del precio del spot, v . Éste también sigue un proceso estocástico cuyo término a largo plazo al que revierte es $\bar{v}$ y con coeficiente de reversión a la media a y volatilidad σ_3 . En este tercer factor se incluyen las perturbaciones del tipo de interés libre de riesgo, pero no se limita únicamente a ellas.

La dinámica de las variables estado del modelo de tres factores de Cortazar y Schwartz (2003) es la siguiente:

$$\begin{aligned} dS &= (v - y)Sdt + \sigma_1 dz_1 \\ dy &= -\kappa y dt + \sigma_2 dz_2 \\ dv &= a(\bar{v} - v)dt + \sigma_3 dz_3 \\ dz_1 dz_2 &= \rho_{12} dt; \quad dz_2 dz_3 = \rho_{23} dt; \quad dz_1 dz_3 = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

Definiendo λ_i como el precio del riesgo del factor i , el modelo anterior se puede escribir, bajo la neutralidad al riesgo como:

$$\begin{aligned} dS &= (v - y - \lambda_1)Sdt + \sigma_1 Sdz_1^* \\ dy &= (-\kappa y - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dv &= a((\bar{v} - v) - \lambda_3)dt + \sigma_3 dz_3^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho_{12} dt; \quad dz_2^* dz_3^* = \rho_{23} dt; \quad dz_1^* dz_3^* = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

Con estas nuevas variables tenemos un modelo en términos de rendimientos a largo plazo, lo que significa que es un modelo que intenta explicar las variaciones de los precios spot a largo plazo.

Bajo este modelo, los precios de los futuros deben satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 F_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 S^2 F_{vv} + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}SF_{sy} + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}SF_{sv} + \sigma_2\sigma_3\rho_{23}SF_{yv} + \\ + (v - y - \lambda_1)SF_y + a((\bar{v} - v) - \lambda_3)F_v - F_T = 0 \end{aligned}$$

Sujeto a la condición de contorno: $F(S, y, v, T=0) = S$. La solución a esta ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} F(S, \delta, T) = S \exp \left[-y \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + v \frac{1 - e^{-aT}}{a} - \lambda_1 T + \frac{\lambda_2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\kappa^2} (\kappa T + e^{-\kappa T} - 1) \right. \\ \left. + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} (-e^{-2\kappa T} - 4e^{-\kappa T} + 2\kappa T - 3) + \frac{a\bar{v} - \lambda_3 + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}}{a^2} (aT + e^{-aT} - 1) \right. \\ \left. - \frac{\sigma_3^2}{4a^3} (-e^{-2aT} - 4e^{-aT} + 2aT + 3) - \frac{\sigma_2\sigma_3\rho_{23}}{\kappa^2 a^2 (\kappa + a)} (\kappa^2 e^{-aT} + \kappa a e^{-aT} + \kappa a^2 T) \right. \\ \left. + \kappa a e^{-\kappa T} - a^2 e^{-\kappa T} - \kappa a e^{-(\kappa+a)T} - \kappa^2 - \kappa a - a^2 + \kappa^2 a T \right] \end{aligned}$$

b) Estimación del modelo

Schwartz (1997) utiliza como método de estimación de los modelos el filtro de Kalman. Una de las ventajas que presenta utilizar este procedimiento, además de la estimación de los parámetros, es que proporciona intervalos de confianza. Sin embargo su implementación, además de ser algo compleja, necesita requerimientos, como que no haya observaciones vacías en los datos (algo particularmente frecuente en contratos de futuros), a veces difíciles de conseguir.

Por estos motivos Cortazar y Schwartz (2003) proponen un procedimiento de estimación más sencillo mediante una optimización por mínimos cuadrados ordinarios.

Para calibrar el modelo se utilizan precios de futuros de N fechas (en nuestro caso N será igual a 296, datos semanales desde el 1 de septiembre de 1997 hasta el 28 de abril de 2003) y por

cada fecha hay M_i contratos con diferentes vencimientos (en este caso M_i con $i = 1, \dots, 36$). El procedimiento de implementación, brevemente resumido, es el siguiente: con unos valores iniciales de los parámetros del modelo se utilizan los precios de los futuros para estimar las variables estado para cada fecha de todo el periodo de la muestra. Después, estas variables estado estimadas, junto con los precios de los futuros observados, se utilizan para estimar un nuevo conjunto de parámetros. Con este nuevo conjunto de parámetros se repite todo el procedimiento hasta que converja.

Dado un conjunto de parámetros Ω se pueden estimar las variables estado del modelo de tres factores para cada día i , como la solución del siguiente problema de optimización:

$$\{S(t_i), y(t_i), v(t_i)\} \in \arg \min_{S(t_i), y(t_i), v(t_i)} \sum_{j=1}^{M_j} \left(\ln \hat{F}_{ij}(S(t_i), y(t_i), v(t_i), T_j - t_j; \Omega) - \ln F_{ij} \right)^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{con } \Omega : \{\kappa, a, \bar{v}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}\}$$

donde $\hat{F}_{ij}$ es el precio del modelo y F_{ij} el precio de mercado observado en la fecha i con vencimiento j

Puesto que el logaritmo de los futuros en el modelo es lineal respecto a las variables estado, la ecuación anterior implica que el problema de estimación de las variables de estado no observables es equivalente a la realización de una simple regresión. Por lo tanto las variables estado no observables se pueden estimar dado unos precios de futuros observados y un valor inicial de los parámetros del modelo utilizando una regresión de mínimos cuadrados. Esta estimación de las variables estado utiliza toda la información disponible cada día

Para obtener el valor óptimo de los parámetros del modelo se ha de resolver el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\{\Omega\}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_j} \left(\ln \hat{F}_{ij}(S(t_i), y(t_i), v(t_i), T_j - t_j; \Omega) - \ln F_{ij} \right)^2$$

sujeto a : $\{S(t_i), y(t_i), v(t_i)\} \in \arg \min_{S(t_i), y(t_i), v(t_i)} \sum_{j=1}^{M_j} \left(\ln \hat{F}_{ij}(S(t_i), y(t_i), v(t_i), T_j - t_j; \Omega) - \ln F_{ij} \right)^2$

para $i = 1, 2, \dots, N$

Con la volatilidad, el coeficiente de correlación y los precios de riesgo consistentes con las series de las variables estado (en el procedimiento iterativo los coeficientes de correlación y las volatilidades de las variables estado se calculan de las series estimadas de estas variables).

En la práctica, dado que algunos de los parámetros pueden ser estimados directamente de las series de las variables estado estimadas, se puede reducir aún más el número de parámetros a estimar, simplificando así la estimación. Para hacer esto es necesario reescribir la ecuación de futuros.

