PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE UNA VARIABLE

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2002/2003

Profesores responsables
Oscar Blasco
Antonio Galbis
Jesús García
Josep Martínez
Aníbal Moltó
Carmen de las Obras
Sergio Segura
J. Julián Toledo

Práctica 1
Los Conjuntos Numéricos Básicos

El objetivo de esta práctica es operar y calcular con números, más concretamente con números reales. El conjunto de ellos, que denotaremos por $\mathbf{R}$, se define axiomáticamente y contiene, entre otros, a los conjuntos de los números naturales ($\mathbf{N}$), enteros ($\mathbf{Z}$) y racionales ($\mathbf{Q}$). Geométricamente su representación es una recta. Escogido un punto como el 0 y a su derecha el 1 se determina la escala y la representación decimal permite identificar cada número real como un punto de la recta. La relación de orden "ser menor que" se interpreta geométricamente como "estar a la izquierda de".

1 Los números naturales. El principio de inducción matemática

Una de las propiedades características del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$ es el llamado *principio de inducción matemática* que nos permite afirmar que si tenemos una propiedad P sobre números naturales y sabemos que es cierta para el 1, y siempre que sea cierta para n es cierta para $n+1$, entonces la propiedad es cierta para todos los números naturales. Más rigurosamente:

Sea $\mathbf{A} \subset \mathbf{N}$ tal que (i) $1 \in \mathbf{A}$ y (ii) $n+1 \in \mathbf{A}$ siempre que $n \in \mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A} = \mathbf{N}$.

En algunos casos es más útil el denominado *principio de inducción completa* que afirma que si una propiedad sobre números naturales es cierta para el 1 y es cierta para $n+1$ siempre que es cierta para todos los naturales menores o iguales que n, entonces es cierta para todos los números naturales. Más concretamente:

Sea $\mathbf{A} \subset \mathbf{N}$ tal que (i) $1 \in \mathbf{A}$ y (ii) $n+1 \in \mathbf{A}$ si $1, ..., n \in \mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A} = \mathbf{N}$.

No es nuestro objetivo ni demostrar los resultados anteriores a partir de una axiomática de la teoría de conjuntos, ni establecer su equivalencia. Para más información el estudiante interesado puede consultar el texto de M. Spivak (ver bibliografía de teoría) y el opúsculo "El Método de Inducción Matemática" de Sominski en Lecciones Populares de Matemáticas (Ed. Mir). Pasemos a aplicaciones sencillas del método de inducción matemática.

Ejemplo 1.1
Probemos que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En efecto; sea $\mathbf{A} := \{n \in \mathbf{N} : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$. *Es evidente que* $1 \in \mathbf{A}$. *Si* $n \in \mathbf{A}$, *veamos que* $n+1 \in \mathbf{A}$:

$$1 + 2 + ...n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Luego la identidad se satisface con $n+1$ *y* $n+1 \in \mathbf{A}$. *En definitiva* $\mathbf{A} = \mathbf{N}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.1
Probar que todo número natural es par (se puede escribir como $2p$ con p natural) o impar (se puede escribir como $2p-1$ con p natural). Deducir de lo anterior que un número natural es par (respectivamente impar) si, y sólo si, su cuadrado es par (respectivamente impar).

Ejercicio 1.2
Demostrar que un cajero automático cargado con billetes de dos y cinco mil pesetas siempre puede dispensar una cantidad en miles de pesetas superior a cuatro mil.

Ejercicio 1.3
Probar que n rectas del plano concurrentes en un punto dividen a aquél en $2n$ partes.

Ejercicio 1.4
Si $S_n := \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}$ *calcular* S_1, S_2, S_3, S_4,...,*inducir un probable valor de* S_n *y probar que se está en lo cierto aplicando el principio de inducción.*

Ejercicio 1.5
Probar que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 1.6
Probar que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ejercicio 1.7
Comprobar que se cumplen las desigualdades:
(i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} ... \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, *si* $n = 1, 2, ...$
(ii) $n! > 2^{n-1}$, *si* $n = 3, 4, ...$
(iii) $2!.4!....(2n)! > ((n+1)!)^n$, *si* $n = 2, 3...$

Ejercicio 1.8 (Desigualdad de J. Bernouilli)
(i) Si $x_1, ..., x_n$ *son números reales del mismo signo, mayores que -1, probar que*

$$(1 + x_1).(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n$$

(ii) Deducir que si $x > -1$, *entonces* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. *Estudiar cuándo y porqué se alcanza la igualdad.*

Ejercicio 1.9
Probar que todo número de la forma $5^n - 1$, *con* n *natural, es divisible por 4. Teniendo en cuenta este resultado y el hecho de que si dos números son divisibles por p entonces su suma y su diferencia también lo son, probar que todo número de la forma* $5^n + 2.3^{n-1} + 1$, *con* n *natural, es divisible por 8.*

Ejercicio 1.10
Demostrar que las potencias de 12.890.625 terminan siempre en esas ocho cifras.

Más aplicaciones del principio de inducción se estudiarán en el segundo tema a la hora de definir sucesiones.

2 Los números racionales

Otro subconjunto notable de $\mathbf{R}$ es $\mathbf{Q}$, el conjunto de los números racionales, formado por todos los cocientes de enteros (con el divisor no nulo). Todo racional tiene infinitas representaciones pero, por cuestiones triviales de divisibilidad, siempre es posible encontrar una que involucre a enteros primos entre sí e incluso con divisor natural. En teoría se prueba que existe un número real cuyo cuadrado es 2 y que tal número no es racional. El argumento se puede extender para 3, 5, 6 ... y en general para todo n no cuadrado perfecto. Siguiendo un argumento similar veamos el

Ejemplo 1.2
Probemos que el número real cuyo cubo es 24 no es racional (en otras palabras $\sqrt[3]{24}$ *es irracional).*

Supongamos que $\sqrt[3]{24}$ *es racional. Entonces* $\sqrt[3]{24} = \frac{p}{q}$ *siendo p y q enteros con* $m.c.d.(p, q) = 1$. *En ese caso* $24 = \frac{p^3}{q^3}$ *y* $24q^3 = p^3$. *Luego 24 divide a* p^3, *de donde no podemos deducir que 24 divida a p (piensese que 24 divide a* 6^3 *pero no divide a 6). Para poder continuar el razonamiento notemos que 24 no es primo. Descompongámoslo en factores primos y tendremos* $p^3 = 2^3.3.q^3$ *lo que nos dice que 3 divide a* p^3 *y, por lo tanto, a p. Sea* $p = 3k$, *de ahí que* $3^3.k^3 = 2^3.3.q^3$, *luego* $3^2.k^3 = 2^3.q^3$ *lo que asegura que 3 divide a q. Hemos, pues, encontrado un divisor común a p y q lo que invalida la hipótesis de que* $m.c.d.(p, q) = 1$.

