Quaderns de filosofia i ciència, 37, 2007, pp. 15-28

IMPLICACIONES PARA LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DEL CONSTRUCTIVISMO EVOLUCIONISTA DE S. DEHAENE

Antonio Caba
Universidad de Málaga

Abstract: Stanislas Dehaene's well-known arguments on our innate grasp of mathematics and on how the brain understands and manipulates numbers and other forms of mathematical information are beyond any reasonable doubt. This paper mostly deals with an account of Dehaene's arguments. Anyway, as I think that there are some lacunae in his philosophical bases, I point out some criticisms on his evolutionist constructivism.

Keywords: Philosophy of Mathematics, Dehaene, Intuitionism, Constructivism.

Si prestamos atención a los asuntos que polarizan en la actualidad la Filosofía de las Matemáticas, estaríamos justificados al concluir que las cuestiones planteadas por las escuelas fundacionales constituyen planteamientos periclitados sobre los que aparentemente está todo dicho. Pero la cosa está muy lejos de ser así: todos estos puntos de vista constituyen aún hoy día un referente obligado que hay que tener presente cuando se trata de enmarcar cualquier nueva investigación sobre los fundamentos de las matemáticas. Dicho de otro modo, la concepción heredada (*the received view*) desde Frege, asimilando Filosofía de las Matemáticas y busca de fundamentos, continúa todavía vigente. Un claro ejemplo de ello es, según creo, el constructivismo evolucionista que, enmarcado en su defensa del intuicionismo, desarrolla Stanislas Dehaene. Estimo conveniente observar que, si bien su análisis se circunscribe al ámbito de la aritmética, las conclusiones a las que llega pueden extenderse a los restantes campos de las matemáticas.[1]

Por otra parte, sus puntos de vista no se limitan exclusivamente al ámbito especulativo, sino que se encuentran avalados por una gran cantidad de investigaciones en Neurociencia y en Psicología Cognitiva, de muchas de las cuales él mismo es autor. Al hilo de esto, una primera cuestión que habría que plantearse podría ser la repercusión que tienen estos descubrimientos en nuestra visión de lo que es la matemática y, en última instancia, en la propia filosofía. Pero aún más, convendría determinar en qué aspectos y hasta qué punto

[1] La pretensión de Dehaene no es única. En su 'ciencia cognitiva de la matemática', Lakoff y Núñez (2000) han defendido que el origen de las estructuras y del pensamiento matemático hay que buscarlo en los procesos cognitivos cotidianos, tales como la adquisición de esquemas de imágenes o el pensamiento metafórico.

estas experiencias pueden cambiar nuestra visión de las matemáticas y, retrospectivamente, de nuestro propio cerebro. A decir verdad, no creo que Dehaene esté particularmente interesado por los aspectos filosóficos de la cuestión. Parece más bien que fuera la dinámica interna de su propio planteamiento la que lo obligara a adoptar una posición en el complicado ámbito fundacional. Tras descartar las restantes alternativas, el autor se decanta por el intuicionismo: a su juicio, es la explicación que "da mejor cuenta de la relación entre la aritmética y la organización del cerebro" (Dehaene, 1997, p. 244). Esta conclusión, en principio teórica, tiene a su vez repercusiones de tipo práctico, puesto que condicionaría las estrategias en el ámbito de la enseñanza y, por tanto, debería influir en el diseño de los planes de educación. En este trabajo intentamos una exposición crítica de las razones que aporta Dehaene para elegir el intuicionismo entre las otras alternativas fundacionales y analizar hasta qué punto está justificada tal elección.

I

La incursión filosófica de Dehaene se sustenta en algunas tesis concretas fruto de sus trabajos y avaladas todas ellas por gran cantidad de experiencias e investigaciones. Aunque es difícil deslindar unos argumentos de otros, dado que todos ellos están imbricados, nos vamos a detener en tres que estimo suficientes para justificar su planteamiento. En concreto, vamos a analizar brevemente en qué sentido el número aparece para Dehaene como una de las categorías fundamentales a través de las que nuestro sistema nervioso representa el mundo que nos rodea. En segundo lugar, veremos cómo la observación y el análisis de sujetos que realizan operaciones aritméticas de cualquier tipo inducen a nuestro autor a rechazar que el cerebro actúe como lo pueda hacer un ordenador. Por último, habrá que tener en cuenta que cualquier operación aritmética que realicemos, por muy sencilla que sea, activa numerosas redes neuronales, si bien cada operación concreta incide más intensamente en unas áreas determinadas.

Desde hace tiempo experiencias controladas y sistemáticas han puesto de manifiesto que algunos animales poseen una cierta capacidad para percibir y distinguir cantidades numéricas. No son pocos los científicos que han tenido que superar su reticencia inicial a aceptar tales resultados, pero todo parece indicar que hoy día casi nadie discute que el número es un parámetro complejo del mundo exterior que posibilita la adaptación del animal al mundo que lo rodea, tal y como ocurre con el color o con la concepción espacial de los objetos; a veces incluso esa percepción numérica puede ser fundamental para su propia subsistencia. Pero, para no confundirnos, hay que decir enseguida que, si lo comparamos con el que empleamos los humanos, el procedimiento que utilizan los animales al contar es más bien borroso; todo parece funcionar como si el animal dispusiera de una especie de acumulador interno cuya composición se altera cuando se contabiliza positiva o negativamente un objeto. La precisión con la que los humanos describimos las cantidades numéricas gracias al lenguaje es algo a lo que el animal, evidentemente, nunca va a llegar. Pero no hay que disponer de competencia lingüística alguna para tener una cierta capacidad de contabilizar conjuntos, como ponen de manifiesto experiencias realizadas con bebés. De hecho, ésta es una de las hipótesis de trabajo de Dehaene: nuestra representación de los números no es tan distinta de la que poseen los animales. No obstante, podría pensarse que, tras la eclosión lingüística del niño en torno a los quince meses, este módulo protonumérico desaparece, pero nada más lejos de la realidad. Según Dehaene, esta intuición originaria de los números que heredamos de la evolución y que compartimos con los animales, desempeña el papel de un germen que favorece y permite el desarrollo de las matemáticas más avanzadas. En este sentido, su posición es clara: "aun cuando el lenguaje y la cultura nos hayan permitido rebasar ampliamente los límites en los que nos confinaba el sistema proto numérico animal, este módulo primitivo permanece en el corazón de nuestra intuición de los números" (Dehaene, 1997, p. 65).[2]

El segundo pilar sobre el que se apoya Dehaene para justificar su posición filosófica no está exento de discusión. Sus investigaciones lo llevan a la conclusión de que el cerebro no funciona como un ordenador cuando ejecuta operaciones aritméticas.[3] Son varias las razones que impelen a Dehaene a aceptar esta tesis.

