# PRÁCTICAS DE CÁLCULO PARA I. QUÍMICA

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2005/2006

# Práctica 1
# Cálculo Diferencial

**Ejercicio 1.1**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$A := \{x \in \mathbb{R} \ : x = 5\},$$
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 5\},$$
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x = 5\}.$$

**Ejercicio 1.2**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y - 1 \leq 0 \ , \ y \geq x^2\}$$
$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 < 9\}.$$

**Ejercicio 1.3**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > x^2 + y^2\},$$
$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}.$$

**Ejercicio 1.4**
*Hallar el campo de existencia de las funciones*

$$f_1(x, y) := \sqrt{x + y},$$
$$f_2(x, y) := \log(x^2 - y^2),$$
$$f_3(x, y) := \sqrt{y \operatorname{sen} x},$$
$$f_4(x, y) := \sqrt{5 - x^2 - 3y^2},$$
$$f_5(x, y) := \sqrt{x^2 - 5x + 6 - y}.$$

**Ejercicio 1.5**
*Hallar las curvas de nivel y esbozar las gráficas de*

$$f_1(x, y) := x + y,$$
$$f_2(x, y) := x^2 + 4y^2,$$
$$f_3(x, y) := \sqrt{9 - 3x^2 - y^2},$$
$$f_4(x, y) := x^2 - y^2,$$
$$f_5(x, y) := e^{-x}.$$

**Ejercicio 1.6**
*Describir geométricamente* $\rho = 4$ *y* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

**Ejercicio 1.7**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$A := \{(\rho, \theta) : \rho \leq 6 \cos \theta, \ \theta \in [0, \pi/2]\},$$

$$B := \{(\rho, \theta) : \rho > 4 \operatorname{sen} \theta, \ \theta \in [0, \pi/2]\}.$$

**Ejercicio 1.8**
*Describir geométricamente los conjuntos*

$$A := \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1 \ , \ \pi \leq \theta < 2\pi \ , \ 1 \leq z \leq 2\},$$

$$B := \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho \geq 1, \ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \ , \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}.$$

**Ejercicio 1.9**
*1. Sea* $f(x) = x^2$, *probar usando las reglas de derivación que* $f'(x) = 2x$. *En general, si* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $f'(x) = nx^{n-1}$.
*2. Sabemos que* $(\sin x)' = \cos x$ *y que* $(\cos x)' = -\sin x$. *Probar que la derivada de* $\tan(x)$ *es* $1 + \tan^2(x)$ *(es decir* $\frac{1}{\cos^2(x)}$*).*

**Ejercicio 1.10**
*Calcular la derivada de:*

1. $f(x) = \sin(x^2)$.
2. $f(x) = (x + \tan(x))^5$.
3. $f(x) = x^3 \cos^3(x^3)$.

**Ejercicio 1.11**
*Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$, *y sea* $f(x) = x^\alpha$ *definida en* $]0, +\infty[$. *Probar que* $f$ *es derivable y que*

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

**Ejercicio 1.12**
*Hallar la derivada de las funciones:*

1. $f(x) = 2^x$.
2. $f(x) = x^x$.

**Ejercicio 1.13**
*Hallar las derivadas de las funciones:*

1. $f(x) = e^{2x^2}$.
2. $f(x) = \log(x + \log(x))$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

**Ejercicio 1.14**
*Si una función* $f(x)$ *es derivable, con derivada* $f'(x)$, *y esta a su vez es derivable, se denota su derivada como* $f''(x)$ *y se denomina derivada segunda de* $f$, *en general se puede definir así la derivada* $n-$*ésima de* $f$, *que denotaremos* $f^{n)}(x)$.

*Calcular las derivadas primera, segunda y tercera de*

1. $f(x) = \ln(kx)$, *donde* $k$ *es una constante.*
2. $f(x) = \sin(kx)$.
3. $f(x) = (3x^2 - 4)e^x$. *(Úsese la fórmula de Leibniz:*

$$(f(x)g(x))^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k)}(x)g^{n-k)}(x).)$$

4. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$. *(Descomponer previamente como suma de fracciones)*
5. $f(x) = \sin(4x)\cos(2x)$. *(Expresar previamente como una suma)*

**Ejercicio 1.15**
*Dadas las funciones hiperbólicas*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{seno hiperbólico},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{coseno hiperbólico}.$$

*Probar que*

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
2. $(\sinh(x))' = \cosh(x),\ (\cosh(x))' = \sinh(x)$.
3. *Hallar las derivadas de sus funciones inversas,* $\operatorname{argsinh}(x)$ *y* $\operatorname{argcosh}(x)$.

