BLOQUE IV: INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

PEDRO VALERO MORA

Parte I
Distribución muestral

1.1.Notación

POBLACIÓN

Parámetros: μ, σ, π, ...

Muestreo aleatorio

MUESTRA 1

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Estadísticos: $\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\pi}_1, ...$

Estimaciones puntuales: $\bar{x}_1$, s_1, p_1,

MUESTRA 2

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Estadísticos: $\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2, \hat{\pi}_2, ...$

Estimaciones puntuales: $\bar{x}_2$, s_2, p_2,

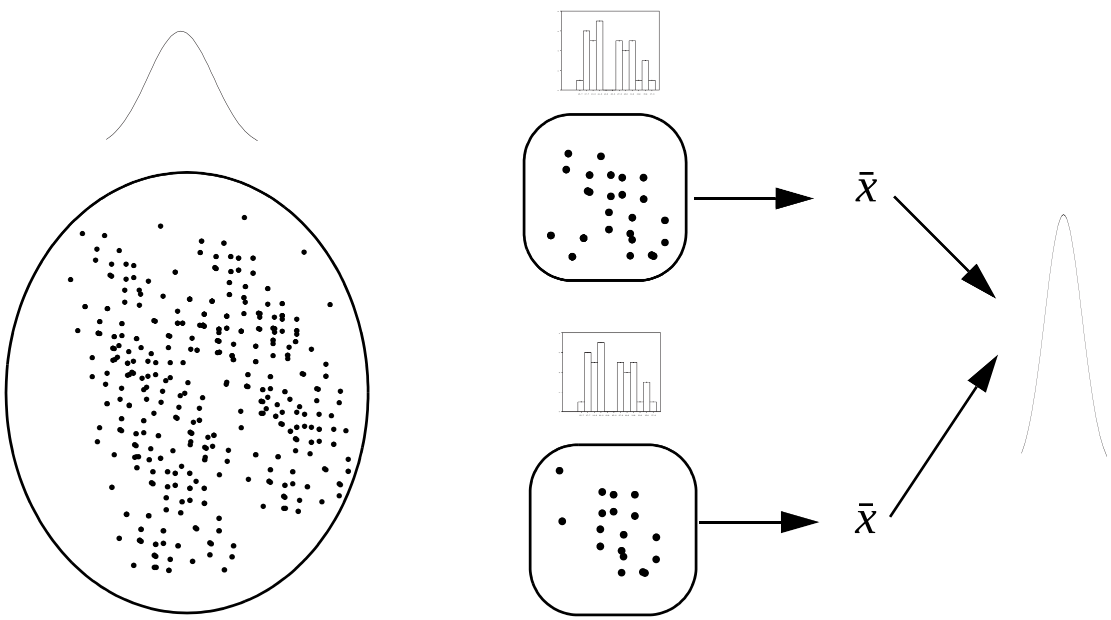
- Las estimaciones puntuales son las calculadas utilizando la muestra disponible y aplicando las formulas usuales
- Los parámetros son valores ideales que no conocemos exactamente en la gran mayoría de los casos
- Los estadísticos son aproximaciones a los parámetros calculados a partir de las estimaciones puntuales más los intervalos en los que puede razonablemente estar el parámetro

1.2.¿Cuál es la media?
O la desviación típica, correlación,etc.

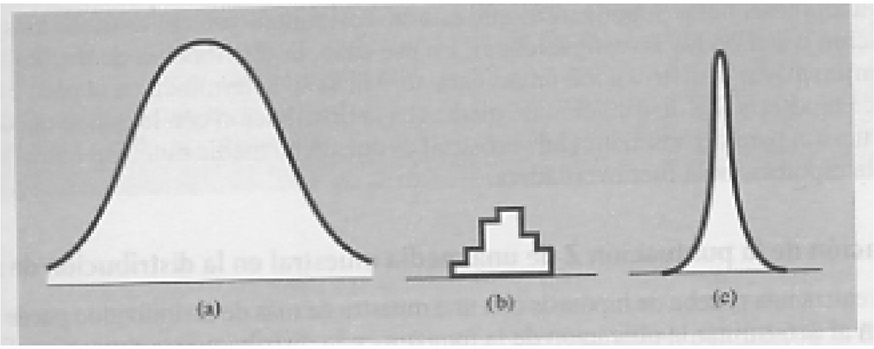
- En el cuatrimestre anterior se estudia como calcular estimaciones puntuales.
- Los valores estimados para una muestra podrían ser diferentes para una muestra diferente.
  - En el informe PISA los resultados en matemáticas en España podrían ser diferentes si se hubieran muestreado otros estudiantes.
  - No obstante, el resultado sería diferente pero no ***muy diferente.***
  - ¿Cómo podemos valorar la diferencia?

1.3.Muestras y distribuciones muestrales
¿Cuál es el nivel medio de matemáticas?

- Población y muestra



- La figura de abajo representa los tres conceptos que vamos a manejar.



  - a) Población
  - b) Muestra
  - c) Distribución muestral

1.4.¿Qué forma tiene la distribución muestral? *Un poco de simulación*

- Demostración en ViSta
  - La idea es ver como la distribucion muestral va variando a medida que se va aumentando el número de muestras cogidas.
  - También se puede ver como el proceso funciona cuando las muestras que se cogen son más grandes.
  - Por ultimo, se puede ver que utilizando una distribución que no es la normal, la distribución muestral de la media también tiende a lo normal.

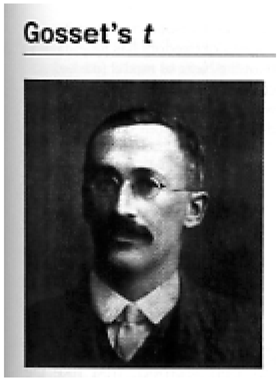
- Conclusiones
  - La distribución muestral tiene forma normal cuando se cogen muchas muestras y son grandes
  - La distribución muestral es aproximadamente normal independientemente de la forma que tenga la distribución original.

1.5.¿Por qué es importante la forma de la distribución muestral de la media? *Anticipando lo que vamos a ver*

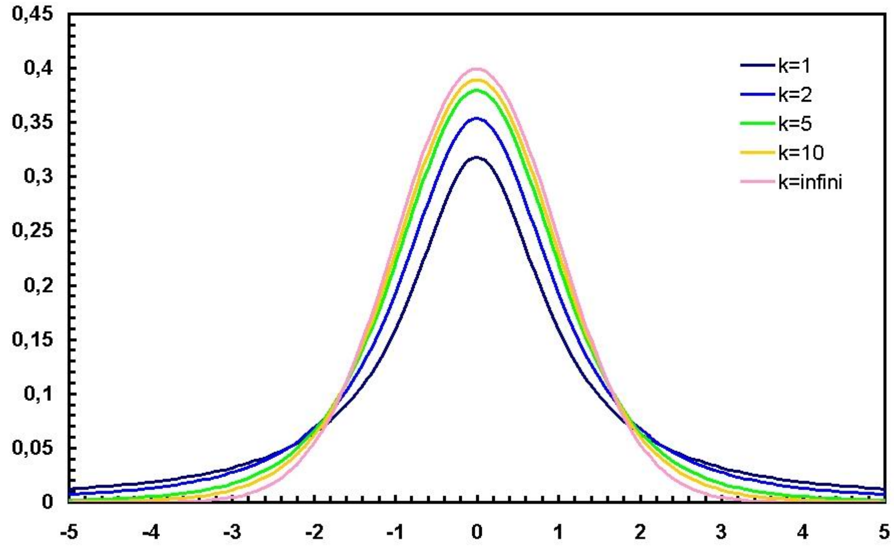
- La forma de la distribución muestral de la media es importante porque nos permite calcular intervalos de confianza alrededor de la media.
- Como la distribución muestral de la media es normal en muchos casos podemos utilizar los valores de z que ya conocemos
- No obstante, en la sección siguiente aprenderemos que la distribución muestral de la media no siempre es normal y que hay que utilizar también otras distribuciones. Esto ocurre cuando las muestras son pequeñas.

1.6.¿Y si las muestras son pequeñas que pasa? *La última para el camino*

- Gosset demostró que cuando las muestras son pequeñas, la distribución muestral de la media sigue la distribución t de Student con n-1 grados de libertad
  - Gosset se dedicaba al control de calidad de Guiness y probar muestras muy grandes no estaría bien visto



- ¿Qué diferencia hay entre la distribución normal y la distribución t?



  – La distribución t con muestras pequeñas es más ancha (tiene valores más grandes).
  – Cuando la muestra aumenta, no hay mucha diferencia (muestra grande)

- Esto tiene la consecuencia de que cuando las muestras son pequeñas es más probable obtener resultados que se alejan de la media.
- En el caso de Gosset, al encontrar que los valores de calidad usados se alejaban de la media deseable, y usando la distribución normal, se dio cuenta de que estaba rechazando más muestras por baja calidad de lo que en principio debería. Al utilizar la distribución t de Student eso dejó de ocurrir.

ACTIVIDADES

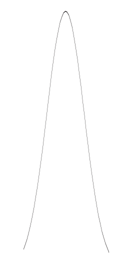
EJERCICIO 1.6.1 En el informe PISA se dice que España tiene una media en matemáticas de 476. ¿Podemos decir que España tiene un rendimiento medio menor que Hungria?

La media de rendimiento para España está calculada en una muestra, así que no sabemos realmente cual es el rendimiento medio en España, sólo una aproximación. Como veremos en los siguientes temas, este tipo afirmaciones tienen que ser matizadas

EJERCICIO 1.6.2 ¿Tiene un rendimiento mayor que Brasil?

La contestación al Ejercicio 1.6.1 es también valida aquí.