En primer lugar están los denominados efecto distancia y efecto tamaño que en cierta medida también compartimos con los animales. Ya se ha comentado que la adquisición del lenguaje no es la panacea para adquirir una competencia numérica adecuada; aún queda mucho camino por recorrer. Vamos a detenernos en algunos tramos de ese recorrido para describir estos efectos. El hecho de que los tres primeros números sean captados de manera inmediata es un fenómeno que han estudiado los psicólogos desde hace tiempo y al que incluso han puesto nombre: subitización.[4] La singularidad de las tres primeras cifras es algo universal que trasciende la historia del mundo mediterráneo antiguo y que se manifiesta en las expresiones que las distintas lenguas emplean para distinguirlos del resto de los números. Todo parece indicar que el cerebro tiene una querencia por los números pequeños, como también se pone de manifiesto en otras situaciones.[5] En cualquier caso, lo más probable es que la limitación de la subitización a tres objetos se aplique al conjunto de la especie humana y que apenas sufra excepciones. Este límite, empero, no resulta una barrera infranqueable, puesto que disponemos de otros recursos para referirnos a cantidades numéricas mayores. En concreto, sufrimos lo que se denomina efecto distancia: el tiempo que necesitamos para distinguir dos números entre sí es tanto mayor cuanto mayor sea la distancia entre esos números. Por ejemplo, necesitamos menos tiempo para distinguir dos números alejados entre sí, como el 70 y el 90, que dos números próximos, como puedan serlo el 70 y el 72. Igualmente, mediante experiencias adecuadas se ha observado que, a distancia constante, distinguimos mejor números pequeños que grandes; así, distinguimos más rápidamente entre 10 y 20 que entre 80 y 90. Éste es el denominado efecto tamaño.

Según Dehaene (Dehaene, 1997, p. 73), estas respuestas retardantes se deben a que el cerebro aprehende cada número en su integridad y lo transforma en una cantidad interna casi continua, ignorando a continuación las cifras concretas que le han conducido a colocar esa cantidad en su 'acumulador interno'. Es decir, cada vez que nos enfrentamos

---

[2] Esta independencia de la adquisición del lenguaje con respecto a nuestra competencia y representación cognitiva en matemáticas tuve ocasión de desarrollarla más extensamente en Caba (2005).

[3] En este punto Dehaene se alinea con Von Neumann, quien en su citadísimo *The computer and the brain* de 1958 propuso un modelo híbrido analógico-digital para explicar el comportamiento del cerebro.

[4] La subitización no se reduce a este ámbito de la asimilación numérica, sino que se extiende a otras áreas perceptivas. Por otra parte, en las culturas antiguas la distinción que se establecía era entre uno, dos y muchos. Ver Ifrah (1985), especialmente pp. 17-26.

[5] Esta curiosa preferencia del cerebro por los números pequeños se ha plasmado matemáticamente en la conocida como ley de Benford, que establece que la probabilidad de que un número elegido al azar de entre un conjunto cualquiera comience por n (entre 1 y 9) es igual a log $(1 + 1/n)$, valor que va disminuyendo al hacerse n mayor. Este curioso fenómeno ha tenido influencia en dominios tan dispares como los censos demográficos o la detección de fraudes contables. Ver T. Hill (1999).

con un número, nuestro cerebro no puede evitar tratarlo como una cantidad continua y representársela mentalmente, para decidir a continuación la respuesta a la cuestión que se le plantea. Este doble trabajo tiene varios costes: por una parte, la precisión decrece conforme aumentan los números que nos muestran y, por otra, aumenta el tiempo que necesitamos para responder a lo que se nos pregunta. Este comportamiento difiere bastante del proceso que sigue un ordenador cuando efectúa el mismo trabajo. El programa más sencillo que podría realizar esta tarea compararía en primer lugar las cifras de las decenas, y daría la respuesta si son distintas. Si fueran iguales, haría lo propio con los dígitos de las unidades. En cualquier caso, ambas operaciones las realizaría en un tiempo constante.

En segundo lugar, el modo como comparamos números entre sí y efectuamos multiplicaciones revela que nuestro cerebro no utiliza un código digital (como sí lo hace un ordenador), sino que más bien implica toda una representación interna cuantitativa y continua, más parecida a un dispositivo analógico (*Cf.* Dehaene, 1997, p. 218 y ss.). Los procesos de ejecución de estas dos operaciones poseen algunos rasgos intrínsecos que los hacen totalmente diferentes. En concreto, al comparar no se precisa una memorización procesual, lo contrario de lo que ocurre con la multiplicación, que obliga al almacenamiento de resultados intermedios. Esto se traduce en que la multiplicación exige utilizar el lenguaje a un nivel al que no es preciso llegar durante el proceso de comparación. También en el ámbito de la actividad cerebral tiene repercusión esta diferencia, pues mientras la multiplicación hace intervenir fundamentalmente al hemisferio izquierdo, la comparación se desplaza al derecho o incluso parece que hace intervenir a los dos a la vez. La diversidad de las áreas cerebrales implicadas en estas dos operaciones subraya que la aritmética no es una actividad frenológica uniforme a la que podría asociarse un centro de cálculo único. Más bien es al revés: cada operación implica toda una red cerebral muy extendida. Así pues, el cerebro –al contrario de los ordenadores– no dispone de una unidad de cálculo aritmético propiamente dicha, sino que se comporta como un ensamblaje heteroclítico de agentes conectados incapaces de hacer nada por sí mismos; no obstante, la división del trabajo entre distintas redes neuronales consigue resolver multitud de problemas de gran complejidad –véase también Dehaene (1993).

