PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES (INTEGRACIÓN MÚLTIPLE)

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2001/2002

Profesores responsables
http://www.uv.es/ anamat/pod.htm

Práctica 1
Integral Impropia De Riemann. Criterios De Convergencia

El objeto de esta práctica es extender la noción de integral a funciones no acotadas o a funciones que están definidas en un intervalo no acotado.

1 Definiciones

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (acotado o no) cuyos extremos representamos por a y b, y que pueden ser finitos o no y sea f una función integrable en cualquier subintervalo $L = [u, v] \subset I$ *cerrado y acotado.* Se define *integral impropia* de f,

$$\int_I f(t)dt = \lim_{\substack{v \to b^- \\ u \to a^+}} \int_u^v f(t)dt.$$

Cuando dicho límite existe, se dice que la integral (impropia) de f es convergente o que existe. Si la integral impropia de $|f|$ es convergente, se dice que la integral (impropia) de f es absolutamente convergente.

En el caso de que exista una partición $\{I_1, \cdots, I_n\}$ de I, de manera que exista la integral impropia de f en cada uno de los subintervalos I_i de la partición, se define la integral impropia de f en I como $\int_I f(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(t)dt$.

He aquí unos ejemplos:

Ejemplo 1.1

Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *e* $I = (1, +\infty)$ *, se tiene que* f *es una función integrable en cualquier subintervalo* $L = [u, v] \subset I$ *ya que es continua y*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\substack{v \to +\infty \\ u \to 1^+}} \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\substack{v \to +\infty \\ u \to 1^+}} [-\frac{1}{x}]_u^v = \lim_{\substack{v \to +\infty \\ u \to 1^+}} -[\frac{1}{v} - \frac{1}{u}] = 1.$$

De manera que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *existe (o es convergente) y vale* 1.

Ejemplo 1.2

Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *e* $I = (0, 1)$, *se tiene que* f *es una función integrable en cualquier subintervalo* $L = [u, v] \subset I$ *ya que es continua y*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\substack{v \to 1^- \\ u \to 0^+}} \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\substack{v \to 1^- \\ u \to 0^+}} -[\frac{1}{x}]_u^v = \lim_{\substack{v \to 1^- \\ u \to 0^+}} -[\frac{1}{v} - \frac{1}{u}]$$

que no existe.

Ejemplo 1.3
Cuando I sea un intervalo cerrado y acotado y f sea una función integrable (en el sentido de Riemann) en I, desde luego que existe la integral impropia de f y coincide con la integral de Riemann de f.

Así como la integral de Riemann permite medir áreas de porciones del plano acotadas, la noción de integral impropia permite calcular áreas de porciones del plano que no son acotadas.

El criterio básico para decidir que un integral impropia es convergente es el siguiente.

Teorema 1.1 *(i) Si $\int_I |f(t)|dt$ es convergente, entonces $\int_I f(t)dt$, también es convergente.*

(ii)Si existe $M > 0$ tal que $\int_u^v |f(t)|dt < M$ para cada $[u, v] \subset I$, entonces $\int_I f(t)dt$ es absolutamente convergente.

De éste, se deduce de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.2 *Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para cada x, $a < x < b$, y existe $\int_I g(t)dt$, entonces tambien existe $\int_I f(t)dt$.*

2 Criterios para funciones definidas en intervalos no acotados

Teorema 1.3 *Sea f integrable en cada intervalo cerrado y acotado de $[a, +\infty)$, $(a > 0)$.*

Si existen $\alpha > 1$ y $K > 0$ tales que $|f(x)x^\alpha| < K \; \forall x > a$, entonces $\displaystyle\int_I f(t)dt$ es absolutamente convergente.

Si existen $\alpha \leq 1$ y $K > 0$ tales que $f(x)x^\alpha > K \; \forall x > b(> a)$, entonces $\displaystyle\int_I f(t)dt$ no es convergente.

Naturalmente criterios análogos a estos se pueden formular para intervalos de la forma $(-\infty, a]$.

Teorema 1.4 (Citerio de Abel-Dirichlet) *Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que g es derivable, existe $\int_a^{+\infty} |g'(t)|dt$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y f tiene una primitiva acotada. Entonces existe $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$.*

También merece la pena el siguiente criterio que relaciona la convergencia de la integral impropia con la de una cierta serie numérica.

Teorema 1.5 (Criterio de Cauchy-MacLaurin) *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ decreciente (y por tanto, integrable Riemann en todo subintervalo cerrado y acotado). Se tiene que $\int_I f(t)dt$ es convergente si, y solo si, la serie $\sum_n f(a + n)$ es convergente.*

3 Criterios para funciones no acotadas definidas en intervalos acotados

Teorema 1.6 *Sea f integrable en cada intervalo cerrado y acotado de $I = (a, b]$.*

(i) Si existen $\alpha < 1$ y $K > 0$ tales que $|f(x)(x - a)^\alpha| < K \; \forall x > a,\ x \leq b$, entonces $\int_I f(t)dt$ es absolutamente convergente.

(ii) Si existen $\alpha \geq 1$ y $K > 0$ tales que $f(x)(x - a)^\alpha > K \; \forall x > a \; x \leq b$, entonces $\int_I f(t)dt$ no es convergente.

