PRÁCTICAS DE ECUACIONES FUNCIONALES

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2001/2002

Profesores responsables
Jesús Garcia Falset
Julian Toledo Melero

Práctica 1
ESPACIOS MÉTRICOS

Sea X un conjunto no vacío. Una *distancia en* X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$, que tiene las propiedades siguientes:

(a) $d(x, y) \geq 0$ para cada par de elementos $x, y \in X$.

(b) la relación $d(x, y) = 0$ es equivalente a $x = y$.

(c) $d(x, y) = d(y, x)$ para cada par de elementos de X.

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada tres elementos $x, y, z \in X$ (*desigualdad triangular*).

Definición 1.1
Al par (X, d) se le llamará espacio métrico

Ejemplo 1.1
Sea E un conjunto arbitrario, y se define $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Las condiciones (a), (b) y (c) de la definición de distancia se verifican trivialemente; (d) es inmediato si dos de los tres elementos x, y, z son iguales; si no, se tiene $d(x, z) = 1$, $d(x, y) + d(y, z) = 2$, por lo tanto (d) se satisface en todos los casos.

El espacio métrico correspondiente definido en E por medio de la distancia del ejemplo anterior se llama *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 1.1
Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que dados $x, y, z \in X$ se verifica que $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

En la teoría de espacios métricos es conveniente utilizar el lenguaje geométrico inspirado en la Geometría clásica. Los elementos de un espacio métrico se llaman puntos. Dado un espacio métrico (X, d), dado $a \in X$ y $r > 0$, la bola abierta (bola cerrada, esfera) de centro a y radio r es $B_r(a) = \{x \in X \; : \; d(a, x) < r\}$ (respectivamente $B'_r(a) = \{x \in X \; : \; d(a, x) \leq r\}$, $S_r(a) = \{x \in X \; : \; d(a, x) = r\}$).

Definición 1.2
Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X se dice que es abierto si para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$. Un subconjunto F se dice cerrado si su complementario es abierto.

Definición 1.3
Se dice que dos distancias d, d' sobre un mismo conjunto X, son equivalentes si las familias de abiertos definidas por d y d' coinciden.

Ejercicio 1.2
Probar que d y d' son equivalentes si y sólo si, para cada bola $B_r(a)$ definida por la distancia d, existe una bola $B^*_s(a)$ definida por la distancia d' tal que $B^*_s(a) \subset B_r(a)$ y viceversa.

Sean A, B dos subconjuntos no vacíos de X; la distancia de A a B se define como el número positivo $d(A, B) = \inf_{x \in A, \; y \in B} d(x, y)$. Cuando $A = \{x\}$ se reduce a un punto $d(A, B)$ se indica también por $d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$.

Ejemplo 1.2
Si x no pertenece a la bola $B_r(a)$, entonces $d(x, B_r(a)) \geq d(a,x) - r$. Efectivamente, la hipótesis implica que $d(a,x) \geq r$; para cada $y \in B_r(a)$, en virtud de la desigualda triangular se tiene:

$$d(x,y) \geq d(a,x) - d(a,y) \geq d(a,x) - r.$$

Ejercicio 1.3
Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ donde $d(x,y) = |x-y|$. Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq 1\}$ y $B = \{n - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 2\}$.
(a) Calcular la distancia entre A y B.
(b) ¿ Se alcanza dicha distancia?.

Para un conjunto no vacío A de un espacio métrico (X,d), el *diámetro de A* se define como $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$.

Ejercicio 1.4
Probar que en cualquier espacio métrico $diam(B'_r(a)) \leq 2r$.

Definición 1.4
Una norma en un espacio vectorial E es una aplicación (indicada correspondientemente por $x \longmapsto \|x\|$) de E en $\mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:
(I) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$.
(II) La relación $\|x\| = 0$ es equivalente a $x = 0$.
(III)$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
(IV) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada par de elementos de E (desigualdad triangular).

Es evidente que si $x \longmapsto \|x\|$ es una norma sobre el espacio vectorial E, entonces $d(x,y) = \|x-y\|$ es una distancia sobre E que además verifica las siguientes propiedades:
(a) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in E$.
(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.
En el siguiente ejemplo pondremos de manifiesto que el concepto de distancia es mucho más amplio que el de norma, en efecto.

Ejemplo 1.3
Consideremos E un espacio vectorial y d la distancia discreta definida anteriormente. Como consecuencia de las condiciones (a) y (b) anteriores se comprueba fácilmente que esta distancia no proviene de ninguna norma, ya que si $x \neq y$, entonces $d(2x, 2y) = d(x,y) = 1 \neq 2d(x,y)$.

Ejercicio 1.5
Consideremos en la recta real la siguiente función:

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

Probar que d es una distancia. ¿ Es dicha distancia inducida por alguna norma?.

Ejercicio 1.6
Sea $p > 1$ y sea q el conjugado de p, es decir el número real que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(a). Probar que

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

para cualquier par x, y de números reales no negativos.

Para $x \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(b) Probar que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

(c) Probar que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(d)Probar que la función $\|x\|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.
(e) Probar que en el caso $p = \frac{1}{2}$ la función anterior no es una norma en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1.7
Probar que todo subespacio vectorial propio de un espacio normado tiene interior vacío

Ejercicio 1.8
Probar que en un espacio normado la clausura de $B_\delta(x)$ es $B'_\delta(x)$ y que el interior de $B'_\delta(x)$ es $B_\delta(x)$. ¿ Es cierto eso en un espacio métrico arbitrario?.

Ejercicio 1.9
Probar que en un espacio normado el diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

Definición 1.5
Se dice que dos normas $\|.\|, \|.\|'$ sobre un mismo espacio vectorial E son equivalentes, si las distancias asociadas, d y d', son equivalentes.

Ejercicio 1.10
Probar que una condición necesaria y suficiente para que dos normas $\|.\|, \|.\|'$ sobre un mismo espacio vectorial E sean equivalentes, es que existan dos constantes positivas m y M tales que

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Ejercicio 1.11
Probar que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Definición 1.6
Sea H un espacio vectorial real. Un producto escalar $\langle x, y \rangle$ es una forma bilineal de $H \times H$ en $\mathbb{R}$, simétrica, definida positiva.

