PRÁCTICAS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2003/2004

Profesores responsables :

Pablo Galindo (AA) y (AB)
Fuensanta Andreu (BA)
Enrique Llórens (BB)

Práctica 1
Espacios normados: Generalidades

En esta primera práctica se estudian algunos de los conceptos fundamentales sobre espacios normados. La mayoría de los problemas se proponen para comprobar que algunas funciones son normas y para comparar distintos tipos de convergencias, que corresponden a normas diferentes.

Ejemplo 1.1
Probar que, en todo espacio normado $(X, \|.\|)$,

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Solución

Aplicamos la desigualdad triangular:

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{4}(\|x\| + \|y\|)^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|}{4}.$$

Como, para cualesquiera números reales a, b,

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

tenemos que

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Por tanto, $2\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, y queda entonces

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|}{4} \leq \frac{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}{4}$$

lo que completa la prueba.

Ejemplo 1.2
Encontrar una sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, *donde cada* $x^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$, $\xi_j^{(n)} \in \mathbb{R}$, *que pertenezca a* ℓ_1, *y que sea convergente en* ℓ_∞ *pero no en* ℓ_1.

Solución

Es importante observar primero que si la sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ converge a x en ℓ_∞, entonces la sucesión $(x^{(n)} - x)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, con lo cual basta encontrar el ejemplo de una sucesión que converge a 0. Además, tanto la convergencia en el espacio ℓ_∞ como en el espacio ℓ_1 implica la convergencia coordenada a coordenada; por ello, hay que buscar una sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ que converja coordenada a coordenada a 0 pero que no converja a 0 en ℓ_1.

Sea $x^n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$ definida por $\xi_i^{(n)} = 0$ si $i \leq n$ y $\xi_i^{(n)} = n/i^2$ si $i \geq n+1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x^{(n)} \in \ell_\infty$ y $\|x^{(n)}\|_\infty = n/(n+1)^2$, y, por otro lado, $x^{(n)} \in \ell_1$

y $\|x^{(n)}\|_1 = n\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$. Se deduce que $\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} n/(n+1)^2 = 0$, si bien $\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}\|_1 \neq 0$ puesto que

$$\|x^{(n)}\|_1 \geq n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) \geq \frac{n^2}{4n^2} \geq \frac{1}{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.3
Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ e $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ convergen en $\mathcal{C}([0,1])$ donde la norma viene definida por $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$.

Solución

Para empezar, como la convergencia en la norma implica la convergencia puntual,es conveniente saber si la sucesión de funciones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a alguna función continua, digamos x. Si esto es así, esa función x será el posible límite en la norma del espacio. Posteriormente, hay que calcular la norma de la diferencia entre los valores de la sucesión y ese posible límite; es decir, $\|x_n - x\|$, y, por último, verificar si esta sucesión de normas tiende a 0. Para hallar la norma de una función, es necesario calcular el máximo del módulo de la función; en otras palabras, hay que hallar el máximo absoluto M y el mínimo absoluto m de la función en $[0,1]$: el máximo del módulo es entonces $\max\{M, -m\}$. Dado que las funciones que aparecen son derivables, se puede empezar estudiando las raíces de sus derivadas.

Es evidente que $x_n(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es fácil ver que, para cada $t \in [0,1[$, se tiene $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^n - t^{n+1} = 0$. Por tanto, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a 0. Para comprobar que la convergencia se verifica en la norma es necesario ver que $\lim_{n\to\infty}\|x_n - 0\| = 0$. Comenzaremos calculando la norma de las funciones. Si $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, entonces la derivada $x_n'(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n$ sólo se anula en el punto $t = \frac{n}{n+1}$. Como $x_n''(t) = n(n-1)t^{n-2} - (n+1)nt^{n-1}$, se deduce que $x_n''(\frac{n}{n+1}) = n(n-1)\frac{n}{n+1}^{n-2} - (n+1)n\frac{n}{n+1}^{n-1} < 0$ con lo cual en ese punto hay un máximo relativo. No existen mínimos relativos. En los extremos del intervalo se tiene $x(0) = 0$ y $x(1) = 0$. Luego el valor máximo es $x_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ mientras que el mínimo es 0 y, por consiguiente, $\|x_n\| = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Se concluye que

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = 0$$

y la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en el espacio $\mathcal{C}([0,1])$.

En el segundo caso, es también sencillo comprobar que la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a 0. Por otro lado, vamos a calcular la norma de la función y_n. Como $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ se cumple que $y_n'(t) = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1}$ con lo cual la derivada se anula en el punto $t = \frac{1}{2^{1/n}}$. Calculando la segunda derivada se comprueba que $y_n''(\frac{1}{2^{1/n}}) < 0$. Por tanto, en ese punto hay un máximo relativo y no existen mínimos relativos. Por anularse la función en los extremos del intervalo, se deduce que el valor del máximo absoluto es $y_n(\frac{1}{2^{1/n}})$ y el del mínimo 0. Por tanto, $\|y_n\| = y_n(\frac{1}{2^{1/n}}) = \frac{1}{4}$. Obviamente la sucesión de normas $\|y_n\|$ no converge a 0 con lo cual la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a 0 en la norma del espacio $\mathcal{C}([0,1])$.

Ejemplo 1.4
Probar que la sucesión de funciones medibles en $[0,1]$ cuyos primeros términos son $\chi_{[0,1]}$, $\chi_{[0,1/2]}$, $\chi_{[1/2,1]}$, $\chi_{[0,1/4]}$, $\chi_{[1/4,1/2]}$, $\chi_{[1/2,3/4]}, \ldots$; $\| \ \|_p$-converge, pero no converge puntualmente para ningún punto de $[0,1]$.

Solución

Lo esencial en este ejemplo es percatarse, por un lado, que la medida de los intervalos donde las funciones no se anulan tiende a 0 puesto que esto implica que la sucesión p-converge a 0 y, por otro, que la sucesión de funciones aplicada en cada punto concreto repite infinitamente los valores 0 y 1.

Aunque no es estrictamente necesario, sí que resulta conveniente disponer de una fórmula para la sucesión: ésta es $x_n = \chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$, siendo $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$.

La p-norma de cada función es

$$\|x_n\|_p = \left(\int_0^1 \chi^p_{[j/2^k,(j+1)/2^k]} \right)^{1/p} = \big(\frac{1}{2^k}\big)^{1/p}.$$

Es evidente que la sucesión de normas es decreciente y, como $\lim_{k\to\infty} \big(\frac{1}{2^k}\big)^{1/p} = 0$, su ínfimo es 0. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} \|x_n\|_p = 0$, con lo cual la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 en $L_p(0,1)$.

Por otro lado, fijado $t \in [0,1]$, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$ existe $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ tal que $t \in [j/2^k, (j+1)/2^k]$ y así $\chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}(t) = 1$. Se sigue que la sucesión $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión constantemente igual a 1. Por otro lado, es evidente que si $k \geq 2$, entonces existe $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ tal que $t \notin [j/2^k, (j+1)/2^k]$ y así $\chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}(t) = 0$. Se deduce que existe una subsucesión de $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ constantemente igual a 0. Por tanto, la sucesión $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ no converge.

1 Problemas

Ejercicio 1.1
Probar que en un espacio normado la clausura de $B_\delta(x)$ es $B'_\delta(x)$ y que el interior de $B'_\delta(x)$ es $B_\delta(x)$. ¿Es eso cierto en un espacio métrico cualquiera?

Ejercicio 1.2
Probar que en todo espacio normado el diámetro de una bola es igual al doble del radio.

Ejercicio 1.3
Probar que para dos vectores x e y cualesquiera se verifica

$$\|x\| \leq \max\big(\|x+y\|, \|x-y\|\big)$$

Ejercicio 1.4
Probar que un subconjunto A de un espacio normado es acotado si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en A y cualquier sucesión $\{\lambda_n\}$ en $\mathbf{K}$ que tiende a 0, la sucesión $\{\lambda_n x_n\}$ tiende a 0.