Naturalmente criterios análogos a estos se pueden formular para intervalos de la forma $[b, a)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.1
Demostrar que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ *converge si, y sólo si,* $p > 1$ *(se supone* $a > 0$*)*

Ejercicio 1.2
Utilizando el problema anterior probar el Teorema 1.3

Ejercicio 1.3
Hallar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^{\infty} xcosxdx$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{lnx}{(1+x^2)^2} dx$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

(f) $\int_2^{+\infty} \frac{1+6sen2x}{x^2+3x^3} dx$

(g) $\int_0^{+\infty} xsen(x^4)dx$

Ejercicio 1.4
Estudiar la integrabilidad (impropia) de las siguientes funciones en los intervalos señalados:

(a) $exp(-|x|)$ *en* $\mathbb{R}$.

(b) $x^p \log^q x$ *en* $[2, +\infty)$ *cuando* $p < -1$ *y cuando* $p = -1 \wedge q < -1$.

(c) $\sin^2 \frac{1}{x}$ *en* $[1, +\infty)$.

(d) $x^p \exp(-x^q)$ *con* $p, q > 0$ *en* $[0, +\infty)$.

(e) $\exp(-x)\log(cos^2 x)$ *en* $[0, +\infty)$.

Ejercicio 1.5
Si $p > 1$, *entonces* $\frac{\sin x}{x^p}$ *tiene integral impropia absolutamente convergente y si* $p = 1$, *no es absolutamente convergente y, en cambio, sí es convergente.*

Sea $f \in R([x, x'])$ para todo $x, x' \in \mathcal{R}, x < x'$, se llama *valor principal* de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ al siguiente valor:

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(x)dx.$$

El valor principal de una integral puede existir sin que por ello la integral de la función sea convergente:

Ejercicio 1.6
Demuestra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ *no existe como integral impropia y sin embargo,* $\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$.

Ejercicio 1.7
Demostrar que si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente, entonces coincide con su valor principal.*

Ejercicio 1.8
Demostrar que si $p > 0$ se tienen los siguientes hechos:

(a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ *es convergente si, y sólo si, $p < 1$.*

(b) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ *es convergente si, y sólo si, $p < 1$.*

Ejercicio 1.9
Utilizar el problema anterior para demostrar el Teorema 3.

Ejercicio 1.10
Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{senx}{x}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(senx)^2}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xarctangx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx$

Práctica 2
Integral de Lebesgue. Teoremas de convergencia. Conexion con la integral de Riemann

1 Conjuntos nulos

Si $a_i < b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que el conjunto $I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : a_i < x_i < b_i\}$ es un intervalo abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y se define su medida como $m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$. Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice que es nulo si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión finita o infinita de intervalos abiertos acotados I_n que cumple

(a) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \epsilon$.

El hecho de que se pueda considerar una cantidad infinita de intervalos en vez de limitarse a una cantidad finita es esencial: existen conjuntos nulos que no pueden ser recubiertos por una cantidad finita de intervalos abiertos acotados como se ilustra en el problema 3.

Es importante observar que el concepto de conjunto nulo depende de la dimensión del espacio $\mathbf{R}^n$. Por ejemplo, como consecuencia de los ejercicios 2, 3 y 4 se sigue que toda recta en $\mathbf{R}^2$ es un conjunto nulo.

Las propiedades de los conjuntos nulos son similares a las de los conjuntos numerables.

1.- *Si para cada* $n \in \mathbf{N}$, *el conjunto* A_n *es nulo, entonces la unión* $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ *es un conjunto nulo.*

2.- *Todo subconjunto de un conjunto nulo es nulo.*

La estrategia general para demostrar que un conjunto es nulo es utilizar estas dos propiedades; por ejemplo, poniéndolo como unión numerable de conjuntos A_n de modo que sea fácil demostrar que cada A_n es nulo.

1.1 Propiedades que se cumplen casi por todas partes

Sea $P(x)$ una propiedad que depende de $x \in \mathbf{R}^n$. Diremos que la propiedad $P(x)$ se verifica casi por todas partes o para casi todo x, cuando existe un conjunto nulo A tal que si $x \notin A$, entonces se cumple la propiedad; en otras palabras, cuando el conjunto $\{x \in \mathbf{R}^n : P(x) \text{ no se cumple}\}$ es nulo. Por ejemplo, decir que dos funciones f y g son iguales casi por todas partes significa que existe A nulo tal que si $x \notin A$, entonces $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 2.1
Vamos a probar que si $f_1(x) = g_1(x)$ *(c.p.p.) y* $f_2(x) = g_2(x)$ *(c.p.p.) , entonces* $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$ *(c.p.p.)*

Como $f_1(x) = g_1(x)$ (c.p.p.) , existe A_1 conjunto nulo tal que si $x \notin A_1$, entonces $f_1(x) = g_1(x)$. Análogamente existe un conjunto nulo A_2 tal que si $x \notin A_2$, entonces $f_2(x) = g_2(x)$. Sea $A = A_1 \cup A_2$, que es un conjunto nulo. Si $x \notin A$, entonces $f_1(x) = g_1(x)$ y $f_2(x) = g_2(x)$ con lo cual $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$; es decir, $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$ (c.p.p.)

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 2.1
Sean $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ *y* $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones tales que* $f_n \to f$ *(c.p.p.) y* $g_n \to g$ *(c.p.p.) Si* $f_n(x) = g_n(x)$ *(c.p.p.) para cada* $n \in \mathbf{N}$, *demostrar que* $f(x) = g(x)$ *(c.p.p.)*

Ejercicio 2.2
Si para cada $n \in \mathbf{N}$, *la propiedad* $P_n(x)$ *es cierta (c.p.p.) , demostrar que entonces* $P_n(x)$ *es cierta para todo* $n \in \mathbf{N}$, *(c.p.p.)*

2 Integrabilidad: cálculo directo de la integral

En este apartado veremos cómo ciertas funciones son integrables y se puede calcular sus integrales directamente.