En tercer lugar, el cerebro no hace un uso práctico de las matemáticas al modo como lo realiza una máquina lógica; en concreto, su actuación al efectuar operaciones matemáticas no puede circunscribirse al seguimiento de los esquemas de un sistema formal. Entre otras razones porque los sistemas formales son susceptibles de diferentes interpretaciones que en ocasiones se alejan del origen intuitivo que los originó. Por ejemplo, el mismo sistema de Peano permite la aparición de "monstruos", como los califica Dehaene, que verifican los axiomas y a los que a nuestro sentido común le repugnaría llamar números: son las denominadas interpretaciones no estándar. No cabe duda de que desde un punto de vista formal cualquier interpretación constituye un modelo representativo del sistema en cuestión, pero en el terreno de lo intuitivo esta equiparación no es razonable. Pero, según nuestro autor, eso no serían más que quimeras; nosotros sabemos intuitivamente lo que son los números naturales, de manera que podemos elegir de entre todos los modelos que verifican los axiomas el que se adapta a nuestro conocimiento y uso, desdeñando, como dice Dehaene, "quimeras artificiales desprovistas de toda significación".[6]

[6] El no tener en cuenta este hecho fue, según nuestro autor, el origen de la debacle que supuso la introducción en la enseñanza elemental de las denominadas "matemáticas modernas". A su juicio,

Un tercer aspecto sobre el que se apoya Dehaene para justificar su punto de vista filosófico viene dado por el análisis de las alteraciones que se producen en el cerebro cuando un sujeto efectúa operaciones aritméticas (Dehaene, 1997, p. 213 y ss.). En 1985 Roland y Friberg aplicaron la técnica denominada resonancia magnética nuclear funcional para detectar que las actividades cerebrales durante el cálculo mental eran particularmente notables en una amplia región prefrontal y en otra región parietal inferior más restringida, el denominado "giro angular". Incluso llegaron a constatar que la activación de estas dos regiones se producía en ambos hemisferios a la vez, aunque se detectaba una mayor intensidad en el izquierdo. Pese a todo, estas dos regiones no desempeñan el mismo papel. Mientras que la región prefrontal hacía su aparición en todas las tareas de manipulación mental y no únicamente en el cálculo, la región parietal inferior parecía específica para el cálculo mental y sólo se activaba durante la ejecución de tareas de imaginería espacial o de transposición verbal. Tomar estos datos al pie de la letra, apunta Dehaene, nos retrotraería a la ya superada frenología, según la cual el cerebro contiene toda una panoplia de órganos especializados para funciones de muy alto nivel. Pero el cerebro no funciona así. Cualquier proceso, por muy simple que parezca, requiere la coordinación de un gran número de áreas cerebrales, cada una de las cuales proporciona una contribución elemental, pero decisiva, al conjunto. Esta tesis de la modularidad cerebral que propugna Dehaene está muy consolidada entre los neurólogos y defiende que ni una neurona aislada, ni una colonia cortical, ni incluso un área cerebral al completo puede pensar. No es sino combinando las capacidades de millones de neuronas distribuidas en la superficie del córtex como el cerebro es capaz de alcanzar una cierta capacidad en el manejo de complejos algoritmos –ver Dehaene (2007*a*).

II

A partir de estas distinciones, Dehaene cree disponer de argumentos suficientes para rechazar el platonismo y el formalismo.

El realismo en matemáticas posee unas connotaciones de las que no dispone su homónimo en la ciencia, pero básicamente el fundamento es el mismo. Desde un punto de vista semántico, los enunciados matemáticos son verdaderos o falsos en virtud de las características de una cierta realidad que no depende de la mente de los matemáticos. La versión más frecuente del realismo matemático presupone, de algún modo, la existencia de un reino de objetos independientes del conocimiento que tengamos de ellos, y cuyas propiedades se afanan por descubrir y describir los matemáticos. Esta visión ontológica del realismo se conoce habitualmente como platonismo y, aunque los dos términos tienen connotaciones que los distinguen, algunos autores los consideran como sinónimos.[7] Aunque la mayor parte de los matemáticos se muestran ajenos a los temas filosóficos, sobre el papel todos actúan como platónicos. Como dice Körner, el platonismo es la propensión del

---

bajo esa reforma se escondía una teoría implícita del aprendizaje basada en la metáfora del cerebro ordenador. Al contrario de lo que defendía Piaget, el cerebro del niño no es una esponja absorbente, sino un órgano estructurado que no aprende más que lo que está en resonancia con conocimientos anteriores. Según Dehaene, la evolución no lo ha preparado para engullir amplios sistemas de axiomas o largos algoritmos simbólicos; es la intuición la que prima sobre los axiomas. Resulta inútil, pues, bombardear a un cerebro juvenil con axiomas abstractos. Véase Dehaene (1997), p. 262 y ss.

[7] Es el caso de Maddy en su libro de 1990 *Realism in mathematics*. Conviene señalar que, al igual que ocurre en la ciencia, caben distintos tipos de realismo. Hemos mencionado el epistemológico y el ontológico, pero cabrían otras posibilidades. Ver Shapiro (2000) para el caso de las matemáticas y Diéguez (1988) para una visión más general y completa del realismo en la ciencia.

matemático profesional; en su quehacer diario tiene la impresión de moverse en un paisaje de entidades que existen independientemente de él mismo y cuyas relaciones intrínsecas trata de descubrir. Aun así, los matemáticos no se sienten cómodos cuando se los acusa de platónicos, como es el caso de Dieudonné.[8]

La crítica más contundente con que se encuentra el platonismo matemático es de naturaleza epistemológica: si las entidades matemáticas son abstractas y carecen de ubicación espaciotemporal, son causalmente inertes y por tanto no pueden ser conocidas. Como es un hecho admitido que poseemos conocimiento matemático, el platonismo debe ser falso.[9] Los manuales suelen citar a Gödel como el representante más respetable y genuino del platonismo. En su trabajo sobre la hipótesis del continuo de Cantor pergeñó la posibilidad de superar esta crítica apelando a una especie de intuición cuya naturaleza resulta equiparable a la percepción de los objetos físicos que constituye el fundamento de la ciencia empírica. Como es conocido, este punto de vista tuvo sus defensores (la primera Maddy), pero también fueron muchos los detractores (Chihara). En cualquier caso, pese a la respetabilidad que merece Gödel, su solución está lejos de ser aceptada.

