

Econometría de Económicas

Caso 2.- Función de Producción Cobb- Douglas

Prof. Amparo Sancho©

El objetivo de este ejercicio es practicar los primeros conocimientos básicos de econometría con la función de producción más clásica del análisis económico. Se verá como los conocimientos previos que el alumno debe tener de teoría económica pueden corroborarse de modo empírico (con datos extraídos de la realidad económica) a través de la econometría.

En concreto, en este primer ejercicio se hará especial hincapié en la linealización del modelo y en los contrastes de hipótesis que deberán emplearse a partir de ahora en todas los casos prácticos de econometría. Por ello, por ser un ejercicio de iniciación, no deben tomarse como correctos los posibles resultados del ejercicio. Todo lo que se haga aquí deberá estar sujeto a revisión con los conceptos de los temas posteriores. Así, queda para el alumno esta apasionante tarea.

Datos empíricos

Este ejercicio se implementará para cuatro países: **Francia, España, EEUU y Japón.**

Periodo 1960 –2001 con datos anuales de la base de Datos de la OECD¹ de la sección “Economic Outlook”

Como variable renta se ha tomado el PIB a precios constantes y Paridad del Poder de Compra (PPA) en MN\$ del 93.

Como capital se ha tomado el stock de capital estimado² para los países, también a precios constantes y PPA en MN\$ del 93.

Como empleo se ha tomado en número de ocupados en miles de personas.

¹ A la base de datos de la OECD se puede acceder desde la página de la Biblioteca de la Universidad de Valencia. Los datos son privados, pero la Universidad tiene comprados los derechos y puede accederse a ellos desde el servidor de la Universidad.

² El stock de capital no es un dato de Contabilidad Nacional y por lo tanto es una estimación por el método de inventario permanente. No todos los países lo tienen calculado, sólo los que tienen más tradición en el desarrollo de las estadísticas del país. Por tanto, siempre que se trabaje con estos datos debe tenerse especial cuidado y asegurarse previamente de que son correctos.

Es importante notar que todos los datos monetarios están expresados en valores constantes y homogeneizada la serie en PPA y en dólares del 93. Esto nos permitirá trabajar sin las perturbaciones nominales causadas por los precios y además podremos hacer comparaciones entre países.

Función de producción Cobb – Douglas

La función de producción Cobb – Douglas es quizás la función de producción más utilizada en economía, basando su popularidad en su fácil manejo y el cumplimiento de las propiedades básicas que los economistas consideran deseables. Es la función de producción neoclásica por excelencia.

Se debe su existencia a Paul Douglas y su amigo matemático Charles Cobb. Douglas fue senador por Illinois desde 1949 hasta 1966, pero antes de dedicarse a la política, había sido profesor de economía. En 1927 descubrió un hecho realmente sorprendente: la distribución de la renta entre trabajo y capital en EEUU se había mantenido más o menos constante a lo largo del tiempo. Concretamente, el trabajo se llevaba el 70% de las rentas y el capital el 30%. Al observar esto acudió a su amigo matemático Cobb y le preguntó si había alguna función de producción que mantenía las participaciones constantes en los factores. La función que resultó fue la siguiente:

$$Y_t = A K_t^\alpha L_t^\beta ; \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha, \beta < 1$$

Y_t : Producción

A : progreso técnico exógeno.

K_t : Stock de capital

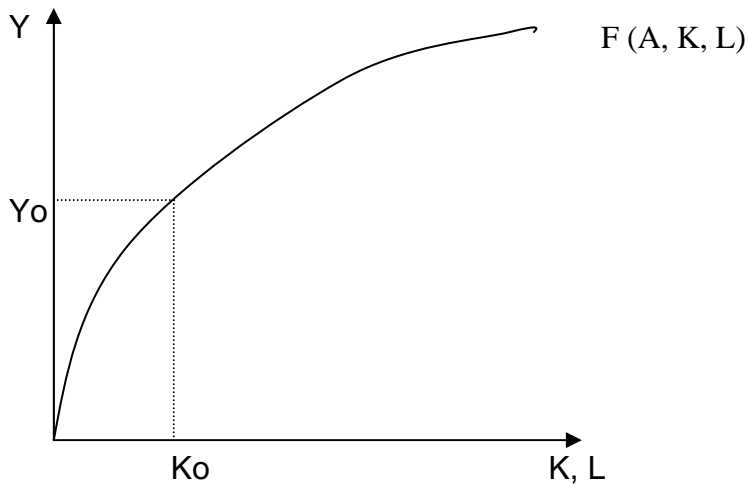
L_t : número de empleados en una economía