Las variables estado son S , v e y aunque v e y modificadas del siguiente modo:

$$\hat{y} = y + \frac{\lambda_2}{\kappa}; \quad \hat{v} = v - \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\kappa}$$

Los siete parámetros a estimar ahora son:

$$\Omega': \{\kappa, a, \beta, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_{12}, \sigma_{23}\}$$

$$\text{siendo: } \beta = \frac{a\bar{v}^* - \lambda_3 + \sigma_{13}}{a^2}; \quad \bar{v}^* = \bar{v} - \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\kappa}; \quad \sigma_{13} = \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13};$$

Con estas modificaciones la ecuación de futuros se convierte en:

$$F(S, \delta, T) = S \exp\left[-\hat{y} \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \hat{v} \frac{1 - e^{-aT}}{a} + B(T)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{siendo } B(T) = & -\frac{\sigma_{12}}{\kappa^2} (\kappa T + e^{-\kappa T} - 1) + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} (-e^{-2\kappa T} + 4e^{-\kappa T} + 2\kappa T - 3) \\ & + \beta (aT + e^{-aT} - 1) - \frac{\sigma_3^2}{4a^3} (e^{-2aT} - 4e^{-aT} - 2aT + 3) - \\ & - \frac{\sigma_{23}}{\kappa^2 a^2 (\kappa + a)} (\kappa^2 e^{-aT} + \kappa a e^{-aT} + \kappa a^2 T + \kappa^2 a T + \kappa a e^{-\kappa T} \\ & + a^2 e^{-\kappa T} - \kappa a e^{-(\kappa+a)T} - \kappa^2 - \kappa a - a^2) \end{aligned}$$

Esta modificación simplifica considerablemente el procedimiento de estimación puesto que reduce el número de parámetros a siete. De forma análoga se puede realizar esta modificación para el modelo de dos parámetros y realizar el mismo procedimiento en la estimación. El número de parámetros en ese caso se reduce a cuatro.

4.2 Modelo curva forward.

Una de las desventajas de utilizar modelos basados en que el spot y otras variables de estado importantes (como el convenience yield, los tipos de interés, etc) siguen procesos estocásticos es que la curva de precios forward es una función endógena de los parámetros del modelo por lo que no es necesariamente consistente con los precios de mercado.

Para subsanar este problema algunos autores (Clewlow y Strickland (2000)) han propuesto otro método basado en la modelización de las curvas de los precios forward con múltiples fuentes de incertidumbre. Para ello utilizan la información contenida en la estructura de los precios de futuros así como las volatilidades implícitas de los rendimientos de los precios de los futuros con distintos vencimientos.

Siguiendo los pasos de Clewlow y Strickland (2000), en este trabajo se aplica este modelo para modelizar el comportamiento de los precios de los futuros del gas natural en Henry Hub que cotizan en NYMEX en el periodo comprendido entre el 2 de abril de 1990 y el 28 de abril de 2003.

a) Modelo

De manera general se puede representar el comportamiento de la curva de forwards con el siguiente modelo multifactorial:

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dz_i(t)$$

Donde $F(t, T)$ es la curva de forward, indicando el precio del forward en el momento t con vencimiento en la fecha T y $\sigma_i(t, T)$ con $i = 1 \dots n$ son las n “funciones de volatilidad” asociadas a las n fuentes de riesgo independientes entre sí $dz_i(t)$, $i = 1, \dots n$. Se puede observar que en este modelo no aparece el término de drift. Los autores justifican la ausencia de este término en base a que los contratos de futuros y forwards no tienen ningún coste inicial por lo que, bajo la medida neutral al riesgo, su rendimiento esperado ha de ser cero.

Relación entre la curva de forwards y los modelos de precios del subyacente.

Un modelo que describe la evolución de los precios de los forward, implícitamente también dice algo acerca de la evolución de los precios del subyacente. A continuación veremos la relación entre el proceso del subyacente y el proceso de evolución del forward. Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$F(t, T) = F(0, T) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i(u, T)^2 du + \int_0^t \sigma_i(u, T) dz_i(u) \right] \right\}$$

El precio del subyacente se puede interpretar como el precio del contrato forward con vencimiento inmediato, por lo que el proceso para el subyacente se puede obtener substituyendo en esta última ecuación T por t:

$$S(t) = F(t, t) = F(0, t) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i(u, t)^2 du + \int_0^t \sigma_i(u, t) dz_i(u) \right] \right\}$$

Si diferenciamos esta ecuación, obtenemos la ecuación diferencial estocástica para el subyacente:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left\{ \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t \sigma_i(u, t) \frac{\partial \sigma_i(u, t)}{\partial t} du + \int_0^t \frac{\partial \sigma_i(u, t)}{\partial t} dz_i(u) \right] \right\} dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, t) dz_i(u)$$

donde el término entre corchetes representa el drift, que, como se puede observar depende de una integral estocástica, por lo que se puede decir que, en general, el precio del subyacente seguirá un proceso no Markoviano (es decir, la evolución del precio del subyacente depende de su evolución pasada).

Considerando el caso particular en el que solo hay un factor ($n = 1$) y la “función de volatilidad” tiene la forma: $\sigma_1(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)}$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\partial \ln F(0, T)}{\partial t} + \alpha [\ln F(0, T) - \ln S] + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + \sigma dz(t)$$

es decir:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [\mu(t) - \alpha \ln S(t)] dt + \sigma dz(t)$$

$$\text{donde } \mu(t) = \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \alpha \ln F(0, t) + \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2\alpha t})$$

b) Estimación de los factores.

Un método que se puede utilizar para determinar los factores del modelo expuesto anteriormente es el del análisis de los componentes principales (PCA) o descomposición de la matriz de covarianzas en autovectores. Mediante este procedimiento se puede, simultáneamente, identificar el número de factores significativos y estimar las “funciones de volatilidad”.

Aplicando el lema de Itô a la ecuación general del modelo podemos obtener el proceso que siguen los logaritmos de los precios de los forward:

$$d \ln F(t, T) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T)^2 dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dz_i(t)$$

La discretización de esta ecuación para pequeños cambios en el tiempo es:

$$\Delta \ln F(t, t + \tau_j) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, t + \tau_j)^2 \Delta t + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, t + \tau_j) \Delta z_i(t)$$

Esta ecuación implica que los logaritmos de los precios forward, con vencimientos relativos τ_j , $j = 1 \dots m$, tienen una distribución conjunta normal. Se calcula la matriz de varianzas y covarianzas entre pares de rendimientos (diferencia de logaritmos) de los precios de los forward de una serie histórica de N elementos ($k=1 \dots N$) del modo estándar:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$$

siendo x_{ij} y x_{jk} elementos de la serie, definidos como:

$$x_{ik} = \ln[F(t_k, t_k + \tau_i)] - \ln[F(t_k - \Delta t, t_k + \tau_i - \Delta t)]$$

$\bar{x}_i, \bar{x}_j$ son las medias de la muestra.