**Ejercicio 1.16**
*Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:*

*i)* $f(x,y) = e^{xy}$
*ii)* $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$
*iii)* $f(u,v,w) = \log(u^2 + vw - v^2)$
*iv)* $f(\rho,\theta) = \rho^3 cos\theta$
*v)*$f(x,y,z) = sen(x + ycosz)$.

**Ejercicio 1.17**
*Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:*

*i)* $f(x,y,z) = 2x\log y - z^2y^2$ *en* $(1,1,0)$.
*ii)* $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *en* $(1,-1,1)$.
*iii)* $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ *en* $(2,1)$.
*iv)* $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ *en* $(5,\sqrt{2})$.
*v)* $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \operatorname{sen}(x+y)$ *en* $(0,0)$.

**Ejercicio 1.18**
*Denotamos por* $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *la altura de una montaña en la posición* $(x,y)$. *¿En qué dirección desde* $(1,0)$ *hay que comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?.*

**Ejercicio 1.19**
*Supongamos que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico* $z = 1 - x^2 - 2y^2$, *donde* $x, y$ *son las coordenadas este-oeste y* $z$ *es la altitud sobre el nivel del mar. Si se suelta una canica en el punto* $(1,1,-2)$ *¿en qué direción comenzará a rodar?.*

**Ejercicio 1.20**
*Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad viene dado por*

$$T(x,y,z) = 2x^2 - 4y^2 + \frac{1}{1+z^2}.$$

*Si este insecto está en* $(-1,2,1)$, *averigüar en qué dirección debe moverse para que la toxicidad disminuya lo más rápido posible.*

**Ejercicio 1.21**
*Sean* $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$ *y* $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$. *Calcular la matriz jacobiana de* $fog$ *en el punto* $(1,1)$.

**Ejercicio 1.22**
*La temperatura en un punto* $(x,y,z)$ *viene dada por una función* $T(x,y,z)$. *Una partícula viaja por la hélice* $\sigma(t) = (cost, sent, t)$ *y denotamos por* $f(t)$ *la temperatura de la partícula en el instante* $t$. *Calcular* $f'(\frac{\pi}{2})$ *sabiendo que* $\nabla T(0,1,\frac{\pi}{2}) = (2,1,3)$.

**Ejercicio 1.23**
*Calcular las derivadas parciales de* $h(x,y) = f(x \operatorname{sen} y, x, e^y)$ *en el punto* $(1,0)$ *sabiendo que* $\nabla f(x,y,z) = (2x+y, x+z, y)$.

**Ejercicio 1.24**
*Dada la función* $f(u,v) = g(u-v, u+v, 2u)$ *se pide calcular las derivadas parciales de* $f$ *en términos de las derivadas parciales de* $g$.

**Ejercicio 1.25**
*Suponemos* $f\left(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}\right) = 0$ *para cualquier valor de* $x$ *e* $y$. *Si* $D_2 f(x,y) \neq 0$ *en todos los puntos, se pide probar que* $xD_1g(x,y) + yD_2g(x,y) = g(x,y)$.

**Ejercicio 1.26**
*Sabemos que* $F(x,y,z)$ *y* $g(x,y)$ *son dos funciones de clase* $C^1$ *que cumplen que* $F(x,y,g(x,y)) = 0$ *en todos los puntos* $(x,y)$ *del plano. Calcular el vector gradiente de* $g$ *en el punto* $(1,0)$ *suponiendo conocido que* $g(1,0) = 0$ *y* $\nabla F(1,0,0) = (-1,1,2)$.

**Ejercicio 1.27**
*Sean* $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ *y* $g(u,v,w) = (uw, sen(v+w))$. *Calcula la matriz jacobiana de la función* $g \circ f$ *en el punto* $(0,0)$.

**Ejercicio 1.28**
*Calcular* $\frac{\partial u}{\partial s}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *siendo* $u = x^2 - xy$, $x = s\cos t$, $y = t \operatorname{sen} s$.