En esta función formalizada por Cobb-Douglas, α y β son los parámetros que representan el peso de los factores K y L (factores productivos) en la distribución de la renta. A es el progreso técnico o Productividad total de los factores (PTF). La PTF no es una variable directamente observable, pues representa un estado no cuantificable formado por factores tales como: la organización empresarial, los conocimientos de los empresarios y trabajadores o el nivel de aplicación de tecnología. Por tanto, esta función de producción está compuesta por dos factores productivos que se mantiene constantes en el tiempo y un factor adicional (progreso técnico).

La idea de la función de producción es muy intuitiva, pues representa combinaciones de los factores capital, trabajo, y que satisface las propiedades de:

- Rendimientos constantes a escala (homogeneidad de grado 1). Es decir, si el capital y el trabajo se incrementan en la misma proporción, la producción aumentará también en la misma proporción.
- Productividad marginal positiva y decreciente. Esta función es la que introduce el postulado más básico de la economía clásica, los rendimientos marginales decrecientes, tanto de capital como del trabajo.

Bajo estos supuestos básicos la función de producción de Cobb-Douglas toma la siguiente forma:



En este caso 2, se plantea contrastar empíricamente este modelo, en el horizonte temporal 1960-2001, para los países de España, Francia, EEUU y Japón. La información utilizada es la que proporciona la base de datos de la OECD "Economic Outlook".

Se ha utilizado como variables las siguientes:

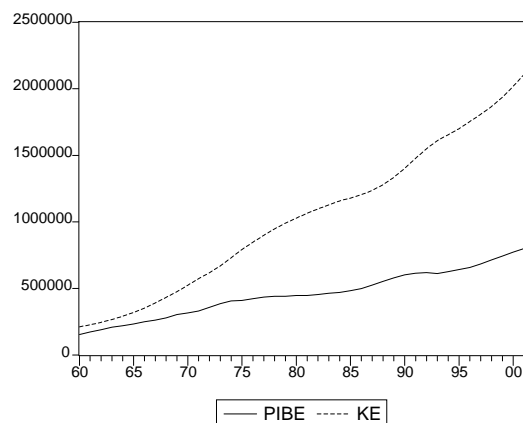
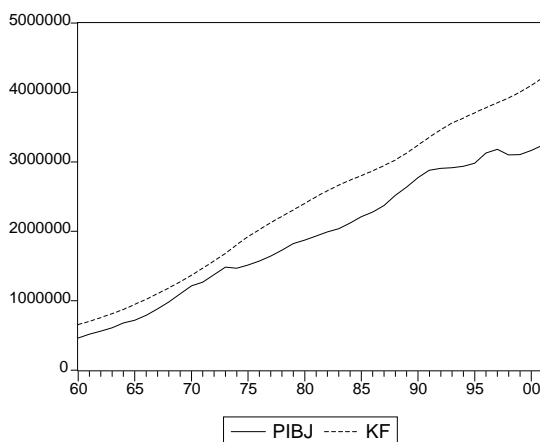
Como medida de la producción se ha utilizado el PIB a precios constantes y PPA en MN \$ de 1993.