Ejercicio 1.5
Sea $X = \{x \in \mathcal{C}([-1,1]) : x(t) = x(-t)$ para todo $t \in [-1,1]\}$ considerado como subespacio del espacio $\mathcal{C}([-1,1])$ con la norma supremo. Demostrar que X es un espacio de Banach.

Ejercicio 1.6
En el espacio $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ se considera el conjunto

$$M := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 = f(0)\ \ f(1) = 1\}.$$

Estudiar si M es un conjunto cerrado. ¿Es M acotado? ¿Es M compacto?

Ejercicio 1.7
Probar que el espacio $\mathcal{C}([0,1])$ *con la norma* $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$ *no es completo. (Considerar la sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *donde*

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,1/2], \\ 0, & \text{si } t \in [1/2+1/n,1], \\ \alpha_n t + \beta_n, & \text{si } t \in [1/2, 1/2+1/n] \end{cases}$$

elegir α_n *y* β_n *convenientemente.)*

Ejercicio 1.8
Probar que todo subespacio vectorial propio de un espacio normado tiene interior vacío. Deducir que no existen espacios de Banach de dimensión numerable. (Aplicar el teorema de Baire.)

Ejercicio 1.9
Probar que φ *es denso en* c_0. *¿Es* φ *un espacio de Banach?*

Ejercicio 1.10
Para cada $p \geq 1$, *se define*

$$\ell_p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n \in \mathbf{K},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ converge } \}.$$

(a) *Probar que* ℓ_p *es un subespacio vectorial de* c_0. *¿Es cerrado?*

(b) *Probar que si* $p \leq q$, *entonces* ℓ_p *es un subconjunto de* ℓ_q.

Ejercicio 1.11
Encontrar una sucesión $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, *donde cada* $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, $x_j^{(n)} \in \mathbb{R}$, *que pertenezca a cada uno de los dos espacios indicados y que sea*

(a) *convergente en* ℓ_∞ *pero no en* ℓ_2

(b) *convergente en* ℓ_2 *pero no en* ℓ_1

(c) *convergente en* c_0 *pero no en* ℓ_1

(d) *convergente en* c_0 *pero no en* ℓ_2

Ejercicio 1.12
Consideremos la sucesión de funciones

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$

Estudiar su convergencia en los espacios $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_0)$ *y* $(\mathcal{C}^1([0,1]), \| \|_1)$.

Ejercicio 1.13
Sea $x_0 \in [a,b]$. *Probar que* $\|f\|_{x_0} = |f(x_0)| + \|f'\|_0$ *es una norma en* $\mathcal{C}^1([a,b])$ *equivalente a* $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$.

Ejercicio 1.14
Probar que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ *y que* $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$. *¿Qué ocurre si en lugar de* $\mathbb{R}$ *consideramos los espacios* $L^2(I)$ *y* $L^1(I)$, *donde* I *es un subconjunto de medida finita?*

Ejercicio 1.15
Supongamos que I es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L_p(I)$. Probar que se cumplen las siguientes implicaciones.

$$f_n \to f \text{ uniformemente } \Rightarrow f_n \to f \text{ en la norma } \|\ \|_p \Rightarrow f_n \to f \text{ en la norma } \|\ \|_1.$$

Probar que los recíprocos no son ciertos.

Ejercicio 1.16
Probar que la sucesión $\{n\chi_{[0,1/n]}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no converge en el espacio $L_p(0,1)$.

Ejercicio 1.17
Probar que la identidad de $(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\ \|_1)$ en $(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\ \|_0)$ es continua pero que las dos normas no son equivalentes. (Considerar la sucesión definida por $\frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$ en $[-\pi, \pi]$.)

2 Problemas complementarios

Ejemplo 1.5
Consideremos el espacio c con la norma $\|.\|_\infty$. Sea e^i la sucesión cuyos términos son todos 0 excepto el i-ésimo que es 1. Explicar si se puede escribir toda sucesión $x = (\chi_i) \in c$ como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i e^i.$$

Solución

La respuesta es negativa. Basta considerar la sucesión constante

$$(1, 1, 1, ...) = (1) \in c$$

Está claro que

$$\sum_{i=1}^{n} 1e^i = (1, ..., 1, 0, 0, ...).$$

Por tanto

$$\left\| (1, 1, 1, ...) - \sum_{i=1}^{n} 1e^i \right\|_\infty = \|(1, 1, 1, ...) - (1, ..., 1, 0, 0, ...)\|_\infty = 1$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (1, 1, 1, ...) - \sum_{i=1}^{n} 1e^i \right\|_\infty = 1.$$

Si fuera

$$(1, 1, 1, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} e^i$$

por definición de serie

$$(1, 1, 1, ...) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^i$$

luego debería ser

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (1, 1, 1, ...) - \sum_{i=1}^{n} 1e^i \right\|_\infty = 0.$$

Ejercicio 1.18
Consideremos el espacio ℓ_∞ *con la norma* $\|.\|_\infty$. *Denotaremos por* e_i *la sucesión cuya coordenada* i*-ésima es* 1 *y las demás* 0.

¿Se puede escribir toda sucesión $x = (\xi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ *como* $x = \sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i$ *? Justificar la respuesta. (Tener en cuenta la noción de separabilidad)*

Ejercicio 1.19
Probar que una bola abierta de un espacio normado es homeomorfa a todo el espacio. Probar que un espacio normado es separable si y sólo si su bola unidad abierta es separable.

Ejercicio 1.20
Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es continua y tal que* $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ *para todo* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ *entonces* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [a,b]$. *(Utilizar el teorema de aproximación de Weierstrass.)*

Ejercicio 1.21
Probar que en todo espacio normado separable de dimensión infinita X, *existe una sucesión* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *formada por vectores linealmente independientes tal que*

$$X = \overline{LIN\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

(Aplicar que todo subespacio de dimensión finita es cerrado.)

Ejercicio 1.22
Probar que si S *es un conjunto infinito, entonces* $\big(B(S), \|\ \|_\infty\big)$ *no es separable.*

Ejercicio 1.23
Estudiar la continuidad en las normas $\|\ \|_0$ *y* $\|\ \|_1$ *del funcional no lineal definido en* $\mathcal{C}^1([0,\pi])$ *por la expresión* $F(y) = \int_0^\pi (y')^2$.

Práctica 2
Aplicaciones Lineales

Ejemplo 2.1
Probar que los espacios c *y* c_0 *son isomorfos.*

Solución

Para cada $x = \{x_n\} \in c$ sea $\ell(x) = \lim_n x_n$. Entonces ℓ es una forma lineal en c y como

$$|\ell(x)| \leq \|x\|$$

para todo $x \in c$, se tiene que ℓ es continua y que $\|\ell\| \leq 1$.

Definimos la aplicación $T : c \to c_0$

$$(Tx)_1 = \ell(x) \text{ y } (Tx)_n = x_{n-1} - \ell(x) \ , \ n > 1.$$

Se comprueba fácilmente que T está bien definida, es lineal y además que $\|Tx\| \leq 2\|x\|$.

Veamos ahora que $\|Tx\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$. En el caso de que $\frac{1}{2}\|x\| \leq |\ell(x)|$, resulta que

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq |(Tx)_1| \leq \|Tx\|$$

Supongamos ahora que $|\ell(x)| = \frac{1}{2}\|x\| - \delta$, para algún $\delta > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m| > \|x\| - \delta$. Entonces se tiene que

$$|(Tx)_{m+1}| = |x_m - \ell(x)| \geq |x_m| - |\ell(x)| > \frac{1}{2}\|x\|$$

con lo cual queda probado que $\|Tx\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$. Notemos que de la desigualdad anterior se deduce que el núcleo de T se reduce a 0 y por lo tanto que T es inyectiva.

Veamos que es suprayectiva. Dado $y \in c_0$ sea $x_n = y_1 + y_{n+1}$. Entonces $x \in c$, $x_1 = y_1$ y $Tx = y$.