**Ejercicio 1.29**
*Si* $x = u - v$ , $y = u + 2v$, *siendo* $u := u(s,t)$ *y* $v := v(s,t)$, *expresar las derivadas parciales de* $u$ *y* $v$ *respecto de* $s$ *y* $t$ *en función de las de* $x$ *e* $y$ *respecto a las mismas variables.*

**Ejercicio 1.30**
*Calcular una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^1$ *que cumpla la ecuación*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0.$$

*Sugerencia: Realizar el cambio* $u = xy$ , $v = x + y$

**Ejercicio 1.31**
*Hallar el plano tangente y la recta normal a las superficies*

1. $z = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ en $(1, 1, 2)$,
2. $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en $(1, -1, 4)$,
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $(0, 0, 1)$,
4. $xy^2 + 3x - z^2 = 4$ en $(2, 1, -2)$,
5. $y = x(2z - 1)$ en $(4, 4, 1)$,
6. $xyz = 12$ en $(2, -2, -3)$,
7. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en $(5, 12, 13)$,
8. $xy - z = 0$ en $(-2, -3, 6)$,
9. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en $(1, 2, 2)$.

**Ejercicio 1.32**
*Hallar todos los puntos de la superficie* $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ *en los que el plano tangente es horizontal.*

**Ejercicio 1.33**
*Si* $x = x(t)$ *es una función derivable calcular* $x(0)$ *y* $x'(0)$ *si*

$$\cos(xt) = xt + x.$$

**Ejercicio 1.34**
*Supongamos que el sistema:*

$$\begin{array}{l} x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi \\ x^2 + y^2 - xy = \pi^2 \end{array}$$

*define implícitamente a* $y$ *y* $z$ *como funciones de* $x$, $z = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, *ambas de clase* $C^\infty$ *y definidas en un entorno de* $0$, *tales que* $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = \pi$. *Probar que* $f_1'(0) = 0$, $f_2'(0) = \pi$.

**Ejercicio 1.35**
*(i) Si* $f(x, y) = e^x \cos y$, *calcular* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$.
*(ii) Si* $f(x, y) = 3x^2 + 5xy - 5y^2$, *calcular* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2)$.
*(iii) Si* $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2) - \cos(x^2 - y^2)$, *calcular* $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0)$.

**Ejercicio 1.36**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 en el origen de*

$$f(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x).$$

**Ejercicio 1.37**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función* $f(x, y) = e^{x+y}$.

**Ejercicio 1.38**
*Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 para* $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ *en el* $(0, 0)$.

**Ejercicio 1.39**
*Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función* $f(x, y) = e^{xy} \operatorname{sen}(x + y)$.

**Ejercicio 1.40**
*Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:*
(i) $f(x,y) = x^2y^2$
(ii) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
(iii) $f(x,y) = xye^{x+2y}$
(iv) $f(x,y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$
(v) $f(x,y) = xy^2(1 - x - y)$.

**Ejercicio 1.41**
*Si en la ecuación* $xy = \log \dfrac{x}{y}$ *se puede despejar* $y = \varphi(x)$*, siendo* $\varphi$ *una función de de clase* $C^\infty$ *definida en un entorno de* $x_0 = \sqrt{e}$ *tal que* $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$*, comprobar que* $\varphi$ *tiene un máximo local en* $x_0$.

**Ejercicio 1.42**
*Hallar tres números cuya suma sea 30 y su producto máximo.*

**Ejercicio 1.43**
*Calcular la distancia del punto* $(2,3,1)$ *al plano* $x + y + z = 3$.

**Ejercicio 1.44**
*Calcular el máximo valor de la función* $f(x,y) = 4xy$ *en la parte de la elipse* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ *que se encuentra en el primer cuadrante.*

**Ejercicio 1.45**
*Calcular la mínima distancia del punto* $(0,3)$ *a la parábola* $x^2 - 4y = 0$.

**Ejercicio 1.46**
*Determinar los extremos de la función* $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

**Ejercicio 1.47**
*La temperatura en cada punto de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ *es* $T(x,y,z) = 100 + x^2 + y^2$*. Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de la esfera con el plano* $x - z = 0$.