Las “funciones de volatilidad” discretizadas, $\sigma_j(t, t+\tau_j)$, $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$, se pueden obtener mediante la descomposición de la matriz de varianzas y covarianzas de los $\Delta \ln F(t, t+\tau_j)$ (que llamaremos Σ) en n autovectores v_i y n autovalores asociados λ_i :

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma^T$$

siendo:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}; \quad y \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz Γ son los autovectores. Los autovalores representan las varianzas de los factores independientes que nos dan los precios forward con una proporción determinada por los autovectores. Las “funciones de volatilidad” se obtienen como:

$$\sigma_i(t, t + \tau_j) = v_{ji} \sqrt{\lambda_i}$$

5. DATOS

Se utilizan los precios semanales de los futuros del gas natural en Henry Hub que cotizan en NYMEX en el periodo comprendido entre el 1 de septiembre de 1997 y el 28 de abril de 2003 para estimar los modelos expuestos en el apartado anterior. En este periodo el número de contratos negociados cada día es 36 para todo el periodo. La tabla 1 describe estos precios de los futuros:

Tabla 1:

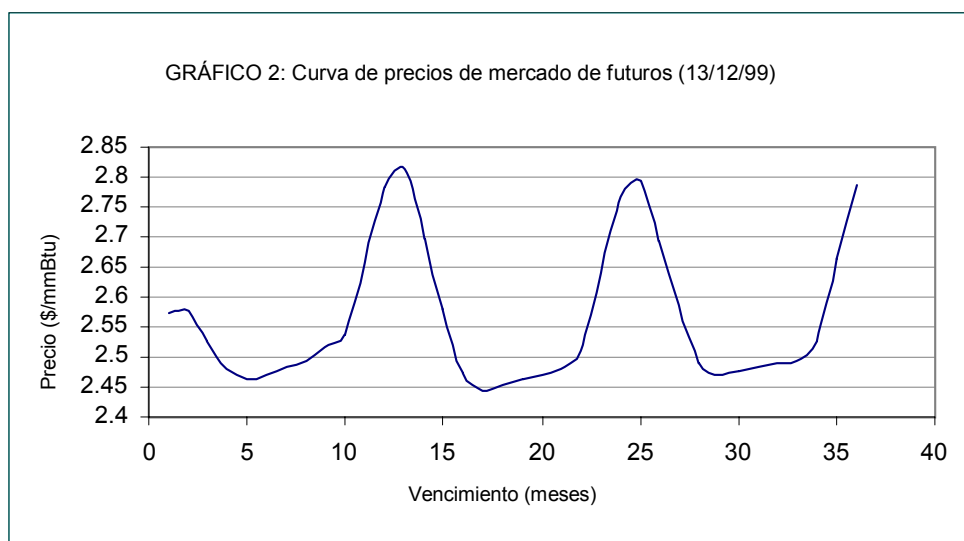
Tipo contratos de Futuros	Precio medio, US\$ (desviac. est.)	Tpo a vto medio, años (desviac. est.)	Número de Observaciones
M1	3.3684 (1.4909)	0.0617 (0.0382)	296
M2	3.4006 (1.3968)	0.1234 (0.0695)	296
M3	3.3881 (1.2500)	0.1860 (0.1005)	296
M4	3.3632 (1.1408)	0.2363 (0.1401)	296
M5	3.3503 (1.1059)	0.2997 (0.1713)	296
M6	3.3408 (1.0965)	0.3630 (0.2031)	296
M7	3.3353 (1.0963)	0.4220 (0.2314)	296
M8	3.3342 (1.0960)	0.4792 (0.2727)	296
M9	3.3337 (1.0918)	0.5437 (0.3013)	296
M10	3.3254 (1.0767)	0.5971 (0.3307)	296
M11	3.3097 (1.0456)	0.6511 (0.3789)	296
M12	3.2892 (1.0010)	0.7243 (0.3980)	296
M13	3.2707 (0.9528)	0.7887 (0.4421)	296
M14	3.2541 (0.9088)	0.8313 (0.4618)	296
M15	3.2317 (0.8691)	0.9167 (0.5008)	296
M16	3.2143 (0.8515)	0.9753 (0.5460)	296
M17	3.2013 (0.8441)	1.0049 (0.5746)	296
M18	3.1911 (0.8423)	1.0855 (0.5899)	296
M19	3.1851 (0.8455)	1.1747 (0.6248)	296
M20	3.1842 (0.8505)	1.2464 (0.6699)	296
M21	3.1833 (0.8511)	1.3007 (0.7149)	296
M22	3.1784 (0.8406)	1.3151 (0.7568)	296
M23	3.1712 (0.8189)	1.3391 (0.7682)	296
M24	3.1628 (0.7967)	1.4494 (0.7767)	296
M25	3.1548 (0.7777)	1.5461 (0.8055)	296
M26	3.1466 (0.7618)	1.6367 (0.8398)	296
M27	3.1358 (0.7509)	1.7187 (0.8810)	296
M28	3.1239 (0.7450)	1.7918 (0.9262)	296
M29	3.1146 (0.7432)	1.8422 (0.9842)	296
M30	3.1084 (0.7447)	1.8957 (1.0290)	296
M31	3.1064 (0.7493)	1.9405 (1.0699)	296
M32	3.1092 (0.7547)	1.9554 (1.1124)	296
M33	3.1122 (0.7561)	1.9806 (1.1368)	296
M34	3.1150 (0.7512)	1.9970 (1.1504)	296
M35	3.1167 (0.7394)	2.0593 (1.1528)	296
M36	3.1154 (0.7260)	2.1705 (1.1599)	296

En la segunda columna de esta tabla aparecen los precios medios de los contratos de futuros para cada vencimiento M_i , en la tercera el tiempo medio de vencimiento, medido en años, de todos

los contratos que tienen igual vencimiento y en la cuarta el número de datos de los que se dispone para cada uno de los vencimientos.

Cada vencimiento dura 30 días, es decir, si, por ejemplo, para una fecha dada un contrato finaliza en M_{20} el tiempo a vencimiento de ese contrato en esa fecha es de 600 días. La semana siguiente (la fecha siguiente puesto que son datos semanales) el tiempo a vencimiento de ese mismo contrato será de $600-7 = 593$ días y así sucesivamente hasta que han transcurrido los 600 días que dura el contrato.