Ejemplo 2.2
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión acotada en un espacio de Banach* E. *Demostrar que la aplicación* $T : \ell_1 \to E$ *definida por* $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *es lineal, continua y que* $\|T\| = \sup_n \|a_n\|$.

Solución

Sea $M = \sup_n \|a_n\|$. Dado $m \in \mathbb{N}$ se tiene que si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, entonces

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{m} \|a_n\| \cdot |x_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = M\|x\|_1;$$

por lo tanto, se cumple que $\|Tx\| \leq M\|x\|_1$, con lo cual T es continua y $\|T\| \leq M$.

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_m\| > M - \epsilon$. Consideremos el vector e_m cuyas componentes son todas nulas salvo la m-ésima que vale 1. Entonces $T(e_m) = a_m$ luego $\|T\| > M - \epsilon$.

Como ϵ es arbitrario se tiene que $\|T\| \geq M$.

Ejemplo 2.3
Probar que en todo espacio normado de dimensión infinita existen formas lineales que no son continuas.

Solución

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de Hamel del espacio E. Podemos suponer que todos los vectores e_i son de norma 1. Elijamos una sucesión de vectores de la base $\{e_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ distintos.

Para definir una forma lineal en E es suficiente dar sus valores sobre los vectores de la base y extenderla linealmente. Además, como nos interesa que no sea continua, la definiremos de forma que no esté acotada en la bola unidad cerrada.

Definimos

$$\varphi(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq i_n \ , \ n = 1, 2, ...$$

$$\varphi(e_{i_n}) = n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, ...$$

Para cada $x \in E$, podemos escribir $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_{\beta_k}$, donde $\beta_k \in I$, $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_k \in K$. Entonces definimos $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi(e_{\beta_k})$.

Puesto que $\sup_n \varphi(e_{i_n}) = +\infty$ se sigue que φ no es continua.

Ejemplo 2.4
Sean X e Y espacios normados de dimensión m y n respectivamente. Si $U : X \to Y$ es un operador lineal cuya matriz asociada es $(a_{jk})_{j=1,n}^{k=1,m}$, calcular su norma como operador de $\ell_\infty(m)$ en $\ell_\infty(n)$.

Solución

Dado $x \in \ell_\infty(m)$, sea $y = Ux$, entonces

$$\|Ux\| = \max_{1\le j\le n} |y_j| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| \cdot |x_k| \le \|x\|_\infty \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|;$$

luego

$$\|U\| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| = M.$$

Consideremos j_0 tal que $\sum_{k=1}^{m} |a_{j_0 k}| = M$. Entonces si definimos el vector $z \in \ell_\infty(m)$ por $z_k = sign(\overline{a_{j_0 k}})$, $1 \le k \le m$, se tiene que

$$\|U\| \ge \|Uz\| \ge \max_{1\le j\le n} |\sum_{k=1}^{m} a_{jk} z_k| \ge \sum_{k=1}^{m} a_{j_0 k} z_k = \sum_{k=1}^{m} |a_{j_0 k}| = M;$$

luego $\|U\| = M$.

1 Problemas

Ejercicio 2.1
Probar que el funcional $\varphi : L_p(0,1) \to \mathbb{R}$ definido $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ es continuo y calcular su norma.

Ejercicio 2.2
Probar la continuidad del funcional $J(y) = \int_0^1 (y(t) + 2y'(t))\, dt$ en el espacio $(\mathcal{C}^1[0,1] \ , \ \| \ \|_1 \ )$.

Ejercicio 2.3
Dados los puntos $t_1, ..., t_n$ *del intervalo* $[a, b]$ *y los números reales* $c_1, ..., c_n$, *calcular la norma del funcional* $\Psi : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ *definido por* $\Psi(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Ejercicio 2.4
Sea $\varphi : c_0 \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$. *Probar que* φ *es continua y calcular su norma. Demostrar que no existe* $x \in c_0$ *de norma* 1 *tal que* $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Ejercicio 2.5
Sea φ *una aplicación lineal entre dos espacios normados* E *y* F. *Probar que* φ *es continua si, y sólo si, cuando* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión acotada en* E, *la sucesión* $\{\varphi(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotada en* F.

Ejercicio 2.6
Sea $E = \mathcal{C}^1[0, 2\pi]$ *y consideremos el operador* $T : E \to \mathcal{C}([0, 2\pi])$ *definido por* $Tf = f + f'$. *Estudiar la continuidad de* T *en* E *con las normas* $\| \|_0$ *y* $\|.\|_1$.

Ejercicio 2.7
Sea σ *una función real continua en* $[a, b]$. *Probar que el funcional* $\Psi : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}$ *definido* $\Psi(f) = \int_a^b \sigma(t) f(t)\, dt$ *es continuo y que su norma es igual a* $\int_a^b |\sigma(t)|\, dt$.

Ejercicio 2.8
Sea k *una función continua en* $[a, b] \times [a, b]$ *y sea* $U : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ *el operador definido* $(Uf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t)\, dt$. *Probar que*

$$\|U\| = \text{máx} \left[\int_a^b |k(s, t)|\, dt : s \in [a, b] \right].$$

Ejercicio 2.9
Sean X *e* Y *espacios normados de dimensión* m *y* n *respectivamente. Si* $U : X \to Y$ *es un operador lineal cuya matriz asociada es* $(a_{jk})_{k=1,m}^{j=1,n}$, *calcular su norma como operador de* $\ell_1(m)$ *en* $\ell_1(n)$.

Ejercicio 2.10
Consideremos una matriz infinita $(a_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ *tal que* $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty$, $q > 1$. *Sea* p *el conjugado de* q. *Probar que la correspondencia que a cada sucesión* $x = \{x_i\} \in \ell_p$ *le asocia la sucesión* $Ax = y = \{y_i\}$, *donde* $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$, $i = 1, 2, ...,$ *define un operador lineal continuo* $A : \ell_p \to \ell_q$.

Ejercicio 2.11
Probar que si E *es un espacio normado sobre* K, *entonces* E *es isométrico a* $L(\mathbf{K}, E)$.

Ejercicio 2.12
Probar que si el operador U *del problema 8 lo consideramos definido en* $L_1(a, b)$ *y con valores en* $L_1([a, b])$, *es continuo y su norma vale*

$$\|U\| = \text{máx} \left[\int_a^b |k(s, t)|\, ds : t \in [a, b] \right]$$

(Proceder como en el problema 8 utilizando la continuidad uniforme de k *en* $[a, b] \times [a, b]$ *)*

Ejercicio 2.13
Probar que si el operador U *del problema 8 lo consideramos definido en* $L_1(a, b)$ *y con valores en* $\mathcal{C}([a, b])$, *es continuo y su norma vale*

$$\|U\| = \text{máx} \left[|k(s, t)| : s, t \in [a, b] \right].$$

Ejercicio 2.14
Probar que si el operador U del problema 8 lo consideramos definido en $L_2([a,b])$ y con valores en $L_2([a,b])$, es continuo y su norma está mayorada por $\|k(s,t)\|_2$.

2 Problemas complementarios

Ejercicio 2.15
Calcular la norma del operador $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ definido por

$$(Tx)(t) = \int_0^1 e^{t+s} x(s)\ ds.$$

Ejercicio 2.16
Se define el funcional $T : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbb{R}$ por

$$T(f) = \int_{-1}^1 x f(x)\ dx.$$

Calcular la norma.

Ejercicio 2.17
Sea X el subespacio de $\mathcal{C}([0,1])$ generado por las funciones t^2 y 1.

(a) *Probar que si $x(t) = \alpha t^2 + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $t \in [-1,1]$; entonces $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|\alpha+\beta|, |\beta|\}$.*

(b) *Se define $f : X \to \mathbf{K}$ por $f(x) = \alpha + \beta$, donde $x \in X$ es $x(t) = \alpha t^2 + \beta$. Demuestra que f es lineal, continua y calcula su norma.*

Ejercicio 2.18
Dada $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ se define $T : c_0 \to c_0$ por

$$T\Big((x_n)_{n=1}^\infty\Big) = \Big(\sum_{k=n}^\infty \alpha_k x_k\Big)_{n=1}^\infty.$$

Demostrar que T es una aplicación lineal continua y calcular su norma.