1.7.Características de la distribución muestral de la media
El ejemplo más normal



- La forma de la distribución muestral de la media es la distribución normal
  - No obstante, esto se cumple sólo si la muestra es grande (digamos más de 30 o 40).
  - Si la muestra es pequeña, entonces la distribución es la ***t*** con ***n-1*** grados de libertad (la distribución t se define con grados de libertad)
- La media de la distribución muestral es la media de la población

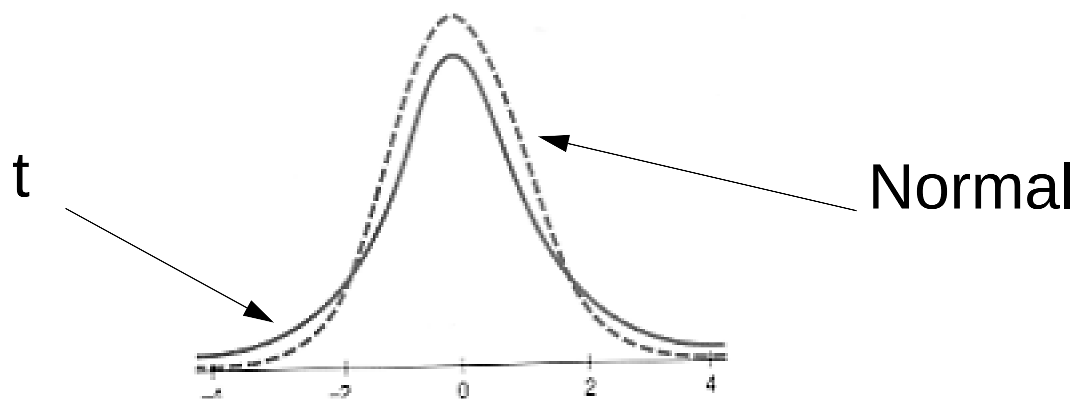
- La desviación típica de las distribuciones muestrales se llama ***Error típico o estándar,*** y hay dos casos:
  - Cuando conocemos la desviación típica σ de la población.

    Error típico con varianza conocida=$\sigma / (\sqrt{n})$

  - Cuando no conocemos la desviación típica. ***Este caso es el más común en la práctica. El caso anterior es muy poco común.***

    Error típico (con varianza desconocida)=$s_{n-1} / (\sqrt{n})$

- En el caso que la varianza es desconocida, el ***Error Típico debe compararse con la distribución*** t_{n-1}
  - Esta corrección o caso especial sólo tiene importancia con muestras pequeñas ya que la distribución t con muestras grandes ya hemos dicho que es muy parecida a la normal.



- Nota importante: ***En la práctica casi siempre podremos utilizar la distribución t porque cubre la mayoría de los casos realistas.***
  - La única situación en la que deberíamos utilizar la distribución normal sería cuando la muestra es pequeña y conocemos la desviación típica (lo cual es raro, pero véase Ejercicio 1.7.1).

ACTIVIDADES

EJERCICIO 1.7.1 Los administradores de un hospital estaban preocupados por la forma en que se estaba atendiendo a mujeres embarazadas en esa parte de la ciudad. Para estudiar esa atención, examinaron el tiempo de gestación de los niños nacidos en esa zona de la ciudad. Extrajeron una muestra de 25 niños nacidos en el hospital en los seis meses anteriores. El tiempo de gestación humana se sabe que tiene una media de 266 días y una desviación típica de 16 días. Los administradores del hospital querían saber si la media del tiempo de gestación de los niños nacidos en su hospital era la misma que la media conocida ¿Cuál es el error típico del tiempo de gestación humana?

Para este test habría que utilizar el valor establecido para la desviación típica (16 días), en lugar de estimarlo de la muestra (que además no nos dan en el enunciado).

EJERCICIO 1.7.2 En el informe PISA se proporciona, además de la media del nivel de matemáticas por países, el ERROR TÍPICO de esa media. A partir de ese error típico, ¿entre qué valores está el valor de España?

De momento, todavía no podemos hacer este ejercicio con lo que sabemos. En la sección sobre intervalos de confianza aprenderemos a responder este tipo de cuestiones.

1.8.Resumen de esta sección

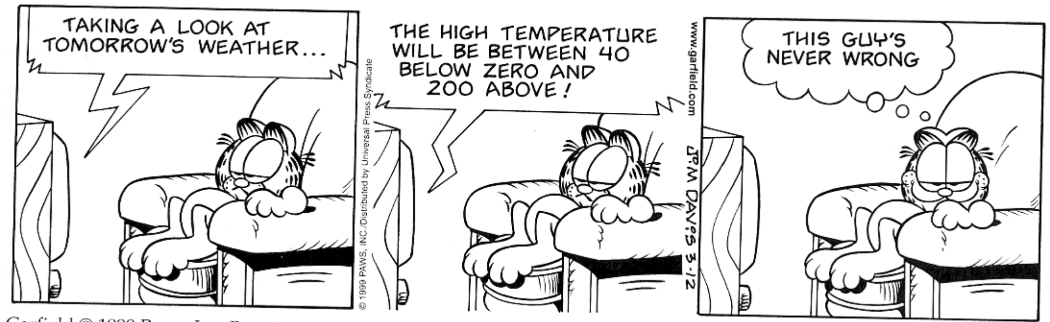
Las ideas fundamentales del semestre en 5 minutos

- Nosotros trabajamos con muestras, no con poblaciones.
- No estamos seguros de los valores en la población, sólo de los valores en la muestra. Tenemos que estimar los primeros a partir de los segundos.
- En el caso de la media, aunque no sabemos su valor en la población sabes cual es la ***distribución muestral de la media***->la distribución normal con muestras grandes y la distribución t-1 con muestras pequeñas

  - Tiene una desviación típica que llamamos error típico y que sabemos como calcular (mirar fórmula en página 16)
- Con todo lo anterior podemos pasar al siguiente paso: Hacer intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para las medias

Parte II
Intervalos de confianza

2.1.Calculando intervalos de confianza



- Volviendo al informe PISA, ¿para qué nos sirve la distribución muestral?
  - Vemos que $\bar{x} = 485$ y que $ET = 2.4$ (lo pone en la página 5 del informe)

  - Sabemos que la distribución muestral sigue la distribución normal por lo que podemos usar sus propiedades.
- Si pudiéramos muestrear la población de escolares en España muchas veces y suponiendo que 485 es la media de la población, entonces:
  - Entre $485 \pm 2.4 \; = \; \bar{x} \pm 1 \times ErrorTipico$ estaría la media de aproximadamente el 60% de las muestras
  - Entre $485 \pm 1.96 \times 2.4 \; = \; \bar{x} \pm 1.96 \times ErrorTipico$ estaría la media de aproximadamente el 95% de las muestras.
  - Entre $485 \pm 2.575 \times 2.4 \; = \; \bar{x} \pm 2.575 \times ErrorTipico$ estaría la media de aproximadamente el 99% de las muestras

- .Nosotros no podemos muestrear repetidas veces, ni tampoco estamos seguros de que 485 sea la media de la población, pero ***asumiendo que la distribución muestral de la media sigue la distribución normal***, podemos decir:
  - Tenemos una confianza del 60% que la media de la población está entre $\bar{x} \pm 1 \times ErrorTipico$
  - Tenemos una confianza del 95% que la media de la población está entre $\bar{x} \pm 1.96 \times ErrorTipico$
  - Tenemos una confianza del 99% que la media de la población está entre $\bar{x} \pm 2.575 \times ErrorTipico$

- La forma más común de un intervalo de confianza es:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \times ET(x)$$

Ecuación (1)

  - En donde $\bar{x}$ es la estimación puntual, z es la puntuación obtenida de las tablas de la distribución normal para $\alpha/2$ que es el error admitido (normalmente 5%) dividido por 2 (por que hay que dejar la mitad a un lado y la otra mitad al otro lado)

- No obstante, hay que tener en cuenta que si la muestra es pequeña no se utiliza la distribución normal z sino la distribución muestral t. Si usamos t, en este caso, la fórmula es:

$$\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \times ET(x)$$

- ¿Qué valores tienen z y t?
  - z con un nivel de confianza del 95% y prueba de dos colas tiene un valor 1.96. Este valor es interesante aprenderlo de memoria.
  - t con un nivel de confianza del 95% y muestras mayores de 40 es también prácticamente 1.96.

- t con un nivel de confianza del 95% y muestras menores de 40 es mayor de 1.96 (es conveniente mirar el valor en las tablas).

ACTIVIDADES

EJERCICIO 2.1.1 En el informe PISA, España tuvo una media de 484 y un Error típico de 2.4. Calcular el intervalo de confianza entre los que estará la verdadera media.

Este ejercicio tiene trampa. ¿Cuál es?

EJERCICIO 2.1.2 El ejercicio de antes no se puede hacer. Falta la confianza con la que queremos trabajar. Normalmente utilizaremos un nivel de confianza del 95%. ¿Cuál es la z para 95%?

Hay que aprenderselo de memoria. Es 1.96.

EJERCICIO 2.1.3 Ahora, ¿cuál es el intervalo de confianza para España?

$484 \pm 1.96 \times 2.4 = (479.3, 488.7)$ Esto se lee del siguiente modo: Con una confianza del 95% la media de España estara entre 479 y 489 aprox.

EJERCICIO 2.1.4 Supongamos que para hacer el intervalo anterior utilizamos la distribución t en lugar de z. ¿Qué valor deberíamos buscar?

Deberíamos buscar $t_{0.975,\,(10761-1)} = 1.9601844$. Podemos ver que no hay diferencia práctica entre ese valor y el de z cuando el n es grande.

EJERCICIO 2.1.5 ¿Cuál es el intervalo de confianza para Finlandia? A partir de ahora si no indicamos el nivel de confianza teneis que asumir que es el 95%

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.1.6 ¿Cuál es el intervalo de confianza para Suiza?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.1.7 ¿Cuál es el intervalo de confianza para Francia?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.1.8 ¿Cuál es el intervalo de confianza para Suecia?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.1.9 (Este ejemplo está tomado de De Veaux, Velleman y Bock, 2005 p. 453). Los accidentes de vehículos a motor son la causa principal de muerte para la gente entre 4 a 33 años. En el año 2000, los accidentes de vehículos a motor fueron responsables de 41821 muertes en US, algo más que los 41717 que en el año anterior. Esto significa, en promedio, 115 muertes al día, o 1 muerte cada 13 minutos. La velocidad es un factor contribuyente en un 29% de los accidentes mortales. No sólo se perdieron 12350 vidas en accidentes relacionados con velocidad en el año 2000, sino que el coste económico de esos accidentados es estimado en unos 27.4$ billones por año.
La calle Triphammer es una calle con mucho tráfico que pasa por medio de un vecindario residencial. Los residentes están preocupados porque los vehículos que pasan a menudo superan el límite de

30 millas por hora. La policía local algunas veces pone un radar al lado de la carretera de tal modo que cuando pasan los vehículos, el detector muestra la velocidad a la que van. Para ver si los coches pasan a la velocidad correcta, un residente se puso cerca del radar y apuntó la velocidad de los vehículos que pasaban durante un periódo de 15 minutos. Cuando pasaban varios, apuntó sólo la velocidad del primero. Los resultados que obtuvo son que, con $n = 23$, $\bar{x} = 31$ **y** $s = 4.25$. **Utilizando un intervalo del 95%, ¿Entre qué valores estaría la velocidad de los vehículos que pasan por esa calle?**

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

2.2.La distribución muestral de otros estadísticos
El más importante es la proporción

- Cada estadístico (media, varianza, proporción, correlación, etc.) tiene su propia distribución muestral.
- La forma de la distribución de esos estadísticos suele ser la distribución normal o la ***t de Student pero no siempre.***
  - La ***varianza*** por ejemplo no sigue la distribución normal ni la distribución t.
  - La ***desviación típica*** sigue la distribución *t* con muestras pequeñas pero es normal con muestras de más de 30 individuos.