Para rechazar el platonismo, Dehaene se adhiere a esta crítica ya tradicional esgrimiendo argumentos conocidos, que –aunque no sean expresamente mencionados por el autor– entiendo que están próximos al planteamiento de J. S. Mill. Como es lógico, ni neurobiólogos ni neuropsicólogos suelen prodigarse como defensores del platonismo, tal y como ocurre con nuestro autor. Pero al mismo tiempo resulta imposible ignorar el hecho incuestionable de que el matemático tiene la impresión de moverse en un paisaje de entidades que existen independientemente de él y cuya naturaleza intrínseca constituye el objeto principal de su investigación. Pese a todo, esta impresión de trabajar en un mundo de objetos independientes no obliga a aceptar el platonismo, puesto que, según Dehaene, esta sensación, más que una realidad, es un fenómeno psicológico que requiere una explicación (*Cf.* Dehaene (1997), p. 242 y ss.); explicación que, por otra parte, viene de suyo en cuanto se analizan las propias aptitudes sensoriales del ser humano. En efecto, resulta difícil dar cuenta satisfactoria de cómo un matemático de carne y hueso puede explorar un universo abstracto de objetos matemáticos sin apelar a la existencia de una vía extrasensorial, una especie de apéndice cognoscitivo del que los humanos no disponemos. No se está discutiendo el que para alcanzar las matemáticas de alto nivel los matemáticos tengan que formarse una imagen mental vívida de los conceptos con los que trabajan. El problema surge cuando esta imagen adquiere la fuerza de una ilusión, olvidando su origen humano y confiriendo a los objetos matemáticos una apariencia de existencia independiente. Aunque no indica expresamente su origen, Dehaene está repitiendo casi literalmente una muy conocida cita de Mill al respecto. Según el autor inglés, tanto la necesidad como la certidumbre que se atribuye a las verdades de las matemáticas no son más que una ilusión que sólo se mantiene si se considera que tales propiedades se refieren a objetos y a propiedades de objetos puramente imaginarios (*System of logic*, II, v, 1).

[8] Es muy repetida la ironía del bourbakista Dieudonné de confesarse platónico durante su trabajo diario de matemático y refugiarse en el formalismo cuando se le acusa de que está presuponiendo que las entidades con las que trabaja poseen existencia real.

[9] Éste es, en síntesis, el denominado dilema epistemológico planteado por Benacerraf en su celebérrimo artículo “Mathematical truth” de 1973 y sobre el que ha basculado gran parte de la Filosofía de las Matemáticas del último cuarto del siglo XX.

Dehaene rechaza igualmente el formalismo como razón explicativa última de la fundamentación de la matemática por razones que en parte se encuentran implícitas en su negación de la tesis que defiende que el cerebro actúa como lo hace un ordenador. No cabe duda de que la efervescencia del período formalista, propiciado sobre todo por el grupo Bourbaki, está hoy día cuestionada. Tenemos una prueba tangible de este abandono en la erradicación de los *curricula* escolares de las "matemáticas modernas", consideradas nefastas por algunos, incluido el propio Dehaene. Pero el hecho de que en los niveles elementales no se estudien ya la teoría de conjuntos o las relaciones de equivalencia no quiere decir que en el ámbito de la investigación el procedimiento formal haya dejado de perder un ápice de vigencia. De hecho, pese a todo, la formalización continúa siendo el único procedimiento plausible para que la comunidad matemática acepte como tal un trabajo de investigación. Por otra parte, la *boutade* de Dieudonné indicada en la nota 7 pone de manifiesto, pese a la ironía, que el formalismo continúa siendo el refugio de los matemáticos cuando son acusados de platónicos.

Los que se oponen al formalismo como fundamentación última para las matemáticas argumentan que la mera manipulación de símbolos vacíos de contenido dejaría sin explicar algunas características que parecen irrenunciables en el caso de las matemáticas. De entrada, cuestionan en qué se diferenciarían de las reglas de un juego como el ajedrez. No obstante, la crítica más severa que se efectúa al formalismo es que deja sin explicación el problema de la exitosa aplicabilidad de la matemática en el ámbito de lo físico.[10] Habitualmente los matemáticos responden a esta cuestión de modo parecido a la acusación anterior: no les concierne si sus productos son aplicables o no al mundo físico, que sean los propios científicos quienes lo decidan, ellos tan sólo proporcionan modelos sin interpretación. La historia pone de manifiesto que, en algunos casos notables, estructuras matemáticas sin aparente nexo con la realidad han servido de gran ayuda a desarrollos científicos muy concretos.[11] Estos comentarios indican lo complicado que resulta dar razón del origen de las matemáticas desde la perspectiva formalista. Dehaene hace suyas todas estas consideraciones para insistir en que, parafraseando a McCulloch, para que puedan ser conocidas por el hombre las matemáticas no pueden reducirse a un sistema formal.[12]

Pero si bien en el contexto de génesis lo tiene complicado, no ocurre lo mismo en el contexto de justificación. Y Dehaene se adhiere a este aspecto aprovechable del formalismo (*O. c.*, p. 242 y ss.); de hecho una gran parte del desarrollo de la matemática actual ya nace formalizada y en muchas ocasiones las investigaciones se centran simplemente en determinar las modificaciones que se producen en un sistema cuando se alteran algunos de los axiomas que lo definen.[13] Lo que no admite es que, a partir de la consideración

[10] Este aspecto, digamos negativo, se debe a que los formalistas priorizan el método sobre el objeto. De este modo, al trabajar con símbolos desconectados de la realidad, estaría justificado incluso el que algunos tildaran poco menos que de irracional el ajuste de la observación empírica, con lo que se deduce formalmente en el seno de las teorías matemáticas. Ver Curry (1963), especialmente p. 8 y ss.

[11] Los ejemplos son abundantes. Kline señala tres de ellos: el trabajo griego sobre las cónicas, las geometrías no euclídeas y la aparición de la teoría de grupos. Ver Kline (1980), p. 352 y ss.

[12] Las preguntas a las que me refiero dan título a un citadísimo trabajo de este autor (1965) y Dehaene se propone como objetivo hallar una respuesta satisfactoria: ¿Qué es un número para que el hombre pueda conocerlo? y ¿qué es el hombre para que pueda conocer lo que es un número?

[13] Ésta es una de las razones que, según Kline, han contribuido de manera particular al pernicioso aislamiento de las matemáticas en los últimos tiempos. En lugar de centrarse en la resolución de problemas concretos del ámbito científico, adoptan una actitud endógena tratando de resolver

de la matemática como un mero sistema formal, estemos en condiciones de obtener una explicación satisfactoria del origen de las matemáticas.