Ejercicio 2.19
Sea $X = \{f : \mathcal{C}([0,+\infty[)$ tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ dotado con la norma $\|.\|_\infty$. Comprobar que $T : X \to X$ definido por $T(f)(x) = f(x)\operatorname{sen} x$ es un operador lineal y continuo y calcular su norma.

Ejercicio 2.20
Sea $1 \le p < \infty$ y sea $\phi \in L^{2p}([0,1])$. Para cada $x \in\in L^{2p}([0,1])$ se define

$$(Tx)(t) := \phi(t)x(t)$$

p.c.t. $t \in [0,1]$. Demostrar que T define una aplicación lineal y continua entre los espacios de Banach $L^{2p}([0,1])$ y $L^p([0,1])$, y calcular su norma. ¿Qué ocurre si $p = \infty$?. (Examen de Septiembre de 2001).

Práctica 3
Ecuaciones Integrales

Ejemplo 3.1
Resolver la ecuación

$$x(s) = \frac{5s}{6} + \frac{1}{2}\int_0^1 stx(t)\ dt$$

por el método de aproximaciones sucesivas.

Solución

Partiendo de la función $x_0(s) = 1$, y del núcleo $k(s,t) = \frac{st}{2}$ calculamos

$$x_{n+1}(s) = \frac{5s}{6} + \int_0^1 k(s,t)x_n(t)\ dt$$

y se van obteniendo las funciones

$$\left\{1, \frac{13}{12}s, \frac{73}{72}s, \frac{433}{432}s, \frac{2593}{2592}s, \frac{15553}{15552}s, \frac{93313}{93312}s, \frac{559873}{559872}s, ...\right\}$$

A la vista de la sucesión obtenida, parece razonable pensar que la función $x(s) = s$ es la solución de la ecuación. Para comprobarlo evaluamos el miembro de la derecha en la ecuación integral para $x(t) = t$ y nos da efectivamente s.

Ejemplo 3.2
Resolver la ecuación

$$x(s) = 1 + \int_0^s x(t)dt$$

por el método de aproximaciones sucesivas.

Solución

Tomando $x_0(s) = 0$ entonces por la fórmula recurrente se tiene

$$x_1(s) = 1 + \int_0^s 0\ dt = 1$$

$$x_2(s) = 1 + \int_0^s 1\ dt = 1 + s$$

$$\begin{aligned} x_3(s) &= 1 + \int_0^s (1+t)\ dt = 1 + s + \frac{s^2}{2} \\ x_4(s) &= 1 + \int_0^s (1 + t + \frac{t^2}{2})\ dt = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$x_n(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$$

por lo tanto

$$x_n(s) \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} = e^s$$

Es fácil comprobar que e^s es la solución de la ecuación integral dada.

Ejemplo 3.3
Calcular la solución de la ecuación

$$x(s) = 1 + \int_0^1 (1 - 3st)x(t)dt$$

por medio del núcleo resolvente.

Solución

Considerando el operador

$$(Kx)(s) = \int_0^1 (1 - 3st)x(t)dt$$

de $L_2([0,1])$ en $L_2([0,1])$, sabemos que su norma está mayorada por la norma del núcleo $k(s,t) = 1-3st$ que vale $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, por lo tanto la ecuación tiene una solución.

Si $k_1(s,t) = 1-3st$ y $k_{n+1}(s,t) = \int_0^1 k(s,u)k_n(u,t)du$ sabemos que la solución de la ecuación viene dada por

$$x(s) = 1 + \int_0^1 R(s,t)1dt = 1 + \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} k_n(s,t))1dt$$

Calculemos los núcleos iterados

$$\begin{aligned} k_2(s,t) &= \int_0^1 (1-3sx)(1-3xt)dx = 1 - \frac{3}{2}(s+t) + 3st \\ k_3(s,t) &= \int_0^1 (1-3sx)(1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)dx = \frac{1}{4}(1-3st) = \frac{1}{4}k_1(s,t) \end{aligned}$$

De forma similar se obtiene que $k_4(s,t) = \frac{1}{4}k_2(s,t)$ y en general

$$k_n(s,t) = \frac{1}{4}k_{n-2}(s,t)$$

por lo tanto el núcleo resolvente es

$$\begin{aligned} R(s,t) &= (1 + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + ...)k_1(s,t) + (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...)k_2(s,t) = \\ &= \frac{4}{3}((1-3st) + (1 - \frac{3}{2}(s+t) + 3st)) = \frac{8}{3} - 2(s+t) \end{aligned}$$

La solución de la ecuación será

$$x(s) = 1 + \int_0^1 (\frac{8}{3} - 2(s+t))dt = \frac{8}{3} - 2s$$

cuya comprobación es inmediata.

Ejemplo 3.4
Resolver la ecuación integral

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - s + \frac{s^3t^2}{2})x(t)\ dt$$

Solución

Puesto que el núcleo $k(s,t) = 1 - s + \frac{s^3t^2}{2}$ es degenerado escribimos

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \alpha(1-s) + \beta s^3 \qquad (*)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)dt \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2x(t)dt$$

Sustituyendo en esos valores la expresión de $x(s)$ en (*) obtenemos un sistema para determinar α y β .

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 (\operatorname{sen} t + \alpha(1-t) + \beta t^3)dt = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8}$$

$$\beta = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2(\operatorname{sen} t + \alpha(1-t) + \beta t^3)dt = \frac{\cos 1}{4} + \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\alpha + 2\beta - 24}{48}$$

queda por lo tanto el sistema

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \\ \beta = \frac{\cos 1}{4} + \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\alpha+2\beta-24}{48} \end{cases}$$

cuya solución es

$$\alpha = 0.317321 \qquad , \qquad \beta = 0.0651367$$

Sustituyendo en (*) la solución de la ecuación es

$$x(s) = \operatorname{sen} s + 0.317321(1-s) + 0.0651367s^3$$

Vamos a comentar ahora otro método de obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones. Dada la ecuación $Ax = y$ con $y \in X$ y A invertible en $L(X)$, el método consiste en resolver la ecuación $Bx_1 = y_1$, en la que B invertible en $L(X)$ y $y_1 \in X$ se eligen de forma que $\| y - y_1 \|$ y $\| A - B \|$ sean suficientemente pequeños. Es razonable pensar que la solución de esa ecuación nos proporcione una buena aproximación de la solución de la ecuación inicial. Obviamente la elección de B y de y_1 se hace de forma que la resolución de la segunda ecuación sea más sencilla que la de la inicial.

A este respecto las ecuaciones integrales con núcleo degenerado nos proporcionan soluciones aproximadas de las ecuaciones integrales de Fredholm, como veremos en el ejemplo 5.

Vamos a dar una estimación de la distancia entre las soluciones de las dos ecuaciones. Si x y x_1 son las soluciones de las ecuaciones $Ax = y$ y $Bx_1 = y_1$, respectivamente, se tiene que

$$x_1 - x = (x_1 - A^{-1}y_1) + (A^{-1}y_1 - A^{-1}y) = A^{-1}(A-B)x_1 + A^{-1}(y_1 - y)$$

de donde

$$\| x - x_1 \| \leq \| A^{-1} \| \| A - B \| \| x_1 \| + \| A^{-1} \| \| y - y_1 \|$$

Ejemplo 3.5
Resolver la ecuación integral

$$x(s) = \operatorname{sen} s + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - s.\cos st)x(t)\ dt.$$

Solución

Si

$$(Kx)(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 k(s,t)x(t)dt,$$

entonces

$$\| K \| = \max\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \mid 1 - s\cos(st) \mid dt : s \in [0,1]\right] = \frac{1}{2} < 1$$

luego la ecuación integral tiene una solución.