Siguiendo este método se puede llegar a probar que $\sqrt[k]{n}$ *sólo es racional si* $n = m^k$.

Ejemplo 1.3
Si a es racional y b es irracional $a+b$ es irracional pues si no fuese así al restar los racionales $a+b$ y a necesariamente obtendríamos un racional pero esa diferencia nos da b. Por un razonamiento análogo el producto es irracional salvo el caso en que $a=0$. Si a y b son ambos irracionales la suma y el producto no se puede predecir si son o no racionales o irracionales. Consideremos como casos antagónicos primero $a=\sqrt{2}$ y $b=-\sqrt{2}$, y en segundo lugar $a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt{3}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.11
Demostrar que si n y m son naturales no cuadrados perfectos entonces $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ es irracional.

Ejercicio 1.12
Probar que $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es irracional.

Ejercicio 1.13
Demostrar que si m y n son naturales cuyo producto no es cuadrado perfecto, entonces tanto $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ como $\sqrt{n}-\sqrt{m}$ son irracionales. Estudiar el carácter de $\sqrt{p-1}-\sqrt{p+1}$ para p un natural cualquiera.

Ejercicio 1.14
Si a,b,c,d son racionales siendo c no nulo y x irracional, probar que $\frac{ax+b}{cx+d}$ es irracional si, y sólo si, $ad \neq bc$.

Ejercicio 1.15
Demostrar que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ es racional. Como sugerencia se puede elevar al cubo y comprobar que dicho número es raíz de un cierto polinomio.

3 Propiedades de orden de los números reales. Valor absoluto

El orden definido en el cuerpo de los números reales nos permite definir y caracterizar subconjuntos notables como son los intervalos y uniones de éstos. Una propiedad importante relacionada con el orden es la acotación: un subconjunto **A** de **R** se dice que está *acotado superiormente* si existe un número real M, llamado *cota superior* que es mayor o igual que cualquier elemento de **A**. Sustituyendo mayor por menor obtenemos las definiciones de subconjunto *acotado inferiormente* y de *cota inferior*. Si un conjunto está acotado superior e inferiormente simplemente le llamamos *acotado*.

Una propiedad crucial de los números reales es aquella que afirma que dado un subconjunto **A** no vacío que está acotado superiormente existe un número real que es la más pequeña entre sus cotas superiores. A tal elemento se le llama *supremo* y se lo denota por $sup(\mathbf{A})$. Si el supremo pertenece al conjunto se le denomina *máximo* y denotamos $max(\mathbf{A})$. Conceptos duales considerando acotación inferior en lugar de superior son el *ínfimo*, $inf(\mathbf{A})$, y el *mínimo*, $min(\mathbf{A})$.

Otro concepto útil es el del *módulo* o *valor absoluto* de un número real x. Se denota por $|x|$ y se define como el propio x si $x \geq 0$, y como $-x$ en otro caso. Geométricamente significa, en la recta real, su distancia al 0.

Ejemplo 1.4
Los intervalos $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ y $]a,b]$ son acotados y para todos a es su ínfimo (mínimo en el primero y el tercero) y b es su supremo (máximo en el primero y en el cuarto).

Ejemplo 1.5
Hallar el conjunto de números reales x que cumplen que $x^2-4x+3>0$.

Como $x^2-4x+3=(x-1).(x-3)$, y teniendo en cuenta que el producto de dos reales es positivo si, y sólo si, ambos son a la vez positivos o negativos, el problema se reduce a estudiar dos casos. En primer lugar si $x-1>0$ y $x-3>0$, lo que ocurre cuando $x>3$ y, en segundo lugar si $x-1<0$ y $x-3<0$, lo que ocurre cuando $x<1$. Uniendo los resultados de ambos casos obtenemos que el conjunto es $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.

Mediante la representación de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ se puede ver una interpretación geométrica del resultado.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.16
Probar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son subconjuntos acotados de $\mathbf{R}$, también lo es su unión teniendose que

$$sup(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = max(sup\mathbf{A}, sup\mathbf{B}), \quad inf(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = min(inf\mathbf{A}, inf\mathbf{B}).$$

Dar un ejemplo de una unión infinita de conjuntos acotados cuya unión no esté acotada.

Ejercicio 1.17
Sea $\mathbf{A}$ un subconjunto acotado de $\mathbf{R}$.
(i) Si $\mathbf{B}$ es un subconjunto de $\mathbf{A}$ entonces probar que $inf(\mathbf{A}) \leq inf(\mathbf{B}) \leq sup(\mathbf{B}) \leq sup(\mathbf{A})$.
(ii) Si por $\alpha\mathbf{A}$ denotamos el conjunto que resulta de multiplicar por α todos los elementos de $\mathbf{A}$, probar que $sup(\alpha\mathbf{A}) = \alpha.sup(\mathbf{A})$ e $inf(\alpha\mathbf{A}) = \alpha.inf(\mathbf{A})$ cuando α es positivo, mientras que $sup(\alpha\mathbf{A}) = \alpha.inf(\mathbf{A})$ e $inf(\alpha\mathbf{A}) = \alpha.sup(\mathbf{A})$ en caso de que α sea negativo.

Ejercicio 1.18
Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son sendos subconjuntos acotados y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ denota el conjunto de todas las sumas que resultan al escoger un elemento de $\mathbf{A}$ y otro de $\mathbf{B}$ probar que

$$sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = sup(\mathbf{A}) + sup(\mathbf{B}), \quad inf(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = inf(\mathbf{A}) + inf(\mathbf{B}).$$

Explicar qué ocurre con el conjunto que resulta de tomar todos los productos de un elemento de $\mathbf{A}$ por un elemento de $\mathbf{B}$.

Ejercicio 1.19
Comprobar que si x e y son números reales se tiene que

$$max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Encontrar una expresión análoga para el mínimo.