- Las ***proporciones*** es uno de los casos más interesantes. Lo veremos en la sección siguiente.

2.3.Distribución muestral de las proporciones
Las proporciones son muy importantes

- Una proporción es el número de veces que se da una característica dividido por el total de casos:

$$p = \frac{y}{n}$$

- Si multiplicamos una proporción por 100 tenemos un porcentaje. Aunque los porcentajes son más conocidos usaremos proporciones porque los cálculos son más cómodos.
- ***La distribución muestral de las proporciones*** sigue la distribución binomial para n (número de casos) y p (la proporción de éxitos).

- ***No obstante, en la práctica se utiliza la denominada aproximación normal a la binomial. Esta aproximación se puede usar cuando*** $np \geq 10$ y $nq \geq 10$
  - ¿Por qué usamos una aproximación en lugar de la correcta? Porque el calculo con la binomial es bastante largo y la aproximación funciona bien en la mayoría de los casos
- Así pues, podemos usar la Ecuación 1 para hacer intervalos de confianza cambiando la media por la proporción ***pero si antes comprobamos que*** $np \geq 10$ ***y*** $nq \geq 10$

$$p \pm z_{\alpha/2} \times ET(p)$$

Ecuación (2)

- El cálculo del error típico es especial en el caso de las proporciones. Esto es porque la desviación típica es $\sqrt{pq}$ y por tanto, el error típico es (tener en cuenta que en esta fórmula, $q = 1 - p$)

$$ET(p) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

  – La importancia de esta diferencia es la siguiente: En este caso, el error típico está directamente relacionado con la proporción (decimos que el error típico ***depende*** de la proporción).

Ejemplo: Supongamos que tenemos 5 muestras de 10 sujetos con las proporciones siguientes: 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9. Las desviaciones típicas serían respectivamente: 0.3, 0.46, 0.5, 0.46, 0.3. Los errores típicos serían respectivamente: 0.1, 0.14, 0.16, 0.14, 0.1.

– El ejemplo anterior muestra que la desviación típica y el error típico se derivan de las propias proporciones y que los valores de proporciones más cercanos al medio (al 0.5) tienen valores de desviaciones típicas y errores típicos más altos.

ACTIVIDADES

EJERCICIO 2.3.1 En mayo 2002, una agencia de encuestas preguntó a 537 adultos muestreados al azar en Estados Unidos si, "hablando en general, usted cree que la pena de muerte es aplicada justa o injustamente en US?" De estos, un 53% contestó que justa, y un 7% que no sabían (y el resto que injustamente). ¿Cuál es el intervalo de confianza para los que piensan que la aplicación es justa? Al nivel de confianza habitual, ¿se puede decir que está por encima del 50% la gente que opina que la aplicación es justa?

En primer lugar comprobamos si np>10. En este caso hacemos 537x0.53=284 que cumple de sobra la condición de mayor que 10. Por tanto, usando la aproximación normal tenemos

$$0.53 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.53 \times 0.46}{537}} \approx (0.57, 0.49)\ .$$

EJERCICIO 2.3.2 En el informe PISA, en la página 4, se indica el porcentaje de uso de lenguas propias en las diferentes comunidades. ¿Cuál es el intervalo de confianza para el País Vasco? Nota: El tamaño de la muestra para el País Vasco está también en el informe.

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.3 ¿Se puede calcular el mismo intervalo para Galicia?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.4 En la página web http://www.which-sideareyouon.com/ aparece una campaña de un vendedor de ordenadores para que los que quieran voten para elegir el color de los ordenadores que fabrica esa marca. Hay dos colores, negro o titanio. En Europa, en el momento que escribo esto hay 26186 votos a favor de color titanio y 24876 a favor de color negro. ¿Cuál sería el intervalo de confianza del porcentaje de los que votan a favor de titanio? ¿Podríamos decir que los de titanio ganan claramente la votación?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.5 En Francia hay 2006 a favor de titanio y 1876 a favor de negro. ¿Gana el titanio?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.6 En España hay 1378 a favor de titanio y 773 a favor de negro. ¿Gana el titanio o el negro?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.7 En Alemania son 4151 a favor del negro y 3233 a favor del titanio. ¿Gana el negro?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 2.3.8 Resto de europa tenemos 3757 a favor de titanio y 3790 a favor de negro. ¿Gana el negro?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

2.4.Intervalos de confianza y proporciones en la práctica

¿Dónde tiene sentido aplicar este cálculo?

- Cuando vemos como resultado de un estudio que se informa que el X% está a favor o en contra de una determinada opción, objeto, idea, o lo que sea, nos podemos plantear si tiene sentido calcular un intervalo de confianza o no. ¿Cuándo y cómo tiene sentido hacer calcular este intervalo de confianza?
  - El primer elemento que hay que tener en cuenta es el tamaño de la muestra. Si la muestra es muy grande, los intervalos de confianza van a ser muy pequeños alrededor del valor calculado. Pongamos que el 75% de una muestra de 1000 individuos está

de acuerdo con dejar de fumar en centros públicos. El intervalo de confianza al 95% en la población es aprox. de 77% a 73%. Vemos que con una muestra de ese tamaño el intervalo no aporta mucho sobre lo que ya sabíamos (que una mayoría está a favor de la medida). Supongamos que la muestra es de sólo 10 sujetos con el mismo resultado de 75%. Entonces el intervalo iría de 100% al 47%. Con sólo una muestra de 10 el intervalo es tan amplio que ni siquiera estaríamos seguros de sí hay la mayoría está a favor de la medida o hay un empate.

– Cuando tenemos algún tipo de límite o valor que queremos comprobar si estamos por encima de él con bastante seguridad o no. Un ejemplo típico son las estimaciones de voto. Si en unas votaciones se necesita más de un 50% para ganar es importante ver si el intervalo de confianza calculado a partir de una muestra incluye ese valor (aunque hay que tener en cuentra otro factor en los estudios electorales->la gente que está indecisa y/o que cambia de idea. En ese caso estar por encima del 50% en los estudios no es suficiente para garantizar un resultado).

2.5.Intervalos de confianza en paquetes estadísticos
¿Cómo podemos hacer este cálculo con ordenador?

- Ejemplo: tenemos un grupo de niños al que les pasamos el WISC con los siguientes resultados:

Tabla 1: Resultados hipotéticos de un estudio. Cada casilla es el resultado para un sujeto

410	430	739	370	317	464	525	289	491	196	268	372
342	222	219	513	295	285	408	543	298	494	317	407

- El SPSS nos produce lo siguiente (está en el comando "pruebas t para una muestra":

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Tiempo WISC	24	384.29	126.412	25.804

El error típico está aquí

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Tiempo WISC	14.893	23	.000	384.292	330.91	437.67

El intervalo está aquí

- ViSta (un programa gratuito) produce:

```
UNIVARIATE ANALYSIS of the Cd/Ed/Wisc Data.
Analysis based on variable Wisc

T-TEST FOR A SINGLE SAMPLE:
Null hypothesis:        Mu EQ     0.000
Alternative hypothesis: Mu NE     0.000 (two tailed)

SAMPLE STATISTICS:
Wisc......... N =      24 Mean =  384.292 StDev =  126.412 Var =15979.868

SIGNIFICANCE TEST
Test Result.. T =  14.893 For df =  23.0 p < .0001

CONFIDENCE INTERVAL:
The 95% confidence interval is: (330.9128 437.6706)
```

Nos da el intervalo pero no el error típico

- En el caso de proporciones necesitamos que la variable esté en la forma de 0 y 1, ó 1 y 2. Por ejemplo, en la Tabla 2 se muestra el género de los sujetos que contestaron a una encuesta.

Tabla 2: Variable que codifica si es hombre o mujer. 1 significa mujer y 0 hombre.
Sólo se muestran los 15 primeros casos de 1517

0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

  - Si le pedimos una prueba t al SPSS con esos datos tenemos lo siguiente.

La media es una proporción

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Sexo del encuestado	1517	.42	.494	.013

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Sexo del encuestado	33.082	1516	.000	.419	.39	.44

En este caso es fácil ver que se cumple la condición de np>10 pero si la muestra es pequeña habría que comprobarla

ACTIVIDADES

EJERCICIO 2.5.1 A un grupo de niños le pasamos el Test de las figuras Integradas (TFI), y obtenemos los siguientes datos.

Tabla 3: Resultados hipotéticos de un estudio. Cada casilla es el resultado para un sujeto

59	33	49	69	65	26	29	62	31	139	74	31
48	23	9	128	44	49	87	43	55	58	113	7

El SPSS nos proporciona el siguiente output. ¿El intervalo de confianza para la media incluye el valor 75?

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Test figuras integradas	24	55.46	33.932	6.926

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Test figuras integradas	8.007	23	.000	55.458	41.13	69.79

No

EJERCICIO 2.5.2 Tenemos un grupo de sujetos a los que se les mide la cantidad de dopamina en sangre.

Tabla 4: Resultados hipotéticos de un estudio. Cada casilla es el resultado para un sujeto

10.5	20.0	11.2	13.0	18.0	15.6	14.5	10.4
12.3	14.6	9.8	11.2	8.4	13.9	10.1	8.9
16.9	12.4	11.1	14.2				

El SPSS nos da el siguiente resultado. ¿El intervalo incluye el valor 12?