Recordemos que todo producto escalar verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Recordemos también que $|u| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma que verifica la llamada identidad del paralelogramo:

$$|\frac{a+b}{2}|^2 + |\frac{a-b}{2}|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

Ejercicio 1.12
Consideremos en $\mathbb{R}^2$ *la función* $\|(x, y)\| = \text{máx}\{|x|, |y|\}$. *Probar que* $\|.\|$ *es una norma en* $\mathbb{R}^2$ *que no proviene de ningún producto escalar.*

Ejercicio 1.13
Sea $\langle , \rangle$ *un producto escalar en un espacio vectorial real* E. *Probar que se cumple la identidad de polarización,*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2).$$

Ejercicio 1.14
Probar que $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$ *si y sólo si,* $x = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}$.

Práctica 2
FUNCIONES CONVEXAS REALES

1 Conjuntos convexos

Definición 2.1
Sea E un espacio vectorial real. Un subconjunto K de E se dice que es convexo si dados cualesquiera $x, y \in K$ el segmento $\{tx + (1-t)y \ : \ t \in [0,1]\}$ está contenido en K.

Ejemplo 2.1
Sea E un espacio normado. Cada bola de E es un subconjunto convexo. Consideremos la bola $B_r(x_0)$ y veamos que dicha bola es un conjunto convexo. En efecto, sean $x, y \in B_r(x_0)$ y sea $t \in [0,1]$, tenemos que

$$\|ty + (1-t)x - x_0\| = \|t(y - x_0) + (1-t)(x - x_0)\| \leq t\|y - x_0\| + (1-t)\|x - x_0\| < tr + (1-t)r = r.$$

La definición de conjunto convexo puede darse también en terminos de combinaciones convexas de puntos. Se dice que un punto $x \in E$ es una combinación convexa de los puntos $x_1, x_2, ...x_m \in E$, si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m,\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.

Recordemos que una condición necesaria y suficiente para que un conjunto K de un espacio vectorial E sea convexo es la de que cada combinación convexa de elementos de K sea un elemento de K.

Definición 2.2
Dado un subconjunto K de un espacio vectorial E, al conjunto formado por las combinaciones convexas de sus elementos se le llama envoltura convexa de K y se denota por $co(K)$.

Como consecuencia de la condición necesaria y suficiente anterior es claro que $co(K)$ es el menor subconjunto convexo que contiene a K.

Ejercicio 2.1
Sea K un subconjunto convexo de un espacio normado E. Probar que su clausura y su interior también son conjuntos convexos.

Ejercicio 2.2
Sea K un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Probar que dado $x \in H$, existe un único $u \in K$ tal que

$$|x - u| = \min\{|x - v| \ : v \in K\}$$

Además, u es el único punto de K que verifica la relación:

$$\langle u - x, u - z\rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$$

Ejercicio 2.3
Bajo las hipótesis del ejercicio anterior. Escribimos $u := P_K(x)$ (se llama proyección de x sobre K. Probar que

$$|P_K(x) - P_K(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in H.$$

Ejercicio 2.4
Sea M un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H. Probar que si $f \in H$, entonces $u = P_M(f)$ se caracteriza por:

$$u \in M \quad \langle f - u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in M$$

Además P_M es un operador lineal.

2 Funciones convexas

Las funciones convexas fueron introducidas por J. Jensen en 1906 y aparecen de forma natural, por ejemplo, en problemas de minimización.

Definición 2.3
Sea K un subconjunto convexo de un espacio vectorial real E y $f : K \to \mathbb{R}$. Se dice que f es una función convexa en K si, para cada $x, y \in K$ y $t \in]0,1[$, se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si la desigualdad es estricta siempre que $x \neq y$, se dice que la función f es estrictamente convexa.

Para ver el significado geométrico de las funciones convexas, se define el epígrafo de una función $f : K \to \mathbb{R}$ como:

$$Ep(f) = \{(x;t) \in E \times \mathbb{R} \;:\; x \in K \; t \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq t\}$$

El epígrafo de una función nos permite caracterizar su convexidad, es decir f es una función convexa en K si, y sólo si Ep(f) es un conjunto convexo de $E \times \mathbb{R}$.

Definición 2.4
Sea E un espacio vectorial real y A un subconjuto no vacío de E, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ a los conjuntos $S(f,c) = \{x \in A \;:\; f(x) \leq c\}$ se les llama secciones de f.

Ejemplo 2.2
Sea K un subconjunto convexo de un espacio vectorial E. Si f es una función convexa en K, entonces las secciones de f son conjuntos convexos. En efecto, consideremos $x, y \in S(f,c)$ y $t \in [0,1]$, por la convexidad de f se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq c$$

luego, $tx + (1-t)y \in S(f,c)$.

Ejercicio 2.5
¿Se puede afirmar que si las secciones de una función son conjuntos convexos, entonces la función es convexa?.

Definición 2.5
Sea K un subconjunto convexo de un espacio vectorial real E y $f : K \to \mathbb{R}$. Se dice que f es una función cóncava en K si, para cada $x, y \in K$ y $t \in]0,1[$, se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si la desigualdad es estricta siempre que $x \neq y$, se dice que la función f es estrictamente cóncava.

Ejercicio 2.6
Probar que una función f es convexa si, y sólo si $-f$ es cóncava.

3 Relación con la continuidad y diferenciabilidad

Uno de los resultados que conecta la convexidad de una función con su continuidad es el siguiente:

Consideremos el espacio normado $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, si K es un subconjunto convexo abierto y f es una función convexa sobre K. Entonces f es continua en K.

Si, en el resultado anterior, K no es abierto, entonces una función convexa puede ser discontinua en los puntos de la frontera de K.

Ejemplo 2.3
Sea $K = [0,1]$ *y* $f(x) = x$ si $0 < x \leq 1$, $f(0) = 1$. *Esta función es claramente convexa en* K *y discontinua en* $x = 0$.

Por otra parte, si una función es suficientemente suave, la convexidad de dicha función se puede deducir usando el cálculo diferencial.

Cuando estamos en el caso de funciones reales de variable real se puede obtener de manera simple el siguiente resultado:

Teorema 2.6
Sea K *un intervalo de la recta real y* f *una función derivable en* K*. Entonces* f *es convexa en* K *si,y sólo si, su derivada es una función creciente en* K.

Este resultado se generaliza a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

Sea f *una función diferenciable sobre un subconjunto convexo* $K \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces* f *es convexa sobre* K *si, y sólo si,*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

para todo $x_0, x \in K$.

Seguidamente daremos un criterio que nos da la convexidad de funciones de clase $\mathcal{C}^2$.