Ejercicio 1.20
Hallar los subconjuntos de números reales que cumplen:
(i) $5 - x^2 < 8$
(ii) $|x - 3| < 8$
(iii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > 0$
(iv) $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$
(v) $|x - 1| + |x - 2| > 1$

Ejercicio 1.21
Encontrar, si existen, el supremo y el ínfimo de los conjuntos siguientes:
(i) $\{x \in \mathbf{R} \quad | \quad |x^2 - 3| \leq 1\}$
(ii) $\{x \in \mathbf{Q} \quad | \quad 0 \leq x^2 \leq 2\}$
(iii) $\{\frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbf{Z} \quad n \neq 0\}$
(iv) $\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \quad | \quad n \in \mathbf{N}\}$
(v) $\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^m} \quad | \quad n, m \in \mathbf{N}\}$

Ejercicio 1.22
(i) Demostrar que si x e y son números reales se tiene $2xy \leq x^2 + y^2$.¿ Cuándo se da la igualdad ?
(ii) Deducir de lo anterior que si x e y no son nulos $x^2 + y^2 + xy > 0$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS:

Ejercicio 1.23
Probar que si $x > 0$, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$, y deducir que si x, y, z son reales positivos

$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$$

Ejercicio 1.24
Demostrar que si x, y, z son reales positivos con $z \leq x + y$, entonces

$$\frac{z}{1+z} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$$

Ejercicio 1.25
Probar que si x es un real mayor o igual que la unidad

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

Práctica 2
Sucesiones numéricas

En esta práctica estudiaremos los métodos más habituales para hallar el límite de una sucesión, empezando por el cálculo de algunos límites muy sencillos utilizando sólo la definición. Del estudio que se ha realizado con el cálculo de límites se han obtenido resultados que nos permiten asegurar que del conocimiento de los límites de dos sucesiones se puede obtener el límite de otra sucesión obtenida como suma, producto, ... de las dos anteriores. Sin embargo, hay otros casos que se llaman de indeterminación en los que no es posible calcular en el caso general el límite, siendo necesario hacer el estudio en cada ejemplo particular. Estos casos son los siguientes: (1) $+\infty + (-\infty)$

(2) $0.\infty$
(3) $\frac{0}{0}$
(4) $\frac{\infty}{\infty}$
(5) ∞^0
(6) 0^0
(7) 1^∞

A lo largo de esta práctica veremos algunas estrategias para calcular límites cuando se presentan indeterminaciones.

1 Definición de límite

Se dice que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia ℓ (y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$) si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_\epsilon$, entonces $|a_n - \ell| < \epsilon$.

Cuando queramos verificar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, dado $\epsilon > 0$, hay que partir de la condición $|a_n - \ell| < \epsilon$ para encontrar una condición sobre los índices $n \in \mathbb{N}$ que implique la anterior desigualdad.

Ejemplo 2.1
Vamos a demostrar que la sucesión $(\frac{2n}{3n-7})_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $2/3$.

Para ello, dado $\epsilon > 0$, *hemos de averiguar qué números naturales* n *satisfacen la desigualdad* $|\frac{2n}{3n-7} - \frac{2}{3}| < \epsilon$. *Como* $|\frac{2n}{3n-7} - \frac{2}{3}| = |\frac{14}{9n-21}|$, *se deduce que la desigualdad buscada es equivalente a* $|\frac{14}{9n-21}| < \epsilon$. *Por otro lado,* $\frac{14}{9n-21} > 0$ *cuando* $n \geq 3$ *con lo cual esta desigualdad es a su vez equivalente a las siguientes:*

$\frac{14}{9n-21} < \epsilon$ *cuando* $n \geq 3$
$\frac{14}{\epsilon} < 9n - 21$ *cuando* $n \geq 3$
$\frac{1}{9}(\frac{14}{\epsilon} + 21) < n$ *cuando* $n \geq 3$

Por tanto, basta tomar $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_\epsilon > \frac{1}{9}(\frac{14}{\epsilon} + 21)$ *y este hecho es consecuencia de la propiedad arquimediana. Ahora, si* $n \geq n_\epsilon$, *entonces* $n > \frac{21}{9} = 2.333$ *con lo cual* $n \geq 3$ *y se pueden utilizar las anteriores desigualdades para deducir* $|\frac{2n}{3n-7} - \frac{2}{3}| = \frac{14}{9n-21} < \epsilon$.

En este caso, dado cualquier $\epsilon > 0$, *es posible encontrar un* n_ϵ *que verifique la condición. Por ejemplo, si* $\epsilon = 0.001$, *entonces* $\frac{1}{9}(\frac{2}{\epsilon} + 21) = \frac{1}{9}2021 = 224.555$; *luego se puede tomar como* n_ϵ *cualquier número mayor o igual que* 225; *por ejemplo,* $n_\epsilon = 300$.

2 Límites elementales

Vamos a empezar estudiando algunos límites elementales que son indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Los límites de sucesiones de la forma

$$\text{(a)} \quad \frac{P(n)}{Q(n)} \quad \text{y (b)} \ \frac{\log \ P(n)}{\log \ Q(n)}$$

donde P y Q son polinomios en n de grado p y q respectivamente, se calculan fácilmente procediendo como sigue: En el caso (a) se divide el numerador y el denominador por n^q, con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > q, \\ 0 & \text{si } p < q, \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

siendo $P(n) = a_p n^p + \cdots + a_0$ y $Q(n) = b_q n^q + \cdots + b_0$.

En el caso (b) se escribe $P(n) = n^p f(n)$ y $Q(n) = n^q g(n)$ y al operar, teniendo en cuenta las propiedades del logaritmo neperiano, se obtiene que

$$\frac{\log \ P(n)}{\log \ Q(n)} = \frac{p \log n + \log f(n)}{q \log n + \log g(n)} = \frac{p + \frac{\log f(n)}{\log n}}{q + \frac{\log g(n)}{\log n}}.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \ P(n)}{\log \ Q(n)} = \frac{p}{q}$.

Ejemplo 2.2
Si $a_n = \frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^4+1)}$, *entonces*

$$a_n = \frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^4+1)} = \frac{3\log n + \log(1+1/n^3)}{4\log n + \log(2+1/n^4)} = \frac{3 + \frac{\log(1+1/n^3)}{\log n}}{4 + \frac{\log(2+1/n^4)}{\log n}}.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.1
Demostrar, utilizando la definición de límite, que las sucesiones

$$\left(\frac{n^2-n}{4n^2+2}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \left(\frac{n+1}{6n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \left(\frac{3n^2-1}{5n^2+2}\right)_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2n+1}{7n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

convergen, respectivamente, a $1/4$, 0, $3/5$ *y a* $2/7$.

Hallar un n_ϵ *correspondiente a* $\epsilon = 0.01$ *y a* $\epsilon = 0.0001$.

Ejercicio 2.2
Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$\text{(i)} \ \frac{5n^3-8n^2+3}{4n^3+2n+4} \quad \text{(ii)} \ \frac{4n^2-3n+4}{5n^4+2n^2-3} \quad \text{(iii)} \ \frac{4n^5-8n^2+3}{2n^3+4n-5} \quad \text{(iv)} \ \frac{\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

$$\text{(v)} \ \frac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}} \quad \text{(vi)} \ \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{(vii)} \ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$$

$$\text{(viii)} \ \frac{(\sqrt{2n}+3)^3-n^3}{n^2-2\sqrt{n^5}} \quad \text{(ix)} \ \frac{\log(n^4+4n^3+6n^2-3n+2)}{\log(6n^3+4n^2-5n+7)}.$$

Ejercicio 2.3

En este ejercicio se estudia la convergencia de la sucesión definida por $a_n = a^n$, *donde* $a \in \mathbf{R}$.