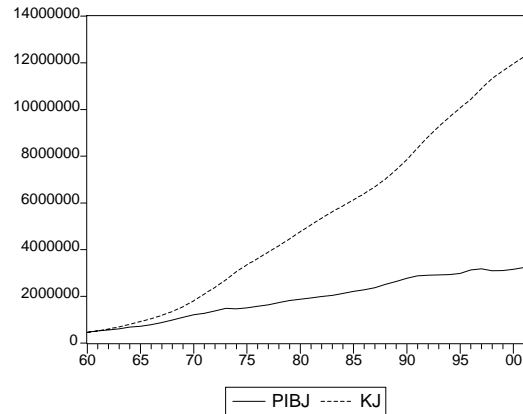
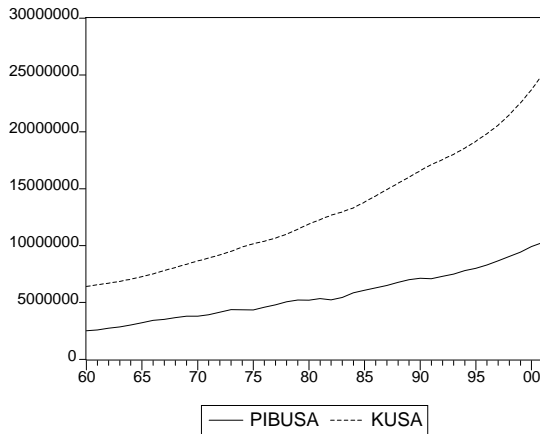
Como medida del stock de capital (K), el stock de capital a precios constantes y PPA en MN \$ de 1993.

Como medida del empleo (LD) el empleo (ocupados) en miles de personas.

Representación de las variables

En todo ejercicio práctico es interesante realizar una representación de las variables gráficamente. Esto es muy importante ya que la representación gráfica permitirá ver la evolución de las variables elegidas así como detectar posibles errores.





Linealización de la función

Para la estimación del modelo por m.c.o. hay que partir de una función lineal en los parámetros. Dado que la función de Cobb-Douglas no cumple esta condición es necesario realizar un proceso de linealización. La transformación más usual es tomar logaritmos en la función.

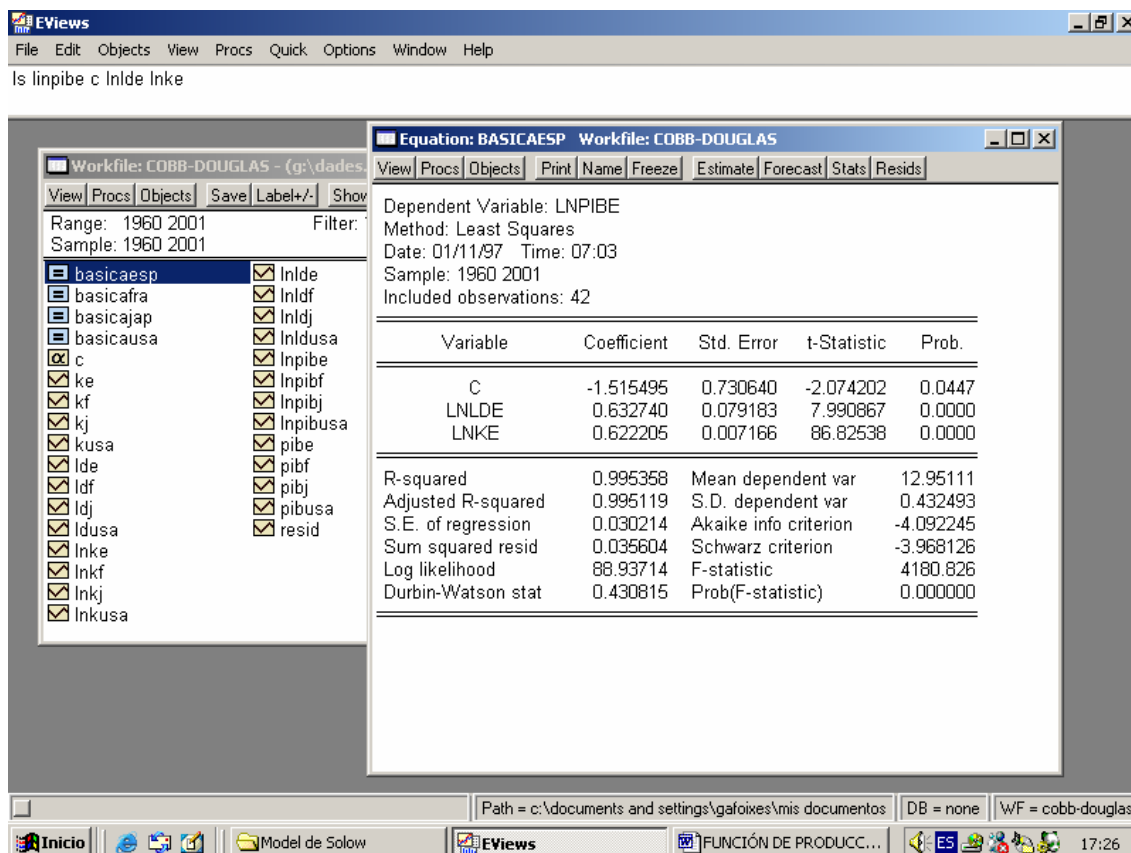
$$Y_t = A K_t^\alpha L_t^\beta e^{u_t} ; \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha, \beta < 1$$