Una vez rechazadas como explicaciones fundacionales el platonismo y el formalismo, Dehaene se decanta por el intuicionismo, atraído de manera especial por el sesgo constructivista de este planteamiento. Aunque aporta sus razones para tal elección, hay que señalar en este punto que Dehaene se inserta en una tradición que sólo considera viables estas tres posibilidades y que, como ya hemos indicado, para algunos constituye algo obsoleto y ya superado. Quizá el caso más cercano del que disponemos en este sentido sea el de J. Echeverría, para quien la busca de una fundamentación última ha dejado de constituir desde hace años el objetivo único para la Filosofía de las Matemáticas. A partir de la segunda mitad del pasado siglo ha irrumpido toda una serie de críticos que han rechazado la concepción heredada que había dominado el panorama durante varias décadas. Esta nueva visión del asunto –iniciada por Pólya y Lakatos, y compartida por autores como Tymozcko, Gillies, Kitcher y el propio Echeverría– propugna, entre otras cosas, que los filósofos dediquen una mayor atención a la práctica matemática y que por tanto se potencien los estudios sobre la historia, tan ignorados durante el período fundacional. Pero quizá lo más relevante de esta nueva visión sea su defensa del uso de métodos empíricos en el ámbito de las matemáticas, estableciendo paralelismos entre ambas ciencias, con objeto de entender el pluralismo metodológico subyacente a la creación matemática.[14]

Pese a todo, como ya indicamos, los planteamientos fundacionales son retomados por los filósofos con cierta frecuencia y la elección de nuestro autor es un claro ejemplo de ello al decantarse por el intuicionismo. Como es conocido, para los que defienden esta posición los objetos matemáticos no son más que construcciones del espíritu humano; por tanto, las matemáticas no existen en el universo, sino sólo en el cerebro del matemático que las inventa. Ni la aritmética ni la geometría preexisten a la especie humana; de hecho, entraría dentro de lo aceptable el que especies distintas a la nuestra desarrollaran unas matemáticas completamente diferentes a las que conocemos. En este punto, Dehaene hace suya una de las ideas clave de Poincaré, que llegó a calificar al número entero como el único objeto natural del pensamiento matemático, de manera que la intuición que poseemos del número es la única que no puede engañarnos.

Todo este cuadro encaja con el punto de vista que defiende nuestro autor. En una primera instancia, los objetos matemáticos no son más que categorías fundamentales y *a priori* del pensamiento humano; sólo posteriormente el matemático refina y formaliza esos constructos iniciales. Es decir, el origen de las nociones más intuitivas como la de número no hay que buscarlo en un mundo exterior; es más bien la estructura de nuestro cerebro la que nos impone de manera particular la organización del mundo que nos rodea en objetos discretos (Dehaene, 1997, p. 244). Esta representación cualitativa heredada se encuentra en el origen de la comprehensión intuitiva de los números naturales de que disponemos los humanos. Pero nuestra competencia numérica no se limita a esa representación mental primitiva y simplificada. Como pone de manifiesto la historia, la ampliación del campo numérico supuso extraordinarias dificultades conceptuales a los matemáticos que la

cuestiones internas cuya resolución no comprometa en exceso la carrera investigadora del matemático. Ver Kline, p. 342 y ss.

[14] Estas propuestas de Echeverría se encuentra en varios de sus escritos. Quizá el más significativo sea el que se indica en las referencias, que toma como caso de estudio la evolución de la conjetura de Goldbach.

llevaron a cabo y continúa presentando serias complicaciones a nuestros estudiantes en la actualidad. La razón última de estas dificultades, explica Dehaene, es que estas nuevas entidades numéricas no entran en correspondencia con ninguna categoría preexistente en nuestro espíritu; de hecho, no disponemos de un cerebro capacitado para representaciones numéricas de números mayores que tres. En resumen, la evolución sólo nos ha dotado de una imagen intuitiva de los enteros positivos, las otras clases de números no tienen análogo directo en nuestro cerebro, de ahí las dificultades para su asimilación.

Por otro lado, hay que justificar en parte el planteamiento de Dehaene, puesto que defender el intuicionismo en la actualidad resulta más fácil debido a las recientes investigaciones en ramas especializadas en torno a la Psicología de la Aritmética. Estos nuevos hallazgos han aportado argumentos a favor de esta corriente de pensamiento que ninguno de los autores pioneros ni siquiera pudieron imaginar. Así, por ejemplo, se ha constatado que el bebé humano viene al mundo provisto de una serie de mecanismos innatos de individuación de objetos y de percepción de números pequeños. Numerosos experimentos aceptados por la comunidad científica ponen de manifiesto que estos mecanismos aparecen en forma más rudimentaria en los animales, lo que prueba –entre otras cosas– que el sentido de los números es independiente de la facultad del lenguaje. Otras experiencias más sofisticadas han mostrado que en el caso de los bebés se imponen, de manera espontánea y sin educación explícita, operaciones como la estimación numérica y la adición o sustracción elemental, entre otras. Asimismo, las nuevas técnicas de investigación encefalográfica muestran, cada vez con mayor consistencia, que es en la región parietal de los dos hemisferios cerebrales donde están situados los circuitos neuronales dedicados a la manipulación de cantidades numéricas. Todos estos hallazgos parecen reforzar la afirmación de Poincaré de que los números forman parte de los “objetos naturales del pensamiento”. En la actualidad habría que traducir esta frase, como hace Dehaene, diciendo que “la intuición de los números está firmemente anclada en nuestro cerebro” –Dehaene (1997), p. 245–; es decir, que el número aparece como una de las categorías fundamentales a través de las que nuestro sistema nervioso se representa el mundo que nos rodea. Es la propia organización de nuestro cerebro la que determina los atributos del mundo exterior a los que somos capaces de prestar atención. Y uno de esos atributos fundamentales es el número, pero –como hemos indicado– no es el único: la capacidad de atribuir colores a los objetos o de determinar posiciones en un espacio tridimensional se encuentran en idéntica situación –ver Dehaene (2007*b*).