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Dopamina	20	12.850	3.1048	.6942

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Dopamina	18.509	19	.000	12.8500	11.397	14.303

Si

EJERCICIO 2.5.3 A un grupo de trabajadores se les pregunta si han tenido problemas con el jefe en los últimos 6 meses. En el archivo de datos 1 indica que sí que han tenido problems y 0 que no han tenido problemas. ¿Dirías que la proporción de gente con problemas es muy alta?

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Problemas con el jefe	1471	.03	.167	.004

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Problemas con el jefe	6.573	1470	.000	.029	.02	.04

En este caso es facil ver que no sin hacer cálculos.

2.6.Ejemplos del uso de intervalos de confianza

- Ser zurda y cancer de pecho

Innate left handedness and risk of breast cancer: case-cohort study

Made K Ramadhani, Sjoerd G Elias, Paulus A H van Noord, Diederick E Grobbee, Petra H M Peeters, Cuno S P M Uiterwaal

Among the proposed origins of breast cancer are intrauterine influences, such as exposure to sex hormones.[1] Such exposure may also influence cerebral lateralisation, with hand preference being one of its manifestations. We know only of case-control studies on a putative common origin of left handedness and breast cancer, some of which show an association.[2] We assessed the association between handedness and incidence of breast cancer in a population based prospective cohort of healthy, middle aged women followed up for 16 years.

Participants, methods, and results

In a breast cancer screening study in Utrecht, the Netherlands, 12 178 women born between 1932 and 1941 and recruited between 1982 and 1985 (participation rate 40%) had baseline questionnaire data recorded about reproductive history, demography, lifestyle, and innate hand preference and had anthropometric measures taken. Linkage with the regional cancer registry provided data on all new cases of invasive breast cancer that occurred until 1 January 2000. Follow-up for adequate informa-

women with a body mass index of ≤25 but not in those whose index was >25 (P interaction 0.07), and in parous but not nulliparous women (P interaction 0.02).

Comment

We found that left handed women are more than twice as likely to develop premenopausal breast cancer as non-left handed women. This risk is compatible with left handedness being a marker of constitutional risk rather than of environmental risk as with postmenopausal breast cancer.

Our findings among premenopausal women may be compatible with a stronger association in women with a normal body mass index, as high body mass index is a particular risk

Association between handedness and incidence of breast cancer in study participants followed up at 16 years

Innate handedness	Cases	Estimated person years*	Hazard ratio (95% confidence interval) Crude	Adjusted†

- En este estudio se utilizaron métodos avanzados que no explicaremos (regresión de Cox).
- Aunque no conozcamos los métodos en detalle, lo que hemos aprendido sobre intervalos de confianza nos permite interpretar los resultados.

– Examinando la tabla de resultados

history, demo
had anthropo
cancer registr
ast cancer tha
quate informa
women would
scertained vital
of 1500 women
n years lived in
ncomplete data
ample and 371
er (inciden
used Pren
Barlow and col-
AS (version 8.2,
macro (http://

%) left handed
ft and non-left

Un 1 significa que el riesgo es el normal para todo el mundo. Para las mujeres, el valor 1.39 lo que significa mayor riesgo que todo el mundo. Fijarse que el intervalo de confianza casi incluye el 1

[illegible] idence of breast cancer in study

[illegible]	[illegible]	[illegible]	Hazard ratio (95% confidence interval)	
			Crude	Adjusted†
Total				
Non-left handed	361	153 422	1.00	1.00
Left handed	65	19 119	1.39 (1.09 to 1.81)	1.32 (0.99 to 1.76)
Premenopausal breast cancer				
Non-left handed	57	32 113	1.00	1.00
Left handed	15	3329	2.41 (1.35 to 4.30)	2.20 (1.15 to 4.20)
[illegible]				
[illegible]	[illegible]	127 426	1.00	1.00
Left handed	39	17 665	1.12 (0.80 to 1.57)	1.05 (0.75 to 1.48)
Body mass index ≤25				
Non-left handed	217	95 964	1.00	1.00
Left handed	45	11 332	1.62 (1.17 to 2.24)	1.59 (1.15 to 2.20)
Body mass index >25				
Non-left handed	144	57 458	1.00	1.00
Left handed	20	7787	1.05 (0.67 to 1.66)	1.04 (0.65 to 1.64)

Para este tipo de cancer, el riesgo es mucho mayor

Parte III
Pruebas de hipótesis

3.1.Introducción a las pruebas de hipótesis
Un paso más

- Cuando recogemos unos datos y tenemos una idea del resultado que esperamos o queremos que ocurra, decimos que tenemos una hipótesis:
  - En el informe PISA podemos tener la hipótesis de que España tiene unos resultados ***diferentes*** a la media (superiores o inferiores).
  - En el informe PISA podemos tener la hipótesis de que España tiene unos resultados ***superiores*** a la media.

– En el informe PISA podemos tener la hipótesis de que España tiene unos resultados ***inferiores*** a la media.

- ***Suponiendo que sabemos***[1] que la media en matemáticas de la OCDE es 500 y que España tiene una media de 485 con error típico de 2.4. Tendríamos que:
  - Con la primera hipótesis nos planteamos si España tiene unos resultados diferentes a 500.

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} = 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} \neq 500$$

  - Con la segunda hipótesis nos plantemos si España tiene unos resultados superiores a 500.

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} \leq 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} > 500$$

[1]¿Suponiendo que sabemos? ¿Qué quiere decir eso? Bien, en el informe PISA indica que la media de la OCDE es de 500 pero con un error típico de 0.6, lo cual quiere decir que ese valor de 500 está calculado con una muestra y que por tanto no sabemso con exactitud cuál es el valor en la población. Ahora bien, como el procedimiento que estamos viendo necesita una hipótesis nula concreta tenemos que partir del supuesto de que 500 es el valor verdadero.

– Con la tercera hipótesis nos planteamos si España tiene unos resultados inferiores a 500

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} \geq 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} < 500$$

- Hay que tener en cuenta que la hipótesis que nos interesa es la H_e. La H_0 es simplemente el resto de los valores.
  - NOTA: H_0 =Hipótesis nula y H_e=Hipótesis del estudio.
  - Una regla nemotécnica: En una investigación nosotros tenemos el papel de ser los ***fiscales.*** Nuestro objetivo es demostrar la culpabilidad (la H_e) pero la H_0 es verdad ***hasta que se demuestre lo contrario.***

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.1.1 Un investigador está interesado en averiguar si las personas son capaces de identificar con el mismo nivel de precisión las emociones de personas de otras culturas que las que son de la propia cultura. Se sabe que utilizando determinado método de medición, los adultos norteamericanos en general están distribuidos normalmente con una media de 82 (de un total de 100) y una varianza de 20 (esa distribución se basa en las posiciones obtenidas al identificar las emociones expresadas por miembros de su propia cultura). En un estudio se pidió a 50 norteamericanos adultos que intentaran reconocer las emociones de sujetos de Indonesia. La media en este caso fue de 78. Plantea la hipotesis nula y la hipotesis del estudio para este ejemplo

(Aron y Aron, p. 231).

La hipótesis del estudio sería que hay diferencias entre reconocer emociones con sujetos de culturas diferentes y sujetos de cultura propia. Es decir que $H_e \rightarrow \mu \neq 82$. La hipótesis nula sería que no hay diferencias, es decir $H_0 \rightarrow \mu = 82$.

Fijaros en que el procedimiento consiste en comparar lo que nos ha salido en nuestro estudio concreto con un valor establecido por investigaciones previas, o un supuesto justificado por medio de una teoría o de cualquier otra manera.

EJERCICIO 3.1.2 Un psicólogo está interesado en las condiciones que afectan la cantidad de sueños que las personas recuerdan por mes y en los cuales se encuentran solos. Supondremos que, basándonos en previas investigaciones extensivas, se sabe que en la población general la cantidad de tales sueños por mes sigue una distribución normal, con $\mu = 5$ **y** $\sigma = 4$**. El investigador desea probar la predicción que establece que *la cantidad de sueños como los descritos será mayor entre aquellas personas que recientemente hayan experimentado un hecho traumático.* Por lo tanto, el psicólogo analiza 36 individuos que han experimentado recientemente un hecho traumático, haciéndoles llevar un registro de sus sueños durante un mes. La media de sueños en los que se encuentran solos es 8. Plantea la hipótesis nula y la hipótesis del estudio para este caso (Aron y Aron, p. 231).**

La hipotesis del estudio sería que nuestros sujetos tienen una media mayor de la media de los sujetos normales, luego $H_e \rightarrow \mu > 5$ y la hipótesis nula que $H_0 \rightarrow \mu \leq 5$.

EJERCICIO 3.1.3 En una encuesta preelectoral, el partido que más apoyos recibe una intención de voto del 52% con 1000 encuestas. ¿Cuál dirías que sería una hipotesis del estudio adecuada para este caso?

Este ejercicio no tiene la solución a propósito

3.2.Usando intervalos de confianza para la prueba de hipótesis

El método más simple

- Podemos comprobar la primera de las hipótesis del informe PISA utilizando intervalos de confianza.
  - Las hipótesis son:

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} = 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} \neq 500$$

  - El intervalo de confianza para la media de España en el informe PISA es:

$$485 \pm 1.96 \times 2.4 = (489.74, 480.29)$$

- Como 500 no está en el intervalo$(489.74, 480.29)$ entonces podemos decir que la media para España es diferente de 500 (con una confianza del 95%).

- En definitiva, el procedimiento consiste en ver si el valor de la hipótesis nula está dentro de los valores del intervalo de confianza que hemos construido para el valor que nos ha salido en el estudio.
  - Si el valor no está dentro del intervalo, ***rechazamos la hipótesis nula***
  - Si el valor está dentro del intervalo, ***no rechazamos la hipótesis nula***

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.2.1 En el estudio del Ejercicio 3.1.1, el investigador organiza a 50 adultos norteamericanos para que identifiquen las emociones de individuos de Indonesia. La precisión media de estos 50 individuos fue 78. Utilizando un nivel de confianza del 0,05. Calcula el intervalo del 95% de confianza y rechaza o acepta la hipótesis nula basándote en ese intervalo.