Aplicando logaritmos neperianos a la ecuación:

$$\ln(Y_t) = \ln(A) + \beta \ln(L_t) + \alpha \ln(K_t) + u_t$$

Esta la nueva forma funcional sobre la que se realizará la estimación del modelo. Como se puede demostrar los parámetros de esta ecuación, α y β , son las elasticidades. α es la elasticidad producción-capital y el parámetro β es la elasticidad producción-empleo.

Estimaciones para España



Los resultados para España muestran que la elasticidad producción-capital para el periodo analizado es de 0.6327; que viene dada por el coeficiente que acompaña al logaritmo del stock de capital. La elasticidad producción-empleo es de 0.6222.

Se puede apreciar como ambas variables son significativas individualmente como muestra los estadísticos *t* de Student.

Bajo el supuesto de normalidad, y conocida la varianza de cada una de las variables, el estadístico *t de student* se expresa:³

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S(\hat{\beta}_i)}$$

donde $S(\hat{\beta}_i)$ es la desviación típica del estimador

El intervalo de confianza para β_i se expresaría de forma siguiente:

$$\text{Probabilidad} \left[-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S(\hat{\beta}_i)} \leq t_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

³ Todos los contrastes que se hagan a partir de ahora deben tomarse con precaución, pues los supuestos en los que se basan están sujetos a la validación de la hipótesis básicas. En capítulos posteriores se realizarán las violaciones pertinentes de las hipótesis básicas y sus correcciones.

Para el caso concreto del coeficiente de lnke, y con una confianza del 95% (el valor crítico es 2.021), calculamos el intervalo de β_i :

$$\left[\hat{\beta}_i - t_{x/2} S(\hat{\beta}_i) \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{x/2} S(\hat{\beta}_i) \right] = [0,622 - 2.021(0.007166) \leq \beta_i \leq 0,622 + 2.021(0.007166)] = [0,6077 \leq \beta_i \leq 0,6366]$$

