UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Primer curs d'Enginyeria Informàtica

PROBLEMES D'ANÀLISI MATEMÀTICA

Curs 2001/02

Successions

Exercici 1 Calculeu els límits de les següents successions:

$i)\dfrac{5n^3-8n^2+3}{4n^3+2n+4}$	$ii)\dfrac{4n^2-3n+4}{5n^4+2n^2-3}$
$iii)\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$	$iv)\dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}$
$v)\dfrac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$	$vi)\dfrac{\ln(n^4+4n^3+6n^2-3n+2)}{\ln(6n^3+4n^2-5n+7)}$
$vii)\dfrac{(\sqrt{2n}+3)^3-n^3}{n^2-2\sqrt{n^5}}$	$viii)\dfrac{2^n+7}{3^n}$
$ix)\dfrac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+\frac{1}{n}}$	$x)\sqrt{4n-1}-\sqrt{3n}$
$xi)\sqrt[3]{n^3+1}-n$	$xii)\sqrt{5n+3}-\sqrt{3n}$
$xiii)\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$	$xiv)\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2+1}}$
$xv)(2+3n^4)^{\frac{1}{1+2\ln n}}$	$xvi)(5n^3+4n-1)^{\frac{1}{\ln(n^2+7n-5)}}$
$xvii)\ \sqrt[n^2]{n^2+n+1}$	$xviii)\ \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3}{n+1}}$
$xix)\ \left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$	$xx)\ \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$
$xxi)\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$	$xxii)\ \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$
$xxiii)\dfrac{n^2+3n}{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$	$xxiv)\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$

Exercici 2 Trobeu, si existeix, una fòrmula per a les següents successions recurrents. Indiqueu en cada cas si la successió és convergent i si no ho és trobeu una subsuccessió que ho siga.

$i)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n+a_n$	$ii)a_1=1, a_{n+1}=-a_n$
$iii)a_1=1, a_{n+1}=-\dfrac{a_n}{2}$	$iv)a_1=1, a_{n+1}=(-1)^n a_n$
$v)a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$	

Exercici 3 Estudieu si les següents successions són convergents i, en cas afirmatiu, calculeu el seu límit.

$i) a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ $\quad ii) a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1 + a_n}{1 + 2a_n}$

$iii) a_1 > 0, a_{n+1} = -\dfrac{a_n + 1}{2a_n + \frac{1}{a_n} + 1}$ $\quad iv) a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

$v) a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(4a_{n+1} - a_n)$ $\quad vi) a_1 = 2, a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$vii) a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{2 + a_n}$ $\quad viii) a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$

Exercici 4 Estudieu el caràcter de les següents sèries:

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^p \quad a>1,\ p\in \mathbb{R}^+$

$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots n}$

$iv)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{(\log n)}}$

$v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$

$vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$vii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}(\frac{n\pi}{2n+4})$

$viii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$ix)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$

$x)\ \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$xi)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

$xii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$

$xiii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{2}-1)$

$xiv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ (Comparar con $\frac{1}{n^2}$)

$xv)\ \sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q, \quad p,q\in \mathbb{R}$

$xvi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$

$xvii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}$

$xviii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$

$xix)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{=2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$

$xx)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2\cdots\log n}{n!}$

Exercici 5 Sumeu les següents sèries:

Descomposició en fraccions simples.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad ii)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$$

Sèries telescòpiques.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \qquad ii)\ \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\log^2(n+1)\log(n+2)}+\sqrt{\log(n+1)\log^2(n+2)}}$$

Sèries aritmètic-geomètriques.

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{6^n}$$

Sèries d'Euler.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{n!} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)!} 2^n.$$

Exercici 6 Sumeu les sèries següents:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

$$iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n \log n \log(n+1)^{n+1}} \qquad iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$$

$$v) \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}} \qquad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

Exercici 7 Demostreu utilitzant la definició de límit, que $\lim_{x\to 2}(5x-1)=9$ i $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Exercici 8 Calculeu els següents límits:

(a).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+2}$

(b).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)x^2\text{sen}(\frac{1}{1-x})$.

(c).- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$.

(d).- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

(e).- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^2-1}{4x^2})^{\frac{x^3}{x-1}}$

Exercici 9 Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

(a).- $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \end{cases}$

(b).- $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

(c).-$f(x)=\begin{cases} 2 & x=0 \\ \dfrac{x^2\text{sen}(\frac{1}{x})}{\text{sen}x} & x\neq 0 \end{cases}$

Exercici 10 Proveu que el polinomi $x^7+x^4+x^3+x-1$ en té una arrel real en $[0,1]$.

Exercici 11 Proveu que tot polinomi de grau imparell en té al menys una arrel real.