Vamos a aproximar el núcleo $k(s,t) = 1 - s\cos st$ por otro núcleo degenerado para lo cual desarrollamos en serie de Taylor alrededor de $(0,0)$ la función $\cos(st)$. De

$$\cos(st) = 1 - \frac{s^2t^2}{2} + \frac{s^4t^4}{24} + ...$$

se deduce que

$$1 - s\cos(st) = 1 - s + \frac{s^3t^2}{2} - \frac{s^5t^4}{24} + ...$$

Tomando como núcleo degenerado $k_1(s,t) = 1 - s + \frac{s^3t^2}{2}$, vamos a resolver la ecuación

$$x_1(s) = \operatorname{sen} s + \frac{1}{2}\int_0^1 k_1(s,t)x_1(t)dt$$

Esta ecuación la hemos resuelto en el ejemplo 4 y su solución es

$$x_1(s) = \operatorname{sen} s + 0.317321(1-s) + 0.0651367s^3$$

Esta función es por lo tanto una solución aproximada de la ecuación inicial y lo que vamos a determinar ahora es una cota del error.

Recordemos que si T es un operador de norma menor que 1, entonces el operador $I - T$ es invertible y

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

En nuestro caso, si

$$(K_1x)(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 k_1(s,t)x(t)\ dt$$

escribimos $A = I - K$ y $B = I - K_1$.

Como al sustituir el núcleo k por k_1 consideramos la misma función dato, $y(s) = \operatorname{sen} s$, se tiene que $y = y_1$; por lo tanto

$$\|x - x_1\| \leq \|A^{-1}\|\ \|A - B\|\ \|x_1\| = \|(I-K)^{-1}\|\ \|K - K_1\|\ \|x_1\|.$$

Ahora bien

$$\|(I-K)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|K\|} = 2.$$

Por otra parte, como la función x_1 es creciente se tiene que $\|x_1\| = x_1(1) = 0.906607$. Finalmente,

$$\|K - K_1\| \leq \max_{s\in[0,1]} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{s^5t^4}{24}\ dt = \max_{s\in[0,1]} \frac{s^5}{240} = 0.0041666.$$

Por tanto, $\|x - x_1\| \leq 2 \times 0.906607 \times 0.0041666 = 0.0075549$.

1 Problemas

Ejercicio 3.1
$x(s) = s - \int_0^s (s-t)x(t)dt.$

Ejercicio 3.2
$x(s) = 2s + 2 - \int_0^s x(t)dt.$

Ejercicio 3.3
$x(s) = 1 + \int_0^1 st^2\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.4
$x(s) = \frac{5}{6}s + \frac{1}{2}\int_0^1 st\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.5
$x(s) = e^s - s - \int_0^1 s(e^{st} - 1)\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.6
$x(s) = \cos(s) + \int_0^\pi (st - s^2)\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.7
$x(s) = 1 + \int_0^\pi 2t\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.8
$x(s) = s + \cos(s) + \int_0^1 s(\operatorname{sen}(st) - 1)\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.9
$x(s) = \frac{1}{2}(e^{-s} + 3s - 1) + \int_0^1 (e^{-st^2} - 1)\, x(t)\, dt.$

Ejercicio 3.10
$x(s) = \frac{1}{2}(s + \operatorname{sen}(s)) + \int_0^1 (1 - \cos(st^2))s\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.11
$x(s) = (s+1)^2 - \int_{-1}^1 (st + s^2t^2)\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.12
$x(s) = \cos(s) + \int_0^\pi \operatorname{sen}(s-t)\, x(t)dt.$

Ejercicio 3.13
$x(s) = s + \int_0^1 (st + \operatorname{sen}(t))\, x(t)dt.$

Nota: En la aproximación de los núcleos usando la fórmula de Taylor, se aconseja emplear un polinomio en el que aparezcan explícitamente todas las variables de dicho núcleo. P. ej., si el núcleo es $K(s,t) = s\cos(s+t)$, no usar!amos $P_0(s,t) = s.1 = s$ sino, por lo menos, $P_1(s,t) = s\left(1 + \frac{(s+t)^2}{2}\right)$.

Práctica 4
Espacios de Hilbert

Ejemplo 4.1
Si $p \neq 2$, *probar que la norma* $\| \ \|_p$ *en* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *no proviene de un producto escalar.*

Solución

Es suficiente comprobar que no se cumple la ley del paralelogramo. Con este fin, tomamos dos intervalos A y B en $\mathbb{R}^n$ de medida 1 que sean disjuntos entre sí y definimos $f := \chi_A$, $g := \chi_B$. Entonces $\|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, mientras que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, de donde

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 \neq 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2.$$

Ejemplo 4.2
Sea Y *el subespacio de* $L_2(0, 2\pi)$ *constituído por aquellas funciones* f *tales que* $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$. *Probar que* Y *es cerrado y calcular el punto de* Y *más cercano a* $f_0(x) = 3\cos^2 5x$.

Solución

Se deduce de la desigualdad de Hölder y del hecho de que la función constante igual a 1 está en $L_2(0, 2\pi)$ que $L_2(0, 2\pi)$ está contenido en $L_1(0, 2\pi)$ y $\|f\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ para cada $f \in L_2(0, 2\pi)$. Por tanto, $\Phi : L_2(0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, $\Phi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$, es un funcional lineal y continuo (con norma $\|\Phi\| \leq \sqrt{2\pi}$) y en consecuencia $Y = Ker\ \Phi$ es un subespacio cerrado de $L_2(0, 2\pi)$.

Para calcular la m!nima distancia de f_0 a Y observamos que f_0 se puede descomponer como $f_0 = g+h$, siendo $g(x) = \frac{3}{2}$ un elemento de $Y^{\perp}$ y $h(x) = \frac{3}{2}cos(10x)$ un elemento de Y. En consecuencia

$$dist(f_0, Y) = \|g\|_2 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ejemplo 4.3
Sea P *el espacio vectorial de los polinomios reales definidos en* $[0,1]$ *con el producto escalar definido por* $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$. *Dar un ejemplo de un funcional lineal continuo sobre* P *para el cual no se cumpla el teorema de representación de Riesz-Fréchet.*

Solución

Sea g una función continua en [0,1] que no sea un polinomio y consideremos la forma lineal continua $\Phi :\to \mathbb{R}$, $\Phi(f) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Supongamos existe $h \in P$ tal que $\Phi(f) = (f,h)$ para cualquier $f \in P$; es decir, $\int_0^1 f(t)(g(t) - h(t))dt = 0$ para toda $f \in P$. Por el teorema de Weierstrass real podemos encontrar una sucesión de polinomios (f_n) que converge a la función continua $h - g$ uniformemente en [0,1] y por tanto

$$\int_0^1 (h(t) - g(t))^2 dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)(h(t) - g(t))dt = 0$$

de donde se sigue que $g = h \in P$, lo que es una contradicción.

Ejemplo 4.4
Sean X *un espacio de Hilbert e* Y *un subespacio cerrado de* X . *Demostrar que la proyección ortogonal de* X *sobre* Y *tiene norma menor o igual que* 1.

Solución

Sea P la proyección ortogonal de X sobre Y. Puesto que para cada $x \in X$ el vector Px es ortogonal a $x - Px$ se deduce del teorema de Pitágoras que $\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2$; de donde $\|Px\| \leq \|x\|$. Por tanto $\|P\| \leq 1$.

Ejemplo 4.5
Demostrar que en un espacio de Hilbert separable toda base ortonormal es numerable. (Observar que si x e y son elementos de una base ortonormal, entonces $\|x - y\| = \sqrt{2}$.)

Solución

Sea $(e_i)_{i \in I}$ una base ortonormal de X. Observamos primero que para cada $i, j \in I$ $(i \neq j)$ el teorema de Pitágoras permite calcular $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ y en consecuencia $B(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) \bigcap B(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$.

Por hipótesis existe un subconjunto S que es numerable y denso en X. Para cada $i \in I$ podemos seleccionar un vector $v_i \in B(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) \bigcap S$. Entonces, la aplicación $\Phi : I \to S$ dada por $\Phi(i) = v_i$ es inyectiva, lo que prueba que I es numerable.