De este modo, $H_0 : \beta_i = 0$ es rechazada

Significatividad global del modelo

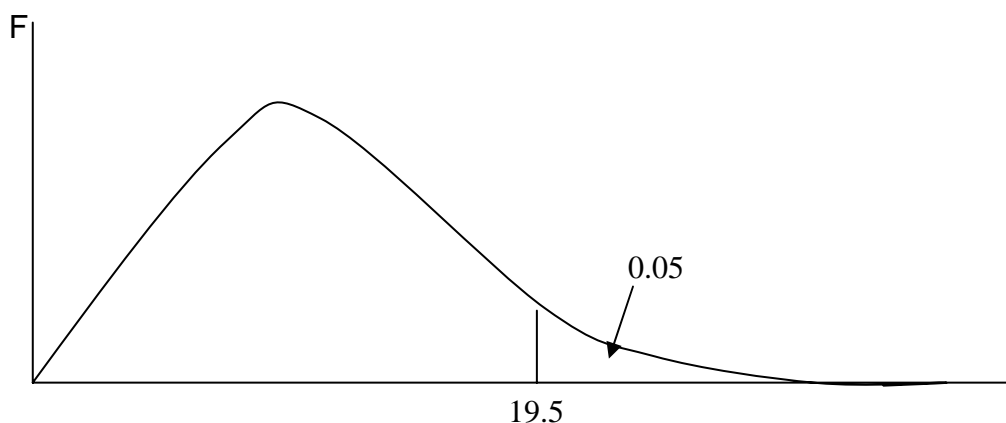
Para ello se contrasta la hipótesis: $H_0: \alpha = \beta = 0$.con el fin de comprobar si todas las variables del modelo son significativas conjuntamente; es decir, si el modelo es significativo. A priori, se debe suponer que sí lo es, pues si todas los parámetros individualmente son significativos, también lo será el modelo en su conjunto. Sin embargo, algo puede perturbar esta lógica y que habría que analizar. Para ello se contrasta con el test F Snedecor que aparece en la pantalla de la estimación.

$$F = \frac{SCE/(k-1)}{SCR/(n-k)} ; \text{ donde } k: \text{ número total de parámetros estimados del modelo.}$$

Este contraste también puede hacerse con $F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$. En el caso de

la estimación para España,

$$F = \frac{0.995358/(3-1)}{(1-0.995358)/(42-3)} = 4181.826$$



Estimación del modelo para Francia

EViews - [Equation: BASICAFRA Workfile: COBB-DOUGLAS]

File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help

View Procs Objects Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LNPIBF
 Method: Least Squares
 Date: 01/11/97 Time: 07:03
 Sample: 1960 2001
 Included observations: 42

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-6.089623	1.661274	-3.665634	0.0007
LNLDJ	1.173328	0.188710	6.217637	0.0000
LNKF	0.555426	0.016182	34.32310	0.0000

R-squared	0.997796	Mean dependent var	13.70864
Adjusted R-squared	0.997683	S.D. dependent var	0.363651
S.E. of regression	0.017506	Akaike info criterion	-5.183785
Sum squared resid	0.011952	Schwarz criterion	-5.059666
Log likelihood	111.8595	F-statistic	8826.461
Durbin-Watson stat	0.279656	Prob(F-statistic)	0.000000

Path = c:\documents and settings\galoixes\mis documentos DB = none WF = cobb-douglas

Inicio Model de Solow FUNCIÓN DE PRODUCC... EViews - [Equation: B... 17:13

Analice la significatividad individual y conjunta de las variables.

Estimación del modelo para Japón:

EViews - [Equation: BASICAJAP Workfile: COBB-DOUGLAS]

File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help

View Procs Objects Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LNPIBJ
 Method: Least Squares
 Date: 01/11/97 Time: 07:03
 Sample: 1960 2001
 Included observations: 42

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.489363	2.248318	0.217657	0.8288
LNLDJ	0.550983	0.247044	2.230305	0.0316
LNKJ	0.517023	0.030702	16.83998	0.0000