Definición 2.7
Sea Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Supongamos que* f *tiene derivadas parciales de segundo orden en* $x_0 \in \Omega$*. Se denomina matriz Hessiana de* f *en* x_0, a la matriz $H(f, x_0) := (D_{i,j}f(x_0))_{i,j=1}^n$

Definición 2.8
Sea Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Supongamos que* f *tiene derivadas parciales de segundo orden en* $x_0 \in \Omega$*. A la forma cuadrática* $H_{x_0}(f)$ *asociada a la matriz Hessiana* $H(f, x_0)$ *se le denomina Hessiano de* f *en* x_0*, es decir,*

$$H_{x_0}(f)(h) := \sum_{i,j=1}^{n} D_{i,j}f(x_0)h_i h_j$$

donde $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sea Ω *un abierto convexo de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$*. Entonces* f *es convexa en* Ω *si, y sólo si,* $H_x(f)$ *es semidefinido positivo para todo* $x \in \Omega$.

En el caso unidimensional, como $H_x(f)(h) = f''(x)h^2$, se tiene que el signo de la derivada segunda determina el caracter del Hessiano y consecuentemente se tiene que, *si* $f \in \mathcal{C}^2(]a,b[, \mathbb{R})$, f *es convexa si, y sólo si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in]a,b[$.

Mediante el Álgebra lineal podemos obtener criterios que nos permiten conocer por medio de la matriz que define la forma cuadrática, si dicha forma es definida positiva:

Sea q_A *una forma cuadrática simétrica. Sea* B *el determinante de* A*, y sea* B_k *el menor principal de* B *de orden* k *(i.e., el determinante obtenido al quitar de* B *las* $n - k$ *últimas filas y columnas). Entonces*

Si $B_k > 0$ *para* $k = 1, 2, ..., n$, q_A *es definida positiva.*

Otro criterio para que q_A sea definida positiva (semidefinida positiva) es que todos sus valores propios, que son reales pues A es simétrica, sean positivos (no negativos).

En el caso de funciones de dos variables, teniendo en cuenta el criterio de caracterización de las formas cuadráticas simétricas, se tiene:

Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^2$ y $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces f es convexa en Ω si, y sólo si, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - (D_{12}f(x,y))^2 \geq 0,$$

$$D_{11}f(x,y) \geq 0 \text{ y } D_{22}f(x,y) \geq 0$$

para todo $(x,y) \in \Omega$.

4 Problemas

Ejercicio 2.7
Sea S un sunconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Probar que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,S)$, $x \in \mathbb{R}^n$, es convexa si y sólo si, S es convexo.

Ejercicio 2.8
Probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y acotada es constante.

Ejercicio 2.9
Sea f el polinomio cuadrático homogéneo $f(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_ix_j$ donde la matriz (c_{ij}) es simétrica. Estudiar la convexidad y concavidad de f.

Ejercicio 2.10
Sea $p > 1$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = |x|^p$. Probar que f es estrictamente convexa y deducir la desigualdad

$$|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

Ejercicio 2.11
Dados los números reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n, r_1, r_2, ..., r_n$, con $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. Probar que:

(a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa entonces

$$f(\sum_{i=1}^n r_ix_i) \leq \sum_{i=1}^n r_if(x_i)$$

(b)

$$\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^n r_ix_i$$

(c) Si $x, y > 0$, $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

(d) La media geométrica de n números reales positivos es menor o igual que su media aritmética.

Ejercicio 2.12
Determinar si f es convexa o cóncava:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z^2$
(b) $f(x,y,z) = x - y^2 - z^2$
(c) $f(x,y) = (x+y+1)^p$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y+z > 0\}$
(d) $f(x,y,z) = e^{x^2+xy+y^2+z^2}$
(e) $f(x,y) = e^{xy}$.
¿En qué casos es estricta la convexidad o concavidad?.

Ejercicio 2.13
Sea $f(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$, donde $\Phi \in \mathcal{C}^2([0,\infty[)$ es creciente y cóncava. Demostrar que f es convexa en $B_{\delta^2}(0,0)$ si y sólo si, $\Phi'(u) + 2u\Phi''(u) \geq 0$ para todo $u \in [0,\delta^2]$.

Ejercicio 2.14
Utilizando el problema anterior, encontrar el mayor δ tal que f sea convexa en $B_{\delta^2}(0,0)$ donde:
(a) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$
(b) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

Ejercicio 2.15
Sea S un subconjunto abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y g una función convexa en S tal que $g(S) \subset [a,b]$. Sea Φ una función creciente y convexa en $[a,b]$. Probar que la función compuesta $f = \Phi \circ g$ es convexa en S.

Ejercicio 2.16
Utilizando el problema anterior, demostrar que las siguientes funciones son convexas en $\mathbb{R}^n$:
(a) $f(x) = \|x\|_2^p,\ p \geq 1.$
(b) $f(x) = (1+\langle x,x\rangle)^{\langle x,x\rangle}$
(c) $f(x) = (1+\|x\|_2^2)^{\frac{p}{2}},\ p \geq 1$

Ejercicio 2.17
Sea f una función real convexa definida en un subconjunto convexo D de un espacio vectorial. Probar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(]-\infty,\alpha])$ es convexo. ¿ Es también convexo el conjunto $f^{-1}([\alpha,+\infty[$?.

Ejercicio 2.18
Sea K un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f \in C^2(K)$ una función convexa. Si $x_0 \in K$ es un punto crítico de f entonces f tiene en x_0 un mínimo absoluto.

Práctica 3
FORMAS LINEALES

Un concepto enormemente importante en el Álgebra lineal es el de aplicación lineal entre espacios vectoriales, recordemos su definición:

Definición 3.1
Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $T : X \to Y$ se dice que es lineal si "preserva" las operaciones lineales, esto es, una aplicación T tal que

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ y } T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

para cualesquiera $x, y \in X$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

En esta práctica nos interesaremos por un tipo especial de aplicaciones lineales:

Definición 3.2
Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una forma lineal es una aplicación lineal definida sobre E, o sobre un subespacio de E, con valores en $\mathbb{R}$.

1 Continuidad

Cuando E es un espacio normado, las formas lineales de interés son, por supuesto, las continuas. Recordemos un resultado que nos permite estudiar la continuidad de las formas lineales.

Teorema 3.3
Sea E un espacio normado real, y $T : E \to \mathbb{R}$ una forma lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) T es continua.
(b) T es continua en 0.
(c) Existe $M > 0$ tal que $|Tx| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$.