Todas estas consideraciones refuerzan la idea de Dehaene de admitir que, de todas las teorías acerca de la naturaleza de las matemáticas, el intuicionismo da mejor cuenta de la relación entre la aritmética y la organización del cerebro humano. Nuestro autor insinúa, que no justifica, su preferencia por la visión del intuicionismo de Poincaré sobre el radical punto de vista de Brouwer, pero estimo que esta preferencia pone en tela de juicio algunos de sus propios planteamientos (*Cf.* Dehaene, 1997, p. 245 y ss.). En primer lugar, porque Brouwer considera a la matemática como una actividad alingüística, que –curiosamente– casaría bien con la insistencia de Dehaene en la independencia del lenguaje. Y, en segundo lugar, porque su visión de la emergencia y la definición de número se insertarían sin muchas dificultades en el planteamiento del holandés; creo que esta cita avala cuanto digo: “el número emerge de manera natural como la representación más abstracta de objetos en el espacio; de hecho casi podríamos definir el número como el único parámetro que permanece constante, excepción hecha de la identidad y de la trayectoria de los objetos” (*O. c.*, p. 190).

Lo que sí analiza Dehaene con más detenimiento es la contraposición entre el intuicionismo de Brouwer y la matemática clásica que éste criticaba con tanta fruición (*O.

c., p. 270). Para nuestro autor, esta discusión se diluye si se acepta su punto de vista. Como es conocido, el afán de Brouwer por fundamentar la matemática en intuiciones puras lo indujo a rechazar principios lógicos, como el del tercio excluso, admitidos y utilizados en gran medida por los matemáticos. Nuestro autor afirma con buen criterio que la decisión sobre qué matemáticas aceptar es algo que deberán discutir entre sí los matemáticos y que, obviamente, no incumbe al psicólogo, que debe mantenerse al margen y limitarse al papel de mero observador. Pero esta discusión, observa, tiene lugar en un nivel que no invalida su propuesta. Tanto las clásicas como las intuicionistas son compatibles con la hipótesis de una construcción de las matemáticas sobre la base de categorías fundamentales de la intuición. Es decir, que el sustrato básico es el mismo en ambos casos, a saber, que venimos al mundo con un cúmulo de intuiciones sobre el número, sobre los conjuntos, sobre procesos iterativos, sobre la geometría del espacio, etc. Sólo en un momento posterior el matemático trata de simbolizar y formalizar todas estas intuiciones con el objetivo de hacerlas coherentes entre sí, pero sin garantía cierta de que esto sea posible. De hecho, en muchos de los casos no lo es, puesto que los módulos cerebrales en los que se elaboran estas intuiciones han sido diseñados evolutivamente para que su portador sea eficaz antes que consistente.[15] Ésta es la razón, según Dehaene, de que distintos matemáticos adopten diferentes axiomas. Así, por ejemplo, mientras que la matemática clásica se fundamenta sobre la intuición de la dicotomía verdadero-falso, con el riesgo de sobrepasar nuestras intuiciones de lo finito y de lo infinito, los intuicionistas adoptan por principio la primacía del razonamiento finito. De esta manera, si el sustrato básico es el mismo en ambos casos, la diferencia entre las distintas matemáticas estriba en que se fundamentan en diferentes tipos de intuición.

Así pues, estas intuiciones elementales básicas (número, conjunto…) forman parte de las representaciones irreductibles que elabora nuestro cerebro. El trabajo de los matemáticos se centra en la formalización de estas intuiciones con el objeto de hacerlas coherentes y compatibles entre sí, además de adaptarlas a la experiencia que tenemos del mundo exterior.[16] Pero con esto el proceso no ha hecho más que empezar, puesto que hay que explicar cómo a partir de unas intuiciones tan básicas, primitivas y rudimentarias se llegan a alcanzar las complejas construcciones matemáticas del más alto nivel. Para ello Dehaene recurre al evolucionismo de su colega Changeux, para quien las matemáticas no constituyen un cuerpo de datos fijado de una vez por todas, sino que se van modificando a lo largo del tiempo por el método de ensayo y error. Hay, pues, todo un proceso evolutivo de selección de objetos matemáticos no continuo, en el que constructos que parecían bien consolidados se vienen abajo para ser reconstruidos de nuevo.[17] Lo que sí creo que hay que admitir con Dehaene es que a lo largo de la historia se han dado múltiples criterios para seleccionar las

---

[15] Esta idea es recurrente en Dehaene. En paralelo con el animal, el cerebro humano surgió para adaptarse a la subsistencia y la relación con los objetos más inmediatos. De hecho, no está preparado para memorizar hechos aritméticos ni para ejecutar con precisión complicadas operaciones. Ha tenido que hacer “chapuzas” utilizando circuitos cerebrales de recambio para paliar semejante deficiencia, y como consecuencia de esta adaptación forzada surge la lentitud e imprecisión en los cálculos e incluso los errores que se producen.

[16] Ver Dehaene (1997, p. 246). Creo que Dehaene no acierta al señalar que tales intuiciones básicas casi nunca se cuestionan. La historia pone de manifiesto que han sido precisamente estos conceptos los que, filosóficamente hablando, han generado mayor discusión. Recuérdese, si no, la problemática del número natural.

[17] Esta idea no es, ni mucho menos, nueva. Wilder (1968), por ejemplo, ha discutido, desde un punto de vista antropológico, la modificación a lo largo del tiempo de los conceptos matemáticos, llegando incluso a formular leyes que rigen su evolución.

construcciones matemáticas, y que no siempre ha primado el sesgo lógico en la elección. Así, incluso en la matemática pura, junto a la ausencia de contradicción, aparece como criterio positivo de evolución la elegancia o la simplicidad. En el caso de la matemática aplicada, hay que añadir a todos éstos el criterio de adecuación entre los objetos matemáticos y el ámbito del mundo físico que pretenden reflejar. En cualquier caso, a lo largo de los años sólo las construcciones más sólidas resisten; las contradictorias, inelegantes o simplemente inútiles son acosadas e implacablemente eliminadas.[18]

Nuestro autor parece abandonar momentáneamente sus esquemas fundacionales para abordar la cuestión desde una perspectiva más actual. Así, entiende que su punto de vista posee rasgos que coinciden con algunos de los planteamientos actuales ya citados que consideran la matemática como una construcción humana y, por ende, imperfecta y revisable (Dehaene, 1997, p. 247). A su juicio, es posible que este punto de vista quizá sea difícil de aceptar por los matemáticos, acostumbrados a considerar, y a que se considere, su disciplina como el culmen de la pureza y de la perfección. A decir verdad, Dehaene está sacando a la luz una cuestión muy trillada ante la que habría que hacer una doble consideración. En primer lugar, sabemos que a la mayoría de los matemáticos los problemas filosóficos les interesan más bien poco y no es previsible que las consideraciones de los no profesionales sobre su disciplina los obligue a modificar sus métodos de trabajo. En segundo lugar, los escasos matemáticos que se preocupan por estos temas ya deben estar acostumbrados a que no pocos filósofos entiendan que la matemática dejó de ser lo que fue en otros tiempos para ser considerada como una ciencia empírica más.