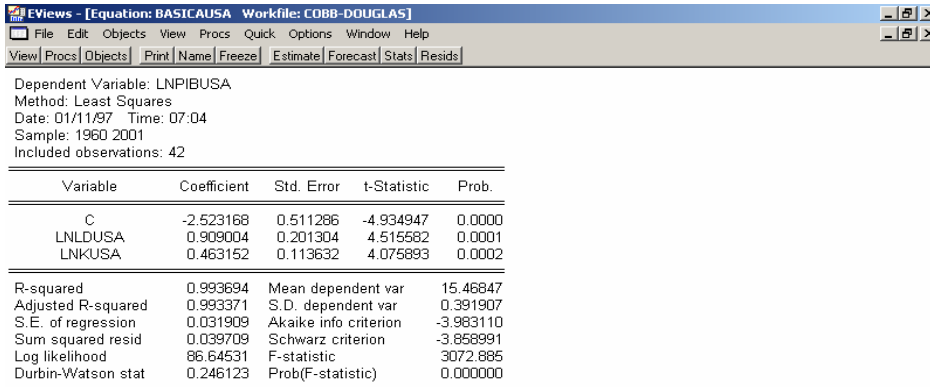
R-squared	0.994876	Mean dependent var	14.33011
Adjusted R-squared	0.994613	S.D. dependent var	0.574312
S.E. of regression	0.042153	Akaike info criterion	-3.426294
Sum squared resid	0.069297	Schwarz criterion	-3.302175
Log likelihood	74.95217	F-statistic	3785.914
Durbin-Watson stat	0.294291	Prob(F-statistic)	0.000000

Path = c:\documents and settings\galoixes\mis documentos DB = none WF = cobb-douglas

Inicio Model de Solow FUNCIÓN DE PRODUCC... EViews - [Equation: B... 17:13

Analice la significatividad conjunta e individual de las variables del modelo en este país.

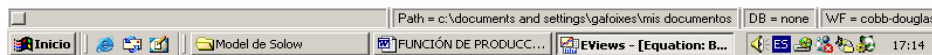
Estimación del modelo para EEUU:



Dependent Variable: LNPIBUSA
 Method: Least Squares
 Date: 01/11/97 Time: 07:04
 Sample: 1960 2001
 Included observations: 42

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.523168	0.511286	-4.934947	0.0000
LNLDUSA	0.909004	0.201304	4.515582	0.0001
LNKUSA	0.463152	0.113632	4.075893	0.0002

R-squared	0.993694	Mean dependent var	15.46847
Adjusted R-squared	0.993371	S.D. dependent var	0.391907
S.E. of regression	0.031909	Akaike info criterion	-3.983110
Sum squared resid	0.039709	Schwarz criterion	-3.858991
Log likelihood	86.64531	F-statistic	3072.885
Durbin-Watson stat	0.246123	Prob(F-statistic)	0.000000



Analice la significatividad individual y conjunta de las variables en este país.

Se puede realizar, igualmente, un contraste de hipótesis sobre rendimientos constantes a escala. La hipótesis nula sería en este caso, $H_0 : \alpha + \beta = 1$, frente a la hipótesis alternativa, $H_1 : \alpha + \beta \neq 1$

Dado que $\alpha + \beta = 1$, implicaría que $\alpha = 1 - \beta$. Con ello el modelo restringido sería en este caso:

$$\text{Log}(Y_t) = \log(A) + (1-\beta) \log(K_t) + \beta \log(L_t) + u_t$$

$$\text{Log}(Y_t) = \log(A) + \text{Log}(K_t) + \beta (\log(L_t) - \log(K_t)) + u_t$$

$$\text{Log}(Y_t) - \text{Log}(K_t) = \log(A) + \beta (\log(L_t) - \log(K_t)) + u_t$$

Se utiliza el test F:

$$F = \frac{(SCR_r - SCR_{sr}) / m}{SCR_{sr} / (n - k)} \quad ; \text{ donde :}$$