(i) Demostrar que si $a > 1$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

(ii) Demostrar que si $|a| < 1$, *se tiene* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

(iii) Demostrar que si $a = -1$, *la sucesión es finitamente oscilante.*

(iv) Demostrar que si $a < -1$, *la sucesión es infinitamente oscilante.*

Ejemplo 2.3

Utilizando el problema anterior y el método descrito para el cálculo de cocientes de polinomios, es posible hallar límites de cocientes de funciones exponenciales. Por ejemplo, vamos a hallar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n + 3^n}$$

En este caso el término del denominador que "diverge más rápidamente" a $+\infty$ *es* 5^n. *Dividiendo numerador y denominador por* 5^n, *se obtiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (\frac{2}{5})^n}{1 + (\frac{3}{5})^n} = 1$$

porque $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{5})^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.4

Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$$\text{(i)}\ \frac{2^n + 7}{3^n} \qquad \text{(ii)}\ \frac{5^n - 3^n + 1}{5^n + 3^n + 1/n}.$$

Para calcular límites de sucesiones de la forma

$$\sqrt[r]{P(n)} - \sqrt[r]{Q(n)}$$

donde P *y* Q *son polinomios en* n *y* $r \in \mathbb{N}$, *procederemos como sigue: llamamos*

$$a = \sqrt[r]{P(n)}, \quad b = \sqrt[r]{Q(n)}.$$

Como $a^r - b^r = (a - b)(a^{r-1} + a^{r-2}b + \cdots + ab^{r-2} + b^{r-1})$, *se obtiene que*

$$\sqrt[r]{P(n)} - \sqrt[r]{Q(n)} = \frac{P(n) - Q(n)}{\sqrt[r]{P(n)^{r-1}} + \cdots + \sqrt[r]{Q(n)^{r-1}}}.$$

De esta manera un límite indeterminado de la forma $+\infty + (-\infty)$ *se ha convertido en uno de la forma* $\frac{\infty}{\infty}$. *Finalmente, dividiendo el numerador y el denominador de esta última expresión por el monomio de mayor grado del denominador, se obtiene el valor del límite.*

Ejemplo 2.4

(1) Calculemos el límite de la siguiente sucesión:

$$(a) \qquad a_n = \sqrt{4n - 1} - \sqrt{3n}.$$

Sea $a = \sqrt{4n-1}$, $b = \sqrt{3n}$. *Entonces,*

$$a_n = a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{n-1}{\sqrt{4n-1} + \sqrt{3n}}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{n}$, *se obtiene que* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(2) Vamos a hallar el límite de

$$(b) \qquad a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n.$$

Escribimos

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3} = a - b =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+1)n^3} + \sqrt[3]{n^6}}.$$

Luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.5

Hallar los límites de las sucesiones siguientes:

$$\text{(i)}\ \sqrt{5n+3} - \sqrt{3n} \qquad \text{(ii)}\ \sqrt{n^2+2n-1} - 4n \qquad \text{(iii)}\ \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2}$$

$$\text{(iv)}\ \sqrt[3]{2n^3+n^2} - \sqrt[3]{2n^3-8n} \qquad \text{(v)}\ \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+n^2+1}} \qquad \text{(vi)}\ \sqrt{n + \sqrt{n^4+1}} - 2n$$

$$\text{(vii)}\ \sqrt{n^4+2} - \sqrt[3]{n^6+1} \qquad \text{(viii)}\ \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \qquad \text{(ix)}\ \sqrt[4]{n^4+n^3} - \sqrt[4]{n^4-7n^3}.$$

3 Subsucesiones

Recordemos que dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y unos índices n_k, donde $k \in \mathbb{N}$, que verifican $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$, se dice que la sucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

La noción de subsucesión es útil para demostrar tanto la convergencia como la divergencia de una sucesión como se deduce de los siguientes resultados.

(1) *Si una sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *posee dos subsucesiones que tienen diferentes límites, entonces* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *no tiene límite.*

(2) *Si* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión tal que todas las subsucesiones que tienen límite, tienen el mismo límite* ℓ; *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Ejemplo 2.5

Vamos a hallar todos lo límites de subsucesiones de la sucesión definida por $a_n = (-1)^n$. *Si* $a = \lim_{n\to\infty} a_{n_k}$, *entonces no puede ocurrir que existan infinitos índices* n_k *que sean pares e infinitos que sean impares (porque de otro modo existirían dos subsucesiones de* $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *que convergerían a diferentes límites). Por consiguiente, a partir de un cierto término la sucesión es constante: existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_{n_k} = 1$ *o bien* $a_{n_k} = -1$ *para todo* $k \geq k_0$. *Por tanto,* $a = 1$ *o bien* $a = -1$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.6
Sea $a_n = \frac{1}{n}$. *Determinar cuáles de las siguientes sucesiones* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *son subsucesiones de la sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(a) $b_n = \frac{1}{n+1}$

(b) $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ \frac{1}{n-1}, & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$

(c) $b_n = \frac{1}{2n-1}$

(d) $b_n = \frac{1}{n!}$

(e) $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$

(f) $b_n = \frac{n-1}{n^2-1}$

(g) $b_n = 2^n a_{2^n}$

(h) $b_n = 2^n a_{2^{n!}}$

Ejercicio 2.7
Hallar todas las subsucesiones convergentes de las sucesiones siguientes. (Existen infinidad de ellas, pero sólo hay una cantidad finita de límites que estas subsucesiones pueden tener.)

(a) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

(b) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/4)$

(c) $a_n = n$

(d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$

(e) $a_n = \begin{cases} 2n, & \textit{si } n \textit{ es impar} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ es par} \end{cases}$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 2.8
Determinar los límites de las subsucesiones convergentes de la sucesión cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Ejercicio 2.9
Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión tal que existen* $a = \lim_{n\to\infty} a_{2n}$ *y* $b = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$. *Demostrar que* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge si, y sólo si,* $a = b$.

Ejercicio 2.10
Demostrar que la sucesión $(\operatorname{sen} n)_{n=1}^{\infty}$ *diverge.*

4 Criterio del emparedado

El enunciado del criterio del emparedado es:

Consideremos tres sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *tales que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $a_n \le b_n \le c_n$ *para todo* $n \ge n_0$. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Es decir, nos asegura la convergencia de una sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ si podemos ponerla entre dos sucesiones que convergen al mismo límite. El encontrar esas dos sucesiones depende de las características de la sucesión dada. En el caso en que la sucesión involucre la parte entera, es útil aplicar las siguientes desigualdades: $x - 1 < [x] \leq x$.