Para visualizar el aspecto de la curva de futuros en una fecha determinada en la siguiente figura se representa esta curva de futuros del gas natural en Henry Hub del día 13 de diciembre de 1999. El eje x está representado por los distintos vencimientos de los contratos de futuros y el eje y por los precios de estos contratos:



6. RESULTADOS

6.1 Modelos spot.

El conjunto de datos se divide en dos partes. La primera comprende los contratos de forwards entre el 1 de septiembre de 1997 y el 30 de septiembre de 2002 y se utiliza para la calibración del modelo y el análisis in-sample del modelo. La segunda comprende el conjunto completo de datos, desde el 1 de septiembre de 1997 hasta el 28 de abril de 2003 y los datos de los últimos ocho meses (entre el 7 de octubre de 2002 y el 28 de abril de 2004) se utilizarán para hacer el análisis out-of-sample del modelo.

En la tabla 2 aparecen los valores de los parámetros estimados de los modelos de uno, dos y tres factores con el primer conjunto de datos (in-sample):

Tabla 2. Parámetros estimados con los datos in-sample (01/09/97-30/09/02)

Parámetros	Modelo 1 factor	Modelo 2 factores	Modelo 3 factores
κ	0.60527	1.59242	6.01195
a	-	-	0.06852
β	-	-	0.5
$\hat{\alpha}$	-	0.07865	-
α^*	0.82905	-	-
σ	0.47838	-	-
σ_2^2	-	0.00059	0.22814
σ_3^2	-	-	0.00576
σ_{12}	-	0.06472	-0.00314
σ_{23}	-	-	0.12097

Con estos valores estimados de los parámetros se han realizado las gráficas 3, 4 y 5 donde se representan las series de las variables de estado estimadas en cada modelo:

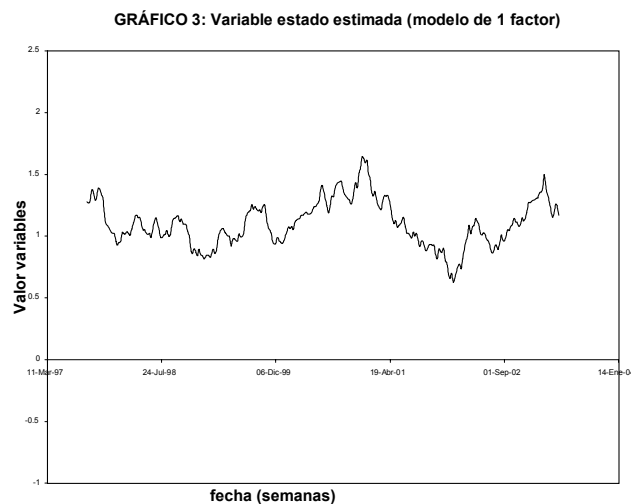


GRÁFICO 4: Variables estado estimadas (modelo de 2 factores)

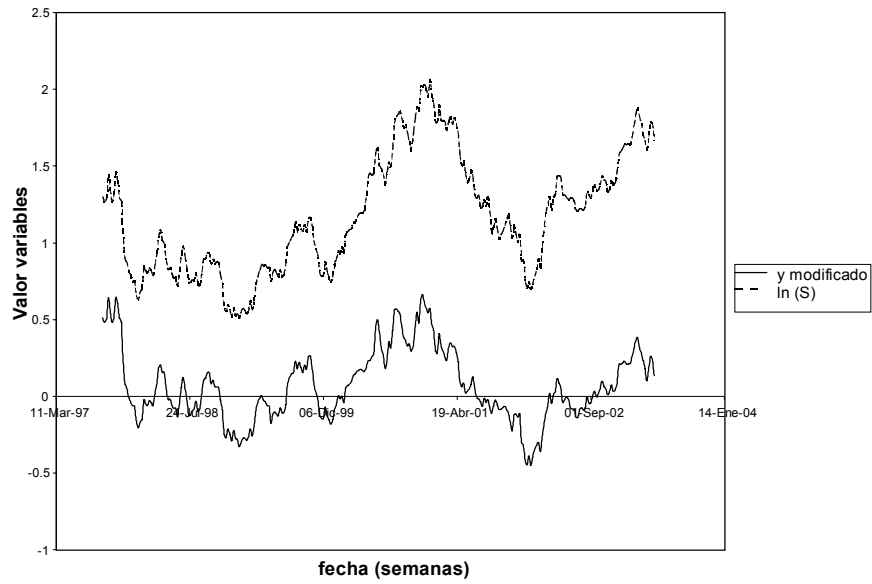
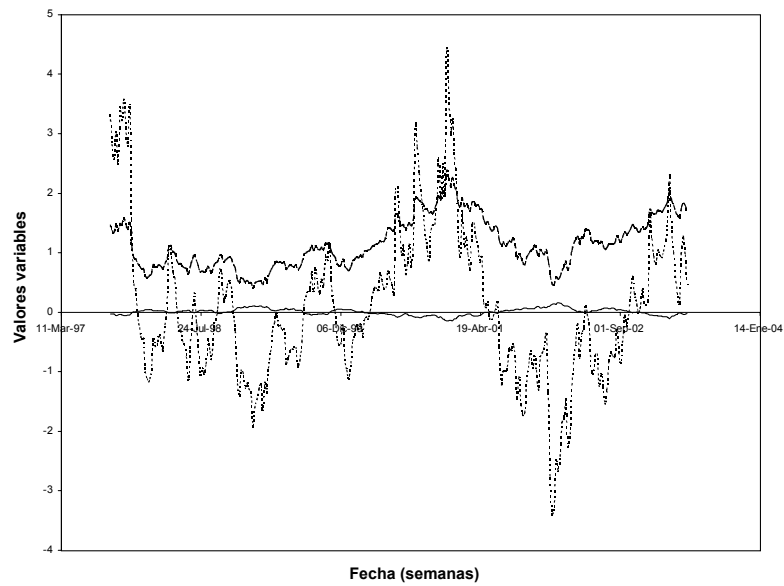


GRÁFICO 5: Variables estado (modelo de 3 factores)



Además, se han calculado los errores medios entre los precios de los forward del modelo y los precios forward de mercado en función del tiempo medio de vencimiento. En la gráfica 6 se representa, en \$, el error medio (EM) para los modelos de uno, dos y tres factores y en la gráfica 7 se representa, en %, el error absoluto medio (EAM) para los modelos de uno, dos y tres factores.

