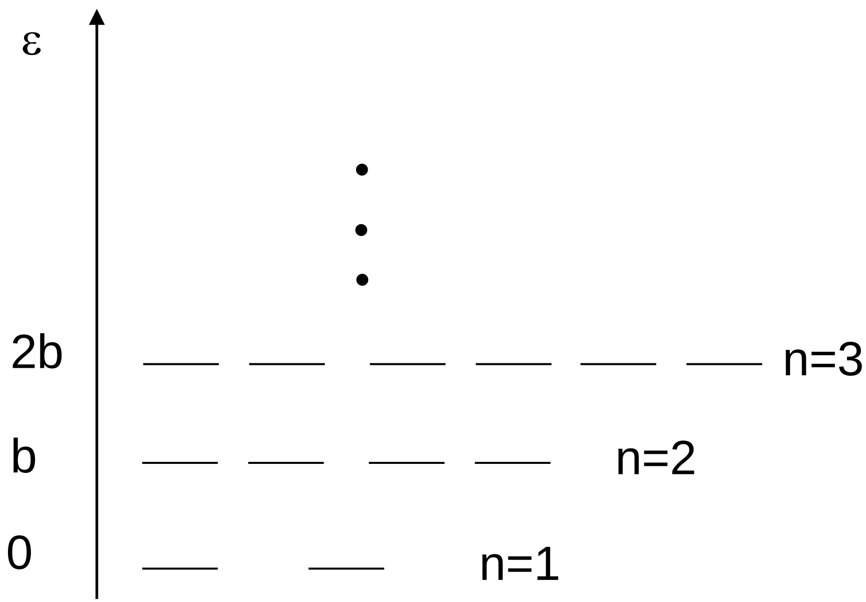
**2.-** Un sistema está formado por N partículas idénticas e independientes, cuyos niveles de energía dependen del número cuántico n de la forma $\varepsilon=b(n-1)$, donde b es una constante positiva con dimensiones de energía. Sabiendo que n toma valores enteros positivos (1, 2, 3, ....) y que la degeneración de los niveles es 2n:

a)Obtener la expresión de la función de partición de las partículas. ¿Cuál es el valor a T=0 K?. Interpreta el resultado.

b)A partir del resultado anterior, obtén una expresión aproximada de la función de partición para temperaturas altas. ¿Cuál es el valor si kT=1000b?.

c)Obtén una expresión para la energía interna molar del sistema en el límite de altas temperaturas




$$Q=\frac{q^N}{N!}$$

$$q=\sum_{\text{estados}} e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}=\sum_{\text{niveles}} g_j\cdot e^{-\frac{\varepsilon_j}{kT}}$$

$$q=\sum_i g_i\cdot e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot e^{-\frac{b(n-1)}{kT}}=2\cdot e^0+4\cdot e^{-\frac{b}{kT}}+6\cdot e^{-\frac{2b}{kT}}+\ldots$$

$$\boxed{q = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{b(n-1)}{kT}} = 2 \cdot e^{0} + 4 \cdot e^{-\frac{b}{kT}} + 6 \cdot e^{-\frac{2b}{kT}} + \ldots}$$

Si T=0

$$q = 2 + 4 \cdot e^{-\infty} + 6 \cdot e^{-\infty} + \ldots = 2$$

Si T >> b/k

$$q \approx \int_{n=1}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{b(n-1)}{kT}} dn$$

$$q \approx \int_{n=1}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{b(n-1)}{kT}} dn \approx \int_{0}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{b(n-1)}{kT}} dn = e^{\frac{b}{kT}} \int_{0}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{bn}{kT}} dn$$

$$q \approx 1 \cdot \int_{0}^{\infty} 2n \cdot e^{-\frac{bn}{kT}} dn = 2\int_{0}^{\infty} n \cdot e^{-\frac{bn}{kT}} dn$$

$$q \approx 2\int_0^{\infty} n \cdot e^{-\frac{bn}{kT}} dn \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = n & du = dn \\ dv = e^{-\frac{bn}{kT}} dn & v = \left(-\frac{kT}{b}\right) e^{-\frac{bn}{kT}} \end{array} \right.$$

$$= 2\left[ n \cdot \left(-\frac{kT}{b}\right) e^{-\frac{bn}{kT}} \right]_0^{\infty} - 2\int_0^{\infty} \left(-\frac{kT}{b}\right) e^{-\frac{bn}{kT}} dn$$

$$= 0 - 2\left[ \left(\frac{kT}{b}\right)^2 e^{-\frac{bn}{kT}} \right]_0^{\infty}$$

$$q \approx 2\int_0^{\infty} n \cdot e^{-\frac{bn}{kT}} dn = 2\left(\frac{kT}{b}\right)^2$$