Uno de los argumentos que con más frecuencia se esgrimen para considerar la matemática integrada en la ciencia en general y, por tanto, sometida a los avatares que ésta pueda sufrir lo constituye la aparición de errores que muestran cómo el edificio de las matemáticas no está perfectamente establecido. La aparición de un error en la demostración del último teorema de Fermat por parte de Wiles o la posibilidad de que surjan errores en demostraciones excesivamente largas que no pueden ser visualizadas por un solo matemático, como la clasificación de los grupos finitos simples, son dos de los ejemplos clásicos para argumentar en este sentido. Dehaene cree encontrar una explicación a este hecho desde su teoría. A su juicio, si las matemáticas son difíciles y se hallan sometidas a todos estos embates, se debe a que la arquitectura de nuestro cerebro no está adaptada a largas cadenas de razonamientos simbólicos. Si para realizar una sencilla sustracción tiene que ponerse en funcionamiento una complejísima red neuronal que implica millones de conexiones sinápticas, ¡cuántas redes neuronales deberán entrar en funcionamiento para demostrar nuevas conjeturas! No es por tanto sorprendente que los errores aparezcan. En este caso parece como si la razón individual cediera ante una aparente razón colectiva que da cuenta del estatus actual: “sólo la actividad acumulada y depurada de decenas de millares de matemáticos durante milenios explica el éxito presente” (Dehaene, 1997, p. 249).

[18] Esto refuerza aún más la tesis del paralelismo metodológico entre matemáticas y ciencia empírica. Para Alcolea (2000) la actividad matemática se rige más por consideraciones de racionalidad práctica más que de razonamiento lógico, lo que implica que el conocimiento matemático no es esencialmente diferente del empírico. Es cierto que unas teorías matemáticas son más seguras y se encuentran más asentadas que otras, pero la evidencia sobre determinados axiomas, según su fecundidad, puede ser tan provisional como lo es cualquier teoría científica.

Dehaene se opone asimismo al carácter acumulativo que se asigna habitualmente a la matemática aduciendo algunas razones de tipo histórico ya conocidas.[19] Pero tampoco en este caso los argumentos que ofrece son originales; así, observa, puede constatarse cómo trabajos monumentales para la resolución de ciertos problemas se vuelven de pronto obsoletos cuando se descubren métodos más generales que engloban todos los casos estudiados anteriormente de manera dispersa y fragmentaria. Por otra parte, aquellos que, como nuestro autor, defienden que la matemática es un producto del espíritu humano están obligados a explicar cómo un constructo de este tipo puede ser objetivo y no meramente arbitrario. Dehaene cree haber encontrado también una respuesta a esta cuestión desde su sistema.[20] Según él, en el curso del proceso evolucionista que defiende, la selección asegura que nuestro cerebro desarrolla representaciones internas adaptadas al mundo exterior, y una de esas adaptaciones (que además funciona con alto grado de eficacia) es, precisamente, la aritmética. En la escala mundana en la que desarrollamos nuestra vida el mundo está compuesto en su mayoría de objetos distintos, cuya combinación sigue la ecuación $1 + 1 = 2$. Si nuestro mundo, o mejor, nuestra manera de concebir el mundo fuera distinta, es posible que esa ecuación fuera diferente.

Este modo de ver las cosas explica asimismo, según Dehaene, el viejo problema de la aplicabilidad de las matemáticas al mundo físico (*Cf.* Dehaene, 1997, p. 249 y ss.). Esta discusión no ha concluido todavía y ha presentado a lo largo de la historia diversos matices, pero continúa siendo un hecho que todo el mundo admite pero al que pocos encuentran explicación. Algunos –Wigner es el ejemplo más socorrido– consideran esta "irracional" eficacia como un don maravilloso que ni comprendemos ni merecemos. "¿Cómo es posible admitir que la matemática, un producto del pensamiento humano e independiente de toda experiencia, pueda adecuarse tan estrechamente al mundo físico?", se preguntaba Einstein en 1921. Tampoco los platónicos tienen una respuesta inmediata, puesto que no hay razón alguna para admitir que el mundo abstracto de las matemáticas, otro mundo en definitiva, se adapte como lo hace al mundo físico. En otro tiempo algunos matemáticos pensaban estar traduciendo el plan de Dios sobre el mundo a símbolos matemáticos; otros en cambio preferían prescindir de Dios y hablar simplemente de las leyes matemáticas del universo. Dehaene cree poder compatibilizar todas estas opiniones desde su planteamiento (*O. c.*, p. 251 y ss.). A su juicio, la historia de las matemáticas muestra su ascendente grado de eficacia por ensayo y error gracias a la selección y eliminación de determinados conceptos y teorías. Quizá la cuestión no sea suponer que el universo se ha concebido para adaptarse a las leyes de la matemática, sino que son nuestras leyes matemáticas y, antes que ellas, los principios de organización de nuestro cerebro los que han sido seleccionados en función de su adaptación a la estructura del universo.[21] Esta evolución selectiva que defiende Dehaene

[19] Este carácter acumulativo que se atribuye a la matemática goza en la actualidad de escaso predicamento. Véase si no Crowe (1988). Pero en otro tiempo, no tan lejano, sí que lo tuvo. Por ejemplo, autores como Fourier y Duhem lo defendieron en su momento.

[20] Conviene recordar en este punto que Frege ya se planteó esta cuestión para prevenir las críticas que pudieran hacérsele a su concepción del número. El que a un mismo agregado se le pudieran atribuir diferentes cardinales sin incurrir en contradicción podría llevar a la idea de que el número es algo que depende del sujeto. Pero esto deja de ser así si se entiende –como hacía Frege– que el número es algo que se dice de los conceptos y no, como pensaba Mill, una propiedad característica de cada conjunto. Bloor ha insistido en esta idea de la objetividad asociándola al consenso social (Bloor, 1971, p. 150 y ss.).