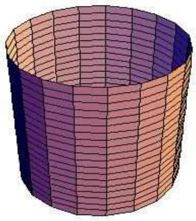
**Ejercicio 1.48**
*Calcular los extremos absolutos de la función* $f(x,y) := x - y$ *en*

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\}.$$

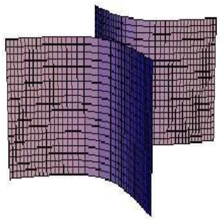
**Ejercicio 1.49**
*Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : y - x^2 \geq -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

**Ejercicio 1.50**
*Determinar los máximos y mínimos de la función* $f(x,y) = x^2y^3(1 - x - y)$ *en el conjunto* $K := \{(x,y) : |\, x \,| + |\, y \,| \leq 1\}$.

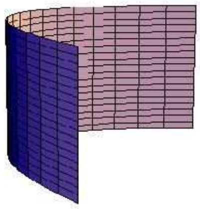
# Cuádricas en $\mathbb{R}^3$



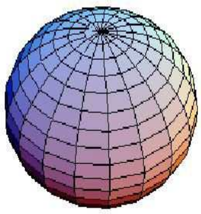
**Cilindro elíptico**
$a_1x^2 + a_2y^2 = 1$
**Imaginario**
$a_1x^2 + a_2y^2 = -1$



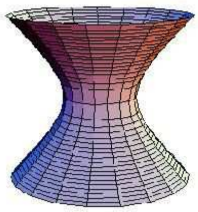
**Cilindro hiperbólico**
$a_1x^2 - a_2y^2 = 1$



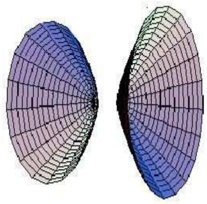
**Cilindro parabólico**
$a_1x^2 = 2y$



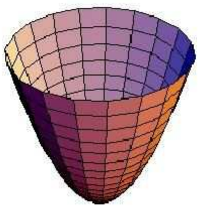
**Elipsoide**
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$



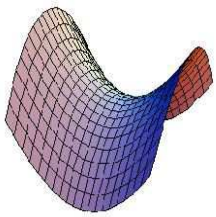
**Hiperboloide de una hoja**
$a_1x^2 + a_2y^2 - a_3z^2 = 1$



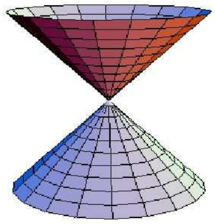
**Hiperboloide de dos hojas**
$a_1x^2 - a_2y^2 - a_3z^2 = 1$



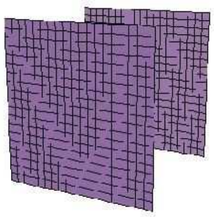
**Paraboloide elíptico**
$a_1x^2 + a_2y^2 = 2z$



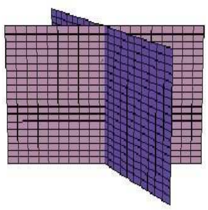
**Paraboloide hiperbólico**
$a_1x^2 - a_2y^2 = 2z$



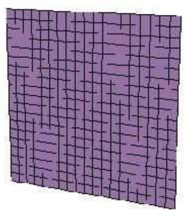
**Cono**
$a_1x^2 + a_2y^2 - a_3z^2 = 0$
**Imaginario**
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 0$



**Planos paralelos**
$a_1x^2 = 1$
**Imaginarios**
$a_1x^2 = -1$



**Planos secantes**
$a_1x^2 - a_2y^2 = 0$
**Imaginarios**
$a_1x^2 + a_2y^2 = 0$



**Plano doble**
$x^2 = 0$

$a_j > 0$ para $j = 1, 2, 3.$

# Práctica 2
# Cálculo Integral

**Ejercicio 2.1**
*Calcular*

$$(i)\int (3x^2-5)^3 x\ dx \quad (ii)\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ dx \quad (iii)\int \frac{\sqrt[6]{x}-3\sqrt[5]{2x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\ dx \quad (iv)\int \frac{dx}{(x-1)^5}.$$

**Ejercicio 2.2**
*Calcular*

$$(i)\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}} \quad (ii)\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}} \quad (iii)\int \frac{e^x\ dx}{1+e^x} \quad (iv)\int \tan 3x\ dx.$$

**Ejercicio 2.3**
*Calcular*

$$(i)\int \tan^2 x\ dx \quad (ii)\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} \quad (iii)\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\ dx.$$

**Ejercicio 2.4**
*Calcular, con un cambio de variable,*

$$(i)\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (ii)\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-\cos x+1}\ dx \quad (iii)\int \frac{dx}{x\log x}$$

$$(iv)\int x\sqrt{3+4x}\ dx \quad (v)\int x^3\sqrt{2+7x^2}\ dx \quad (vi)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

*Sugerencia: en (vi) usar el cambio* $\frac{1}{x}=u$.