Si kT = 1000b

$$q = 2\left(\frac{kT}{b}\right)^2 = 2(1000)^2 = 2 \cdot 10^6$$

$$U = kT^2 \left( \frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_{N,V}$$

Si $Q=q^N/N!$, entonces queda……

$$U = NkT^2 \left( \frac{\partial \ln q}{\partial T} \right)_{V}$$

Sustituyendo q por la expresión encontrada a altas T:

$$U = NkT^2 \left( \frac{d \ln 2\left(\frac{kT}{b}\right)^2}{dT} \right)$$

Y realizando la derivación

$$U = NkT^2 \frac{2}{T} = 2NkT$$

La magnitud molar la encontramos tomando $N = N_A$

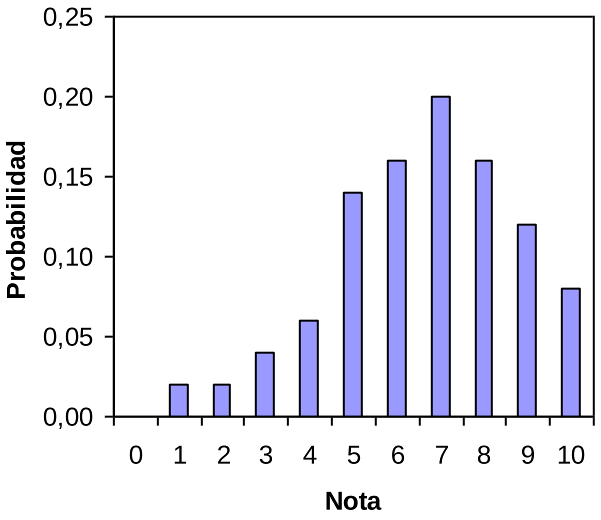
$$U_m = 2N_A kT = 2RT$$

## *Magnitudes discretas*

Probabilidad de que una variable tome un valor x determinado

$$\boxed{p_x = \frac{N_X}{N}}$$

| Nota ($x_i$) | $N_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0,02 |
| 2 | 1 | 0,02 |
| 3 | 2 | 0,04 |
| 4 | 3 | 0,06 |
| 5 | 7 | 0,14 |
| 6 | 8 | 0,16 |
| 7 | 10 | 0,20 |
| 8 | 8 | 0,16 |
| 9 | 6 | 0,12 |
| 10 | 4 | 0,08 |
| | $\sum_i N_i = 50$ | $\sum_i p_i = 1$ |



## *Magnitudes continuas*

Probabilidad de que una variable tome un valor entre x y x+dx

$$\boxed{dp_x = \frac{dN_X}{N}}$$

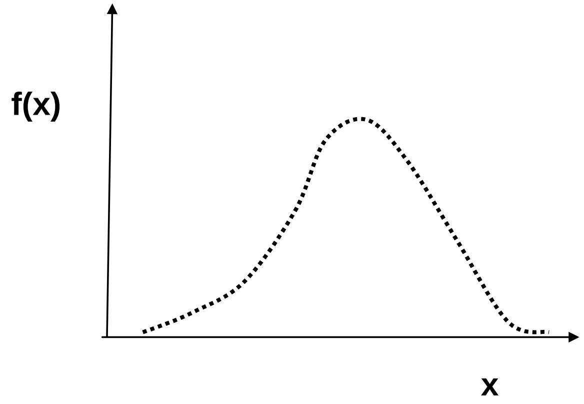
Número de casos que presentan un valor entre x y x+dx

Número de casos totales

$$\boxed{dp_x = f(x)dx}$$

**f(x)** es la función **distribución de probabilidad** y es una densidad de probabilidad o probabilidad por unidad de intervalo

$$\boxed{f(x) = \frac{dp_x}{dx}}$$



***Magnitudes discretas***

$$\sum_i p_i = 1$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i x_i = \sum_i p_i x_i$$

$$\langle h(x) \rangle = \sum_i p_i h(x_i)$$

***Magnitudes continuas***

$$1 = \int_{\forall x} dp(x) = \int_{\forall x} f(x)dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{\forall x} x dp(x) = \int_{\forall x} x f(x)dx$$

$$\langle h(x) \rangle = \int_{\forall x} h(x)dp(x) = \int_{\forall x} h(x) f(x)dx$$

**4.** Al estudiar los ingresos mensuales de los trabajadores de un determinado país se empleó la siguiente función de distribución:

$$f(x) = Cx^2 e^{-ax^2}$$

donde x son los ingresos mensuales en euros y a se determinó que valía $3.785 \cdot 10^{-6}$ euros$^{-2}$.

a) Calcule C sabiendo que la función de distribución debe estar normalizada.

$$\boxed{\int_{\forall x} dp_x = \int_{\forall x} f(x)dx = 1}$$

$$\int_{\forall x} f(x)dx = 1 = \int_0^\infty Cx^2 e^{-ax^2} dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n)!\,\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2n+1} n!\, a^{n+\frac{1}{2}}}}$$

$$1 = C\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = C\frac{1}{4a}\frac{\pi^{1/2}}{a^{1/2}}$$

$$C = 4\frac{a^{3/2}}{\pi^{1/2}} = 1.6618 \cdot 10^{-8} \qquad \text{euros}^{-3}$$

b) ¿Cuáles son los ingresos mensuales medios de un habitante de ese país?