[21] Dos décadas antes que Dehaene, y sin tener a su disposición semejante cantidad de resultados experimentales, el experto en teoría de números Gerhard Frey apuntó una interpretación parecida.

explica razonablemente el asunto sin recurrir, como hace Wigner, a lo milagroso. Si nuestras matemáticas de hoy son eficaces, quizá se deba a que las matemáticas ineficaces de otros tiempos han sido implacablemente eliminadas.

Pero no todas las matemáticas que se generan son creadas con la pretensión de ser aplicadas, de hecho un mínimo porcentaje lo hace. Las matemáticas "puras" surgen de las mentes de los matemáticos en muchas ocasiones por razones tan poco relacionadas con posibles aplicaciones como la elegancia o "el honor del espíritu humano". En estos casos parece que la matemática surgiera verdaderamente de la mente humana sin una idea preconcebida. Sin embargo, la historia muestra múltiples ejemplos en los que estas teorías, productos puros de la mente de los matemáticos, encuentran una sorprendente y a veces inesperada aplicabilidad.[22] En cualquier caso, una gran parte del misterio de la susodicha eficacia desaparece cuando se tiene en cuenta que los modelos matemáticos no son adaptaciones perfectas al mundo físico, sino que constituyen modelos parciales. Por ejemplo, las órbitas de los astros no son exactamente elípticas, puesto que intervienen una gran cantidad de factores que despreciamos, es decir que se producen simplificaciones drásticas.

Por último, quiero señalar brevemente cómo desde el planteamiento de nuestro autor cabe una conciliación entre platonismo y constructivismo.[23] Habría que admitir con los platónicos que la realidad física está organizada siguiendo estructuras que preexisten al espíritu humano; sin embargo, no se debería decir que esta organización sigue unas leyes matemáticas. Es el cerebro humano quien la percibe y la traduce en matemáticas. Los números y, en general, todos los objetos matemáticos son construcciones mentales cuyas raíces se hunden, en un último análisis, en la adaptación del cerebro a las regularidades con las que se nos presenta el universo. Lo que ocurre es que el cerebro es un instrumento del que tan regularmente se sirven los científicos que hasta olvidan su existencia. Como ya hemos indicado, para Dehaene, nuestro cerebro no funciona como una máquina lógica, y aunque la evolución le ha conferido una sensibilidad particular a ciertos parámetros útiles a la ciencia, tales como el número, en cambio lo ha configurado más reticente e ineficaz a la hora de realizar largas series de cálculos. Parafraseando a Galileo, entiende nuestro autor que, más que afirmar que el universo está escrito en lenguaje matemático, habría que decir que el lenguaje matemático es el único que sabemos leer (Dehaene, 1997, p. 252).

Bibliografía

Alcolea, J. y otros, "Justificación y racionalidad de axiomas", *Lógica, lenguaje e información*, Actas de las I Jornadas sobre Lógica y Lenguaje, Sevilla, pp. 1-7, 2000

Bloor, D., *Conocimiento e imaginario social*, Barcelona, Gedisa, 1998 (ed. original, 1971).

A su juicio, nosotros proyectamos los conceptos sobre la realidad de la experiencia e intentamos acomodarla a ellos. Así puede darse una explicación al problema de la aplicabilidad, puesto que el universo que nos rodea contiene un principio de discordia, ya que en él se da algo notoriamente independiente de nosotros en su forma y condicionamiento, pero que depende de nosotros en cuanto cognoscible y experimentable. Ver Frey (1972), p. 32 y ss.

[22] La historia se muestra pródiga en ejemplificaciones de este hecho. Kline (1980, p. 352 y ss.) señala el estudio de las cónicas, las geometrías no euclídeas y la teoría de grupos como casos paradigmáticos de desarrollos ajenos a toda perspectiva de aplicación y que más resultaron de gran utilidad en algunas ramas científicas.

[23] Ver *o. c.*, p. 251 y ss. Tampoco esta pretensión es totalmente nueva. Un intento análogo, pero desde una perspectiva diferente, fue defendido por Rudolf Carnap en su momento.

Caba, A., “Las bases neurológicas de la aritmética. Una aproximación al pensamiento de S. Dehaene”, en P. Martínez-Freire (ed.), *Cognición y representación*, suplemento 10 de *Contrastes*, Málaga, pp. 249-272, 2005.

Crowe, M. J., “Ten misconceptions about mathematics and its history”, en W. Aspray y P. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of modern mathematics*, Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 260-277, 1988.

Curry, H., *Foundations of mathematical logic*, New Cork, Dover Publications, 1963.

Dehaene, S., “Varietes of numerical abilities”, en S. Dehaene (ed.), *Numerical cognition*, Oxford, Blackwell publishers, pp. 1-42, 1993.

Dehaene, S., *The number sense. How the mind creates mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1997.

Dehaene, *La representación de las matemáticas*, <http://www.prbb.org/quark/21/021045.htm>, 2007*a*.

Dehaene, S., *What are numbers, really. A cerebral basis for number sense*, <http://www.edge.org/3rd_culture/dehaene>, 2007*b*.

Diéguez, A., *Realismo científico*, Málaga, Universidad de Málaga, 1998.

Echeverría, J., “Empirical methods in mathematics”, en G. Munévar (ed.), *Spanish studies in the Philosophy of Science*, Kluwer, Dordrecht, pp. 19-55, 1996.

Frey, G., *La matematización de nuestro universo*, Madrid, G. del Toro editor, 1972.

Hill, T., “La primera cifra significativa dicta su ley”, *Mundo científico*, número 199, pp. 56-59, 1999.

Ifrah, G., *Las cifras. Historia de una gran invención*, Madrid, Alianza, 1988 (ed. original, 1985).

Kline, M., *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1985 (ed. original, 1980).

Lakoff, G. y R. Núñez, *Where mathematics come from*, New Cork, Basic Books, 2000.

Martínez-Freire, P., *La nueva filosofía de la mente*, Barcelona, Gedisa, 1995.

McCulloch, W. S., “What is a number, that a man may know it, and a man, that he may know a number?”, en W. S. McCulloch (ed.), *Embodiments of mind*, Cambridge, MIT Press, pp. 1-18, 1965.

Shapiro, S., *Thinking about mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 2000.

Wilder, R., *Evolution of mathematical concepts*, London, Open University Press, 1968.