1 Problemas

Ejercicio 4.1
Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Hilbert. Si los vectores $u, v \in X$ verifican $| < u, v > | = \|u\|\|v\|$, es decir, verifican la desigualdad de Cauchy-Schwartz con igualdad, ¿qué podemos saber de estos vectores? Estudiar la misma cuestión para la igualdad $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$. Sean x, y elementos de X con norma uno. Si $\|x - y\| \geq \varepsilon$, ¿cómo puede acotarse de la norma del punto medio $\frac{1}{2}(x + y)$?.

Ejercicio 4.2
Sea $P^2([0,1])$ el subespacio del espacio de Hilbert $L_2([0,1])$ formado por los polinomios complejos de grado menor o igual que 2 y sea $B = \{1, x, x^2\}$.

(a) *Obtener, por el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de $P^2([0,1])$ a partir de B.*

(b) *Calcular la norma de $1 - ix^2$.*

Ejercicio 4.3
Sea X un espacio vectorial en el cual hay definidos dos productos escalares $\langle , \rangle$ y $(,)$. Probar que los dos productos coinciden si, y sólo si, $\langle x, x \rangle = (x, x)$ para todo $x \in X$. (Utilizar la identidad polar.)

Ejercicio 4.4
Demostrar que para cada $f \in L_2([a, b])$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único polinomio p_n de grado menor o igual que n verificando

$$\|f - p\|_2 \geq \|f - p_n\|_2$$

para todo polinomio p de grado menor o igual que n.

Ejercicio 4.5
Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sea χ_A la función caraterística de $A \subset \Omega$.

Demostrar que $P_A f = \chi_A f$ es una proyección en el espacio $L_2(\Omega)$. ¿Qué condiciones deben cumplir los subconjuntos A y B para que $P_A + P_B$ sea también una proyección?

Ejercicio 4.6
Sea Y el subespacio de $L_2(\mathbb{R})$ formado por las funciones que se anulan casi por todas partes en el semieje $]0, +\infty[$. Calcular la distancia de Y a la función $g(x) := e^{-|x|}$.

Ejercicio 4.7
Sea $\Phi : \ell_2 \to \mathbb{C}$ *definida por* $\Phi(x) = 2x_1$. *Calcula la distancia del vector* $x = (2^{-\frac{n}{2}})$ *al núcleo de* Φ.

Ejercicio 4.8
Dado el subespacio $G := \{x = (x_n) \in \ell_2 \ : \ x_1 = x_2\}$ *de* ℓ_2, *se pide probar que* G *es cerrado y calcular su distancia al punto* $x = (\frac{1}{n})$.

Ejercicio 4.9
Sea $H = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \ : \ \int_o^1 f(t)dt = 0\}$. *Hallar la distacia de la función* e^{-t^2} *a* H.

Ejercicio 4.10
(a) *Probar que* $Y = \{f \in L^2(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} f(x)dx = 0\}$ *con la norma* $\| \|_2$ *es un espacio de Hilbert.*

(b) *Sea* $\Phi : Y \to \mathbb{R}$, *dado por* $\Phi(f) = \int_0^{2\pi} xf(x)dx$. *Calcular* $\| \Phi \|$.

Ejercicio 4.11
Sea $\Phi : \ell_2 \to \mathbb{C}$ *definida por* $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$, *siendo* $x = \{x\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$.

(a) *Demostrar que* Φ *es lineal y continua.*

(b) *Calcular el vector* $y \in \ell_2$ *que representa a* Φ.

(c) *Calcular la norma de* Φ.

Ejercicio 4.12
Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una base ortonormal en el espacio de Hilbert* X. *Un operador* $T : X \to X$ *se dice que es diagonal respecto de esa base si existe una sucesión de escalares* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $Te_n = \alpha_n e_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Demostrar que* T *es continuo si, y sólo si,* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$.

(b) *¿Bajo qué condiciones un operador diagonal es una proyección?*

Ejercicio 4.13
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *medible de medida positiva y sea* $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ *una función medible y acotada. Se define el operador multiplicación por* $M_\phi(f) = \phi f$ *para todo* $f \in L_2(\Omega)$.

(a) *Demostrar que* M_ϕ *es lineal y continuo, y que* $\|M_\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \ x \in \Omega\}$.

(b) *Probar que* $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$.

Ejercicio 4.14
Sean X *e* Y *espacios de Hilbert separables y sean* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bases ortonormales de* X *e* Y, *respectivamente.*

(a) *Dado* $T \in L(X, Y)$ *se definen* $a_{jk} = (Te_k, f_j)$ *con* $j, k \in \mathbb{N}$. *Demostrar que si* $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, *entonces* $Tx = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\alpha_k\right) f_j$ *(con lo cual* T *admite una representación matricial similar a la de los operadores entre espacios de dimensión finita, representación que depende de las bases ortonormales elegidas). Demostrar que si* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\alpha_k\right|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2.$$

(b) *Demostrar que si* $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ *es una matriz infinita verificando que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\alpha_k\right|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2$$

para toda sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$, *entonces define un operador* $T \in L(X,Y)$ *con* $\|T\|^2 \leq C$.

(c) *Demostrar que si* $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ *es una matriz infinita verificando* $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2 < \infty$, *entonces define un operador* $T \in L(X,Y)$ *con* $\|T\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2$.

Ejercicio 4.15
Sea $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert* X. *Probar que para cada* $x \in X$, *existe a lo sumo una cantidad numerable de índices* $\alpha \in I$ *para los cuales* $(x, v_\alpha) \neq 0$. *(Considerar el conjunto de índices* $\{\alpha : \ |(x, v_\alpha)| \geq \frac{1}{n}\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *)*

Ejercicio 4.16
En el espacio de Hilbert ℓ_2 *se considera la sucesión* (w_n) *dada por*

$$\begin{aligned}
w_1 &:= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\right)\\
w_2 &:= \left(0, 0\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\right)\\
&\vdots\\
w_n &:= \left(\overbrace{0, \ldots, 0}^{2n-1}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\right)
\end{aligned}$$

Estudiar si el conjunto $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un sistema ortonomal en este espacio. Calcular la serie de Fourier asociada al vector*

$$x := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

respecto de (w_n). *¿Se cumple que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, w_n > w_n$*? ¿Es* $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema ortonormal completo?*

Ejercicio 4.17
Calcula el operador conjugado del operador $A : \ell_2 \to \ell_2$ *definido por*

$$A(x) := (0, x_1, x_2, \ldots)$$

donde $x = (x_n) \in \ell_2$.

Ejercicio 4.18
Probar que el operador $T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, *que transforma la función* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *en la función* Tf *definida por*

$$T(f)(t) := f(t+1)$$

es lineal y continuo, y calcular su operador conjugado.

Ejercicio 4.19
Sea F *una función acotada, integrable en* $[a,b]\times[a,b]$. *Probar que la aplicación que a cada* f *de* $L_2([a,b])$ *le asocia la función* Tf *definida por*

$$Tf(s) := \int_a^b F(s,t)f(t)dt$$

es un operador lineal continuo $T : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, *y calcular su conjugado.*

2 Problemas Complementarios

Ejercicio 4.20
Sea $(X, \| \ \|)$ *un espacio normado real cuya norma verifica la ley del paralelogramo. Demostrar que existe un producto escalar en* X *tal que* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *para todo* $x \in X$. *(Utilizar la identidad polar.)*

Ejercicio 4.21
Sea $(H, \|.\|)$ *un espacio de Hilbert real,. Sean* $u, v \in H$ *dos vectores ortogonales y con norma 1. Calcular para cada* $x \in H$

a) $d(x, r_u)$*, es decir, la distancia entre el punto* x *y la recta* $r_u := \{tu : t \in \mathbb{R}\}$.

b) $d(x, \pi_{u,v})$*, es decir, la distancia entre el punto* x *y el plano* $\pi_{u,v} := \{tu + sv : t, s \in \mathbb{R}\}$. *(Examen de Septiembre de 2001).*

Práctica 5
Operadores Compactos. Teoría Espectral

Ejemplo 5.1
Sea $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ *el operador integral definido por*

$$(Tx)(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt,$$

siendo k *una función de* $L_2([a,b]^2)$. *Probar que* T *es un operador compacto.*

Solución

La idea de la demostración es aproximar el núcleo por medio de núcleos degenerados (los que definen operadores integrales de rango finito). Para ello, primero construiremos una base ortogonal en el espacio $L_2([a,b]^2)$ formada por funciones de variables separadas. Como sabemos que la serie de Fourier de la función k respecto de esa base converge en la media a k, será entonces suficiente tomar sumas parciales para obtener núcleos degenerados k_n que aproximen k. Por último, hay que verificar que los operadores integrales T_n generados por los núcleos k_n convergen a T en el espacio $L\Big(L_2([a,b])\Big)$.