La varianza del reconocimiento era 20, luego la desviación típica es $\sqrt{20} = 4.47$ según se indicaba en el Ejercicio 3.1.1. El error típico es $ET = (\sqrt{20})/(\sqrt{50}) \approx 0.63$. El intervalo de confianza es $78 \pm 1.96 \times 0.63 = (79.23, 76.76)$. En este caso la hipótesis nula era $H_0 \rightarrow \mu = 82$. Como el intervalo no incluye ese valor entonces rechazamos la hipotesis nula (los norteamericanos interpretan las emociones de modo diferente con los indonesios que con otros norteamericanos).

EJERCICIO 3.2.2 Orientación vocacional y madurez. De acuerdo con los datos recogidos durante los últimos años por un psicólogo escolar, los estudiantes de COU que no reciben orientación vocacional obtienen una media de 190 en una prueba de madurez. El psicólogo opina que los estudiantes que sí reciben orientación vocacional obtienen un promedio superior en la mencionada prueba. Para obtener evidencia, toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes de COU de entre los que habían recibido orientación vocacional y les pasa la prueba de madurez. Obtiene una media de 198 y una desviación típica de 24. Realiza la estimación por intervalo de la media obtenida en la prueba de madurez por los estudiantes de COU que han recibido orientación vocacional con una confianza del 95%.

El intervalo es $198 \pm 1.96 \frac{24}{\sqrt{100}} = (202.7, 193.296)$

EJERCICIO 3.2.3 Si el tamaño muestral fuera n=1600. ¿Cuál sería el intervalo de confianza obtenido?

$$198 \pm 1.96 \frac{24}{\sqrt{1600}} = (199.176, 196.824)$$

EJERCICIO 3.2.4 ¿Los datos obtenidos en la muestra de 100 estudiantes apoyan la opinión del psicólogo con riesgo de error = 0.05?.

Sí. El intervalo no incluye el valor de 190 así que los estudiantes con orientación vocacional son diferentes de los estudiantes en general.

3.3.Contraste de hipótesis
El procedimiento habitual

- Los contrastes de hipótesis tienen la forma

$$Estadístico\ de\ Contraste = \frac{Estimación\ Puntual - Valor\ Teórico}{Error\ Típico}$$

Ecuación (3)

- En el ejemplo de PISA, tenemos la hipótesis

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} = 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} \neq 500$$

Ecuación (4)

  - Aplicando la fórmula, tenemos

$$EstadisticodeContraste = \frac{485 - 500}{2.4} = -6.25$$

- Comparación del estadístico de contraste
  - El estadístico se compara con el valor de la distribución de referencia (generalmente z o t) para el nivel de confianza dado (para 95% y dos colas z es ± 1.96)

– En nuestro ejemplo, si la H_0 fuera verdadera, el estadístico de contraste debería estar entre 1.96 y -1.96. Como -6.25 no está rechazamos la H_0 y aceptamos la H_e (es decir, la media de España no es 500)

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.3.1 Usando el enunciado del Ejercicio 3.1.2 ¿Llegaría usted a la conclusión de que las personas que han sufrido recientemente una experiencia traumática tienen una cantidad significativamente diferente de sueños en los que se encuentran solas? (utiliza el nivel 0,05 y plantea una hipótesis de dos colas)

La estimación puntual en ese estudio fue de 8. El valor teórico es $\mu = 5$. El error típico es $\frac{4}{\sqrt{36}} = 0.667$. El valor del estadístico de contraste es $\frac{8-5}{0.667} = 4.5$. Ese valor es mayor que 1.96 luego rechazamos la hipótesis nula (es decir, la gente que ha tenido recientemente una experiencia traumática difiere de la población general).

EJERCICIO 3.3.2 En el estudio del Ejercicio 3.1.1, el investigador organiza a 50 adultos norteamericanos para que identifiquen las emociones de individuos de Indonesia. La precisión media de estos 50 individuos fue 78. Utilizando un nivel de 0,05, haz los cálculos para la prueba de hipótesis planteada en el propio Ejercicio 3.1.1.

En el ejercicio se planteó que $H_e \to \mu \neq 80$ y que $H_0 \to \mu = 80$. En nuestro caso, la media de la muestra $\bar{x} = 78$. La varianza de la muestra no es conocida pero se nos informa que la varianza de la población es 20. Con esos datos tenemos que $ET = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{50}} \approx 0.63$ y que $z = \frac{78-80}{0.63} \approx -3.17$. La conclusión de esto es que efectivamente los sujetos eran menos capaces de reconocer las expresiones de los indonesios.

3.4.Una nota sobre el cálculo de la desviación típica para pruebas de hipótesis
¿Por qué -1?

- Recordareis que la fórmula de la desviación típica es:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

- Esta fórmula es válida cuando no queremos generalizar los resultados a una población. Es decir, no queremos estimar la desviación típica de la población:

$$\sigma$$

- Ahora bien, para hacer contrastes de hipótesis es necesario hacer esta estimación. En ese caso, la fórmula que se utiliza es un poco diferente de la habitual:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}$$

  - Fijaros que en este caso dividimos por n-1 y que usamos el símbolo $\hat{\sigma}_x$ ya que estamos estimando la desviación típica (de ahí el capuchón)

- ¿Es muy importante este detalle sobre el cálculo de la desviación típica?
  - Si la muestra es muy pequeña sí que puede tener algo de efecto dividir por n-1 en lugar de sólo por n
  - En los exámenes de análisis de datos no distinguir entre una u otra puede ser terrible!!!

3.5.Contrastes de hipótesis para proporciones
Un caso especial

- Las proporciones son un caso especial porque como decíamos la desviación típica depende de la proporción.
- Como consecuencia de lo anterior, el cálculo de contrastes de hipótesis es diferente para el caso de las proporciones. Veamoslo con un ejemplo:

Ejemplo: En una industria se hacen unas piezas de metal grandes que se usan para construir aviones. Estas piezas a menudo se agrietan durante el proceso de fabricación así que hay que hacerlas de nuevo. Un 20% de las piezas se rompen al hacerlas pero a través de un nuevo proceso de fabricación se han fabricado 400 piezas en las que sólo un 17% estaban rotas. ¿Se podría decir que este nuevo proceso de fabricación ha logrado reducir la cantidad de piezas rotas?

– Para estudiar el ejemplo anterior podemos realizar un contraste de hipótesis en el que se compara el 20% histórico con el 17% que hemos obtenido en una muestra. Para ello necesitamos en primer lugar calcular el error típico.

- Para calcular el error típico necesitamos la desviación típica la cual cuando trabajamos con proporciones se obtiene multiplicando el porcentaje de éxitos por el de fracasos y sacando la raíz.
- Ahora bien, ¿qué proporción tenemos que usar para ese cálculo? ¿La obtenida en la muestra de 400 (0.17) o la otra que es la hipótesis nula (0.20)?
- La respuesta es que cuando hacemos un contraste de hipótesis actuamos como si la ***hipótesis nula fuera verdadera.*** De este modo, lo más consecuente es calcular el error típico a partir de ese valor. Por tanto, haremos:

$$ET(p_0) = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

– Fijaros que usamos el símbolo p_0 para hacer ver que estamos tomando ese valor de la hipótesis nula (por cierto, en este caso no deberíamos llamar al resultado error típico sino simplemente desviación típica).

– Con nuestros datos

$$ET(p_0) = \sqrt{\frac{0.20 \times 0.8}{400}} = 0.02$$

– A partir de este resultado podemos hacer la prueba de hipótesis habitual:

$$z = \frac{0.17 - 0.20}{0.02} = -1.5$$

– ¿Qué diriamos con ese resultado? Si utilizamos el criterio habitual de z mayor o menor de 1.96 diriamos que ese 17% no es significativo (aunque si recogieramos más muestra y el porcentaje se mantuviera podría pasar a ser significativo. Otro aspecto es si plantearamos el problema como de una cola tal y como veremos más adelante).

3.6.Contrastes de hipótesis con ordenador
Haciéndolo fácil

- En el ejemplo de la Section 3.3.podemos calcular la probabilidad asociada al estadístico de contraste si H_0 fuera verdadera (este procedimiento es el utilizado por los ordenadores).
  - Esta probabilidad es $p < 0.0000001$. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula ya que es muy poco probable.
  - Tener en cuenta que la distribución de referencia en el ordenador es generalmente t ya que éstos calculan este valor exacto.

- Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo: A un grupo de sujetos se les pregunta por su nivel de felicidad con posibles contestaciones 1=Muy feliz, 2=Bastante feliz y 3= No demasiado feliz. El investigador quiere comprobar si la media de felicidad en el grupo es de 1. Los resultados se muestran a continuación.¿Rechazamos la H_0?

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Nivel de felicidad	1504	1.80	.617	.016

Aquí indica el valor de la H_0

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 1					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Nivel de felicidad	50.270	1503	.000	.799	.77	.83

Aquí indica el valor del estadístico de contraste

Este es el numerador de la Ecuación 3

Este es el intervalo de confianza para el numerador

Aquí se indica la probabilidad de que la H_0 ***sea verdadera (es muy baja así que pensamos que no es verdadera y la rechazamos).***

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.6.1 A un grupo de sujetos se les pregunta por lo "Emocionante que es su vida" con posibles contestaciones de 1 a 5, en donde 1=Muy emocionante y 5 Muy aburrida. Se quiere saber si como media la gente piensa o no que su vida es Normal(=3) en emoción. Los resultados se muestran a continuación. ¿Rechazamos la H_0?

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Nivel de felicidad	1504	1.80	.617	.016

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 3					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Nivel de felicidad	-75.530	1503	.000	-1.201	-1.23	-1.17

La hipótesis nula sería $H_0 = 3$. Esta hipótesis nula tiene una significación de .000 lo que indica que es poco probable. Por tanto, rechazaríamos esa hipótesis y nos quedaríamos con que la gente en su mayoría no piensa que tenga una vida normal. En realidad, como la media que aparece es 1.8 la gente parece tener una vida emocionante.

EJERCICIO 3.6.2 En una encuesta, se pregunta a los sujetos si piensan que el nivel de impuestos que se paga en su país es demasiado alto (1), justo (2), o demasiado bajo (3). Se quiere sabe si la media de las contestaciones es de 1.5 (entre alto y justo) o no.

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Opinión sobre el nivel de impuestos	932	1.43	.519	.017

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 1.5					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Opinión sobre el nivel de impuestos	-4.041	931	.000	-.069	-.10	-.04

La hipótesis nula es de nuevo el valor medio. En el output se indica este valor y como vemos la prueba de hipótesis viene a indicar que rechazamos esta hipótesis y que la media no es 1.5 (vemos que la media está un poco por debajo así que la tendencia es a que la gente opine que el nivel de impuestos es muy alto).