Según sabemos "*Una función real f en* $\mathbf{R^n}$ *que sea continua (c.p.p.) , acotada y que se anule fuera de un intervalo acotado es una función superior y por lo tanto integrable; en particular, una función continua en un intervalo compacto I es integrable en él.*" Para calcular su integral la propia prueba del resultado nos dice que hay que dividir el intervalo en subintervalos iguales y tomando en cada uno de ellos el ínfimo de la función se construye una función escalonada. Tomando cada vez subdivisiones más pequeñas se obtiene una sucesión creciente de funciones escalonadas que convergen (c.p.p.) a f. El límite de sus integrales nos dará la de f.

Ejemplo 2.2
Sea $f(x) = x^2$. *Demostraremos que es integrable en el intervalo* $[0, 1]$ *y calcularemos su integral.*

Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en 2^m partes iguales según los puntos $\{0, \frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, ..., \frac{2^m-1}{2^m}, 1\}$, y definimos

$$\phi_m := \sum_{i=1}^{i=2^m} (\frac{i-1}{2^m})^2 \chi_{[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}]}$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} \phi_m = f \quad \text{c.p.p.}$$

Al ser la sucesión creciente la función f es superior y como

$$\int \phi_m = \frac{1}{2^m}\left((\frac{1}{2^m})^2 + (\frac{2}{2^m})^2 + ... + (\frac{2^m-1}{2^m})^2\right)$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int \phi_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1+2^2+...+(2^m-1)^2}{(2^m)^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+2^2+...+(k-1)^2}{k^3} = (Stolz) = \frac{1}{3}.$$

Por lo que la integral de f en $[0, 1]$ es $\frac{1}{3}$

Podríamos haber dividido el intervalo de otra forma, por ejemplo en 2^m subintervalos, y el resultado sería análogo (compruébese).

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 2.3
Demostrar que $f(x, y) = xy$ *es integrable en* $[0, 1] \times [0, 1]$ *y calcular su integral.*

Ejercicio 2.4
Demostrar que $f(x) = x$ *es integrable en* $[1, 2]$ *y calcular la integral.*

Ejercicio 2.5
Demostrar que $f(x, y) = x^2 + y^2$ *es integrable en* $[0, 1] \times [0, 1]$ *y calcular su integral.*

Ejercicio 2.6
Comprobar los resultados anteriores en una variable usando el teorema de Lebesgue-Vitali.

3 Teoremas de convergencia

En general no se puede pasar al límite bajo el signo de integral como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3
Sea la sucesión de funciones escalonadas $f_n : [0,1] \to R$ *definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Veamos que esta sucesión converge puntualmente a la función 0 *en* $[0,1]$.

Dado $x \in (0,1]$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < x$, por consiguiente para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f_n(x) = 0$.

Calculemos ahora el límite de las integrales

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}.$$

La superioridad de la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann se manifiesta, sobre todo, en los teoremas de convergencia, que permiten pasar al límite bajo el signo integral en condiciones muy generales. Los dos fundamentales son:

Teorema 2.1 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue-Levi) *Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión monótona de funciones integrables que convergen casi por todas partes a la función* f. *Si la sucesión de integrales* $\left(\int f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ *es acotada, entonces la función* f *es integrable y se cumple*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema 2.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) *Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones integrables que convergen casi por todas partes a la función* f. *Si existe una función* g *integrable tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para casi todo* x *y todo* $n \in \mathbf{N}$, *entonces la función* f *es integrable y se cumple*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Veamos ahora unos ejemplos en los que se aplican los teoremas anteriores.

Ejemplo 2.4
Vamos a ver que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *si* $x \in (0,1]$, $f(0) = 0$ *es integrable Lebesgue en* $[0,1]$ *y vamos a calcular su integral.*

Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to R$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Puesto que f_n está acotada y es continua en $[0,1]$ salvo en el punto $\frac{1}{n}$, por el teorema de Lebesgue-Vitali es integrable Riemann en $[0,1]$, integrable Lebesgue en $[0,1]$ y

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,1]} f_n$$

La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función f en $[0,1]$, ya que si $x \in (0,1]$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < x$ y por consiguiente para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Es fácil ver que $f_n \leq f_{n+1}$. Comprobemos finalmente que la sucesión de integrales está acotada superiormente.

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2$$

Aplicando el T.C.M. se tiene que f es integrable Lebesgue en $[0,1]$ y

$$\int_{[0,1]} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} = 2.$$

Ejemplo 2.5
Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\log(n+x)}{n} e^{-x} \cos x \; dx = 0.$$

Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{\log(n+x)}{n} e^{-x} \cos x$. Como para cada $x \in [0,1]$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+x)}{n} e^{-x} \cos x dx = 0,$$

resulta que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a 0 en $[0,1]$. Las funciones f_n son continuas, por lo tanto son integrables Lebesgue en $[0,1]$ por lo que el resultado que es consecuencia del T.C.D. Para aplicarlo, únicamente queda encontrar una función integrable que mayore a los módulos de todas las funciones de la sucesión.

De las desigualdades

$$\frac{\log(n+x)}{n} \leq \frac{\log(n+1)}{n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{n+1}{n} \leq 2$$

para todo $x \in [0,1]$, se deduce que la función $g(x) = 2e^{-x}$ verifica $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

4 Criterios de integrabilidad

Como consecuencia del T.C.M. se tiene el siguiente criterio de integrabilidad para funciones de varias variables.