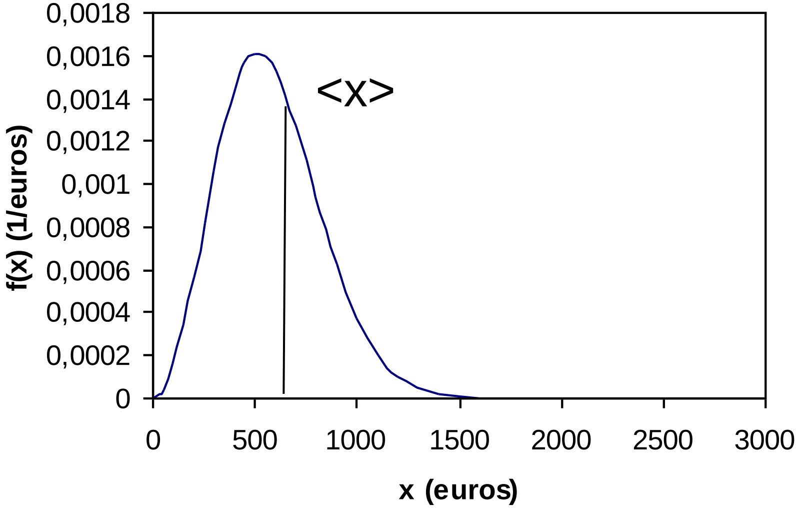
$$\boxed{\langle x\rangle = \int_{\forall x} x\,dp_x = \int_{\forall x} x f(x)\,dx}$$

$$\langle x\rangle = \int_0^\infty x C x^2 e^{-ax^2}\,dx = C\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{4a^{3/2}}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx$$

$$\langle x\rangle = \frac{4a^{3/2}}{\pi^{1/2}}\frac{1}{2a^2} = \frac{2}{(\pi a)^{1/2}} = 580 \quad \text{euros}$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}}$$

c) Representa la función de distribución. Indique gráficamente como determinaría la proporción de habitantes del país que tienen ingresos mensuales menores que el valor medio? ¿y mayores?. Calcula dichas proporciones haciendo uso de las tablas de integrales.




$$\frac{N(x < \langle x \rangle)}{N} = \int_0^{\langle x \rangle} \frac{dN_x}{N} = \int_0^{\langle x \rangle} dp_x = \int_0^{\langle x \rangle} f(x)dx$$

$$\frac{N(x > \langle x \rangle)}{N} = \int_{\langle x \rangle}^{\infty} \frac{dN_x}{N} = \int_{\langle x \rangle}^{\infty} dp_x = \int_{\langle x \rangle}^{\infty} f(x)dx$$

$$\boxed{\int_0^{\langle x \rangle} dp_x + \int_{\langle x \rangle}^{\infty} dp_x = 1}$$

d) La varianza ($\sigma^2$) proporciona una medida de la 'anchura' de la distribución. Se puede demostrar que la varianza se puede calcular mediante la relación

$$\sigma^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2$$

¿Cuál es la varianza de la distribución de ingresos mensuales que estamos estudiando?

$$\boxed{\left\langle x \right\rangle = \int_{\forall x} x\,dp_x = \int_{\forall x} x f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{\forall x} x^2\,dp_x = \int_{\forall x} x^2 f(x)\,dx}$$

$$\left\langle x \right\rangle = \frac{2}{(\pi a)^{1/2}}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_0^\infty x^2 C x^2 e^{-ax^2}\,dx = C\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \frac{(2n)!\,\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2n+1} n!\,a^{n+\frac{1}{2}}}}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{4a^{3/2}}{\pi^{1/2}} \frac{4!\,\pi^{1/2}}{2^5 2!\,a^{5/2}} = \frac{3}{2a}$$

$$\sigma^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2 = \frac{3}{2a} - \frac{4}{\pi a} = 60766 \quad \text{euros}^2$$

$$\sigma = 246.5 \quad \text{euros}$$

# Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n)!\,\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2n+1} n!\, a^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} a > 0 \\ n = 1,2,\ldots \end{array}$$