Ejemplo 2.6

Calculemos el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}.$$

Cada uno de los términos que aparece en la sucesión es de la forma $\frac{j}{\sqrt{n^4+jn}}$. *Si sustituímos el denominador por el denominador más grande posible* $\sqrt{n^4+n^2}$ *y después por el más pequeño* $\sqrt{n^4+n}$, *se obtienen las desigualdades*

$$\frac{j}{\sqrt{n^4+n^2}} \leq \frac{j}{\sqrt{n^4+jn}} \leq \frac{j}{\sqrt{n^4+n}} \qquad j = 1, 2, , \ldots, n.$$

De ellas se deduce que

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}} = \frac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^4+n^2}} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} = \frac{n+1}{2n} \cdot \sqrt{\frac{n^4}{n^4+n^2}}$$

de donde se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}} = \frac{1}{2}$. *Análogamente se tiene que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{2}$. *Por el criterio del emparedado se concluye que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.11

Calcular mediante el criterio del emparedado los límites de las sucesiones definidas por:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}$$

$$\text{(iii)}\ \frac{[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]}{n^2} \quad \text{donde } x > 0.$$

$$\text{(iv)}\ \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n+n}{\sqrt{n^4+n}}.$$

$$\text{(v)}\ \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 2.12

(a) Demostrar que si $a_n \in \mathbf{Z}$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(b) Utilizar la parte entera de un número real y el criterio del emparedado para probar que si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Ejercicio 2.13

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *es tal que* $a_n \neq 1$, *llamaremos* $x_n = \frac{1}{a_n - 1}$. *Demostrar que la sucesión* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *definida por*

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{si } a_n = 1; \\ \log\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}, & \text{si, } a_n \neq 1; \end{cases}$$

converge a 1.

(Indicación: Utilizar el ejercicio anterior)

5 Criterios logarítmicos

Para estudiar los límites de sucesiones donde aparecen exponentes es muy útil tomar logaritmos para así convertir las sucesiones en productos o cocientes, y así poder utilizar los resultados conocidos para calcular límites de productos o cocientes. En este contexto son esenciales las siguientes propiedades de las funciones exponencial y logarítmica:

(a) *Si* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión que converge a* ℓ, *entonces* $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\ell}$.
(b) *Si* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números positivos que converge a* $\ell > 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log \ell$.
(c) *Si* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de números positivos que converge hacia* $a > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Sin una definición rigurosa de las dos funciones es imposible demostrar las anteriores propiedades. Sin embargo, es posible justificarlas suponiendo que tenemos definidas las funciones exponencial y logarítmica, que son estrictamente crecientes, que son inversa la una de la otra, y que cumplen algunas propiedades elementales como que $\log 1 = 0$ o que la suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto.

Para demostrar (a), consideremos una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a ℓ. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n - \ell = 0$. Dado $\epsilon > 0$ se cumple que $\log(1-\epsilon) < 0 < \log(1+\epsilon)$, con lo cual existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\log(1-\epsilon) < a_n - \ell < \log(1+\epsilon)$. Por tanto, si $n \geq n_0$, entonces $1 - \epsilon < e^{a_n - \ell} < 1 + \epsilon$ y esto implica que $-\epsilon < e^{a_n-\ell} - 1 < \epsilon$; esto es, $\lim_{n\to\infty} e^{a_n - \ell} = 1$. De aquí se deduce que $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n-\ell} \cdot e^{\ell} = e^{\ell}$.

Para demostrar (b), sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos que converge a $\ell > 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ell} = 1$ Dado $\epsilon > 0$, se cumple que $e^{-\epsilon} < 1 < e^{\epsilon}$, con lo cual existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $e^{-\epsilon} < \frac{a_n}{\ell} < e^{\epsilon}$, y de aquí se deduce que $-\epsilon < \log \frac{a_n}{\ell} < \epsilon$; es decir, $-\epsilon < \log a_n - \log \ell < \epsilon$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log \ell$.

Por último, (c) se deduce inmediatamente de (a) y (b) puesto que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos que converge hacia $a > 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{b \log a} = a^b.$$

Ejemplo 2.7
Consideremos las sucesiones definidas por $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$ *y* $b_n = \frac{n^2}{n^3+n+1}$. *Como* $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *se deduce que* $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = 2^0 = 1$.

Las propiedades (a) y (b) se aplican también al cálculo de indeterminaciones de exponentes, ya que las convierten en indeterminaciones de productos o cocientes, de las que ya conocemos algunos métodos de resolución. Para calcular límites de sucesiones de la forma $({a_n}^{b_n})$, con $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, o bien $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, se considera la sucesión

$$\log({a_n}^{b_n}) = b_n \log a_n.$$

Si $\lambda = \lim_{n\to\infty} \log({a_n}^{b_n})$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lambda}.$$

Ejemplo 2.8
Si $a_n = n^2 + 1$ *y* $b_n = \frac{1}{\log n}$, *entonces*

$$\log {a_n}^{b_n} = \frac{\log(n^2+1)}{\log n} = \frac{2\log n + \log(1+1/n^2)}{\log n}.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \log({a_n}^{b_n}) = 2$, *con lo cual,*

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^2.$$

En el caso de la indeterminación 1^{∞}, existe una fórmula de gran utilidad para calcular esos límites. *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$. *Entonces existe* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ *si, y sólo si, existe* $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)$. *Además, en este caso, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Ejemplo 2.9
Consideremos $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$, *y* $b_n = \frac{n^2+2}{n+1}$. *Entonces,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *con lo cual*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lambda},$$

siendo

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+1}\left(\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+2)}{(n+1)(2n-1)} = 1.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.14
Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$$\text{(i) } \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^3/(n+1)} \quad \text{(ii) } \left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{(n^2+5)/(n+2)} \quad \text{(iii) } \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

$$\text{(iv) } n\log\sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}} \quad \text{(v) } \left(2+3n^4\right)^{1/(1+2\log n)} \quad \text{(vi) } (5n^3+4n-1)^{1/\log(n^2+7n-5)}$$

$$\text{(vii) } \left(\sqrt{\frac{1+3n}{5+3n}}\right)^{n^2/(3n-1)} \quad \text{(viii) } \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{1/(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \quad \text{(ix) } \sqrt[n^2]{n^2+n+1}.$$

Ejercicio 2.15
Sea $a > 0$. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \log a$ *y, como aplicación, calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n.$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 2.16
Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$. *Demostrar que existe* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ *si, y sólo si, existe* $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)$. *Además, en este caso, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

(Indicación: Utilizar el ejercicio 12)

6 Criterios de Stolz

Los siguientes criterios son de gran utilidad para el cálculo de límites de sucesiones de la forma $\frac{a_n}{b_n}$ cuando $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen ambas a cero o divergen a infinito. Son los métodos para resolver indeterminaciones de cocientes de sucesiones análogos a las reglas de L'Hôpital para indeterminaciones de cocientes de funciones derivables.