4.1 (C1)

Sea $\{I_m\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de intervalos en $\mathbf{R}^n$ y sea $S = \cup_{m=1}^{\infty} I_m$. Si $f \in L(I_m)$ para todo $m \in N$ y la sucesión $\{\int_{I_m} |f|\}_{m=1}^{\infty}$ está acotada, entonces $f \in L(S)$ y

$$\int_S f = \lim_n \int_{I_m} f.$$

Si $f \geq 0$, entonces el recíproco es cierto.

Como consecuencia de este criterio obtenemos el siguiente resultado:

4.2 (C2)

Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ tal que $f \in L(a,b)$ para todo $b \geq a$ y supongamos que existe $M > 0$ tal que $\int_{[a,b]} |f| \leq M$ para todo $b \geq a$. Entonces $f \in L(a,+\infty)$ y

$$\int_{[a,+\infty)} f = \lim_{b\to+\infty} \int_{[a,b]} f.$$

Aplicando C1 a la sucesión de intervalos $I_n = [a, a+n]$, $n \in \mathbf{N}$, a f y a $|f|$ obtenemos que $f \in L(a, +\infty)$ y que

$$\int_{[a,+\infty)} |f| = \lim_n \int_{I_n} |f|.$$

Dado $\epsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$|\int_{[a,+\infty)} |f| - \int_{I_{n_0}} |f|| < \epsilon.$$

Sea $b \geq a + n_0$, entonces

$$|\int_{[a,+\infty)} f - \int_{[a,b]} f| = |\int_{[b,+\infty]} f| \leq \int_{[b,+\infty]} |f| \leq$$

$$\leq \int_{[a+n_0,+\infty]} |f| = \int_{[a,+\infty)} |f| - \int_{I_{n_0}} |f| < \epsilon$$

Ejercicio 2.7
Probar que la función $f(x) = e^{-|x|}$ es integrable Lebesgue en $\mathbf{R}$ y calcular su integral.

Ejemplo 2.6
Probemos que para todo $y > 0$ la función $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$ es integrable Lebesgue en $[0, 1]$.

Para $y \geq 1$ la función es continua en $[0, 1]$. Supongamos ahora que $y < 1$. En ese caso la función x^{y-1} no está acotada cuando x tiende a $0+$.

Si $I_n = [\frac{1}{n}, 1]$, entonces f es continua en I_n y

$$\int_{I_n} f = \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x}x^{y-1}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{y-1}dx \leq \frac{1}{y}(1 - \frac{1}{n^y}) < \frac{1}{y}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

Aplicando C1 se tiene que $f(x)$ es integrable Lebesgue en $[0, 1]$.

5 Relación con la integral impropia de Riemann

5.1 (C3)

Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ tal que $f \in R[a, b]$ para todo $b \geq a$. Si existe $M > 0$ tal que

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a,$$

entonces f es integrable Lebesgue en $[a, +\infty)$ y

$$\int_{[a,+\infty)} f = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

En efecto, de las hipótesis se deduce que $f \in L[a, b]$ y $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$ para todo $b \geq a$. Por lo tanto

$$\int_{[a,b]} |f| \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a.$$

Aplicando C2 se deduce que f es integrable Lebesgue en $[a, +\infty)$ y

$$\int_{[a,+\infty)} f = \lim_{b\to+\infty} \int_{[a,b]} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Como consecuencia del criterio anterior se tiene que toda función f integrable Lebesgue en $[a,+\infty)$ es integrable Riemann impropia en $[a,+\infty)$.

En efecto, dada $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ tal que $f\in R[a,b]$ para todo $b\geq a$, se tiene que

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,+\infty)} |f| = M$$

El recíproco es cierto si la función es positiva, pero en general no lo es como lo prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7
En la práctica 1 se ha visto que existe la integral de Riemann impropia de la función $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x>0$, $f(0)=1$ *en* $[0,+\infty)$. *Sin embargo* f *no es integrable Lebesgue en* $[0,+\infty[$, *pues si lo fuera también lo sería* $|f|$ *y entonces, para cada* $k\in\mathbf{N}$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|dx \geq \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} x|dx = \frac{2}{k\pi}$$

de donde

$$\int_0^{k\pi} |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|dx \geq \frac{2}{\pi}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k})$$

lo que contradice la integrabilidad de $|f|$ *por la no acotación de la sucesión* $\int_0^{k\pi} |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|dx$.

5.2 (C4)

Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ tal que $f\in L(a,b)$ para todo $b\geq a$. Si existe $g\in L(a,+\infty)$ tal que $|f|\leq g$ entonces $f\in L(a,+\infty)$.

Consecuencia de C2 ya que

$$\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,+\infty]} g$$

para todo $b\geq a$.

5.3 (C5)

Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ tal que $f\in L(a,b)$ para todo $b\geq a$. Si existe $h\in L(a,+\infty)$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=0,$$

entonces $f\in L(a,+\infty)$.

En efecto, por hipótesis existe $\alpha>a$ tal que $\frac{|f(x)|}{|h(x)|}\leq 1$ para todo $x\geq\alpha$, luego

$$|f\chi_{[\alpha,+\infty)}| \leq g\chi_{[\alpha,+\infty)}$$

pero puesto que g es integrable en $[a,+\infty)$, tambien lo es en $[\alpha,+\infty)$ y aplicando C3 resulta que f es integrable en $[\alpha,+\infty)$.

Como, por hipótesis, $f\in L(a,\alpha)$, se tiene que $f\in L(a,+\infty)$.

Ejemplo 2.8
Probemos que para todo $y>0$ *la función* $f(x)=e^{-x}x^{y-1}$ *es integrable Lebesgue en* $[1,+\infty)$.

Por un ejemplo anterior sabemos que la función $e^{-\frac{x}{2}}$ es integrable en $[1,+\infty)$ y como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^{y-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}x^{y-1} = 0$$

la tesis se sigue de C4.