**Ejercicio 2.5**
*Calcular, integrando por partes,*

$$(i)\int x\ e^x\ dx \quad (ii)\int e^x \operatorname{sen} x\ dx \quad (iii)\int e^x\cos x\ dx$$

$$(iv)\int \arctan x\ dx \quad (v)\int \operatorname{arg\,senh} x\ dx \quad (vi)\int x^p\log x\ dx \quad ; \quad p\neq -1.$$

**Ejercicio 2.6**
*Calcular*

$$(i)\int \operatorname{arcsen} x\ dx \quad (ii)\int (x^4+5x^3+x-3)\ e^x\ dx \quad (iii)\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$$

$$(iv)\int \cos^2 x\ dx \quad (v)\int (2x^4-5x^3-x^2+x-1)\cos x\ dx.$$

**Ejercicio 2.7**
*Calcular*

$$(i)\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\ dx \quad (ii)\int \frac{x+2}{x^2+x-2}\ dx \quad (iii)\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x} \quad (iv)\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\ dx.$$

**Ejercicio 2.8**
*Calcular* $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

**Ejercicio 2.9**
*Calcular*
$$(i) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} \quad (ii) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x} \quad (iii) \int \cos^3 x \ \operatorname{sen}^2 x \ dx \quad (iv) \int \cos^2 x \ \operatorname{sen}^3 x \ dx$$
$$(v) \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

**Ejercicio 2.10**
*Calcular*
$$(i) \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} \quad (ii) \int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} \, dx \quad (iii) \int \operatorname{sen} 3x \ \cos 2x \ dx \quad (iv) \int \operatorname{sen} 5x \ \operatorname{sen} 3x \ \cos 2x \ dx.$$

**Ejercicio 2.11**
*Calcular, usando cambios trigonométricos o hiperbólicos,*
$$(i) \int \sqrt{a^2-x^2} \ dx \quad (ii) \int \sqrt{a^2+x^2} \ dx \quad (iii) \int \sqrt{x^2-a^2} \ dx$$
$$(iv) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad (v) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

**Ejercicio 2.12**
*Calcular*
$$(i) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, dx \qquad (ii) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} \, dx$$

**Ejercicio 2.13**
*Calcular el área encerrada por las curvas*

*(i)* $y = x^2$ , $x = y^2$.
*(ii)* $y = x^2$ , $x + y = 2$.
*(iii)* $y = \operatorname{sen} x$ , $y = \cos x$ *entre* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{2}$.
*(iv)* $y = e^x$ , $y = 2$ , $x = 0$.
*(v)* $y = x$ , $y = x + \operatorname{sen}^2 x$, $x = 0$ *y* $x = \pi$.

**Ejercicio 2.14**
*Derivar las funciones:*

$(i)$ $F(x) := \int_0^x \cos^3 t \ dt.$

$(ii)$ $F(x) := \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} \ dt.$

$(iii)$ $F(x) := \int_0^{\cos x} (t+3) \ dt.$

$(iv)$ $F(x) := \int_x^3 (t+2)^2 \ dt.$

$(v)$ $F(x) := \int_x^{x^2} x \operatorname{sen} t^2 \ dt.$

**Ejercicio 2.15**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := e^{x+y}$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$ , $(2,2)$ *y* $(4,0)$.

**Ejercicio 2.16**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *en la región del primer cuadrante limitada por su bisectriz y la parábola* $y = x^2$.

**Ejercicio 2.17**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := x$ *en la región, con ordenadas positivas, limitada por las circunferencias centradas en el origen y radio 2 y 3 respectívamente.*

**Ejercicio 2.18**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := x^2 e^y$ *en la región limitada por las curvas* $y^2 = x$ , $y^2 = -x$ *e* $y = 1$.