Exercici 12 Estudieu la derivabilitat de les funcions sigüents en els punts donats:
a)
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & x \geq 1, \end{cases}$$
en $x = 0,\ x = 1/2,\ x = 1.$
b)
$$f(x) = \begin{cases} max\{x^2, 1/x\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
en $x = 0,\ x = 1.$

Exercici 13 Calculeu fins a quin ordre és derivable la funció
$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Exercici 14 Demostreu que la funció
$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
és derivable en tota la recta real i calculeu la seua derivada.

Exercici 15 Calculeu les derivades n-ésimes de les funcions
a) $f(x) = \log(kx)$. (Per què en dòna el mateix que si fòra $\log x$?)
b) $f(x) = \sin(kx)$.
d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$. (Descomposseu en suma de fraccions.)
e) $f(x) = sen\ 4x\ cos\ 2x$. (Escriviu com a suma)

Exercici 16 (*Funcions hiperbòliques*) Sent
$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(sinus hiperbòlic)},$$
$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(cosinus hiperbòlic)},$$
proveu:
a) $ch^2 x - sh^2 x = 1.$
b) $(sh\ x)' = ch\ x, \quad (ch\ x)' = sh\ x.$

Exercici 17 Calculeu el nombre d'arrels de l'equació:
$$4x^5 - 5x^4 + 2 = 0.$$

Exercici 18 Estudieu la variació (creixement, decreixement, extrems, concavitat, convexitat i inflexions) de les funcions següents:

a) $f(x) = x^3 + x + 1$
b) $f(x) = (x-1)^3 x^2$
c) $f(x) = x^2 ln\ x$.

Exercici 19 Demostreu les desigualtats següents:

a) $e^x \geq \dfrac{1}{1+x}, \quad x > 0.$
b) $\tan x \geq x, \quad 0 \leq x < \pi/2.$

Exercici 20 Calculeu els límits:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2}$
b) $\lim_{x \to 0} (cos\ x)^{1/x^2}$
c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x - sen\ x}{x + sen\ x}$.

Exercici 21 Escriviu els desenvolupaments de McLaurin de les funcions

$$e^x,\ \log(1+x),\ \sin x,\ \cos x,\ sh\ x,\ ch\ x.$$

Exercici 22 Calculeu aproximacions cúbiques dels valors següents afitant els errors:

a) $e^{0.4}$
b) $cos\ 0.2$ (rad)
c) $ln\ 2$.

Exercici 23 Calculeu el valor de $ln\ 3$ amb un error menor de dues centésimes.

Exercici 24 Utilitzant el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció $ln(1+x)$, demostreu que

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Calculeu el nombre de termes necessaris per a obtindre una aproximació de $ln\ 2$ amb six xifres decimals exactes.

Exercici 25 Calculeu en cada cas la derivada de la funció F.

(a) $F(x) = \int_1^x x\frac{\text{sen } t}{t}\ dt$ $\qquad$ (b) $F(x) = \int_x^3 (u+2)^4\ du$

(c) $F(x) = \int_x^1 e^{-t^2}\ dt$ $\qquad$ (d) $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt$

(e) $F(x) = \int_1^x \Big(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\ dt\Big)\ dy$ $\qquad$ (f) $F(x) = \cos\Big(\int_1^{x^2} \sqrt[3]{t^2+t+1}\ dt\Big)$

(g) $F(x) = \int_0^{\text{sen } x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$ $\qquad$ (h) $F(x) = \int_0^{\int_2^{x^2} \frac{\log t}{t-1}\ dt} \cos t^2\ dt.$

Exercici 26 Calculeu els valors de les següents integrals definides.

(a) $\int_{-2}^4 (x-1)(x-2)\ dx.$

(b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx.$

(c) $\int_1^5 e^x \cos x\ dx.$

(d) $\int_0^2 f(x)\ dx$ on $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$

(e) $\int_0^1 f(x)\ dx$ on $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le c; \\ c\frac{1-x}{1-c} & \text{si } c < x \le 1; \end{cases}$ siendo c un número real tal que $0 < c < 1$.

Exercici 27 Proveu que si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, aleshores

$$\frac{1}{4} \le \sin^4 x \le \frac{9}{16}$$

i fent ús d'aquestes desigualtats, estimeu

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{3+\sin^4 x}dx$$

Exercici 28 Estimeu, amb dues xifres decimals exactes,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Exercici 29 Calculeu l 'área limitada per les gràfiques de les funcions f i g en l'interval que s'indica.

(a) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \text{sen } x \quad \text{en} \quad [0, \pi/4].$

(b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x\sqrt{x^2+2} \quad \text{en} \quad [0, 1].$

(c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x} \quad \text{en} \quad [-1, 1].$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x, \quad g(x) = \text{sen } x$ en l'interval determinat per l'orige i el menor punt de tall positiu.

Exercici 30 Calculeu l'área d'un cercle de radi R i d'una elipse de semieixos a i b.