Ejemplo 3.1
En $\mathbb{R}^n$ todas las formas lineales son continuas. En efecto, como hemos puesto de manifiesto en la Práctica 1 todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes y por lo tanto la continuidad de las formas lineales no dependerá de la norma. Así, será suficiente con demostrarlo para la norma $\|.\|_1$.
Consideremos $\{e_i \ : \ i = 1, 2, ..., n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. y llamemos

$$M = \text{máx}\{|T(e_i)| \ : \ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Veamos ahora que se verifica la condición (c) del teorema anterior.
Sea $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, entonces

$$|T(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M\|x\|_1.$$

Ejercicio 3.1
Probar que en todo espacio normado de dimensión infinita existen formas lineales no continuas.

Definición 3.4
Sea E un espacio normado real. Llamaremos dual algebraico de E, y lo denotaremos por

$$E' := \{T : E \to \mathbb{R} \text{ lineales}\}.$$

Llamaremos dual topológico de E, y lo denotaremos por

$$E^* := \{T : E \to \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$

Por la definición de suma y producto por un escalar de funciones reales se comprueba fácilmente que tanto E' como E^* son espacios vectoriales reales. En el caso de E^*, además, gracias al teorema anterior se puede definir una norma sobre él de la siguiente manera: dado $f \in E^*$

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \ : \ \|x\| \leq 1\}.$$

2 Extensión y Separación.

Si E es un espacio vectorial real y W es un subespacio suyo sobre el cual hay definida una forma lineal g. Un forma lineal f, definida sobre todo E, se llama extensión de la forma g, cuando

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in W$$

El problema sobre la extensión de una forma lineal, dada inicialmente sobre un subespacio, a un espacio mayor surge con frecuencia en el Análisis. El papel principal en estas cuestiones lo desempeña el teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.5
Sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica

$$(1) \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall x \in E \text{ y } \forall \lambda > 0,$$

$$(2) \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \forall x, y \in E.$$

Sean también G un subespacio de E y $g : G \to \mathbb{R}$ una forma lineal tal que

$$g(x) \leq p(x) \ \forall x \in G.$$

Entonces existe una forma lineal f sobre E que es una extensión de g y que verifica

$$f(x) \leq p(x) \ \forall x \in E.$$

Definición 3.6
Sea E un espacio vectorial real. Diremos que un subespacio vectorial V tiene co-dimensión 1 si existe $p \in E$ tal que $E = \{m + \lambda p \ : \ m \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

La prueba del teorema de Hahn-Banach no es constructiva, por lo tanto el teorema sólo nos permite saber de la existencia de dichas extensiones. Sin embargo, cuando el subespacio W es de codimensión 1 en E podemos obtener una prueba constructiva:

Ejemplo 3.2
Sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica

$$(1) \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall x \in E \text{ y } \forall \lambda > 0,$$

$$(2) \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \forall x, y \in E.$$

Sean también W un subespacio de codimensión 1 en E y $g : W \to \mathbb{R}$ una forma lineal tal que

$$g(x) \leq p(x) \ \forall x \in W.$$

Entonces existe una forma lineal f sobre E que es una extensión de g y que verifica

$$f(x) \leq p(x) \ \forall x \in E.$$

Prueba.-
Como W es un subespacio de codimensión 1 en E sabemos que existirá $q \in E$ tal que

$$E = \{m + \lambda q \ : \ m \in W, \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces será suficiente definir f de la forma siguiente

$$f : E \to \mathbb{R} \text{ tal que } \ f(m + \lambda q) := g(m) + \lambda c$$

donde c es cualquier número del intervalo

$$[\sup\{-g(y) - p(-y - q) \ : y \in W\} \ , \text{ínf}\{-g(z) + p(z + q) \ : \ z \in W\}].$$

El ejemplo anterior muestra, entre otras cosas, que la prueba del teorema de Hahn-Banach puede hacerse de forma constructiva cuando el espacio vectorial E es de dimensión finita.

Ejemplo 3.3
Probar que en $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ hay una forma lineal continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(1,1) = \sqrt{2}$.

Consideremos $p((a, b)) = \|(a, b)\|_2$, es claro que p verifica las condiciones (1) y (2) del teorema de Hahn-Banach.

Consideremos ahora el subespacio vectorial $W := Lin\{(1, 1)\}$ y definimos $g(\lambda(1, 1)) := \lambda\sqrt{2} \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Como sabemos que $\mathbb{R}^2 = \{\lambda(1, 0) + \beta(1, 1) \ : \ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$

Entonces, las extensiones que podemos utilizar aplicando el ejemplo anterior son de la forma:

$$f(a, b) = f((a - b)(1, 0) + b(1, 1)) = (a - b)c + b\sqrt{2}$$

donde $c \in [\sup\{-a\sqrt{2} - \|(-a - 1, -a)\| \ : a \in \mathbb{R}\} \ , \text{ínf}\{-b\sqrt{2} + \|(b + 1, b)\| \ : \ b \in \mathbb{R}\}]$. Es decir, $c \in [\sup\{-a\sqrt{2} - \sqrt{(-a - 1)^2 + a^2} \ : a \in \mathbb{R}\} \ , \text{ínf}\{-b\sqrt{2} + \sqrt{(b + 1)^2 + b^2} \ : \ b \in \mathbb{R}\}]$.

Vamos ahora a determinar el intervalo anterior:

Si consideramos la función $f(b) := -b\sqrt{2} + \sqrt{(b + 1)^2 + b^2}$ se puede comprobar fácilmente que dicha función es decreciente y por lo tanto, se tendrá:

$$\text{ínf}\{-b\sqrt{2} + \sqrt{(b + 1)^2 + b^2} \ : \ b \in \mathbb{R}\} = \lim_{b \to +\infty} f(b) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ahora si consideramos la función $g(a) := -a\sqrt{2} - \sqrt{(-a - 1)^2 + a^2}$ de la misma manera que antes se comprueba que dicha función es también decreciente y por lo tanto,

$$\sup\{-a\sqrt{2} - \sqrt{(-a - 1)^2 + a^2} \ : a \in \mathbb{R}\} = \lim_{a \to -\infty} g(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con lo cual, en este caso, la única forma lineal que verificará las hipótesis será:

$$f(a, b) = f((a - b)(1, 0) + b(1, 1)) = (a - b)\frac{1}{\sqrt{2}} + b\sqrt{2}$$

Definición 3.7
Un hiperplano en E es un subconjunto W de E de la forma $W = a + V$, donde V es un subespacio vectorial de co-dimensión 1 y a es un vector de E.