**Ejercicio 2.19**
*Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función* $f(x,y) := y$ *en la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2$ *y la parábola* $y = x^2$.

**Ejercicio 2.20**
*Invertir el orden de integración en las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dydx,$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6y-y^2}} f(x,y)\ dxdy,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\ dydx,$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{x^2+2} f(x,y)\ dydx,$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{9-(x-2)^2}} f(x,y)\ dydx + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-(x+2)^2}} f(x,y)\ dydx.$

**Ejercicio 2.21**
*Calcular las siguientes integrales*

(a) $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ *con* $A := \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le 2x^2\}$,

(b) $\displaystyle\iint_A |\,(x+y)\,|\ dxdy$ *con* $A := [-1,1] \times [-1,1]$,

(c) $\displaystyle\iint_A \operatorname{sen}(x+y)\ dxdy$ *con* $A$ *la región acotada limitada por las rectas* $x = 0$ , $y = 3\pi$ *e* $y = x$,

(d) $\displaystyle\iint_A |\cos(x+y)|\ dxdy$ *con* $A := [0,\pi] \times [0,\pi]$,

(e) $\displaystyle\iiint_A (x+y+z)x^2y^2z^2\ dxdydz$ *siendo* $A$ *la región del primer octante limitada por el plano* $x + y + z = 1$.

**Ejercicio 2.22**
*Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:*

*(a)* $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$,

*(b)* $\displaystyle\iint_A \log(x^2+y^2)\ dxdy$ , *siendo* $A$ *la región del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias de centro el origen y radio* 3 *y* 4,

*(c)* $\displaystyle\iint_A x\ dxdy$ , *siendo* $A := \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 2x\}$,

*(d)* $\displaystyle\iint_A x^2y^2\ dxdy$ , *siendo* $A$ *la región acotada del primer cuadrante limitada por las hipérbolas* $xy=1$ , $xy=2$ *y las rectas* $y=x$ e $y=4x$,

*(e)* $\displaystyle\iint_A \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)}{4xy^2}\ dxdy$ , *siendo* $A$ *la región comprendida entre las circunferencias* $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-2x=0$ *y las parábolas* $y=x^2$ *y* $2y=x^2$.

**Ejercicio 2.23**
*Calcular el área limitada por las rectas* $y=x$ , $y=4x$ , $x+4y=1$ , $x+4y=4$.

**Ejercicio 2.24**
*Calcular el volumen del sólido descrito por las desigualdades* $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ , $x^2+y^2 \leq 3y$.

**Ejercicio 2.25**
*Calcular el área de una elipse y el volumen de un elipsoide.*

**Ejercicio 2.26**
*Calcular, por integración, el volumen de un cilindro y un cono, ambos de altura* $h$ *y radio de la base* $r$.

**Ejercicio 2.27**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el área de un círculo y el volumen de una esfera.*

**Ejercicio 2.28**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen limitado por* $z=4-x^2$ *y los planos* $x=0$ , $y=6$ , $y=0$ , $z=0$.

**Ejercicio 2.29**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular el volumen del sólido que genera la curva* $y=2+\operatorname{sen} x$ *al girar alrededor del eje de abscisas entre* $x=0$ *y* $x=2\pi$.

**Ejercicio 2.30**
*Aplicando el principio de Cavalieri calcular los volumenes de*

$$A := \{(x,y,z)\ :\ 0 \leq z \leq 2-x^2-y^2\},$$

$$B := \{(x,y,z)\ :\ x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

**Ejercicio 2.31**
*Calcular la longitud de las curvas*

$\gamma_1(t) := (|\,t\,|, |\,t-\frac{1}{2}\,|)$ *si* $t \in [-1,1]$,
$\gamma_2(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *si* $t \in [0,2\pi]$,
$\gamma_3(t) := (t, t^2)$ *si* $t \in [0,5]$,
$\gamma_4(t) := (t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$ *si* $t \in [0,2\pi]$.

**Ejercicio 2.32**
*Calcular la integral* $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2dx + x^2dy}{1+x^2+y^2}$, *siendo* $\gamma$ *el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.*

**Ejercicio 2.33**
*Calcularla integral* $\displaystyle\int_\gamma (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$, *siendo* $\gamma$ *la gráfica de* $y = x^2$ *recorrida de* $(-1,1)$ *hasta* $(1,1)$.