GRÁFICO 6: Error medio de los forwards (datos in-sample)

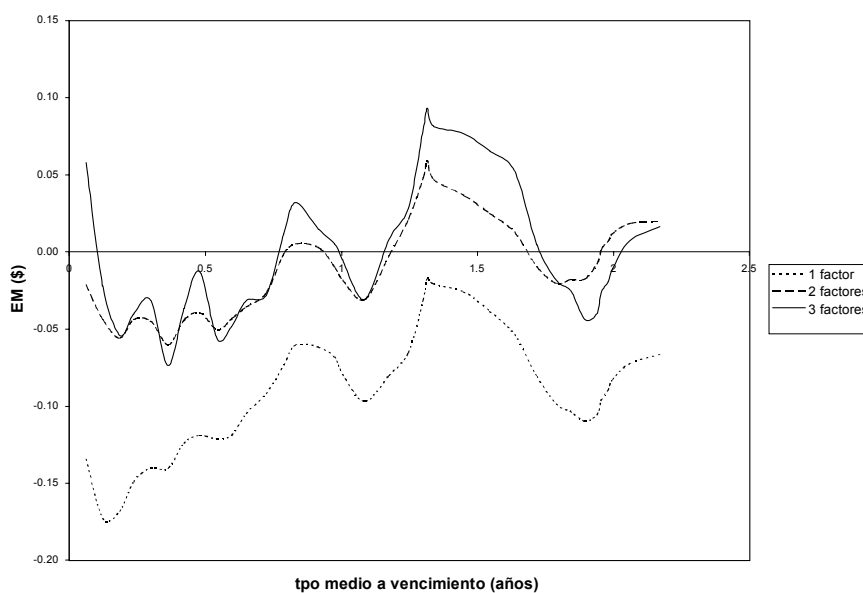
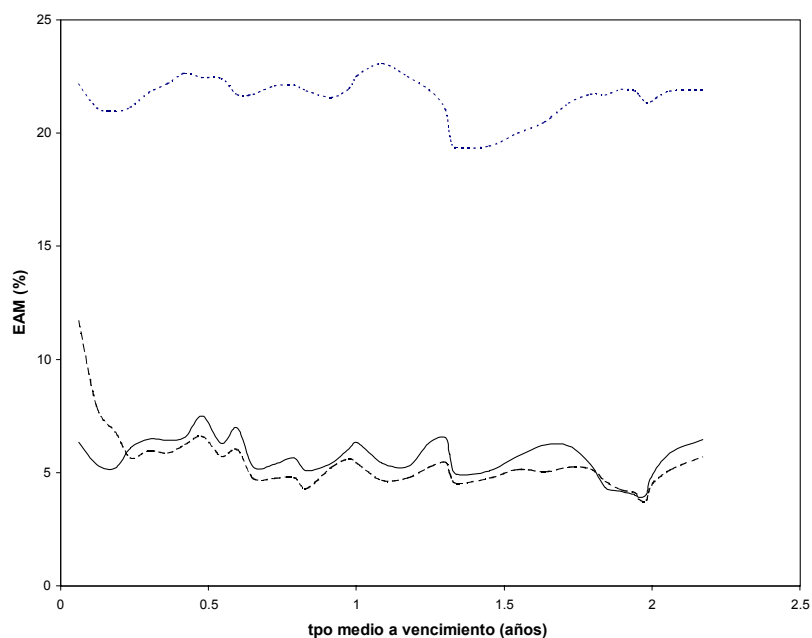


GRÁFICO 7: Error Absoluto Medio (datos in-sample)



Las tablas asociadas a estas gráficas son las 5, 6, 7, 8, 9 y 10, donde aparecen los valores de estos errores medios, medidos tanto en dólares como en tanto por ciento. Las dos primeras corresponden al modelo de un factor, la tercera y cuarta tabla corresponden al modelo de dos factores y las dos últimas al de tres factores. Un resumen de estas tablas se presenta a continuación en la tablas 3 y 4:

Tabla 3: Datos in-sample (01/09/97-30/09/02)

	1 factor			2 factores			3 factores		
	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)
Min.	0.57	19.34	-0.17	0.12	3.79	-0.06	0.12	3.91	-0.07
Max.	0.73	23.06	-0.02	0.42	11.68	0.06	0.26	7.50	0.09
Medio	0.66	21.57	-0.09	0.17	5.39	-0.01	0.18	5.64	0.00
desv.tip.	0.04	0.86	0.04	0.05	1.37	0.03	0.03	0.87	0.04

Tabla 4: Datos out-of-sample (07/10/02-28/04/03)

	1 factor			2 factores			3 factores		
	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)	EAM(\$)	EAM(%)	EM (\$)
Min.	0.67	16.02	-1.71	0.10	2.40	-1.00	0.10	2.32	-0.40
Max.	1.71	32.07	-0.67	1.00	17.55	0.42	0.62	15.80	0.47
Medio	1.10	24.31	-1.10	0.31	6.84	-0.02	0.29	6.51	-0.01
desv.tip.	0.28	4.25	0.28	0.15	2.75	0.31	0.12	2.94	0.22

En estas tablas se puede observar que los errores de los modelos de dos y tres factores, tanto en los datos in-sample como en los datos out-of-sample, están más acotados que el del modelo de un factor. Este mismo comportamiento se puede observar en el error medio: el error medio de los modelos de dos y tres factores son, en todos los casos, menores que el del modelo de un factor. Sin embargo cabe destacar que no existen diferencias considerables entre los errores (absoluto y medio) del modelo de dos factores y los del modelo de tres factores.

Esto nos indica que los modelos de dos y tres factores explican mejor el comportamiento de la serie de forward observada que el de un factor, algo lógico y esperado puesto que este último modelo tiene restricciones mucho mas fuertes que los modelos de dos y tres factores.

Tabla 5. Error absoluto medio (EAM) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de un factor.

Tipo de contrato forward	In-sample		Out-of-sample	
	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$
M1	0.73	22.13	1.71	32.07
M2	0.71	21.11	1.63	31.59
M3	0.70	20.96	1.51	30.15
M4	0.68	21.13	1.38	28.14
M5	0.70	21.79	1.33	27.11
M6	0.70	22.18	1.29	26.59
M7	0.71	22.64	1.32	27.10
M8	0.70	22.43	1.39	28.20
M9	0.71	22.41	1.46	29.35
M10	0.68	21.69	1.42	28.44
M11	0.67	21.71	1.39	28.17
M12	0.69	22.07	1.39	28.92
M13	0.68	22.11	1.35	28.91
M14	0.66	21.86	1.09	24.36
M15	0.65	21.56	1.10	25.15
M16	0.67	21.96	1.06	24.73
M17	0.69	22.53	0.77	18.17
M18	0.70	23.06	0.80	18.99
M19	0.68	22.48	0.92	21.62
M20	0.67	21.90	1.07	24.62
M21	0.63	21.02	1.19	26.87
M22	0.59	19.86	1.06	23.54
M23	0.57	19.34	0.90	20.60
M24	0.57	19.42	0.94	21.79
M25	0.59	19.99	0.97	22.86
M26	0.61	20.48	0.96	22.96
M27	0.64	21.30	0.92	22.51
M28	0.66	21.71	0.87	21.86
M29	0.65	21.67	0.85	21.76
M30	0.66	21.92	0.87	22.19
M31	0.66	21.86	0.93	23.56
M32	0.65	21.64	0.95	23.31
M33	0.64	21.34	0.83	19.46
M34	0.65	21.38	0.68	16.02
M35	0.66	21.85	0.67	16.15
M36	0.66	21.90	0.71	17.37

Tabla 6. Error medio (ME) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de un factor.