(a) *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones que convergen a cero, de manera que* $b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots$. *(o bien* $b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$. *) Si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = a \in \mathbf{R},\ +\infty,\ -\infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = a \in \mathbf{R},\ +\infty,\ -\infty.$$

(b) *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de manera que* $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty} \to +\infty$ *(o bien* $0 > b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty} \to -\infty$ *). Si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = a \in \mathbf{R},\ +\infty,\ -\infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a \in \mathbf{R},\ +\infty,\ -\infty.$$

Es importante señalar que, tomando logaritmos, los criterios de Stolz también se pueden aplicar para calcular límites de sucesiones en las que aparezcan raíces.

Ejemplo 2.10

(1) Calculemos el límite de

$$\frac{\log n}{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}.$$

En este caso, $a_n = \log n$, *con lo cual* $a_{n+1} - a_n = \log \frac{n+1}{n}$, *y* $b_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, *con lo cual* $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} > 0$. *Además,* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Como*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \log(\frac{n+1}{n})^{n+1} = \log e = 1;$$

aplicando el criterio de Stolz (b), se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{1 + 1/2 + \cdots + 1/n} = 1.$$

(2) Vamos a calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. *Entonces*

$$\log\Big(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\Big) = -\frac{\log n!}{n}.$$

Definiendo $a_n = \log n!$ *y* $b_n = n$ *se cumple que* $b_{n+1} > b_n$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Por ser*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \log(\frac{(n+1)!}{n!}) = \log n + 1 = -\infty;$$

aplicando el criterio de Stolz (b), se verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$. *Se deduce que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Es importante observar que los criterios de Stolz sólo nos aseguran que si existe el límite de $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, entonces existe el límite de $\frac{a_n}{b_n}$; cuando no existe el límite de $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, no se puede deducir nada.

Ejemplo 2.11

Consideremos la sucesión $\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$, *donde* $[x]$ *denota la parte entera de* x. *Para intentar aplicar el criterio de Stolz se definen* $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]$ *y* $b_n = n$. *Es evidente que la sucesión* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *es estrictamente creciente y diverge a* $+\infty$ *Por otra parte,*

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} 0, & si\ \ n\ \ es\ par, \\ 1, & si\ \ n\ \ es\ impar\ ; \end{cases}$$

cuyo límite no existe. Por consiguiente, no se puede aplicar el criterio de Stolz. De esta situación no se puede deducir que no existe el límite pedido. En efecto, de las desigualdades $\frac{n}{2} - 1 < \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2}$ *se sigue que* $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{1}{2}$ *con lo cual, por el criterio del emparedado,* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{1}{2}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.17
Hallar

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, *donde* $a > 0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Ejercicio 2.18
Calcular los límites siguientes:

$$\text{(i)}\ \frac{4}{n}\Big(\big(\frac{4}{n}\big)^2 + \big(\frac{8}{n}\big)^2 + \big(\frac{12}{n}\big)^2 + \cdots + \big(\frac{4n}{n}\big)^2\Big) \qquad \text{(ii)}\ \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad \text{donde } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{(iii)}\ \Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n} \qquad \text{(iv)}\ \sqrt[n]{\Big(\frac{2}{1}\Big)\Big(\frac{3}{2}\Big)^2 \cdots \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n} \qquad \text{(v)}\ \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$$

$$\text{(vi)}\ \frac{1}{n}\Big(\big(1+\frac{1}{n}\big) + \big(1+\frac{2}{n}\big) + \big(1+\frac{3}{n}\big) + \cdots + \big(1+\frac{n}{n}\big)\Big) \qquad \text{(vii)}\ \frac{n^2+3n}{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$$

$$\text{(viii)}\ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \qquad \text{(ix)}\ \sqrt[n^2]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}} \qquad \text{(x)}\ \Big(\frac{\log 1 + \log 2 + \cdots \log n}{n \log n}\Big)^{\log n}.$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 2.19
Probar que si la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge, entonces también converge la sucesión* $\big((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n\big)_{n=1}^{\infty}$. *Hallar la relación entre ambos límites.*

Ejercicio 2.20
Probar que si $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = a$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

7 Sucesiones definidas por recurrencia

Una de las formas más usuales para definir una sucesión es utilizar el principio de inducción: se define a_1 y, supuesto definido a_n, se define $a_{n+1} = f(a_n)$. En general, no se dispone de ninguna fórmula para el término general, aunque en ciertas ocasiones es posible encontrar alguna.

Ejemplo 2.12
Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *viene definida por* $a_1 = 1$ *y* $a_{n+1} = 2a_n$, *entonces* $a_n = 2^{n-1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *En efecto,* $a_1 = 2^0$ *y suponiendo que* $a_n = 2^{n-1}$, *se deduce que* $a_{n+1} = 2a_n = 2^n = 2^{(n+1)-1}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.21
Encontrar, si existe, una fórmula para las siguientes sucesiones recurrentes. Indicar en cada caso si la sucesión es convergente y si no lo es hallar una subsucesión que lo sea.

(a) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (-1)^n + a_n$.

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n$.

(c) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{2}$.

(d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (-1)^n a_n$.

(e) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$.

Ejercicio 2.22

Sea $a_1 = -1$, *y* $a_{n+1} = 2 - \frac{2}{a_n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

(a) Poner a_{n+2}, a_{n+3} *y* a_{n+4} *en función de* a_n.

(b) Encontrar todos los límites de subsucesiones de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

8 Sucesiones monótonas y sucesiones de Cauchy

Para determinar el límite de una sucesión no siempre es posible utilizar las reglas usuales del cálculo de límites, bien porque la fórmula del término general es complicada o bien porque no disponemos de ninguna. En estos casos el problema principal radica en demostrar que la sucesión converge sin conocer previamente cúal es el límite. Se disponen de dos criterios para determinar si una sucesión converge sin hacer referencia al límite:

Una sucesión monótona converge si, y sólo si, es acotada.

Toda sucesión de Cauchy converge.

Ilustraremos la utilización de estos criterios con las siguientes sucesiones.