Denotaremos por $(.,.)$ el producto escalar en $L_2(a,b)$ y por $\langle .,. \rangle$ el producto en el espacio $L_2([a,b]^2)$.

Sea $(e_p)_{p=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L_2([a,b]^2)$.

(a) *Demostraremos que las funciones definidas por* $\phi_{pq}(s,t) = e_p(s)\overline{e_q(t)}$, *donde* $p,q \in \mathbb{N}$, *forman una base ortonormal de* $L_2([a,b]^2)$.

Es evidente que el teorema de Fubini implica que

$$\int_a^b \int_a^b |\phi_{pq}(s,t)|^2\ ds\ dt = \left(\int_a^b |e_p(s)|^2\ ds\right) \cdot \left(\int_a^b |e_q(t)|^2\ dt\right)$$

y que

$$\langle \phi_{p_1q_1}, \phi_{p_2q_2} \rangle = \int_a^b \int_a^b \phi_{p_1q_1}(s,t)\overline{\phi_{p_2q_2}(s,t)}\ ds\ dt = \int_a^b \int_a^b \Big(e_{p_1}(s)\overline{e_{q_1}(t)}\Big)\ \overline{\Big(e_{p_2}(s)\overline{e_{q_2}(t)}\Big)}\ ds\ dt =$$

$$= \left(\int_a^b e_{p_1}(s)\overline{e_{p_2}(t)}\ ds\right) \cdot \left(\int_a^b e_{q_2}(t)\overline{e_{q_1}(t)}\ ds\right) = (e_{p_1}, e_{p_2}) \cdot (e_{q_2}, e_{q_1})$$

de donde se deduce que $\{\phi_{pq} : p,q \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortonormal. Para probar que, en realidad, es una base ortonormal de $L_2([a,b]^2)$, basta demostrar que para cada $z \in L_2([a,b]^2)$ se cumple la identidad de Parseval; es decir,

$$\int_a^b \int_a^b |z(s,t)|^2\ dt\ ds = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |\langle z, \phi_{pq} \rangle|^2.$$

Sea $z \in L_2([a,b]^2)$; como la función $|z|^2$ es integrable en el producto $[a,b] \times [a,b]$, por el teorema de Fubini se verifica

(i) para casi todo $s \in [a,b]$, la función $t \to |z(s,t)|^2$ es integrable en $[a,b]$.

(ii) la función $s \to \int_a^b |z(s,t)|^2\, dt$ es integrable en $[a,b]$.

Sea z_s la función definida por $z_s(t) = z(s,t)$. Por (i), para casi todo $s \in [a,b]$, se cumple que $z_s \in L_2(a,b)$ y, consecuentemente, $z_s = \sum_{q=1}^{\infty} (z_s, \overline{e_q})\ \overline{e_q}$. Aplicando la identidad de Parseval a z_s se deduce que

$$\int_a^b |z(s,t)|^2\ dt = \sum_{q=1}^{\infty} |(z_s, \overline{e_q})|^2.$$

Se define ahora, para cada $q \in \mathbb{N}$, la función $y_q(s) = (z_s, \overline{e_q}) = \int_a^b z(s,t)e_q(t)\ dt$; se trata de una función medible. Por lo anterior, para casi todo $s \in [a,b]$,

$$\int_a^b |z(s,t)|^2\ dt = \sum_{q=1}^{\infty} |y_q(s)|^2.$$

Por (ii), esta función es integrable en $[a,b]$, luego, por una parte, podemos aplicar el teorema de la convergencia monótona e intercambiar la serie con la integral llegando a

$$\int_a^b \int_a^b |z(s,t)|^2\ dt\ ds = \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} |y_q(s)|^2\ ds = \sum_{q=1}^{\infty} \int_a^b |y_q(s)|^2\ ds,$$

y, por otra parte, se sigue que cada $y_q \in L_2([a,b])$ con lo cual, aplicando la identidad de Parseval, obtenemos

$$\|y_q\|_2^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |(y_q, e_p)|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \Big| \int_a^b y_q(s)\overline{e_p(s)}\ ds\Big|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \Big| \int_a^b \int_a^b z(s,t)e_p(t)\overline{e_p(s)}\ dt\ ds\Big|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |\langle z, \phi_{pq}\rangle|^2.$$

Por tanto,

$$\int_a^b \int_a^b |z(s,t)|^2\ dt\ ds = \sum_{q=1}^{\infty} \int_a^b |y_q(s)|^2\ ds = \sum_{q=1}^{\infty} \|y_q\|_2^2 = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |\langle z, \phi_{pq}\rangle|^2.$$

(b) *Veamos que existe una sucesión de núcleos degenerados* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b |k(s,t) - k_n(s,t)|^2\ dt\ ds = 0.$$

Por el apartado (a), dada $k \in L_2([a,b]^2)$, podemos escribir $k = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \langle k, \phi_{pq}\rangle\ \phi_{pq}$, donde la convergencia es la del espacio $L_2([a,b]^2)$. Se define, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$k_n(s,t) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \langle k, \phi_{pq}\rangle\ \phi_{pq}(s,t) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \langle k, \phi_{pq}\rangle\ e_p(s)\overline{e_q(t)},$$

que, obviamente, es una combinación lineal de funciones con variables separadas; en otras palabras, se trata de un núcleo degenerado. Por otro lado, la convergencia en $L_2([a,b]^2)$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b |k(s,t) - k_n(s,t)|^2\ dt\ ds = 0.$$

(c) *Vamos a probar que existe una sucesión de operadores de rango finito* $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0.$$

Consideremos la sucesión de núcleos degenerados $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ obtenida en (a). Se define el operador integral $T_n : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ por $(T_nx)(s) = \int_a^b k_n(s,t)x(t)\ dt$. Es evidente que cada T_n es un operador de rango finito.

Sabemos que el operador $T - T_n$ verifica

$$\|T - T_n\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |k(s,t) - k_n(s,t)|^2\ dt\ ds$$

con lo cual (c) se deduce de (b).

Finalmente, de (c) resulta que existe una sucesión de operadores compactos que converge a T en el espacio $L\Big(L_2(a,b)\Big)$ y, como consecuencia, también T es compacto.

En el siguiente ejemplo mostraremos un operador compacto que no tiene ningún valor propio. Recordemos que la no existencia de valores propios en un operador compacto entre espacios de Banach implica que el único valor espectral es el 0.

Ejemplo 5.2
Sea $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ *el operador definido por* $Tx(s) = \int_0^s x(t)\ dt$. *Demostrar*

(a) *El operador* T *es compacto.*

(b) $\sigma(T) = \{0\}$.

(c) $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Solución

(a) Sea $A \subset \mathcal{C}[0,1]$ un conjunto acotado y comprobemos que $T(A)$ es precompacto en el espacio $\mathcal{C}[0,1]$. Por el teorema de Ascoli-Arzelà, tenemos que ver que es acotado y equicontinuo. Sea $M > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq M$ para todo $x \in A$.

Si $x \in A$, entonces $|Tx(s)| \leq \int_0^s |x(t)|\ dt \leq sM \leq M$ para todo $s \in [0,1]$, con lo cual $\|Tx\|_\infty \leq M$ y el conjunto $T(A)$ es acotado.

Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Si $x \in A$ y $|s_1 - s_2| < \delta$, entonces

$$|Tx(s_1) - Tx(s_2)| \leq \Big|\int_0^{s_1} x(t)\ dt - \int_0^{s_2} x(t)\ dt\Big| = \Big|\int_{s_2}^{s_1} x(t)\ dt\Big| \leq \|x\|_\infty |s_1 - s_2| < M\delta = \varepsilon.$$

Por tanto, el conjunto $T(A)$ es equicontinuo.

(b) Sea $\lambda \neq 0$; entonces $T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$. Como $\frac{1}{\lambda}T$ es un operador de Volterra, sabemos que el operador $I - \frac{1}{\lambda}T$ es invertible, con lo cual $T - \lambda I$ es invertible y $\lambda \in \rho(T)$.

Para probar que $0 \in \sigma(T)$, supongamos que $0 \in \rho(T)$. Entonces el operador T es invertible y compacto. Como $I = T^{-1}T$, la aplicación identidad en $\mathcal{C}[0,1]$ es compacta. El teorema de Riesz implica que el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ tiene dimensión finita, lo cual es una contradicción.

(c) Supongamos que $0 \in \sigma_p(T)$; es decir, que existe $x \neq 0$ tal que $Tx = 0$. Tenemos pues que $Tx(s) = \int_0^s x(t)\ dt = 0$ para todo $s \in [0,1]$. Por el teorema fundamental del cálculo infinitesimal, $(Tx)'(s) = x(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Por otra parte, Tx es una función constante, con lo cual su derivada es la función idénticamente 0. Se concluye que $x = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $0 \notin \sigma_p(T)$ y $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Ejemplo 5.3
Para cada $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ *se define* $Tx = (\frac{n+1}{2n}\ \xi_n)_{n=1}^{\infty}$.

Probar que T *define un operador de* ℓ_2 *en* ℓ_2 *que es continuo pero no compacto.*

Solución

Veamos primero que $Tx \in \ell_2$ para todo $x \in \ell_2$. Sea $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|\frac{n+1}{2n}\ \xi_n|^2 \leq |\xi_n|^2$ y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ converge, por mayoración, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n+1}{2n}\ \xi_n|^2$, con lo cual $Tx \in \ell_2$. Por consiguiente, $T : \ell_2 \to \ell_2$ está bien definida y, evidentemente, es una aplicación lineal. Además, la desigualdad anterior también implica que $\|Tx\|_2 \leq \|x\|_2$, para todo $x \in \ell_2$, de donde se deduce que la aplicación lineal T es continua.

La no compacidad de T se deduce fácilmente del estudio de su espectro. Consideremos las sucesiones $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots)$, donde $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $Te_n = \frac{n+1}{2n}\ e_n$, con lo cual cada $\frac{n+1}{2n}$ es un valor propio del operador. Este espectro no puede corresponder a un operador compacto porque los puntos de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ no son aislados. En efecto, supongamos que T es compacto; entonces $(\frac{n+1}{2n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números distintos de modo que $\frac{n+1}{2n} \in \sigma(T)\backslash\{0\}$. Luego si la sucesión $(\frac{n+1}{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge, su límite debe ser 0 y esto contradice que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

1 Problemas

Ejercicio 5.1
Probar que si T *es un operador compacto y* λ *es un valor propio no nulo, entonces el subespacio de vectores propios* $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ *es finito dimensional.*

Ejercicio 5.2
Demostrar que si $T : X \to Y$ *es compacto e invertible, entonces* X *e* Y *tienen dimensión finita.*

Ejercicio 5.3
Supongamos que $T : X \to Y$ *es un operador compacto y que* ImT *es completo. Probar que* T *es de rango finito.*

Ejercicio 5.4
Consideremos el operador $T : \ell_2 \to \ell_2$ *definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} e_n$, *donde* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$. *Probar que* T *es compacto. Estudiar la existencia de* T^{-1} *y su dominio. ¿Es continuo* T^{-1} *?*

Ejercicio 5.5
Probar que el operador $T : \ell_2 \to \ell_2$ *definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_{n+1}$, *donde* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, *es continuo e inyectivo y que* 0 *es un valor espectral que no es propio.*

Ejercicio 5.6
Sea $T : \ell_2 \to \ell_2$ *el operador definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n+1} e_n$, *donde* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$. *Probar que todo* $\lambda \in C$ *tal que* $|\lambda| < 1$ *es un valor espectral de* T. *¿Es* T *un operador compacto?*

Ejercicio 5.7
Sea $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ *el operador definido por* $(Tx)(s) = \int_a^b \cos(s-t)x(t)\, dt$. *Hallar los valores propios de* T.

Ejercicio 5.8
Consideremos $T : \ell_2 \to \ell_2$ *el operador definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{2n-1} e_n$, *siendo* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$. *¿Cuáles de los números* $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{2+i}{\sqrt{3}}$ *y* $\lambda = \frac{1}{2}$ *son valores espectrales?*

Ejercicio 5.9
Consideremos el operador lineal $T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ *definido por* $(Tf)(x) = -f(-x)$ *Se pide:*
 (a) *Demostrar que es continuo y autoadjunto/simétrico.*
 (b) *Calcular el espectro de* T.

Ejercicio 5.10
Sean M_1 *y* M_2 *los subespacios de* ℓ_2 *definidos por* $M_1 = \{x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : \ \xi_{2k} = 0, \ k = 1, 2, ...\}$ *y* $M_2 = \{x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : \ \xi_{2k-1} = 0, \ k = 1, 2, ...\}$. *Probar que* ℓ_2 *es la suma ortogonal de* M_1 *y* M_2. *Estudiar el espectro del operador* $T : \ell_2 \to \ell_2$ *definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n+2} e_n$.

Ejercicio 5.11
Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *una base ortonormal del espacio de Hilbert* X. *Calcular el espectro del operador lineal continuo* $T : X \to X$ *definido por* $Te_{2n} = \frac{1}{2n} e_{2n}$ *y* $Te_{2n-1} = (i + \frac{1}{n}) e_{2n-1}, \ n = 1, 2, ...$

2 Problemas Complementarios

Ejercicio 5.12
Sea T *el operador de* c_0 $(\subset \ell_\infty)$ *en* ℓ_2 *definido por* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} e_n$, *donde* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$. *Sea* $X = c_0$ *e* $Y = ImT$. *Probar que* $T : X \to Y$ *no es compacto, sin embargo existe una sucesión* $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *de operadores compactos de* X *en* Y *que convergen a* T *en* $L(X, Y)$.

Ejercicio 5.13
Sea T *un operador continuo en un espacio de Hilbert. Probar que un vector* $x \neq 0$ *es un vector propio si, y sólo si,* $| \langle x, Tx \rangle | = \|Tx\| \cdot \|x\|$.

Ejercicio 5.14
Supongamos que X *e* Y *son espacios de Banach y que* $T : X \to Y$ *es un operador compacto. Si* $ImT = Y$, *probar que* Y *es de dimensión finita.*

Ejercicio 5.15
Sea $T : L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1])$ *definido por* $Tx(t) = tx(t)$. *¿Es* T *compacto?*

Ejercicio 5.16
Demostrar que en los espacios de sucesiones c *y* c_0 *un conjunto cerrado* Q *es compacto si, y sólo si, es acotado y existe* $\lim_{n\to\infty} \xi_n$ *uniformemente para* $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in Q$. *(Definir un isomorfismo entre* c *y* $\mathcal{C}(K)$, *donde* $K = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. *)*

Ejercicio 5.17
Probar las siguientes afirmaciones.
 (a) *Todo conjunto precompacto en un espacio métrico es separable.*
 (b) *Sean* X *e* Y *espacios normados. Si* $T : X \to Y$ *es compacto, entonces* ImT *es separable.*
 (c) *No existen operadores compactos y sobreyectivos en* $L(\ell_\infty)$.