Tipo de contrato forward	F _{Teor.} -F _{observ}	
	In-sample	Out-of-sample
M1	-0.13	-1.71
M2	-0.17	-1.63
M3	-0.17	-1.51
M4	-0.15	-1.38
M5	-0.14	-1.33
M6	-0.14	-1.29
M7	-0.12	-1.32
M8	-0.12	-1.39
M9	-0.12	-1.46
M10	-0.12	-1.42
M11	-0.10	-1.39
M12	-0.09	-1.39
M13	-0.07	-1.35
M14	-0.06	-1.09
M15	-0.06	-1.10
M16	-0.07	-1.06
M17	-0.08	-0.77
M18	-0.10	-0.80
M19	-0.08	-0.92
M20	-0.07	-1.07
M21	-0.03	-1.19
M22	-0.02	-1.06
M23	-0.02	-0.90
M24	-0.03	-0.94
M25	-0.04	-0.97
M26	-0.05	-0.96
M27	-0.08	-0.92
M28	-0.10	-0.87
M29	-0.10	-0.85
M30	-0.11	-0.87
M31	-0.11	-0.93
M32	-0.10	-0.95
M33	-0.09	-0.83
M34	-0.08	-0.67
M35	-0.07	-0.67
M36	-0.07	-0.71

Tabla 7. Error absoluto medio (EAM) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de dos factores.

Tipo de contrato forward	In-sample		Out-of-sample	
	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$
M1	0.42	11.68	1.00	17.55
M2	0.29	7.86	0.48	9.13
M3	0.24	6.78	0.39	7.67
M4	0.19	5.66	0.27	5.34
M5	0.20	5.97	0.23	4.52
M6	0.19	5.86	0.23	4.35
M7	0.20	6.23	0.26	5.20
M8	0.22	6.60	0.35	6.61
M9	0.19	5.73	0.41	7.70
M10	0.20	6.01	0.35	6.54
M11	0.15	4.75	0.30	5.87
M12	0.16	4.75	0.39	7.78
M13	0.16	4.79	0.31	6.53
M14	0.13	4.30	0.33	7.41
M15	0.17	5.22	0.21	4.84
M16	0.18	5.62	0.10	2.40
M17	0.17	5.41	0.34	7.98
M18	0.14	4.67	0.26	6.10
M19	0.15	4.77	0.15	3.63
M20	0.17	5.24	0.11	2.69
M21	0.18	5.47	0.18	4.00
M22	0.16	4.95	0.31	7.14
M23	0.14	4.53	0.19	4.43
M24	0.15	4.77	0.19	4.42
M25	0.16	5.15	0.25	5.81
M26	0.16	5.05	0.30	7.16
M27	0.17	5.25	0.32	7.82
M28	0.16	5.18	0.32	7.95
M29	0.15	4.63	0.30	7.65
M30	0.14	4.24	0.28	7.29
M31	0.13	4.13	0.23	5.92
M32	0.12	3.82	0.25	6.50
M33	0.12	3.79	0.39	10.13
M34	0.13	4.45	0.47	11.64
M35	0.15	5.12	0.41	9.95
M36	0.17	5.72	0.35	8.47

Tabla 8. Error medio (ME) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de dos factores.

Tipo de contrato forward	F _{Teor.} -F _{observ}	
	In-sample	Out-of-sample
M1	-0.02	-1.00
M2	-0.04	-0.48
M3	-0.06	-0.39
M4	-0.04	-0.27
M5	-0.04	-0.23
M6	-0.06	-0.21
M7	-0.04	-0.23
M8	-0.04	-0.32
M9	-0.05	-0.40
M10	-0.04	-0.34
M11	-0.04	-0.30
M12	-0.03	-0.33
M13	0.00	-0.27
M14	0.01	-0.01
M15	0.00	-0.04
M16	-0.01	0.03
M17	-0.02	0.32
M18	-0.03	0.26
M19	0.00	0.14
M20	0.02	0.02
M21	0.05	-0.06
M22	0.06	0.05
M23	0.05	0.19
M24	0.04	0.12
M25	0.02	0.09
M26	0.01	0.12
M27	-0.01	0.18
M28	-0.02	0.25
M29	-0.02	0.29
M30	-0.02	0.28
M31	-0.01	0.22
M32	0.00	0.20
M33	0.01	0.30
M34	0.01	0.42
M35	0.02	0.41
M36	0.02	0.35

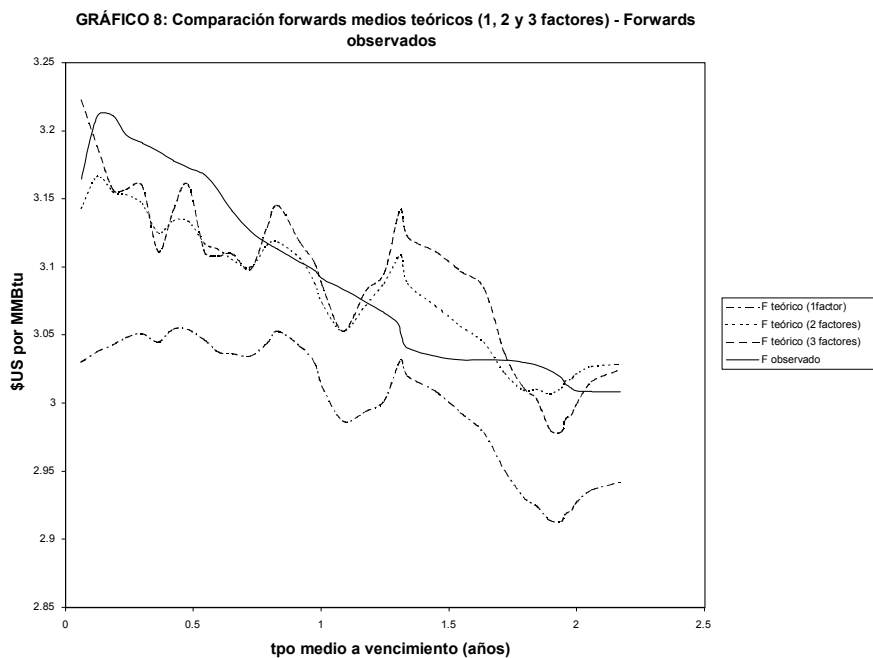
Tabla 9. Error absoluto medio (EAM) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de tres factores.