NOTA: De los ejemplos anteriores se deduce que para cada $y > 0$ la función $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$ es integrable Lebesgue en $[0, +\infty)$. Se llama función Gamma a la función $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definida por

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}dx.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 2.8
En cada uno de los siguientes apartados encontrar el conjunto de puntos $x \in [0,1]$ tales que la sucesión $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge. ¿Se cumple que $f_n \to 0$ (c.p.p.) ? ¿Se cumple que $\int f_n \to 0$?

(a) $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} n\pi x, & \textit{si } x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & \textit{resto.} \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} n, & \textit{si } x \in [0, 1/n]; \\ 0, & \textit{resto.} \end{cases}$

(d) $f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \cos^{2k}(n!\pi x)$

(e) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x = r_1, r_2, \dots, r_n; \\ 0, & \textit{resto;} \end{cases}$ *donde* $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una enumeración de* $\mathbf{Q}$.

(f) $f_n(x) = \begin{cases} 1/q, & \textit{si } x = \frac{p}{q}, \ p \in \mathbf{Z}, \ q \in \mathbf{N}, \ 1 \le q \le n; \\ 0, & \textit{resto.} \end{cases}$

Ejercicio 2.9
Probar que la función $f(x) = x^p$, $x > 0; f(0) = 0$ es integrable en $[0,1]$ si $p > -1$, y calcular su integral.

Ejercicio 2.10
Determinar la integrabilidad de $f(x) = e^{-x^2}$ en $[0, +\infty[$.

Ejercicio 2.11
Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Demostrar que es integrable en $\mathbf{R}$ y calcular su integral.

Ejercicio 2.12
Discutir según los valores de p la integrabilidad de la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}$$

en el intervalo $[0, +\infty[$. ¿Para qué valores se cumple que existe $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x^p} dx$?

Ejercicio 2.13
Si $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$, si $0 < x \le 1$; $f(0) = 0$ demostrar que su derivada no es integrable.

Ejercicio 2.14
Probar que la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, si $x \ge \pi$; $f(x) = 0$, si $x < \pi$ es integrable en la recta real.

Ejercicio 2.15
Demostrar que la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si $x \ge 1$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, si $0 < x \le 1$; $f(x) = 0$, si $x \le 0$, es integrable y calcular su integral.

Ejercicio 2.16
Comprobar que si $I := [0, +\infty[$, *y* $f_m(x) = e^{-mx} - 2e^{-2mx}$ *entonces se tiene*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_I f_m \neq \int_I (\sum_{m=1}^{\infty} f_m).$$

Ejercicio 2.17
Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{1+n^2x^2} e^x \cos x dx$.

Ejercicio 2.18
Idem para $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n \frac{\operatorname{sen}(x/n)}{x} e^{-x} dx$.

Ejercicio 2.19
Idem para

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi - 2x}{2n})}{1+x^2} dx.$$

Ejercicio 2.20
(a) Sean f_m *funciones integrables en* $\mathbf{R^n}$. *Probar que si la serie* $\sum_{m=1}^{+\infty} \int |f_m|$ *converge, la serie* $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m$ *converge (c.p.p.) a una función* f *integrable en* $\mathbf{R^n}$ *obteniendose*

$$\int f = \sum_{m=1}^{+\infty} \int f_m.$$

(b) A partir del desarrollo de Taylor de $\log(1-x)$ *obtener razonadamente la igualdad*

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = 1.$$

Ejercicio 2.21
Sean $f_n : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definidas por* $f_n(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = r_1, r_2, \ldots, r_n; \\ 0, & \text{resto;} \end{cases}$ *donde* $(r_n)_{n=1}^\infty$ *es una enumeración de* $\mathbf{Q}$. *Demostrar que* $\int f_n \to 0$.

Ejercicio 2.22
Sean $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ *definidas por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [j/2^k, (j+1)/2^k] \quad n = 2^k + j, \ j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1; k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Es decir, $f_n = \chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$ *donde* $n = 2^k + j$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1; k = 0, 1, 2, \ldots$. *Las primeras funciones de la sucesión son:* $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, \ldots$.

(a) ¿Por qué la sucesión $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^\infty$ *no converge para ningún* $x \in [0,1]$ *?*

(b) Demostrar que la subsucesión definida por
$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [(2^n-1)/2^n, 1]; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$
converge a 0 *(c.p.p.)*

(c) Comprobar que, a pesar de no poderse utilizar ninguno de los teoremas de convergencia vistos, $\lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$.

Práctica 3
Integrales iteradas. Teorema de Fubini. Integrales de funciones de varias variables

1 Teorema de Fubini para integrales dobles

Sea f una función integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Entonces:
(a) La integral $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}$,
(b) La función definida casi por todas partes por $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$,
(c) $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy)dx$.

Existe una formulación análoga del teorema que se traduce en la igualdad $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx)dy$.

Ejemplo 3.1
Probemos que la función $f(x,y) := \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ no es integrable en $A = [0,1] \times [0,1]$.

Si f es integrable entonces, en virtud del teorema de Fubini, las dos integrales iteradas de f deben coincidir, es decir,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_y^{1+y} \frac{(t-2y)}{t^3} dt \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{t} + \frac{y}{t^2} \Big|_{t=y}^{t=1+y} \right) dy \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{(1+y)^2} dy = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

y procediendo similarmente

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = \frac{1}{2}.$$

Por tanto f no es integrable en A.