Ejemplo 3.4
$W := \{(1, x, y) \ : x, y \in \mathbb{R}\}$ es un hiperlano en $\mathbb{R}^3$. En efecto, Consideremos V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(0, 1, 0), ((0, 0, 1)\}$ es claro que la codimensión de V es 1, y además $W = (1, 0, 0) + V$. Luego W es un hiperplano.

Ejercicio 3.2
Probar que si φ es una forma lineal no nula en un espacio vectorial E, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\varphi^{-1}(\alpha)$ es un hiperplano en E.

Ejercicio 3.3
Probar que si V es un hiperplano de E, entonces existe una forma lineal no nula φ y un número real α tal que $V = \varphi^{-1}(\alpha)$.

Los dos ejercicios anteriores ponen de manifiesto que, dado un espacio vectorial real E, un hiperplano H es un subconjunto de la forma $H = \{x \in E \ : \ f(x) = \alpha\}$ donde f es una forma lineal sobre E, no identicamente nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, se dice que H es el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.

Recordemos que si estamos en un espacio normado E se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.8
El hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$ es cerrado si, y sólo si, la forma lineal f es continua.

Definición 3.9
Sean $A, B \subset E$. Se dice que el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa A de B en sentido amplio *si se verifica*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B$$

Se dice que H separa A de B en sentido estricto *si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B$$

Definición 3.10
Sea E un espacio normado y C un subconjunto convexo abierto con $0 \in C$. Para cada $x \in E$ se define

$$p_C(x) = \text{ínf}\{\alpha \ : \ \alpha^{-1}x \in C\}$$

(p_C se denomina funcional de Minkowski de C).

Ejercicio 3.4
Probar que el funcional de Minkowski de C verifica:

(a) $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ $\forall x \in E$ y $\forall \lambda > 0$,
(b) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ $\forall x, y \in E$,
(c) Existe $M > 0$ tal que $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$,
(d) $C = \{x \in E \ : \ p_C(x) < 1\}$.

Ejemplo 3.5
Sea E un espacio normado real y C un subconjunto abierto convexo tal que $0 \in C$ y $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in C$. En particular el hiperplano de ecuación $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C en sentido amplio.

Solución.

Consideremos $C = \mathbb{R}x_0$ y la forma lineal g definida en G por

$$g(tx_0) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es claro, desde el ejercicio anterior, que

$$g(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in G.$$

Por el teorema de Hahn-Banach sabemos que existe una forma lineal f sobre E, que extiende a g, y tal que

$$f(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in E.$$

En particular se tiene que $f(x_0) = 1$, $f(x) < 1 \quad \forall x \in C$ y además, como consecuencia del problema anterior, f es continua.

El ejemplo anterior es la clave para obtener los teoremas de separación siguientes:

Teorema 3.11 (Hahn-Banach, primera forma geométrica)
Sea E un espacio normado y sean A, B dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de E. Supongamos que A es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido amplio.

Teorema 3.12 (Hahn-Banach, segunda forma geométrica)
Sea E un espacio normado y sean A, B dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de E. Supongamos que A es cerrado y que B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido estricto.

3 Problemas

Ejercicio 3.5
Sea H un espacio de Hilbert real, donde $\langle , \rangle$ es su producto escalar.
(a) Probar que dado $x \in H$ la aplicación

$$f_x : H \to \mathbb{R} \text{ definida por } g_x(y) = \langle y, x \rangle$$

es una forma lineal continua sobre H.
(b) Calcular la norma de dicha forma lineal.

Ejercicio 3.6
Utilizando el problema anterior, probar que en $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ hay una forma lineal continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(1,1) = \sqrt{2}$.

Ejercicio 3.7
Probar que si φ es una forma lineal no nula en un espacio normado E y existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$, entonces φ es continua.

Ejercicio 3.8
Sea φ una forma linea continua, no nula, en un espacio normado E. Probar que si $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto no vacío y $\varphi|_{\mathcal{U}} \geq 0$, entonces $\varphi|_{\mathcal{U}} > 0$.

Ejercicio 3.9
Sea $E = \mathcal{C}[a,b]$ con la norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \ : \ t \in [a,b]\}$ y sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Probar que φ es continua y calcular su norma.

Ejercicio 3.10
Sea X el subespacio de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ definido por

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - y = 0\}$$

y sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $F(x,y) = x$. Calcular $\|\varphi\|$ y encontrar una extensión Ψ de φ a todo $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\Psi\| = \|\varphi\|$.

Ejercicio 3.11
Encontrar una forma lineal continua φ *en* $(\mathcal{C}[0,2\pi], \|.\|_\infty)$ *tal que* $\|\varphi\| = 1,\ \varphi(\sin(x)) \neq 0$ *y* $\varphi(e^x) = 0$.

Ejercicio 3.12
Consideremos en el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ *la bola unidad cerrada y el punto* $(1,1)$.
(a) Probar que hay un hiperplano cerrado que los separa en sentido estricto.
(b) Encontrar uno explícitamente.

Ejercicio 3.13
Probar que en $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ *hay varias formas lineales continuas* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tales que* $\|f\| = 1$ y $f(1,1) = 2$.

Ejercicio 3.14
Sean $(X, \|.\|_1)$ $(Y, \|.\|_2)$ *dos espacios normados. Consideremos el siguiente espacio vectorial*

$$X \times Y := \{(x,y)\ :\ x \in X,\ y \in Y\}$$

En este espacio vectorial se pueden introducir varias normas:

$$\|(x,y)\|_0 := \|x\|_1 \vee \|y\|_2$$

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Probar que $(X \times Y)^*$ *es isomorfo a* $X^* \times Y^*$. *Además, el isomorfismo es una isometría si usamos la norma* $\|.\|_0$ *en* $X \times Y$ *y* $\|.\|_1$ *en* $X^* \times Y^*$ *(o vice-versa).*

Solución.
Dadas $f \in X^*$ y $g \in Y^*$, definimos la siguiente aplicación:

$$h : X \times Y \to \mathbb{R}\ :\ h(x,y) := f(x) + g(y)$$

Entonces h es lineal y

$$|h(x,y)| \leq (\|f\| + \|g\|)\|(x,y)\|_0,$$

por lo tanto h es continua, y si $\|.\|_0$ es la norma que utilizamos en $X \times Y$, entonces $\|h\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dado $\epsilon > 0$ existirá x, $|x| \leq 1$, e y, $|y| \leq 1$, de forma que $f(x) > \|f\| - \epsilon$, $g(y) > \|g\| - \epsilon$. Entonces $\|(x,y)\|_0 \leq 1$ y $h(x,y) > \|f\| + \|g\| - \epsilon$. Por lo tanto $\|h\| = \|f\| + \|g\|$. La aplicación $(f,g) \to h$ es claramente lineal.