Ejemplo 2.13

$$(a) \qquad a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \frac{1}{5^4+1} + \frac{1}{5^5+1} + \cdots + \frac{1}{5^n+1}.$$

En este caso, la sucesión es monótona creciente porque para cada $n \in \mathbb{N}$ *se cumple* $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5^{n+1}+1} > 0$. *Veamos que también es acotada superiormente.*

$$a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \cdots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}}$$

por ser la suma de n *términos de una progresión geométrica. Se deduce que* $a_n < \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$. *Por tanto la sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es monótona creciente y acotada superiormente, luego converge.*

$$(b) \qquad a_n = \frac{1}{5+1} - \frac{1}{5^2+1} - \frac{1}{5^3+1} + \frac{1}{5^4+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n+1}.$$

Evidentemente, la sucesión no es monótona: ni creciente ni decreciente. Para ver que converge demostraremos que es una sucesión de Cauchy. Fijado $n \in \mathbb{N}$, *consideremos* $|a_{n+p} - a_n|$ *y veamos que lo podemos acotar para todo* $p \in \mathbb{N}$. *En efecto,*

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+2}}{5^{n+1}+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{5^{n+p}+1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{5^{n+1}+1} + \cdots + \frac{1}{5^{n+p}+1} < \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{5^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{5^n}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^p}\right) = \frac{1}{5^n}\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{p+1}}}{1 - \frac{1}{5}} < \frac{1}{5^n}\frac{1}{4}$$

y se tiene que el miembro que mayora es independiente de p. *Como* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}\frac{1}{4} = 0$, *para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$, *entonces* $\frac{1}{5^n}\frac{1}{4} < \epsilon$. *Luego si* $n \geq n_0$ *y* $p \in \mathbb{N}$, *entonces* $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{5^n}\frac{1}{4} < \epsilon$ *con lo cual la sucesión es de Cauchy y consiguientemente converge.*

Ejemplo 2.14

Probar que converge la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{5+1} - \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} - \frac{1}{5^4+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n+1}.$$

Una forma muy sencilla de demostrar que una sucesión es de Cauchy es aplicando el siguiente resultado, cuya demostración se halla en el manual de R. G. Bartle y D. R. Sherbert "Introducción al Análisis Matemático de una Variable" pag. 120.

Sea la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que existen* c, *con* $0 \leq c < 1$, *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c|a_{n+1} - a_n|$ *para todo* $n \geq n_0$.

(a) La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy y, por tanto, converge.*

(b) Si $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, *entonces para todo* $n \geq n_0$ *se cumple*

$$|\ell - a_{n+1}| \leq \frac{c}{1-c}|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{c^{n-n_0+1}}{1-c}|a_{n_0+1} - a_{n_0}|.$$

Este resultado también proporciona una estimación del error cometido al aproximar el límite por un término de la sucesión. Es particularmente interesante para aproximar raíces de algunas funciones.

Ejemplo 2.15

La ecuación cúbica $3x^3 - 2x^2 - 15x + 2 = 0$ *tiene una única solución en el intervalo* $[0,1]$. *Para calcularla, se define* $a_1 = \frac{1}{2}$ *y* $a_{n+1} = \frac{1}{15}(3a_n^3 - 2a_n^2 + 2)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Vamos a demostrar*

(a) $a_n \in [0,1]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

(b) La sucesión converge.

(c) Su límite es una raíz de la ecuación dada en $[0,1]$.

(a) Se demuestra por inducción. Es evidente que $a_1 = \frac{1}{2} \in [0,1]$. *Supongamos ahora que* $a_n \in [0,1]$. *Entonces* $a_n^3 \in [0,1]$ *y* $a_n^2 \in [0,1]$, *con lo cual* $3a_n^3 - 2a_n^2 + 2 \leq 3 + 2 = 5$ *y* $3a_n^3 - 2a_n^2 + 2 \geq 0$. *Luego,* $(3a_n^3 - 2a_n^2 + 2) \in [0,5]$ *y, por tanto,* $a_{n+1} = \frac{1}{15}(3a_n^3 - 2a_n^2 + 2) \in [0,1]$. *Se deduce que* $a_n \in [0,1]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Para aplicar el resultado anterior, primero vamos a operar. $|a_{n+2} - a_{n+1}| =$

$$= |\frac{1}{15}(3a_{n+1}^3 - 2a_{n+1}^2 + 2) - \frac{1}{15}(3a_n^3 - 2a_n^2 + 2)| = \frac{1}{15}|3(a_{n+1}^3 - a_n^3) - 2(a_{n+1}^2 - a_n^2)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{15}|3(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2)\cdot(a_{n+1} - a_n) - 2(a_{n+1} + a_n)\cdot(a_{n+1} - a_n)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{15}\Big(3|a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2|\cdot|a_{n+1} - a_n| + 2|a_{n+1} + a_n|\cdot|a_{n+1} - a_n|\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{15}\big(3\cdot 3|a_{n+1} - a_n| + 2\cdot 2|a_{n+1} - a_n|\big) = \frac{13}{15}|a_{n+1} - a_n|.$$

Sea $c = \frac{13}{15}$. *Por el resultado anterior, la sucesión es de Cauchy, con lo cual converge.*

(c) Sea $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Por ser* $a_{n+1} = \frac{1}{15}(3a_n^3 - 2a_n^2 + 2)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se deduce que* $\ell = \frac{1}{15}(3\ell^3 - 2\ell^2 + 2)$, *lo cual implica que* $3\ell^3 - 2\ell^2 - 15\ell + 2 = 0$. *Por consiguiente,* ℓ *es una raíz de la ecuación dada en* $[0,1]$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.23

Estudiar si las siguientes sucesiones son convergentes y, en caso afirmativo, calcular su límite.

(a) $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}.$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1+a_n}{1+2a_n}.$

(c) $a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2a_n+\frac{1}{a_n}+1}.$

(d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}.$

Ejercicio 2.24

Probar que las siguientes sucesiones son convergentes y calcular su límite.

(a) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}(4a_{n+1} - a_n).$

(b) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}.$

(c) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}.$

(d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n.$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 2.25

Consideremos una sucesión que cumpla $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. *Demostrar que la sucesión converge a un cierto* ℓ *que verifica* $a_{2n} \leq \ell \leq a_{2n-1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Aplicar lo anterior a la sucesión definida por* $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$. *(Indicación: aplicar el ejercicio 8)*

Ejercicio 2.26

(a) Demostrar que se cumple la desigualdad $\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que la sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ *es monótona decreciente y de términos positivos.*

(c) Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ *y* $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ejercicio 2.27

Consideremos dos sucesiones que están definidas por $0 < a_1 < b_1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ *y* $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que*

(a) La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge.*

(b) La sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge.*

(c) Las dos sucesiones tienen el mismo límite.

Ejercicio 2.28

Dado $x > 0$ *se define una sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *por recurrencia tomando* $a_0 > 0$ *y* $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}})$. *Probar que la sucesión converge y calcular su límite.*

Práctica 3
Series de números reales

1 Criterios de convergencia para series de términos positivos

La determinación del carácter de una serie (es decir, su convergencia o divergencia) se simplifica considerablemente cuando sabemos que está formada por términos positivos, pues en tal caso disponemos de una colección de criterios de convergencia específicos. El primero de tales criterios, llamado **criterio de comparación**, asegura:

Teorema 3.1
Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tales que* $a_n, b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Si $\exists n_0$ *tal que* $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es también convergente.*

- Si existe y es finito y no nulo el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$, *las dos series tienen el mismo carácter.*

Ejemplo 3.1
Así, dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \log n}{n^2 + 10n}}$$

se tiene:

$$\lim \frac{\sqrt{\frac{n-\log n}{n^2+10n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

y por lo tanto la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \log n}{n^2 + 10n}}$$

tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *es decir, es divergente.*

1.1 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.1
Estudia el carácter de las siguientes series:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^p \quad a > 1,\ p \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + \cdots n} \qquad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$$

Otro criterio para series positivas que puede aplicarse con facilidad es el siguiente:

Teorema 3.2 (Criterio de condensación de Cauchy)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que* $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Ejemplo 3.2
Así, la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

diverge pues la serie armónica:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \log 2^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k \log 2}$$

es divergente.