Tipo de contrato forward	In-sample		Out-of-sample	
	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$	$F_{\text{Teor.}} - F_{\text{observ}}$	$F_{\text{teor.}} - F_{\text{ob}} / F_{\text{ob}} (\%)$
M1	0.21	6.35	0.28	4.71
M2	0.20	5.36	0.27	5.30
M3	0.19	5.20	0.30	5.84
M4	0.21	6.09	0.28	5.28
M5	0.23	6.50	0.28	5.42
M6	0.21	6.43	0.27	5.17
M7	0.22	6.58	0.26	5.26
M8	0.26	7.50	0.43	8.26
M9	0.20	6.29	0.44	8.36
M10	0.24	6.98	0.34	6.45
M11	0.17	5.26	0.29	5.49
M12	0.18	5.38	0.40	8.00
M13	0.19	5.66	0.32	6.79
M14	0.16	5.09	0.36	7.90
M15	0.17	5.42	0.22	5.12
M16	0.19	6.06	0.14	3.28
M17	0.19	6.32	0.41	9.61
M18	0.16	5.43	0.24	5.59
M19	0.17	5.27	0.11	2.72
M20	0.21	6.32	0.10	2.32
M21	0.22	6.54	0.27	6.08
M22	0.19	5.82	0.48	10.90
M23	0.16	4.94	0.24	5.44
M24	0.16	5.09	0.19	4.41
M25	0.18	5.73	0.26	6.14
M26	0.20	6.23	0.30	7.24
M27	0.19	6.19	0.28	6.90
M28	0.16	5.36	0.21	5.25
M29	0.13	4.34	0.14	3.46
M30	0.13	4.18	0.11	2.94
M31	0.12	4.03	0.11	2.76
M32	0.12	3.91	0.31	8.10
M33	0.12	4.04	0.62	15.80
M34	0.15	4.82	0.58	14.03
M35	0.18	5.86	0.42	10.16
M36	0.20	6.48	0.33	8.02

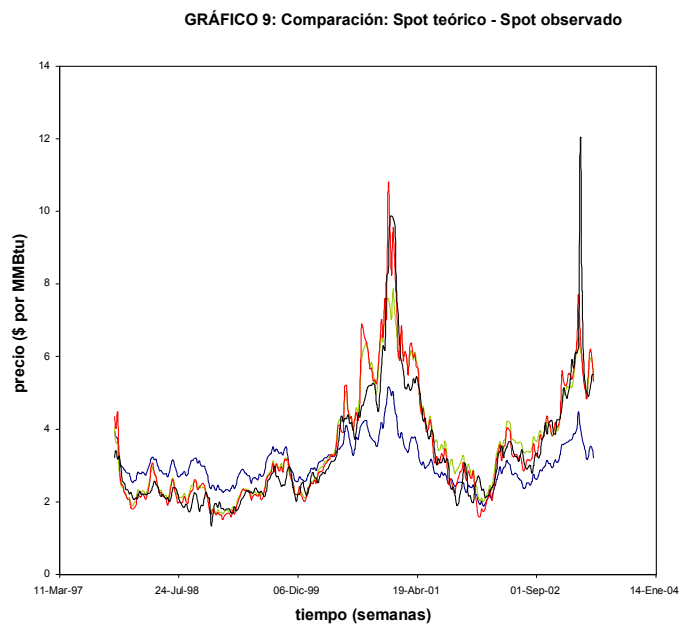
Tabla 10. Error medio (ME) para los datos in-sample (01/09/97-30/09/02) y out-of-sample (07/10/02-28/04/03). Modelo de tres factores.

Tipo de contrato forward	F _{Teor.} -F _{observ}	
	In-sample	Out-of-sample
M1	0.06	-0.22
M2	-0.02	-0.21
M3	-0.05	-0.24
M4	-0.04	-0.09
M5	-0.03	-0.12
M6	-0.07	-0.11
M7	-0.04	-0.21
M8	-0.01	-0.26
M9	-0.06	-0.40
M10	-0.05	-0.34
M11	-0.03	-0.14
M12	-0.03	-0.36
M13	0.01	-0.23
M14	0.03	0.00
M15	0.01	-0.07
M16	0.01	-0.01
M17	-0.01	0.39
M18	-0.03	0.24
M19	0.01	0.11
M20	0.03	-0.05
M21	0.08	-0.17
M22	0.09	0.08
M23	0.08	0.24
M24	0.08	0.10
M25	0.07	0.05
M26	0.05	0.06
M27	0.00	0.09
M28	-0.02	0.12
M29	-0.02	0.11
M30	-0.04	0.06
M31	-0.04	-0.04
M32	-0.03	-0.05
M33	-0.02	0.22
M34	-0.01	0.47
M35	0.01	0.42
M36	0.02	0.33

A continuación, en la siguiente gráfica (gráfica 8), se comparan los precios de los forward medios en cada vencimiento de los dos modelos teóricos y de los precios forward observados.



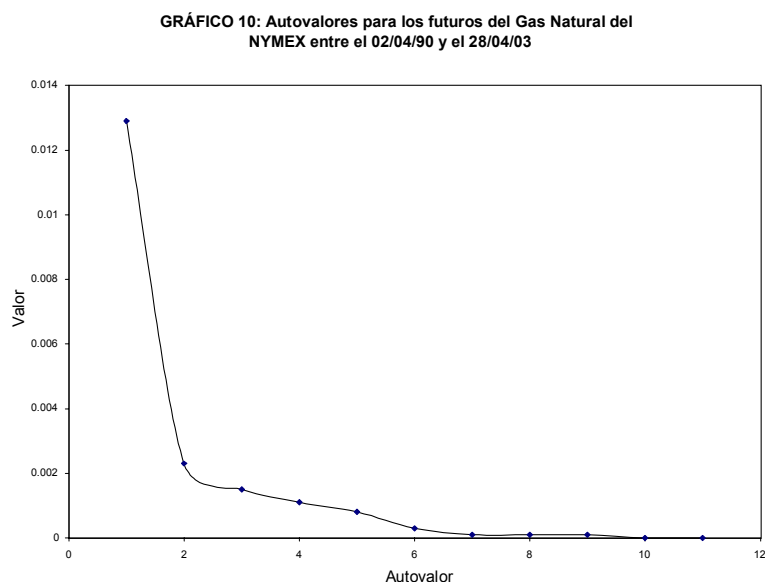
En el siguiente gráfico (gráfico 9) representamos los valores de los precios spot calculados con los tres modelos así como la serie de spots de mercado en el periodo comprendido entre el 27 de octubre de 1997 y el 28 de abril de 2003:



En ambos gráficos (8 y 9) se puede ver a primera vista que los modelos de dos y tres factores se ajustan mucho mejor a los datos observados en el mercado que el modelo de un factor, tanto para los precios de los contratos forward como para los precios spot.