**Ejercicio 2.34**
*Calcular la integral* $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, *siendo* $\gamma$ *la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radia* $a > 0$ *orientada positivamente.*

**Ejercicio 2.35**
*Hallar el trabajo realizado por la fuerza* $F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ *al mover la partícula en sentido contrario a las agujas del reloj recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas* $x = a$, $y = a$ $(a > 0)$.

**Ejercicio 2.36**
*Probar que los siguientes campos de fuerzas son conservativos y calcular el correspondiente potencial:*
*(a)* $F(x,y) = (2yx+3, x^2+7y)$.
*(b)* $F(x,y) = (e^x\cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$
*(c)* $F(x,y,z) = (y^3z^2 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2y}, 3xy^2z^2 + 3e^y - \frac{8}{xy^2}, 2xy^3z)$.
*(d)* $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.
*(e)* $F(x,y,z) = (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, \frac{-xy}{z^2})$.

**Ejercicio 2.37**
*Calcular* $\int_\gamma F$ *siendo* $F(x,y,z) = (yz\cos xz, \operatorname{sen} xz, xy\cos xz)$ *y* $\gamma$ *una curva con punto inicial* $(0,1,0)$ *y punto final* $(1,1,\frac{\pi}{2})$.

**Ejercicio 2.38**
*Calcular el área encerrada por una elipse utilizando el teorema de Green.*

**Ejercicio 2.39**
*Aplicando el teorema de Green calcular* $\displaystyle\int_\gamma (y+3x)dx + (9y-x)dy$ , *siendo* $\gamma$ *la elipse* $4x^2+y^2 = 1$ *orientada positivamente.*

**Ejercicio 2.40**
*Aplicando el teorema de Green calcular* $\displaystyle\int\int_D (2x-y^2)\; dxdy$ , *siendo* $D$ *el recinto encerrado por la curva* $x^2+y^2 = 4$.

**Ejercicio 2.41**
*Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:*
- *(a)* $y' - y = x - 1, \quad y(0) = 1$.
- *(b)* $y' + y = 5, \quad y(0) = 0$.
- *(c)* $dy + 2dx = (x-2)e^x dx$

(d) $y'' - 5y' + 4y = 4, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
(e) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
(f) $y'' + 4y = 2\cos^2 x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
(g) $y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

**Ejercicio 2.42**

*Integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes:*

(a) $\left.\begin{array}{l} x' + 4y + 2x = 4t + 1 \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2 \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 0.$

(b) $\left.\begin{array}{l} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 1.$

(c) $\left.\begin{array}{l} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{array}\right\} x(0) = 2; y(0) = 3.$

# Transformada de Laplace

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

**(1) Linealidad** $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$

**(2) Semejanza** $\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \dfrac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{s}{\lambda}\right)$

**(3) Desplazamiento** $\mathcal{L}(e^{\lambda x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f)(s - \lambda)$

**(4)** $\mathcal{L}(x^n f(x))(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$

**(5) Derivación**

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)\\
&\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)\\
&\mathcal{L}(f''')(s) = s^3\mathcal{L}(f)(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\mathcal{L}(f^{IV})(s) = s^4\mathcal{L}(f)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

**(6) Transformadas de las funciones más corrientes**

$\boxed{\text{I}}$ $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$

$\boxed{\text{II}}$ $\mathcal{L}(x^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{III}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{1}{s - \alpha}$

$\boxed{\text{IV}}$ $\mathcal{L}(\cos\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2 + \beta^2}$

$\boxed{\text{V}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2 + \beta^2}$

$\boxed{\text{VI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2 - \beta^2}$

$\boxed{\text{VII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2 - \beta^2}$

$\boxed{\text{VIII}}$ $\mathcal{L}(x^n\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IX}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x)(s) = \dfrac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$

$\boxed{\text{X}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$

$\boxed{\text{XI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 - \beta^2}$

$\boxed{\text{XII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s - \alpha)^2 - \beta^2}$

$\boxed{\text{XIII}}$ $\mathcal{L}(x\cos\beta x)(s) = \dfrac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$

$\boxed{\text{XIV}}$ $\mathcal{L}(x\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$