EJERCICIO 3.6.3 Para los resultados del EJERCICIO 3.6.2, ¿crees que la diferencia entre los resultados obtenidos y nuestra hipótesis es de importancia práctica?

Una de las cuestiones más incómodas de las pruebas de hipótesis es cuando uno ve que la diferencia da la impresión de ser poco importante tal y como ocurre en este caso (es de .069) y sin embargo el diagnóstico es que sí que hay diferencias. En este caso, por ejemplo, podríamos pensar que esta diferencia no tiene mucha importancia práctica a pesar de que las diferencias sean significativas.

EJERCICIO 3.6.4 Se quiere saber si en uno de los primeros experimentos utilizados para determinar la velocidad de la luz se obtuvo el resultado que se da por bueno hoy en día (33.02 después de haber dividido para quitar ceros). ¿Fueron correctos los resultados de ese primer experimento?

```
UNIVARIATE ANALYSIS of the Newcomb Data.
Analysis based on variable LightSpeed

T-TEST FOR A SINGLE SAMPLE:
Null hypothesis:        Mu EQ    33.020
Alternative hypothesis: Mu NE    33.020 (two tailed)

SAMPLE STATISTICS:
LightSpeed... N =      64 Mean =   27.750 StDev =    5.083 Var =   25.841

SIGNIFICANCE TEST
Test Result.. T =  -8.294 For df =  63.0 p < .0001

CONFIDENCE INTERVAL:
The 95% confidence interval is: (26.4802 29.0198)
```

El resultado se puede ver en varios sitios. En el apartado de “Significance test” vemos que el valor de $p<.0001$, que es menor que el de .05 que usamos habitualmente. También, el intervalo de confianza no incluye el verdadero valor. En conclusión, este primer experimento produjo un valor para la velocidad de la luz diferente al que se da por bueno hoy en día.

3.7.Contrastes de hipótesis unilaterales

También conocidos como de una cola

- En ocasiones, las hipótesis que nos planteamos hacen referencia a diferencias en sólo una dirección.
  – En el ejemplo de PISA podíamos plantear si España tenía puntuaciones ***superiores a la media***.

Ecuación (5)

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} \leq 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} > 500$$

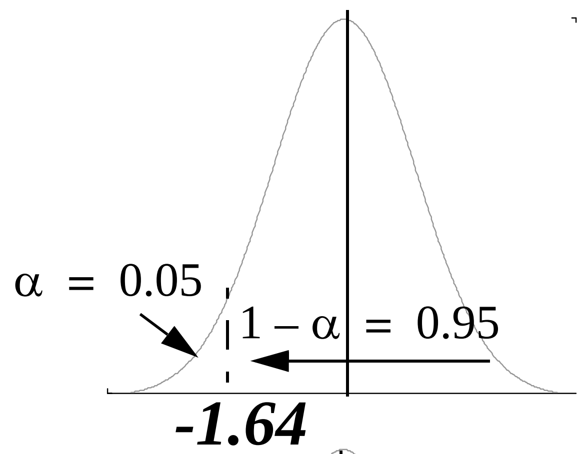
– También, nos podriamos plantear si España está ***por debajo*** de la media

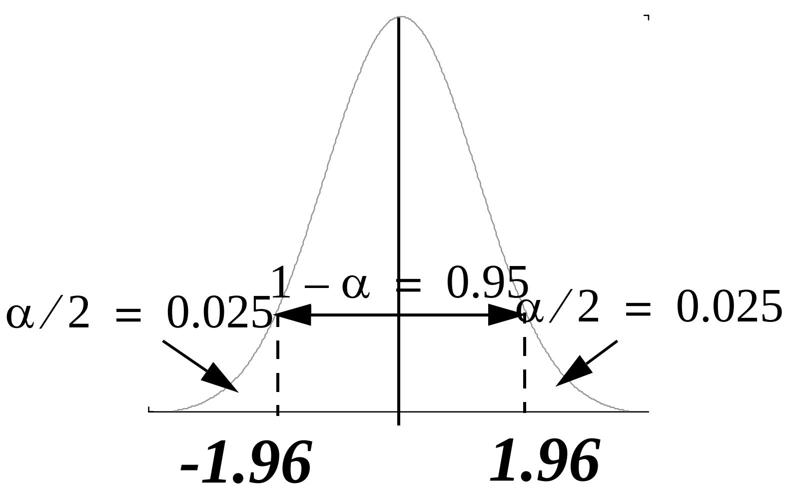
Ecuación (6)

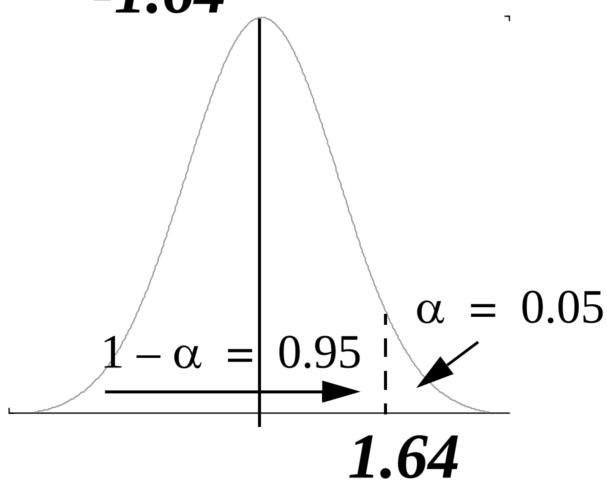
$$H_0 \rightarrow \mu_{España} \geq 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} < 500$$

- El procedimiento de prueba de hipótesis es el mismo salvo en un detalle:

– Cuando hacemos pruebas de una cola, ponemos toda la probabilidad en un lado, en lugar de la mitad en cada lado.







  - El valor de z que deja por debajo de sí el 95% de la curva normal es 1.64. El que deja el 95% por encima es -1.64.
- En resumen, (para un nivel de confianza del 5%):
  - Cuando la prueba es de dos colas, la $H_0 \to \mu = k$ en donde k es un valor concreto y la $H_e \to \mu \neq k$. En ese caso, el valor de z que usamos es 1.96 y -1.96 .
  - Cuando la prueba es de una cola y la $H_0 \to \mu \leq k$ y la $H_e \to \mu > k$ entonces el valor de z que usamos es 1.64.
  - Cuando la prueba es de una cola y la $H_0 \to \mu \geq k$ y la $H_e \to \mu < k$ entonces el valor de z que usamos es -1.64.

- En el ejemplo de PISA, podemos plantear como hipótesis nula si España tiene una puntuación en Matemáticas a la media de 500

Ecuación (7)

$$H_0 \rightarrow \mu_{España} \geq 500$$
$$H_e \rightarrow \mu_{España} < 500$$

- Aplicando la fórmula tenemos

$$EstadisticodeContraste = \frac{485 - 500}{2.4} = -6.25$$

– El valor con el que tendríamos que comparar es -1.64. Como -6.25 es menor que -1.64 rechazamos la hipótesis nula de que España tiene una puntuación en Matemáticas igual o superior a 500 (es decir que España está por debajo).

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.7.1 En el informe PISA, ¿podemos decir que Finlandia está por encima del valor de 500 en Matemáticas? Utiliza la prueba de hipótesis unilateral apropiada para este caso.

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 3.7.2 En el informe PISA, ¿podemos decir que el País Vasco está por encima del valor de 500 en Matemáticas? Utiliza la prueba de hipótesis unilateral apropiada para este caso.

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 3.7.3 En el informe PISA, ¿a partir de qué país los resultados han estado por *encima* de la media de 500?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 3.7.4 En el informe PISA, ¿a partir de qué país los resultados han estado por *debajo* de la media de 500?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

3.8.Contrastes de hipótesis unilaterales con ordenador
El SPSS no lo calcula

- Los contrastes unilaterales no siempre aparecen en los paquetes estadísticos (el SPSS no los muestra).
- No obstante, aunque no aparezcan los contrastes unilaterales podemos utilizar el resultado de un contraste bilateral para lo mismo.

- Veamos el siguiente ejemplo: A un grupo de sujetos se les da una charla sobre como reducir el colesterol y se les mide el colesterol. Tres años después se les mide de nuevo el colesterol y se hace:

$$C_{pasado} - C_{actual} = PerdidaColesterol \qquad \textbf{Ecuación (8)}$$

  - La variable Perdida Colesterol se interpreta de la siguiente manera: Valores positivos de perdida de colesterol indican reducción de colesterol, mientras que valores negativos de perdida de colesterol indican ganancia de colesterol

– La hipótesis nula sería que la diferencia de colesterol sería menor o igual que cero (negativa, es decir que tendrían más colesterol que el que tenían). La hipótesis alternativa sería que la perdida de colesterol es positiva (es decir, que sí han perdido colesterol).

– Los resultados se muestran en la figura siguiente (es de un programa llamado Statview que hoy en día se usa poco).

Esta es la hipótesis nula

One Sample Analysis
Hypothesized Mean <= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value
Cholesterol Loss	9.767	42	2.318	.0127

Esta es la media de la variable

– Si usaramos el SPSS tendriamos lo siguiente. Este resultado es para dos colas. Fijaros que la significación es exactamente el doble que el resultado para una cola (en el output anterior era 0.0127 que con los redondeos es la mitad del 0.25 del output de abajo).

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Cholesterol Loss	43	9.77	27.627	4.213

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 0					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Cholesterol Loss	2.318	42	.025	9.767	1.26	18.27

Esta es la significación

- Conclusión: Si se quiere utilizar un paquete estadístico para hacer pruebas de una cola y el paquete estadístico sólo da los resultados para dos colas, lo que hay que hacer es dividir la significación por la mitad ***después de comprobar que las diferencias están en la dirección de la hipótesis del estudio*** y no de la hipótesis nula.

ACTIVIDADES

EJERCICIO 3.8.1 Se quiere comprobar si las charlas a los sujetos fueron positivas para reducir el peso de éstos. Para ello se calculó la variable Perdida de peso= Peso Anterior - Peso Actual. En la Figura 1 se dan los resultados de las tres posibles pruebas de hipótesis a realizar. Indica cuál es la prueba de hipótesis apropiada y cual sería la conclusión del estudio.