Cada elemento de $(X \times Y)^*$ puede obtenerse de esta forma. De hecho, si h es un elemento de $(X \times Y)^*$ se tiene que $f(x) := h(x,0)$ y $g(y) := h(0,y)$.

Práctica 4
FUNCIONALES CONVEXOS. SUBDIFERENCIALES

En esta práctica consideraremos funciones que toman valores en la recta real ampliada ($\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$), por lo tanto a continuación daremos las operaciones que envuelven a $+\infty$ y $-\infty$. Obviamente consideraremos que $x + (+\infty) = +\infty$ si $x \in \mathbb{R}$, $x.(-\infty) = -\infty$ si $x > 0$, pero además también se entenderá:

$$0.(+\infty) = (+\infty)0 = 0.(-\infty) = (-\infty)0 = 0.$$

La expresión $+\infty - \infty$ es una indeterminación.

1 Funciones convexas.

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición 4.1
Una función $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama convexa si para cualesquiera $x, y \in E$ y para cualesquiera $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < \alpha,\ f(y) < \beta,\ 0 < \lambda < 1$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

Definición 4.2
(a) El dominio efectivo de una función convexa $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, denotado por $dom(f)$, es el conjunto $\{x \in E\ :\ f(x) < +\infty\}$.

(b) Una función convexa propia sobre E es una función convexa $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la cual no es idénticamente $+\infty$.

Ejemplo 4.1
Sea $A \subset E$. La función indicatriz $\delta_A : E \to \overline{\mathbb{R}}$ de A se define por

$$\delta_A(x) = 0 \text{ si } x \in A \ \text{ y } \ \delta_A(x) = +\infty \ \text{ si } \ x \in E \setminus A.$$

δ_A es convexa si, y sólo si, A es convexo. En efecto,

Supongamos que A es un conjunto convexo. Si $x, y \in E$ y además existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta_A(x) < \alpha$ y $\delta_A(y) < \beta$ por la definición de la función indicatriz es claro que $x, y \in A$, y además $\alpha, \beta > 0$, ahora teniendo presente que A es convexo se tendrá que $\lambda x + (1 - \lambda y \in A$ siempre que $0 < \lambda < 1$ lo cual nos dice que $\delta_A(\lambda x + (1-\lambda y) = 0 < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$. Luego δ_A es convexa.

Supongamos que δ_A es convexa. Consideremos $x, y \in A$ y sean $\alpha, \beta > 0$ por definición de función convexa se tendrá que para cualquier $\lambda \in]0,1[$ $\delta_A(\lambda x + (1-\lambda y) < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ y por la definición de la función indicatriz esto significa que $\lambda x + (1 - \lambda y \in A$ con lo cual A es convexo.

Ejercicio 4.1
Probar que el funcional $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexo si y sólo si, para todo $x, y \in E$, $\lambda \in]0,1[$, se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

2 Semicontinuidad inferior

Consideremos X un espacio métrico.

Definición 4.3
Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ diremos que es semicontinua inferiormente en el punto $a \in X$ si para cada $k \in \mathbb{R}$ tal que $k < f(a)$ existe $\delta > 0$ de forma que si $d(x, a) < \delta$ entonces $k < f(x)$. f se dice semicontinua inferiormente si lo es en cada punto de X.

Se puede comprobar de forma inmediata que toda función continua es semicontinua inferiormente. Además, si $a \in X$ es un punto de acumulación de X, $f(a) = +\infty$, y f es semicontinua inferiormente en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Por último, es también claro que si $f(a) = -\infty$, entonces f es semicontinua en a.

Seguidamente recordamos algunas caracterizaciones de la semicontinuidad inferior.

Teorema 4.4
Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) f es semicontinua inferiormente.
(b) $\{x \in X \ : \ f(x) > \lambda\}$ es abierto para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) $\{x \in X \ : \ f(x) \leq \lambda\}$ es cerrado para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) epi(f) es cerrado (como subconjunto de $X \times \mathbb{R}$).

Ejemplo 4.2
Sea E un espacio normado y consideremos A un subconjunto de E. Probar que la función indicatriz δ_A es semicontinua inferiormente si, y sólo si, A es cerrado.

Supongamos que δ_A es semicontinua inferiormente, entonces por el teorema anterior sabemos que $A = \{x \in E : \delta_A(x) \leq 0\}$ es cerrado.

Por otra parte, si el conjunto A es cerrado, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ consideramos el conjunto $\{x \in E : \delta_A(x) \leq \lambda\}$, según los distintos valores de λ se tienen los siguientes casos:
(a) si $\lambda < 0$ el conjunto anterior es vacío y por lo tanto cerrado.
(b) si $\lambda \geq 0$ el conjunto anterior se reduce al conjunto A que por hipótesis es cerrado.

Ahora podemos aplicar el teorema anterior para concluir que la función indicatriz es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 4.2
Sean F, G y F_i funcionales semicontinuos inferiormente en un espacio normado E con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ y sean $\alpha, \beta > 0$. Probar que $\alpha F + \beta G$, $F \wedge G$ y $\sup_i(F_i)$ son también semicontinuos inferiormente.

3 Subdiferenciales

En esta sección E será un espacio normado real y E^* su dual topológico. Dado $x \in E$ y $u \in E^*$ se denotará por $\langle x, u\rangle := u(x)$.

Definición 4.5
Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función y sea a un punto de E donde f es finita.
(a) Un funcional $a' \in E^*$ se llama subgradiente de f en el punto a si

$$f(x) \geq f(a) + \langle x - a, a'\rangle$$

para todo $x \in E$.

(b) El conjunto de todos los subgradientes de f en el punto a se llama subdiferencial de f en a, y se denota por $\partial f(a)$.

(c) La función f se dice que es subdiferenciable en el punto a si $\partial f(a) \neq \varnothing$. Si f no es finita en a, definimos $\partial f(a) = \varnothing$.

(d) El dominio dom(∂f) de ∂f es el conjunto $\{x \in E \ : \ \partial f(x) \neq \varnothing\}$.

El concepto de subdiferencial surge por el hecho de que las funciones convexas no son necesariamente diferenciables. En los casos en que la función convexa no sea diferenciable la noción de subdiferencial, en muchas situaciones, juega un papel similar.