m = número de restricciones

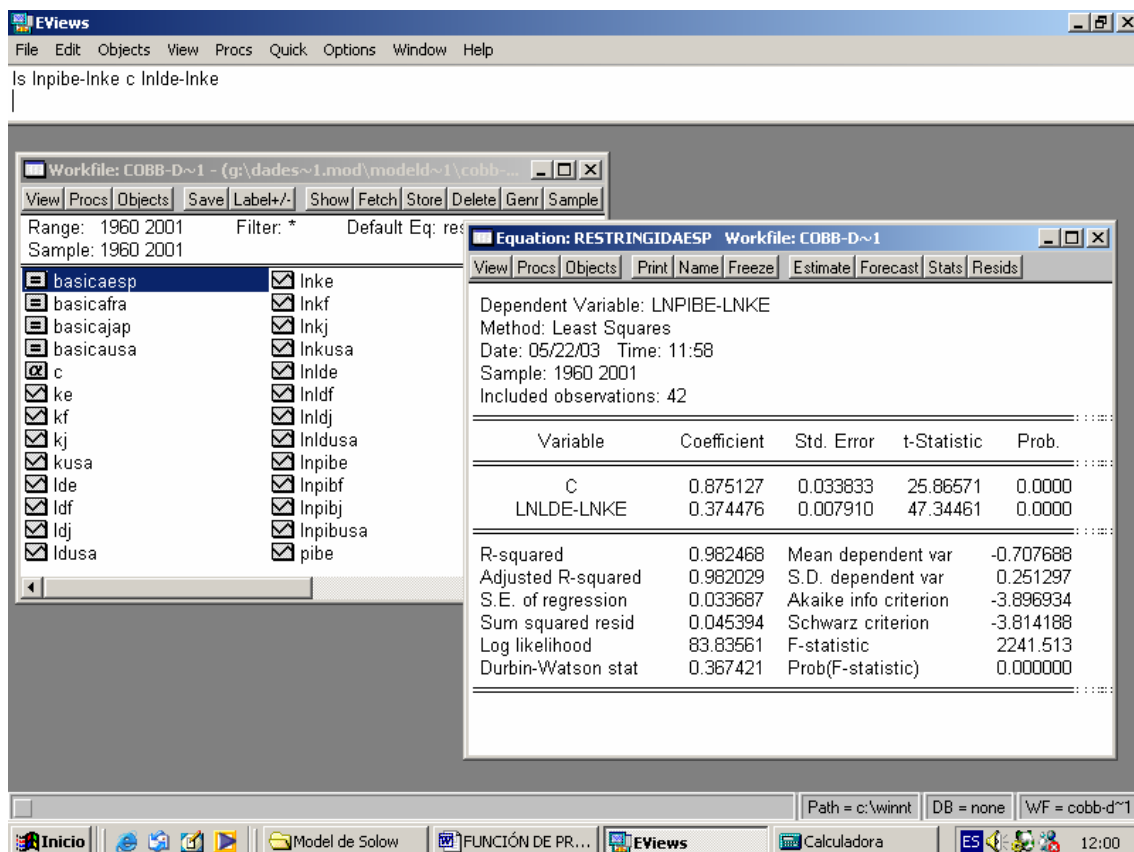
K = número de parámetros en la restricción no restringida

N = Número de observaciones

sr= hace referencia al modelo sin restringir

r = hace referencia al modelo restringido

O igualmente la expresión
$$F = \frac{(R^2_{sr} - R^2_r) / m}{(1 - R^2_r) / (n - k)}$$



El contraste sería:

$$F = \frac{(SCRr - SCRsr) / m}{SCRsr / (n - k)} = \frac{(0.045394 - 0.035604) / 1}{0.035604 / (42 - 3)} = 10.723795$$

Para España el valor de $F_{(1,39)} = 10.7237 > 7.31$.

La probabilidad de que el valor crítico sea menor que $F(1,39)$, para el 5% de significación es de 0.002222, por lo que se rechaza la hipótesis nula de rendimientos constantes a escala.

Para el resto de países.

Para Francia:

$$F = \frac{(SCRr - SCRsr) / m}{SCRsr / (n - k)} = \frac{(0.017368 - 0.011952) / 1}{0.011952 / (42 - 3)} = 17.6726$$