One Sample t-test
Hypothesized Mean = 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value
Perdida de peso	-1.907	42	-1.558	.1267

One Sample Analysis
Hypothesized Mean <= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Upper
Perdida de peso	-1.907	42	-1.558	.9366	.152

One Sample Analysis
Hypothesized Mean >= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Lower
Perdida de peso	-1.907	42	-1.558	.0634	-3.966

Figura 1: Contrastes de hipótesis para el pesos en Statview

En primer lugar, hay que plantear la hipótesis. Nosotros queremos demostrar que ha habido reducción de peso, luego nuestra hipótesis nula es lo contrario

$$H_0 \to \mu_{PerdidaPeso} \leq 0; H_e \to \mu_{PerdidaPeso} > 0$$

Mirando en el listado anterior, vemos que la hipótesis nula es muy probable y no podemos rechazarla. Seguramente la perdida de peso ha sido cero o menos que cero.

EJERCICIO 3.8.2 En el estudio anterior pensamos que la perdida de HDL ha sido también importante gracias a las charlas (Figura 2).

One Sample Analysis
Hypothesized Mean = 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Lower	95% Upper
Perdida HDL	5.093	42	3.282	.0021	1.961	8.225

One Sample Analysis
Hypothesized Mean <= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Upper
Perdida HDL	5.093	42	3.282	.0010	7.703

One Sample Analysis
Hypothesized Mean >= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Lower
Perdida HDL	5.093	42	3.282	.9990	2.483

Figura 2: Contrastes de hipótesis para el HDL en Statview

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 3.8.3 En el Ejercicio 3.8.2 y con la Figura 2, ¿qué conclusión llegaríamos si nuestra hipótesis fuera simplemente que la perdida de peso es diferente de cero?

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

EJERCICIO 3.8.4 ¿Qué hay de la perdida de triglice-ridos?

One Sample Analysis
Hypothesized Mean = 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Lower	95% Upper
Perdida Trigliceridos	3.419	42	.386	.7015	-14.457	21.295

One Sample Analysis
Hypothesized Mean <= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Upper
Perdida Trigliceridos	3.419	42	.386	.3507	18.317

One Sample Analysis
Hypothesized Mean >= 0

	Mean	DF	t-Value	P-Value	95% Lower
Perdida Trigliceridos	3.419	42	.386	.6493	-11.480

Figura 3: Contrastes de hipótesis para los trigliceridos en Statview

En este ejercicio no se indica la solución a propósito

Parte IV
Evaluación de supuestos

4.1.Supuestos de las pruebas de hipótesis de medias *Evaluando la normalidad*

- Una duda que puede surgir es si lo anterior depende de la distribución que siga la población normal o no
- Para que las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza descritos funcionen bien se tiene que dar:
  - Tener una muestra grande
  - Que la población de origen sea aproximadamente normal si la muestra es pequeña
- En este segundo caso es especialmente importante diagnosticar si la muestra proviene de una población que sigue la distribución normal (aproximadamente)

- No obstante, nosotros no tenemos datos de ***la población entera.*** Sólo tenemos datos de la muestra que hemos recogido.
- La muestra es difícil que nos de información clara sobre si la población sigue la distribución normal.
  - En la práctica, lo que hacemos es mirar si la muestra es ***aproximadamente normal.*** Para comprobar esto podemos hacer un histograma (Figura 4).

- ¿Qué hay que comprobar en un histograma?
  - Valores extremos o extraños. En el gráfico siguiente vemos que hay un señor que tuvo una bajada de colesterol negativa (es decir que le subió el colesterol) muy grande en comparación con el resto. ***La solución a esto consistiría en investigar a este***

caso individualmente y quizás repetir los análisis excluyendo a este caso. Si se eliminan casos hay que indicarlo en el informe correspondiente.

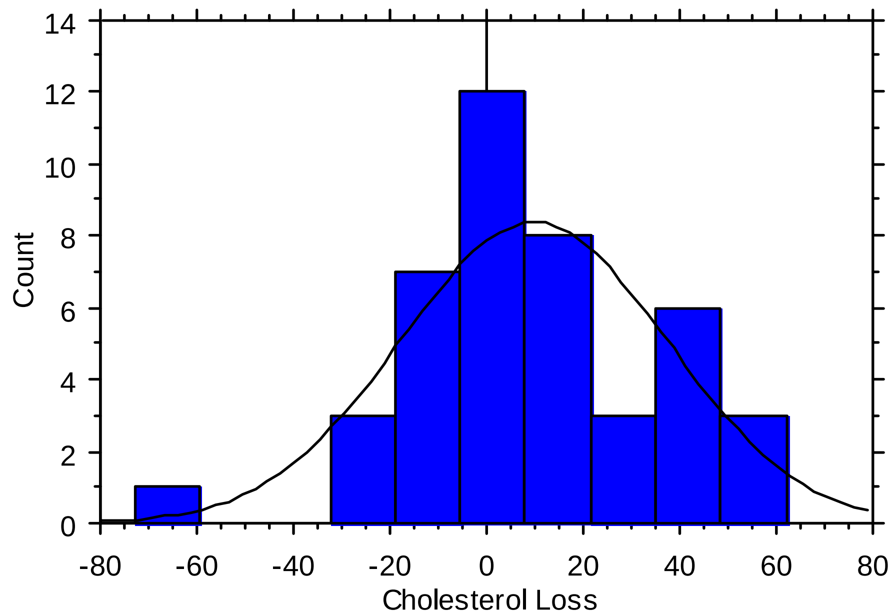


Figura 4: Histograma de perdida (loss) de colesterol

- Datos asimétricos: –En la Figura 5 se puede ver que el histograma no es simétrico. La mayoría de las ciudades se acumulan en la parte baja (no hay que trabajar mucho para comprar una hamburguesa).

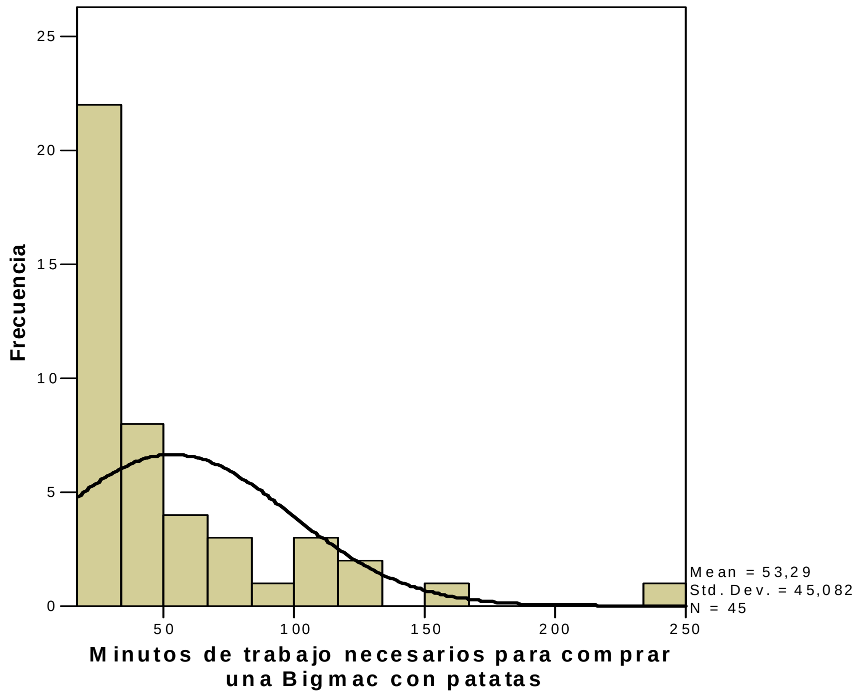


Figura 5: Histograma de minutos de trabajo para comprar una hamburguesa con patatas fritas en ciudades del mundo

– Cuando la variable es asimétrica, quitar los casos extremos normalmente no cambia mucho el aspecto del gráfico (Figura 6).

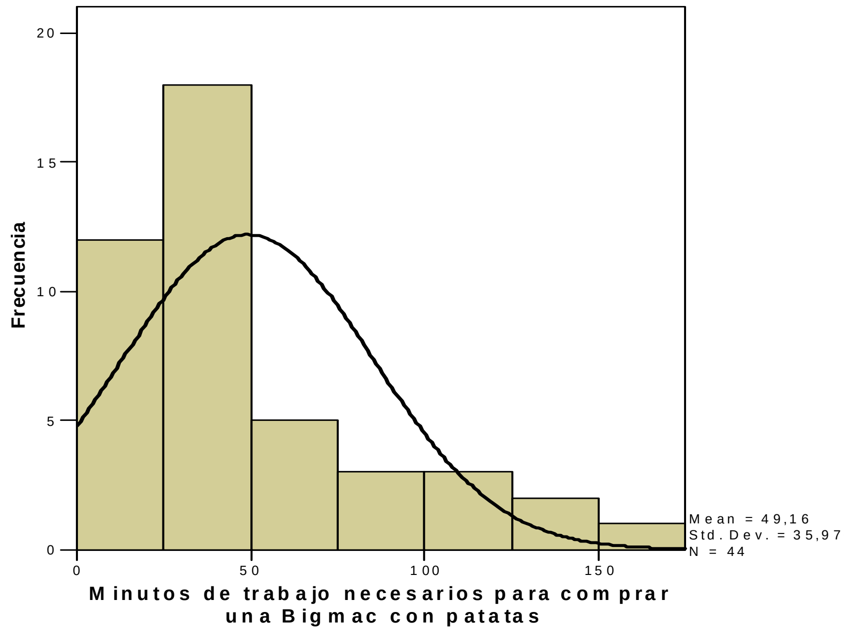


Figura 6: Histograma de minutos de trabajo para comprar una hamburguesa con patatas fritas en ciudades del mundo

- **Varias modas (multimodalidad).** –En los cuatro histogramas de la Figura 7 se ven cuatro variables referidas a flores.