Ejemplo 4.3
Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ un función convexa. Entonces f es subdiferenciable en cada punto de $]a,b[$ y además $\partial f(c) = [f'_-(c), f'_+(c)]$.

Como la función f es convexa no es difícil demostrar que

$$f'_-(c) = \sup\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ : \ a < x < c\} \quad f'_+(c) = \inf\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ : \ c < x < b\}.$$

Si $z \in \partial f(c)$, por definición de subdiferencial se debe cumplir: $f(x) \geq f(c) + (x-c)z \quad \forall x \in]a,b[$. Si $x = c$ la desigualdad se cumple trivialmente.

Si $a < x < c$ la desigualdad anterior nos dice que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq z$ y por lo tanto z es una cota superior del conjunto $\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ : \ a < x < c\}$, con lo cual $f'_-(c) \leq z$.

Por otra parte, si $c < x < b$ la misma desigualdad que antes nos permite afirmar que $z \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, es decir z es una cota inferior del conjunto $\{\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ : \ c < x < b\}$ lo cual implica que $z \leq f'_+(c)$.

Este razonamiento nos permite concluir que $\partial f(c) \subset [f'_-(c), f'_+(c)]$.

La otra inclusión se hace de forma similar.

Una observación interesante que puede obtenerse de este ejemplo es que en el caso de ser f derivable en c se tiene que $\partial f(c) = f'(c)$.

Ejercicio 4.3
Estudiar la subdiferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \ \text{ si } |x| \leq 1 \quad \text{y} \quad f(x) = +\infty \ \text{ si } \ |x| > 1.$$

La observación anterior se puede generalizar utilizando el siguiente resultado:

Teorema 4.6
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa, y sea x_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ donde f es finito. Si existen todas las derivadas direccionales de f en x_0 (en particular existe el gradiente de f en x_0) y se tiene que

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v,$$

entonces

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

También se puede comprobar que si f es continua en x_0 y tiene un único subgradiente en dicho punto, entonces este subgradiente es, precisamente, $\nabla f(x_0)$, es más existen todas las derivadas direccionales de f en x_0 y $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$.

4 Problemas.

Ejercicio 4.4
Sea $f : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $t \in [a,b]$ la función $f(.,t)$ es convexa. Probar que la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ es convexa.

Ejercicio 4.5
Sea K un subconjunto convexo en un espacio normado E. Probar que

$$dom(\partial\delta_K) = K.$$

Ejercicio 4.6
Calcular la subdiferencial de las siguientes funciones:
(a) $f(x) = |x|$
(b) $f(x) = \max(x, 0)$
(c) $f(x) = \max(-x, 0)$

Ejercicio 4.7
Sea $(E, \|.\|)$ *un espacio normado. Calcular la subdiferencial de la función* $x \longmapsto \|x\|$

Ejercicio 4.8
Sea $(E, \|.\|)$ *un espacio normado y sea* $f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ *para todo* $x \in E$.
(a) *Probar que* f *es convexa.*
(b) *Probar que para todo* $x \in E$

$$\partial f(x) = \{x' \in E' \ : \ x'(x) = \|x\|^2 \text{ y } \|x\| = \|x'\|\}$$

(c) *Probar que si* E *es un espacio de Hilbert, entonces* $\partial f(x) = \{x\}$ *para todo* $x \in E$.

Ejercicio 4.9
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $f(x_1, ..., x_n) = \max\{|x_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}$. *Probar que* $\partial f(0) = co(e_1, ..., e_n, -e_1, ..., -e_n)$.

Ejercicio 4.10
Sea $F : M \to \mathbb{R}$ *una función convexa, donde* M *es un subconjunto convexo con interior no vacío de un espacio normado* E. *Consideremos el problema*

$$(P) \qquad \inf_{x \in M} F(x) = \alpha.$$

Probar que son equivalentes:
(a) $x_0 \in M$ *es solución de* (P).
(b) $0 \in \partial F(x_0) + \partial \delta_M(x_0)$.
(c) *Para todo* $x \in M$ *se tiene que* $D^+_{x-x_0} F(x_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0)}{t} \geq 0$.
(d) *Existe* $u' \in E'$ *tal que para todo* $x \in M$ *se verifica:*

$$F(x) \geq F(x_0) + u'(x - x_0), \quad \text{y}$$

$$u'(x - x_0) \geq 0.$$

Práctica 5
OPTIMIZACIÓN. PROGRAMACIÓN CONVEXA. DUALIDAD

Sea $(E, \|.\|)$ un espacio normado real con más de un punto. Si f es una función convexa propia en E, f tiene un mínimo absoluto en un punto $x_0 \in E$ si, y sólo si,

$$f(x) \geq f(x_0) = f(x_0) + \langle x - x_0, 0 \rangle.$$

para todo $x \in E$. Esto significa que f tiene un mínimo global en $x_0 \in E$ si, y sólo si, $0 \in \partial f(x_0)$.

Sea $C \subset E$ un subconjunto convexo y no vacío, si f es una función convexa propia sobre E tal que $dom(f) \cap C \neq \varnothing$. Denotamos por f_C la restricción de f a C.

Consideremos ahora la siguiente función $g := f + \delta_C$ claramente g es una función convexa propia. Minimizar f sobre C (es decir minimizar f_C) es equivalente a minimizar g sobre E, con lo cual f_C tiene un mínimo en $x_0 \in C$ si, y sólo si, $0 \in \partial g(x_0)$.

Esta última condición se puede escribir como

$$0 \in \partial f(x_0) + \partial \delta_C(x_0)$$

en cada uno de los siguientes casos:

(a) Hay un punto en $C \cap dom(f)$ donde f es continua;

(b) $Int(C) \cap dom(f) \neq \varnothing$.

Ejercicio 5.1
Probar que si $x_0 \in Int(C)$, entonces $\partial \delta_C(x_0) = \{0\}$.

Definición 5.1
Un vector $x' \in \partial \delta_C(x_0)$ se llama normal a C en x_0, y $\partial \delta_C(x_0)$, se llama cono normal (o cono soportante) a C en x_0.

En la aplicaciones del análisis convexo nos encontramos, generalmente, en el caso en que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) \leq 0\},$$

siendo g una función convexa sobre $\mathbb{R}^n$. Recordemos que g es continua y subdiferenciable, además si existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) < 0$ (esta condición se llama *condición de Slader*) entonces podemos afirmar que $int(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) < 0\}$.