Ejemplo 3.2

Calculemos $\displaystyle\int\int_A e^{x^2}\, dx$ siendo A el triángulo de vértices (0,0), (1,0), (1,1), probando previamente que la función es integrable.

La función $f(x,y) = e^{x^2}$ es integrable en el conjunto A porque f es continua y el conjunto A es compacto. Puesto que $A = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$ el teorema de Fubini permite calcular

$$\int\int_A e^{x^2}\, dx = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(e-1).$$

Obsérvese que la otra integral iterada no se puede calcular utilizando el teorema fundamental del cálculo por carecer la función $g(x) = e^{x^2}$ de primitiva elemental.

Ejemplo 3.3
Averigua si la función $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ *es integrable en el conjunto* $A = [0,1] \times [0,1]$ *y, en su caso, calcula la integral.*

La función f *no está acotada en el conjunto* $]0,1]\times]0,1]$ *y por tanto no es posible razonar como en el ejercicio anterior para deducir que* f *es integrable. Aplicaremos el teorema de la convergencia monótona. Tomamos* $A_n := [\frac{1}{n},1] \times [\frac{1}{n},1]$ *y* $f_n := f\chi_{A_n}$. *Puesto que* f *es continua en el intervalo compacto* A_n *se sigue que* f_n *es integrable y además, aplicando el teorema de Fubini, obtenemos que*

$$\int f_n = \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right)^2 = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

Puesto que la sucesión (f_n) *es creciente y converge c.p.p. a la función* $f\chi_A$, *el teorema de la convergencia monótona permite concluir que* f *es integrable en* A *y* $\displaystyle\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int f_n = 4$

Ejemplo 3.4
Calcular $\int\int_A xE(1+x+y)dxdy$, *siendo* $A := [0,1] \times [0,1]$ *y donde* $E(t)$ *denota la parte entera de* t, *discutiendo previamente la integrabilidad de la función.*

Observamos que f *está acotada en* A *y los puntos de discontinuidad de la función* $f(x,y) = xE(1+x+y)$ *en* A *estan contenidos en el conjunto* $\{(x,y) \in A : x+y = 1\}$, *que es nulo y por tanto* f *es integrable Lebesgue en* A *(teorema de Lebesgue-Vitali). Para calcular la integral descomponemos* A *como* $A = B \cup C \cup \{(1,1)\}$, *siendo* $B := \{(x,y) \in A : 0 \leq x+y < 1\}$, $C := \{(x,y) \in D : 1 \leq x+y < 2\}$. *Entonces la igualdad* $f\chi_A = f\chi_B + f\chi_C$ *se cumple en todo* $\mathbb{R}^2$ *excepto en el punto* $(1,1)$ *y por tanto* $\displaystyle\int\int_A f(x,y)dxdy = \int\int_B f(x,y)dxdy + \int\int_C f(x,y)dxdy$ *Pero*

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int\int_B xdxdy = \int_0^1 (\int_0^{1-x} xdy)dx = \frac{1}{6}$$

y también

$$\int\int_C f(x,y)dxdy = \int\int_C 2xdxdy = \int_0^1 (\int_{1-x}^{1} 2xdy)dx = \frac{2}{3}.$$

De donde $\displaystyle\int\int_A f(x,y)dxdy = \frac{5}{6}$.

2 Teorema de Tonelli-Hobson

Sea f *una función medible en* $\mathbb{R}^2$. *Si existe la integral iterada*

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mid f(x,y) \mid dy)dx$$

entonces f *es integrable Lebesgue.*

Ejemplo 3.5
Averiguemos si la función $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ *es integrable en el conjunto* $A = [0,1] \times [0,1]$ *y, en su caso, calcula la integral.*

Comprobaremos que f *es integrable aplicando el Teorema de Tonelli-Hobson. La función* f *es medible por ser continua c.p.p. Además, la función de una variable* $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *es integrable en el intervalo*

$[0,1]$ con integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$ y por tanto existe la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mid f(x,y) \mid \; dy \right) \; dx = \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy \right) = 4.$$

Queda probado que f es integrable en A y además el teorema de Fubini nos permite concluir $\int \int_A f(x,y) dx dy = 4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Averigua si la función f es integrable en el conjunto A y , en caso afirmativo, calcula la integral correspondiente. p

Ejercicio 3.1
$f(x,y) := e^{x+y}$*; $A =$ triángulo de vértices $(0,0), (2,2)$ y $(4,0)$.*

Ejercicio 3.2
$f(x,y) := \frac{sen\ x}{x}$ *; $A =$ región del primer cuadrante encerrada por su bisectriz y la parábola $y = x^2$.*

Ejercicio 3.3
$f(x,y) := \frac{1}{y^2}$, si $0 < x \le y < 1$; $f(x,y) := -\frac{1}{x^2}$, si $0 < y < x < 1$.

Ejercicio 3.4
$f(x,y) := (x+y)^{-2}$ *en la parte del intervalo $[1,2] \times [1,4]$ comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = 2x$.*

Ejercicio 3.5
$f(x,y) := x+y$ *en la parte del intervalo $[0,1] \times [0,1]$ comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$.*

Ejercicio 3.6
$f(x,y) = \mid cos(x+y) \mid$*; $A := [0,\pi] \times [0,\pi]$.*

Ejercicio 3.7
$f(x,y) = xyE(y^2 - x)$ *; $A := [0,1] \times [0,2]$.*

Ejercicio 3.8
$f(x,y,z) = (x+y+z)^{-3}$ *; $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \le 1; x,y,z \ge 0\}$.*

Ejercicio 3.9
$f(x,y) = e^{x+y}$ *; $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid + \mid y \mid \le 1\}$.*

Ejercicio 3.10
$f(x,y) = xy \mid sen(x^2+y^2) \mid$ *; $A := [0,\sqrt{\pi}] \times [0,\sqrt{2\pi}]$.*

Ejercicio 3.11
$f(x,y) = \max(y,x^2)$ *; $A := [0,1] \times [0,1]$.*

Ejercicio 3.12
$f(x,y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta}$ *; $A := [0,1] \times [0,1]$.*

Ejercicio 3.13
$f(x,y) = e^{-xy}$ *; $A := \{(x,y) : \; x \ge 1 \; , \; 1 \le xy \le 2\}$.*

Ejercicio 3.14
$f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ *; $A := [0,1] \times [1,\infty[$.*

Ejercicio 3.15
Averigua si $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ es integrable en el conjunto A descrito por las desigualdades $0 \le x \le 2y$.