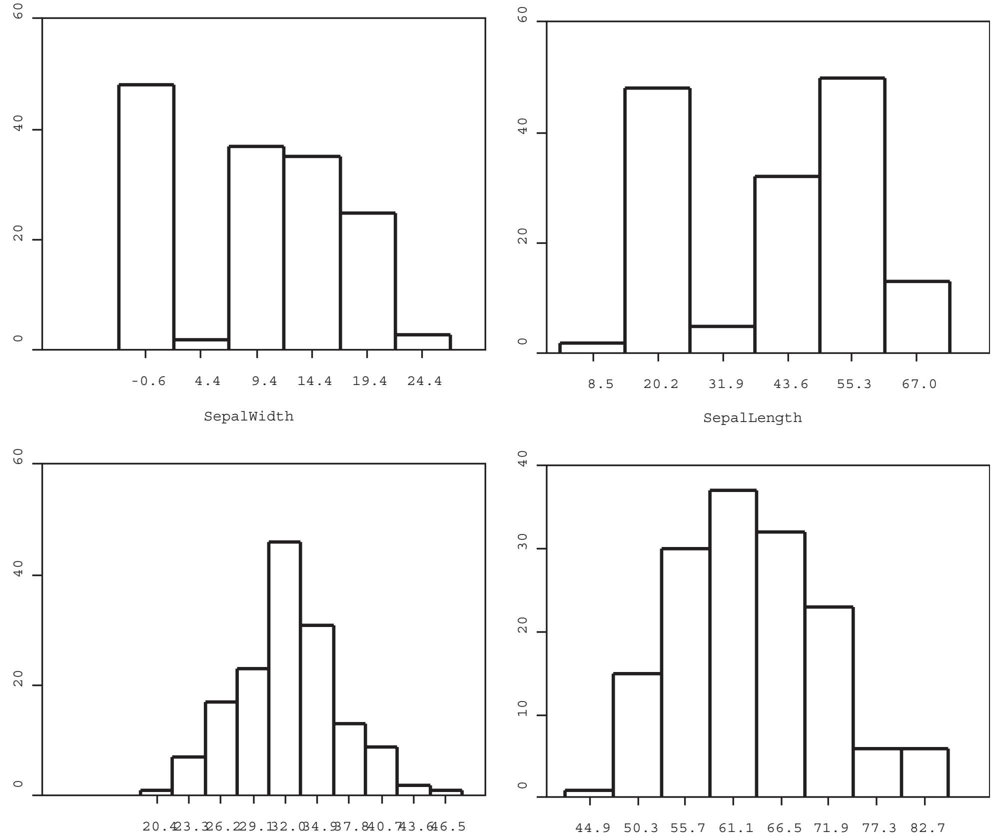


Figura 7: Medidas de unas flores

– En este caso, si quisieramos hacer pruebas de hipótesis o calcular medias para esas variables lo mejor sería dividir las variables en dos grupos.

ACTIVIDADES

EJERCICIO 4.1.1 ¿Crees que el histograma de la Figura 8 tiene forma normal?

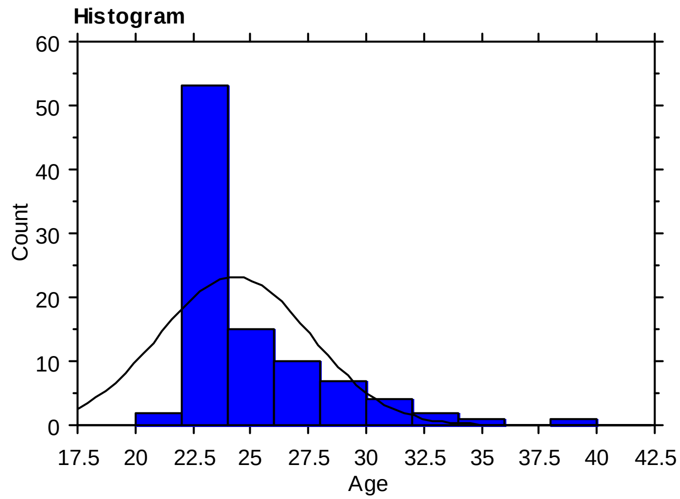


Figura 8: Edad del grupo de sujetos sometidos al experimento sobre colesterol

No. Es asimétrico positivo.

EJERCICIO 4.1.2 ¿Y el peso de los sujetos?

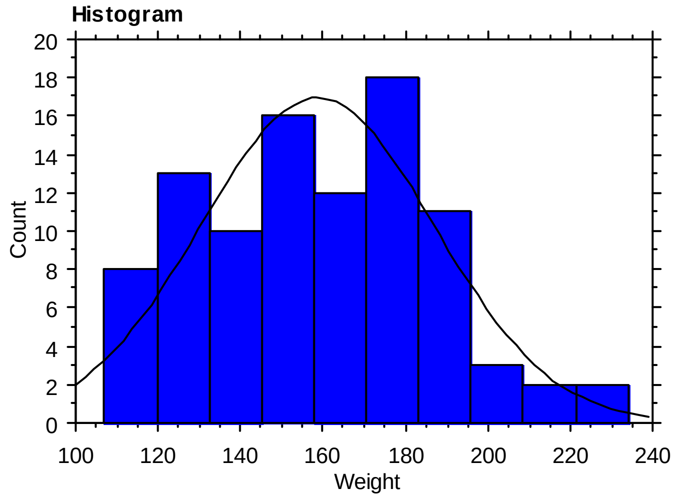


Figura 9: Peso del grupo de sujetos sometidos al experimento sobre colesterol

En este caso el histograma no es muy normal pero no hay asimetría exagerada, ni se ven claramente modas. Estos datos son aceptables.

EJERCICIO 4.1.3 ¿Y el colesterol original?

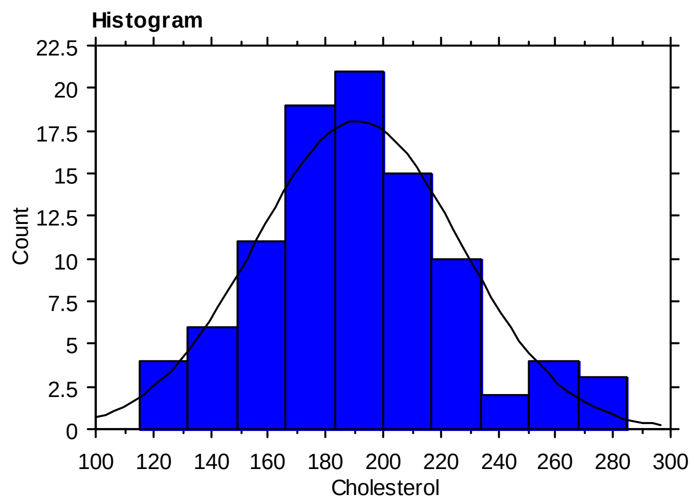


Figura 10: Colesterol del grupo de sujetos sometidos al experimento sobre colesterol

El histograma de estos datos indica que los datos se comportan de manera aceptable.

EJERCICIO 4.1.4 ¿Y la altura?

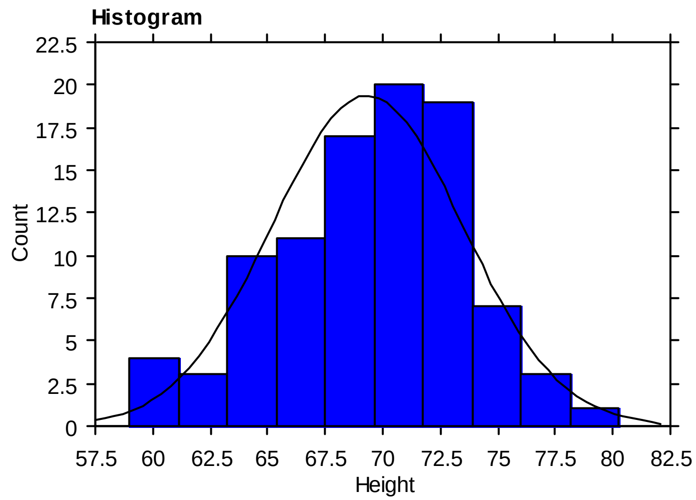


Figura 11: Altura del grupo de sujetos sometidos al experimento sobre colesterol

Hay una ligera asimetría pero los datos son aceptables también.

EJERCICIO 4.1.5 ¿Y la tensión? (tener en cuenta que están las dos medidas de la tensión).

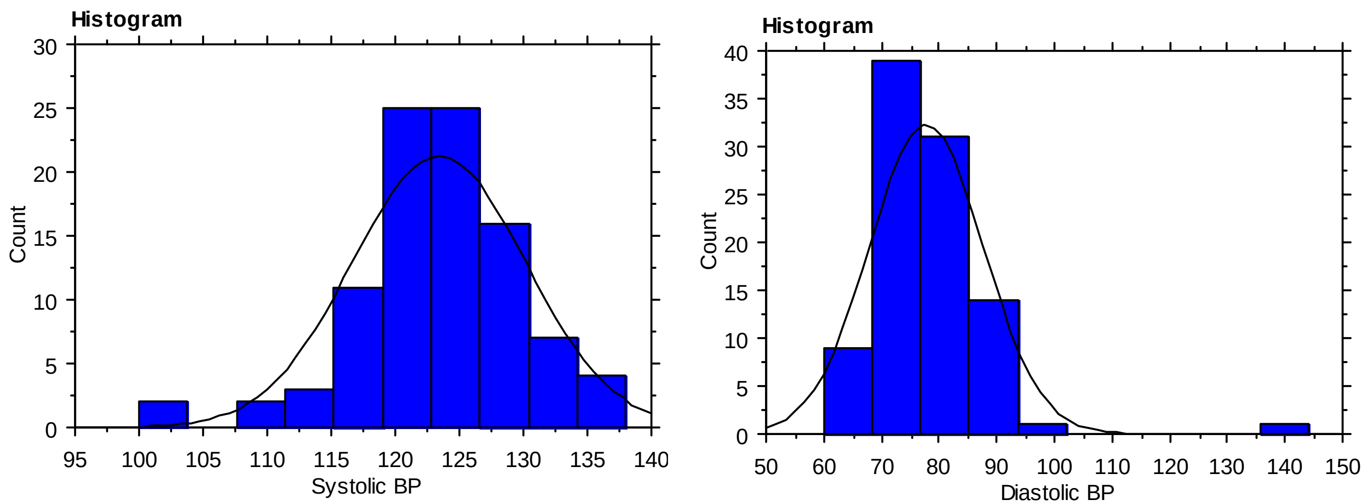


Figura 12: Altura del grupo de sujetos sometidos al experimento sobre colesterol

En ambos casos hay valores extremos pero en la diastólica es muy exagerado. Habría que revisar ese valor.