Exercici 31 Calculeu l'área comú als cercles $x^2 + y^2 = 9$ i $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Exercici 32 Calculeu l'área limitada per un bucle de la lemniscata de Bernouilli d'equació

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\omega).$$

Exercici 33 Calculeu l'área limitada per la cardioide d'equació

$$\rho = a(1 + \cos\omega).$$

Exercici 34 Calculeu l'área limitada per un llaç de la cicloide d'equació

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

i la longitud del mateix llaç.

Exercici 35 Longitud de la primera espira de l'espiral d'Arquímedes $\rho = k\omega$.

Exercici 36 Calculeu la longitud d'un pas de l'hèlix

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt \end{cases}$$

Exercici 37 Volum del cos generat per un arc de cicloide al girar al voltant de la seua base.

Exercici 38 El recinte limitat per

$$\begin{cases} y = xe^x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

gira al voltant de l'eix d'abcises. Calculeu el volum del cos generat.

Exercici 39 Les seccions transversals d'un sòlid per plans transversals a l'eix X són quadrats amb centre aquest eix. Si al tallar pel pla perpendicular en el punt d'abcisa x s'obté un quadrat de costat $2x^2$, quin será el volum del sòlid limitat per $x = 0$ i $x = a$?

Exercici 40 La base d'un sòlid és un triangle de vértex $(0,0),(0,1),(1,1)$ en el pla XY. Les seues seccions per plans perpendiculars al eix X són quadrats. Calculeu el volum del sòlid.

Exercici 41 La base d'un sòlid és el cercle de centre $(0,0)$ i radi 1 en el pla XY. Les seues seccions per plans perpendiculars a l'eix X són quadrats. Calculeu el volum del sòlid.

Exercici 42 Raoneu per què les integrals següents són impropies, estudieu si són convergents o divergents, i calculeu les que siguen convergents.

$$\begin{array}{lll}
i)\int_0^1 \log x dx & ii)\int_1^2 \frac{1}{x\log x}dx & iii)\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx \\
iv)\int_0^1 x\log x dx & v)\int_0^\infty e^{-x}dx & vi)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx \\
vii)\int_2^\infty \frac{\log x}{x}dx & viii)\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}dx & ix)\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
x)\int_{-\infty}^\infty e^{-x}dx & xi)\int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx & xii)\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}}dx
\end{array}$$

Exercici 43 Calculeu aproximacions als valors de les integrals següents utilitzant el mètode de Simpson.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5+x^3}}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x^2}{e^x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2+x^4}\,dx$

Diverses variables

Exercici 44 Calculeu el domini de definició de les següents funcions:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

ii) $f(x,y) = \log(xy)$

iii) $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$

iv) $f(x,y)\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercici 45 Trobeu la gràfica i corbes de nivell de les següents funcions:

i) $f(x,y) = 2x+3y$.

ii) $f(x,y) = x^2+y^2$.

iii) $f(x,y) = 2xy$.

Exercici 46 Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

iv) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

Exercici 47 Calculeu les parcials de les següents funcions en el orige:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

Exercici 48 Calculeu el vector gradient de les següents funcions en el punt que s'indica:

i) $f(x,y,z) = 2x\log y - z^2y^2$ en $(1,1,0)$.

ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,-1,1)$.

iii) $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ en $(2,1)$.

iv) $f(x,y) = \log \dfrac{1}{xy}$ en $(5, \sqrt{2})$.

v) $f(x,y) = \log(x^2 + 2y + 1) + \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$ en $(1,1)$.

Exercici 49 La temperatura de cadascú dels punts d'una placa quadrada está determinada per la funció $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Es desitja coneixer quines són, en el punt $(0,0)$, les direccions de major creixement i decreixement de la temperatura.

Exercici 50 Denotem per $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ l'altura d'una muntañya en la posició (x,y). En quina direcció dès d' $(1,0)$ hauríem de comenzar a caminar per a escalar el més ràpidament posible?

Exercici 51 Troveu el pla tangent a les gràfiques de les funcions:

i) $f(x,y) = 2xy^2 + x^2y$ en el punto $(1,-1,1)$.

ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ en el punto $(1,1,2)$.

Exercici 52 Calculeu els extrems relatius de les funcions:

i) $f(x,y) = xye^{x+2y}$.

ii) $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$.

iii) $f(x,y) = xy^2(1-x-y)$.

iv) $f(x,y) = (x-y^2)(x-y^3)$.

v) $f(x,y) = 2x^2 + y + 3$.

vi) $f(x,y) = 3x^3 + y^2 + 3xy$.

vii) $f(x,y) = y^2e^{4x+1}$.

Exercici 53 Calculeu els extrems absoluts de les següents funcions en els recintes indicats:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $\{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.

ii) $f(x,y,z) = 2x^2 + yz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + xz$ en $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, 2x + z = 0\}$.

iv) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^3$ en $\{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$.