Práctica 4
Cambios de variable. Cálculo de Áreas y Volúmenes

1 Fórmula de cambio de variables

Sean D un subconjunto abierto de R^n, T una transformación de coordenadas en D y K un subconjunto medible de D. Sea f una función real definida en la imagen $K^* = T(K)$ y supongamos que existe la integral de Lebesgue $\displaystyle\int_K f(T(y)) \mid J_T(y) \mid dy$. Entonces también existe la integral de Lebesgue $\displaystyle\int_{K^*} f(x)dx$ y se tiene

$$\int_{K^*} f(x)dx = \int_K f(T(y)) \mid J_T(y) \mid dy.$$

Ejemplo 4.1
Vamos a calcular $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Como consecuencia tendremos que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Sean $D :=]0,\infty[\times]0,2\pi[$ y $T : D \to \mathbb{R}^2$ el cambio a coordenadas polares $T(\rho,\theta) := (\rho cos\theta, \rho sen\theta)$. Entonces $D^* = T(D) = \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[$, $J_T(\rho,\theta) = \rho$ y la función $g(\rho,\theta) := f(\rho cos\theta, \rho sen\theta) \mid J_T(\rho,\theta) \mid$ viene dada por $g(\rho,\theta) = \rho e^{-\rho^2}$. La función g es medible en el rectángulo D por ser continua y además $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\int_{\mathbb{R}} \mid g(\rho,\theta) \mid d\rho)d\theta = 2\pi\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho = \pi$. Por aplicación de los teoremas de Tonelli-Hobson y Fubini concluimos que g es integrable en D y además $\displaystyle\int\int_D g(\rho,\theta)d\rho d\theta = \pi$. Por la fórmula de cambio de variables se sigue que f es integrable en D^* y $\displaystyle\int\int_{D^*} f(x,y)dxdy = \pi$. Puesto que $f\chi_{D^*} = f$ c.p.p. concluimos que f es integrable en $\mathbb{R}^2$ y $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \pi$. Por último, se sigue del teorema de Fubini que $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = (\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx)^2$.

En el problema anterior, la fórmula de cambio de variables permite transformar una función difícil de integrar en otra más sencilla. En el ejemplo siguiente lo que se pretende modificar es el recinto de integración.

Ejemplo 4.2
Calculemos $\int\int_A x^2y^2dxdy$, siendo A la región acotada del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 \le xy \le 2, x \le y \le 4x\}$. Integraremos mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases}$$

Con más precisión, sean $D :=]0,\infty[\times]0,\infty[$ y $R : D \to \mathbb{R}^2$ la transformación de coordenadas $R(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$. Se comprueba fácilmente que $R(D) = D$. Ponemos $T := R^{-1}$, que es también una transformación de coordenadas. Denotamos $R(x,y) = (u,v)$, $T(u,v) = (x,y)$. Sea $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le$

$2, 1 \leq v \leq 4\}$ de modo que $T(B) = A$. Puesto que $J_R(x, y) = 2\frac{y}{x}$ se sigue del teorema de derivación de funciones inversas que $J_T(u, v) = \frac{1}{2v}$. Entonces, por la fórmula de cambio de variables obtenemos

$$\int\int_A x^2y^2dxdy = \int\int_B \frac{u^2}{2v}dudv.$$

Esta última integral se resuelve fácilmente como aplicación del teorema de Fubini.

Ejemplo 4.3
Comprobemos que la función $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^2}$ es integrable en el triángulo A de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ y calculemos la integral correspondiente.

La función f no está acotada en A. Para deducir la integrabilidad de f utilizaremos el criterio de comparación y con el objeto de mayorar la función pasamos a coordenadas polares, obteniendo

$$| f(x, y) |= \frac{1}{\rho}\frac{| cos\theta - sen\theta |}{| cos\theta + sen\theta |^2} \leq \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La función $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es integrable en el disco unidad D (lo que se comprueba efectuando un cambio a coordenadas polares!) y puesto que $f\chi_A$ es medible y $| f\chi_A |\leq g\chi_D$ se concluye que f es integrable en el conjunto A.

Para calcular la integral efectuamos el cambio de variables

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases}$$

Es decir, consideramos la transformación de coordenadas $T(u, v) = (\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2})$ y ,teniendo en cuenta que $A = T(B)$ siendo $B := \{(u, v) \ : \ 0 \leq u \leq 1 \ , \ -u \leq v \leq u\}$ y el jacobiano de la transformación vale $JT(u, v) = -\frac{1}{2}$ se obtiene

$$\int\int_A f(x, y)dxdy = \int\int_B \frac{v}{2u^2} = 0.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 4.1

Calcular $\int\int_A log(x^2 + y^2)dxdy$ siendo A la región en el primer cuadrante comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ $(0 < a < b)$.