1 Programación convexa

Un problema de programación convexa en $\mathbb{R}^n$ es un problema en el cual se busca minimizar una función convexa real f sujeta a p restricciones $g_i(x) \leq 0$ $(1 \leq i \leq p)$, donde $g_1, ..., g_p$ son funciones convexas reales sobre $\mathbb{R}^n$. Abreviadamente:

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \text{mín}(f) \\ g_i(x) \leq 0 \quad (1 \leq i \leq p). \end{cases}$$

Definición 5.2
Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama una solución factible de (CP) si verifica que $g_i(x_0) \leq 0$ $(1 \leq i \leq p)$. Se llama una solución factible estricta si $g_i(x_0) < 0$ $(1 \leq i \leq p)$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama solución óptima de (CP) si es una solución factible y verifica que $f(x_0) = \min\{f(x) \ : \ g_i(x) \leq 0 \ (1 \leq i \leq p)\}$.

Teorema 5.3
Supongamos que el problema (CP) tiene una solución factible estricta. Entonces un punto x_0 es una solución óptima de (CP) si, y sólo si, existen $x' \in \partial f(x_0)$ y $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ verificando

$$\begin{cases} -x' \in \lambda_1 \partial g_1(x_0) + ... + \lambda_p \partial g_p(x_0) \\ g_i(x) \leq 0, \ \lambda_i \geq 0, \ \lambda_i g_i(x_0) = 0 \ \ (1 \leq i \leq p). \end{cases}$$

Observando la condición que nos da el teorema anterior se puede deducir de forma fácil que x_0 es una solución óptima de (CP) si x_0 es un mínimo absoluto de la función $f + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$. Además, si las funciones $f, g_1, ..., g_p$ son diferenciables, entonces el teorema anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) + \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + ... + \lambda_p \nabla g_p(x_0) = 0 \\ g_i(x_0) \leq 0, \ \lambda_i \geq 0, \ \lambda_i g_i(x_0) = 0 \ \ (1 \leq i \leq p). \end{cases}$$

estas condiciones se conocen como **condiciones de Kuhn-Tucker**.

Ejercicio 5.2
Minimizar la función $f(x, y) = x + y$, sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$

2 Dualidad

En programación convexa un problema de minimización frecuentemente es transformado en cierto problema de maximización el cual es llamado *el problema dual*. Para tratar esta transformación necesitamos introducir el concepto de función conjugada.

Definición 5.4
(a) Dada una función $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, llamaremos función conjugada (o dual o polar) de f a la función $f^* : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} \{\langle x, x' \rangle - f(x)\} \quad (x' \in E^*)$$

(b)Dada una función $g : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ llamamos función conjugada de g a una función $g^* : E \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$g^*(x') = \sup_{x' \in E^*} \{\langle x, x' \rangle - g(x)\} \quad (x \in E)$$

(c) La bipolar f^{**} se define como la polar de la polar, es decir $(f^*)^*$.

Ejemplo 5.1
Sea $x_0 \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la función $f : E \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle - \alpha.$$

Obtener la función conjugada de f.

Por definición de función conjugada tenemos que

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} \{\langle x, x' - x_0 \rangle + \alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } x' \neq x'_0 \\ \alpha \ \text{ si } \ x' = x'_0. \end{cases}$$

Entonces $f^* = \delta_{x'_0} + \alpha$.

Dada una función cóncava $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ (i.e. $-g$ es convexa), llamamos dominio de g y lo denotamos por $dom(g)$ al siguiente conjunto $dom(g) := \{x \in E \ : \ g(x) > -\infty\}$. La conjugada de una función cóncava g es una función $g^* : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$g^*(x') := \inf_{x \in E}\{\langle x, x'\rangle - g(x)\} \quad (x' \in E^*).$$

g^* es una función cóncava y $g^*(x') = -(-g^*)(-x')$ para todo $x' \in E^*$.

Ahora estamos en condiciones de formular el principal resultado que nos permitirá pasar de un problema de minimización a otro de maximización.

Teorema 5.5 (Teorema de dualidad de Fenchel)
Sea f una función convexa propia sobre E y sea g una función cóncava propia sobre E tales que $dom(f) \cap dom(g)$ tiene un punto donde f ó g es continua. Entonces

$$\inf_{x \in E}\{f(x) - g(x)\} = \max_{x' \in E^*}\{g^*(x') - f^*(x')\}.$$

en cada uno de los siguientes casos:

3 Problemas.

Ejercicio 5.3
Hallar las funciones conjugadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$, *donde* $x \in E$.
(b) $f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$ *si* $|x| \leq a$, $a > 0$ *y* $f(x) = +\infty$ *si* $|x| > a$.
(c) $f(x) = e^x$
(d) $f(x) = ax^2 + bx + c$
(e) $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $p > 1$.
(f) $f(x) = \delta_{[a,b]}$
(g) $f(x) = -nx$ *si* $x > 0$ *y* $f(x) = +\infty$ *si* $x \leq 0$.
(h) $f(x, y) = ax + by + c$
(i) $f(x, y) = e^{ax+by}$

Ejercicio 5.4
Sea (f_α) una familia de funciones definidas en un espacio normado E y con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Probar que:

$$(\inf_\alpha(f_\alpha))^* = \sup_\alpha f_\alpha^* \ \text{ y } \ ((\sup_\alpha(f_\alpha))^* \leq \sup_\alpha f_\alpha^*$$

Ejercicio 5.5
Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar

(a) *Si* $\lambda > 0$, *entonces* $(\lambda f)^*(x') = \lambda f^*(x'/\lambda)$, $x' \in E'$.
(b) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces* $(f + \alpha)^* = f^* - \alpha$.
(c) *Si* f_x *es la función definida por* $f_x(y) = f(x + y)$, *entonces*

$$f_x^*(x') = f^*(x') + x'(x)$$

(d) $\inf\{f(x) \ : \ x \in E\} = -f^*(0)$

Ejercicio 5.6
Sea el espacio de sucesiones $(l_2, \|.\|_2)$ y $C = \{(a_n) \in B_{l_2} \ : \ a_n \geq 0\}$. Consideremos $x_0 \in l_2$ tal que $\|x_0\|_2 = 2$. Minimizar la función $f(x) = \|x - x_0\|_2$ sobre C.

Ejercicio 5.7
Hallar la minima distancia que hay entre el punto (a_1, a_2, a_3) *y el plano de ecuación* $b_1x+b_2y+b_3z+b_0 = 0$.

Ejercicio 5.8
Hallar la biconjugada de las siguientes funciones
(a) $f(x) = \sin(x)$
(b) $f(x) = \sqrt{|x|}$.