6.2 Modelo curva forward.

Para la estimación del modelo explicado en el apartado 4.2. se ha utilizado los once primeros contratos de la curva de forwards del gas natural en Henry Hub que cotizan en NYMEX en el periodo comprendido entre el 2 de abril de 1990 y el 28 de abril de 2003. Siguiendo los pasos explicados en el apartado 4.2. y utilizando el programa Matlab, se ha construido la tabla de rendimientos y la matriz de varianzas y covarianzas. Ésta se ha descompuesto en la matriz de autovectores y la matriz diagonal con los autovalores. Para determinar el número de factores significativos, se han representado en una gráfica el valor de los autovalores (Gráfico 10):



Esta figura nos indica que el primer autovalor (por lo tanto la primera “función de volatilidad”) es el más importante, explicando el 67,3% de la variación total de la curva de forwards. Puesto que los tres primeros autovalores (factores) explican el 86,7% del total consideramos significativos únicamente los tres primeros factores del modelo, es decir el modelo general se quedaría del siguiente modo:

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i(t,T) dz_i(t)$$

El cual equivaldría al siguiente:

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma(t,T)dz(t)$$

donde $\sigma(t,T)$ representa la volatilidad del proceso del forward y se calcularía del siguiente modo:

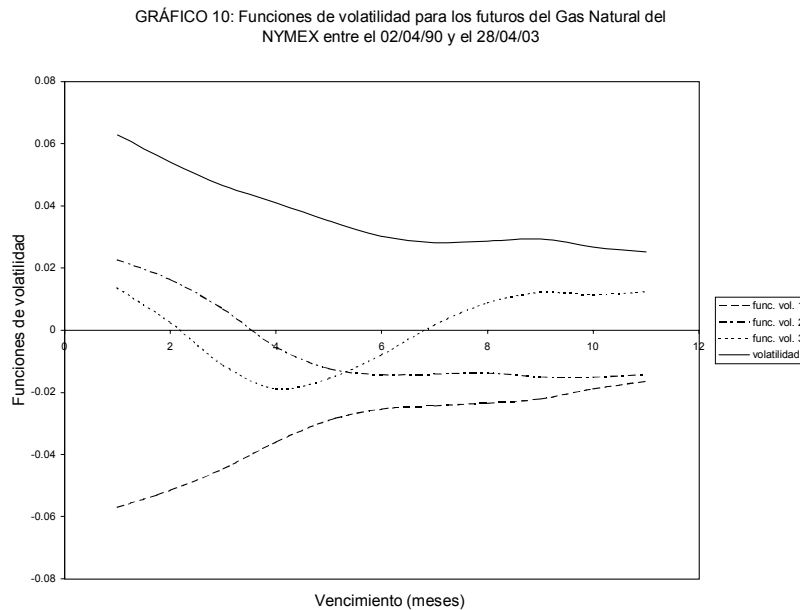
$$\sigma(t,T) = \sqrt{\sigma_1^2(t,T) + \sigma_2^2(t,T) + \sigma_3^2(t,T)}$$

Los valores de las “funciones de volatilidad” y la “volatilidad” del proceso calculadas se presentan en la tabla 11:

Tabla 11.

Vencimientos	$\sigma_1(t,T)$	$\sigma_2(t,T)$	$\sigma_3(t,T)$	$\sigma(t,T)$
M1	-0.057	0.0227	0.0136	0.0628
M2	-0.0515	0.0163	0.0024	0.0541
M3	-0.0446	0.0068	-0.0113	0.0465
M4	-0.036	-0.0054	-0.0188	0.0410
M5	-0.029	-0.0123	-0.0155	0.0351
M6	-0.0254	-0.0143	-0.0079	0.0302
M7	-0.0243	-0.0141	0.0017	0.0281
M8	-0.0235	-0.0138	0.0088	0.0286
M9	-0.0221	-0.015	0.0121	0.0293
M10	-0.0189	-0.0151	0.0114	0.0267
M11	-0.0165	-0.0143	0.0123	0.0251

En la gráfica 10 se representan las “funciones de volatilidad” y la “volatilidad”:



Se puede observar que el factor primero, el más importante, tiene un valor negativo en todos los vencimientos, lo que significa que un shock positivo de este factor en el sistema haría un efecto negativo en los precios de los forwards. El segundo factor sin embargo es positivo durante los primeros meses de vencimiento lo que significa que un shock positivo de este factor sobre el sistema tendría un efecto positivo en los precios de los forward durante los primeros meses de vencimiento y un efecto negativo en los últimos meses. Un shock positivo en el tercer factor, sin embargo tendría un efecto positivo para los precios de los forward con vencimientos pequeños y muy grandes y un efecto negativo en los precios de los forward con vencimientos intermedios.

7. CONCLUSIONES

Este trabajo, en primer lugar, estudia el comportamiento de la serie precios semanales del gas natural. El resultado de este estudio nos lleva a proponer un modelo AR(1) con constante como el modelo que mejor se ajusta a las características de la serie de precios. Sin embargo, para la serie log-precio se encuentra evidencia de la existencia de heterocedasticidad dinámica y el estudio de esta serie nos lleva a proponer como modelo candidato sobre la serie log-precio un modelo AR(1) con constante y estructura GARCH (1,1).

En segundo lugar, como parte más importante del trabajo, se modeliza el comportamiento de los futuros del gas natural para distintos vencimientos. Se utilizan dos tipos de modelos. En unos se modelizan los precios de contratos de futuros a partir de modelos spot y en otros a partir de la curva forward. Los modelos spot estimados son de uno, dos y tres factores de riesgo obteniéndose que los de dos y tres factores son los que mejor se ajustan a los precios de futuros observados, si bien no hay suficiente evidencia que nos permita destacar uno de otro como mejor modelo. Cabe señalar la simplicidad del procedimiento utilizado para la estimación de estos modelos.

El modelo que intenta explicar el comportamiento de los precios de futuros a partir de la misma curva forward nos da tres factores de riesgo que afectan a dichos precios. Este modelo está anidado dentro del modelo spot de un factor. Para comparar los dos tipos de modelos se podría calcular la volatilidad teórica de los precios de futuros obtenida mediante los modelos spot y comparar ésta con la obtenida con los modelos curva forward.

REFERENCIAS.

Clewlow, L., Strickland C. (2000), "Energy derivatives: Pricing and Risk Management" cap. 1,2,3,4,5,6,7 y 8, ed. Lacima.

Cortazar, G., Schwartz, E., (2003), "Implementing a stochastic model for oil futures prices", Energy Economics

Escribano, A., Peña, J.I., Villaplana, P., (2002), "Modeling electricity prices: international evidence", working paper, Universidad Carlos III de Madrid.

Lucia, J., Schwartz, E.S., (2001) "Electricity prices and power derivatives. Evidence from the Nordic Power Exchange", Review of derivatives exchange.

Schwartz, E.S., (1997) "The Stochastic behaviour of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", The Journal of Finance.

Villaplana, P., (2003), "Pricing power derivatives: a two- factor jump-diffusion approach", working paper, Universidad Carlos III de Madrid