Ejercicio 4.2

Calcula $\int\int_A xdxdy$, $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Ejercicio 4.3

Calcula, mediante cambio a coordenadas esféricas $\int\int\int_A (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, siendo A la bola unidad en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4.4

Discute la integrabilidad de $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ *en la bola unidad según los valores de* α.

Ejercicio 4.5

Calcular $\displaystyle\int\int_A \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)}{4xy^2}dxdy$, *siendo* A *el recinto comprendido entre las curvas* $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-2x=0$, $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$.

Ejercicio 4.6

$\displaystyle\int\int\int_A \frac{1+3x^3}{x}dxdydz$, *siendo* A *la región en* $\mathbb{R}^3$ *descrita por las desigualdades* $x^2 \leq 2y \leq 4x^2$, $y^2 \leq z \leq 3y^2$, $1 \leq xy \leq 2$.

Ejercicio 4.7

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy.$$

Ejercicio 4.8

Calcular $\displaystyle\int\int_A x dxdy$ *siendo* A *el recinto limitado por una curva cuya ecuación en coordenadas polares es* $\rho = 1 + cos\theta$.

Ejercicio 4.9

$$\int\int_A \frac{1}{xy}dxdy,\ A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^3} \leq y \leq \frac{3}{x^3}, x \leq y^3 \leq 3x, y \geq 0\}.$$

Ejercicio 4.10

Calcular $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, *siendo* A *el recinto comprendido entre las 4 curvas* $x^2+y^2-6x=0$, $x^2+y^2-8x=0$, $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-2y=0$.

Ejercicio 4.11

Calcula $\displaystyle\int\int\int_A (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, *siendo* $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

Ejercicio 4.12

Estudia la integrabilidad de $f(x,y) = e^{\frac{x-y}{x+y}}$ *en el conjunto de puntos del primer cuadrante que cumplen* $x+y \leq 1$.

2 Cálculo de áreas y volúmenes

Dado un subconjunto medible A de $\mathbb{R}^2$ se define su área como $Area(A) = \int\int_A dxdy$*, que será finita suponiendo que la función característica* χ_A *de* A *sea integrable Lebesgue en* $\mathbb{R}^2$*. Análogamente el volumen de un subconjunto medible* A *de* $\mathbb{R}^3$ *viene dado por* $Volumen(A) = \int\int\int_A dxdydz$*.*

Si A es la región limitada superiormente por una superficie de ecuación $z = f(x, y)$ e inferiormente por una región del plano XY, es decir,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

siendo D un subconjunto medible de $\mathbb{R}^2$ y f una función positiva e integrable Lebesgue en D entonces, el teorema de Fubini permite concluir que

$$Volumen(A) = \int\int_D f(x, y)dxdy.$$

Dado un subconjunto medible y con volumen finito A de $\mathbb{R}^3$ denotamos por A_z la sección $A_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$. Se sigue del teorema de Fubini que A_z es medible en $\mathbb{R}^2$ para casi todo $z \in \mathbb{R}$ y se cumple

$$Volumen(A) = \int_{\mathbb{R}} Area(A_z)dz.$$

La fórmula anterior expresa el principio de Cavalieri, según el cual el volumen de un sólido queda determinado si se conoce el área de toda sección transversal plana que sea perpendicular a una recta definida (en este caso el eje Z).

Ejemplo 4.4
Hallemos el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Sean $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$. El volumen pedido viene dado por

$$\int\int_D f(x, y)dxdy.$$

Ejemplo 4.5
Calculemos el volumen de la región comprendida entre los dos cilindros perpendiculares entre sí $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$. Para cada $x \in [-2, 2]$ la sección $A_x := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ viene dada por $A_x = [-f(x), f(x)] \times [-f(x), f(x)]$, siendo $f(x) = 3(1 - \frac{x^2}{4})^{\frac{1}{2}}$. Por otra parte $A_x = \varnothing$ si $| x |> 2$. Por el principio de Cavalieri

$$Volumen(A) = \int_{-2}^{2} Area(A_x)dx = \int_{-2}^{2} 4(f(x))^2dx.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 4.13
Hallar el área de la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 4x$, $x + 4y = 1$, $x + 4y = 4$.

Ejercicio 4.14
Hallar el área limitada por un bucle de lemniscata de ecuación (en coordenadas polares) $\rho^2 = a^2 cos2\theta$.

Ejercicio 4.15
Hallar el volumen del sólido descrito por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \leq ay$.

Este es el volumen interceptado en un cilindro de radio $R = \frac{a}{2}$ *por una esfera de radio doble cuyo centro está en la superficie del cilindro (problema de la bóveda de Viviani).*

Ejercicio 4.16
Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Ejercicio 4.17
A través de una esfera de radio 2 se perfora un túnel cil!ndrico de diametro 1. Suponiendo que el eje del cilindro pase por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido que queda.

Ejercicio 4.18
Calcular el volumen del toro obtenido por rotación alrededor del eje Z, de la circunferencia (en el plano YZ) $z^2 + (y - a)^2 = b^2$ $(0 < a < b)$.

Ejercicio 4.19
Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie de ecuación $z = x^3 y$ *e inferiormente por el triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$.

Ejercicio 4.20
Encontrar el volumen de la menor de las dos porciones en las que una esfera de radio r es dividida por un plano cuya distancia al centro es h $(h < r)$.

Ejercicio 4.21
Calcular el volumen del sector esférico de la esfera de radio 1 cuyo cono forma en el vértice un ángulo que mide $\dfrac{\pi}{6}$.

Ejercicio 4.22
Calcula el volumen del sólido descrito por la desigualdad $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$.