Para Francia el valor de $F_{(1,39)} = 17.6726 > 7.31$

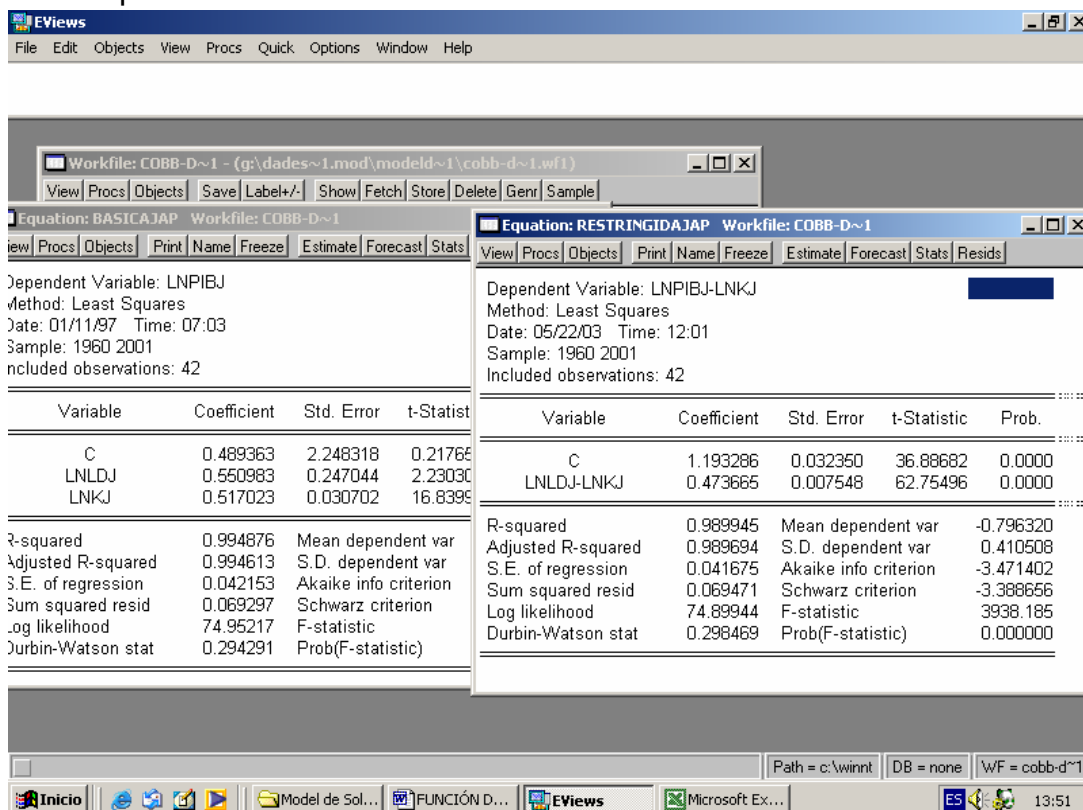
La probabilidad de que el estadístico que hemos calculado sea menor que valor crítico es de 0.00014815, por lo que también se rechaza la hipótesis nula de rendimientos constantes con un 5% de significación.

Para EEUU:

$$F = \frac{(SCRr - SCRsr) / m}{SCRsr / (n - k)} = \frac{(0.057423 - 0.039709) / 1}{0.039709 / (42 - 3)} = 17.3917$$

El valor de $F_{(1,39)} = 17.3917 > 7.31$; Prob < F = 0.0001641
 Por lo tanto, también se rechaza la hipótesis nula de rendimientos constantes.

Para Japón:



Sólo con ver los coeficientes que acompañan a los inputs de Japón ya puede apreciarse que este país es diferente al resto. Comprobando en este caso la hipótesis de rendimientos constantes.

$$F = \frac{(SCRr - SCRsr) / m}{SCRsr / (n - k)} = \frac{(0.069471 - 0.069297) / 1}{0.069297 / (42 - 3)} = 0.0972631$$

El valor de $F_{(1,39)} = 0.0972631 < 7.31$; Prob < F = 0.7568

En este caso no se puede rechazar de ninguna manera la hipótesis de rendimientos constantes; y por tanto, es aceptada. De este forma, se comprueba que para este periodo Japón es el único de los cuatro países analizados que ha cumplido el supuesto fuerte de la función de producción Cobb-Douglas.

¿ Puede encontrar una explicación para este resultado?

Bibliografía

Gujarati: (2002). Econometría. Ed. Mc Graw-Hill