1.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.2
Estudiar la convergencia en los casos $\alpha = \beta = 1$ *y* $\alpha = 1,\ \beta = 2$ *de la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$.

Ejercicio 3.3
Estudia la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{(\log n)}}$.

Otros criterios de convergencia que se utilizan habitualmente son los siguientes:

Teorema 3.3 (Criterio de Cauchy de la raíz enésima)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que existe*

$$r = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- *si* $r > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*
- *si* $r < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

Teorema 3.4 (Criterio de D'Alembert del cociente)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que existe*

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- *si* $r > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*
- *si* $r < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*

Ejemplo 3.3
Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$$

como

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{5^n}} = \frac{1}{5} < 1,$$

sabemos por el criterio de Cauchy que la serie converge.

Ejemplo 3.4
Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{2^{(n+1)}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n n!}} = \frac{e}{2} > 1$$

y el criterio de D'Alembert asegura la divergencia de la serie.

1.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.4
Estudia la convergencia de las series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\text{(iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \cos^{2n}(\frac{n\pi}{2n+4}) \qquad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$$

En muchas ocasiones en que los criterios de D'Alembert y Cauchy no ofrecen información sobre el carácter de una serie, ya que el límite asociado toma el valor 1, es útil el siguiente criterio de convergencia:

Teorema 3.5 (Criterio de Raabe)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$$

- *si* $r > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente.*
- *si* $r < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Ejemplo 3.5
Así, para la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n+1}$$

se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 1$$

Pero como:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1) = \frac{3}{2}$$

la serie es convergente por Raabe.

1.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.5

Estudia la convergencia de las series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=3}^{\infty} (\frac{1}{3})^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$$

2 Criterios de convergencia de series de términos cualesquiera

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice alternada si el producto de dos términos consecutivos de la serie es un número negativo. Tales series pueden expresarse de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \quad b_n \geq 0,$$

y en algunos casos puede determinarse el carácter de tales series mediante el siguiente criterio:

Teorema 3.6 (Criterio de Leibnitz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *con* $a_n \geq 0$. *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión monótona decreciente con límite nulo, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *es convergente.*

Ejemplo 3.6

Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n}$$

se tiene obviamente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} \leq \frac{\log n}{n}$$

y la serie converge por Leibniz.

2.1 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.6

Estudia la convergencia de las series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}})$$

En otras ocasiones, es posible determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ cuando son conocidas algunas propiedades de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Disponemos de los siguientes criterios:

Teorema 3.7 (Criterio de Dirichlet)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tiene acotadas sus sumas parciales y la sucesión* $\{b_n\}$ *es monótona con límite nulo, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Teorema 3.8 (Criterio de Abel)
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la sucesión $\{b_n\}$ es monótona acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Ejemplo 3.7
La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2 + \pi/3)}{\log(n+2)}$$

converge por Dirichlet pues:

$$|\sum_{n=0}^{p} \cos(n\pi/2 + \pi/3)| \leq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+2)} = 0$$

y $\{\frac{1}{\log(n+2)}\}$ *es monótona.*

Ejemplo 3.8
Del mismo modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2 + \pi/3)}{\log(n+2)} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

converge por Abel pues:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2 + \pi/4)}{\log(n+2)}$$

es convergente y la sucesión:

$$\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\}$$

es monótona.

2.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.7
Utilizando el ejercicio 7.7, estudia el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{\cos nx}{n}$

3 Sumación de series.

En algunas ocasiones, dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es posible determinar una expresión para la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$.

En estos casos, puede determinarse el carácter de la serie estudiando directamente la sucesión $\{S_n\}$; además, a menudo podrá calcularse la suma de la serie, es decir, el límite de la sucesión $\{S_n\}$.

Veamos algunas de estas situaciones especiales:

3.1 Descomposición en fracciones simples.

La descomposición en fracciones simples del término general de algunas series permite obtener explícitamente su suma parcial.

Ejemplo 3.9
Así, para:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}$$

se obtiene la descomposición

$$\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n} = \frac{2}{n} + \frac{3}{n+3} - \frac{5}{n+2}$$

de donde resulta:

$$S_n = 2 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3},$$

y por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+12}{n^3+5n^2+6n} = 2$$

3.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.8
Suma las series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-6}{n^3-3n^2+2n}$$

3.3 Series telescópicas.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice telescópica si $a_n = b_n - b_{n+1}$, donde la sucesión $\{b_n\}$ es conocida. En tal caso, $S_n = b_1 - b_{n+1}$, y por tanto puede determinarse el carácter de la serie estudiando la sucesión $\{b_n\}$.

Ejemplo 3.10
Así, dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)} \frac{1}{3^n},$$

se tiene:

$$\frac{2n+3}{n(n+1)} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{n} \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{n+1} \frac{1}{3^n},$$

y así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)} \frac{1}{3^n} = 1.$$

3.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.9
Halla la suma de las series

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \qquad \text{(ii)} \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{\log^2(n+1)\log(n+2)} + \sqrt{\log(n+1)\log^2(n+2)}}$$

3.5 Series aritmético-geométricas.

Se llama serie aritmético-geométrica a una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde $\{a_n\}$ es una progresión aritmética y $\{b_n\}$ una progresión geométrica.

Método 1:

Para obtener la expresión explícita de la suma parcial de tales series, se escribe $S_n - rS_n$, donde r es la razón de la progresión geométrica; tal expresión puede calcularse ahora, pues se trata de la suma parcial de una serie geométrica (más algunos términos independientes).Además, se deduce que la serie aritmético-geométrica es convergente si la razón de la progresión geométrica es menor que 1.

Ejemplo 3.11
Así, dada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n},$$

se obtiene:

$$(1-\frac{1}{7})S_n = \frac{3}{7} + \frac{2}{7^2} + \cdots + \frac{2}{7^n} - \frac{2n+1}{7^{n+1}} = \frac{3}{7} + \frac{\frac{2}{7^2} - \frac{2}{7^{n+1}}}{1-\frac{1}{7}} - \frac{2n+1}{7^{n+1}},$$

de donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n} = \frac{5}{9}$$

Método 2:

Otro procedimiento de sumación de dichas series consiste en el uso de Fórmula de Taylor. En particular $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$. Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ejemplo 3.12
Aplicaremos dicho método al cálculo siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}.$$

Basta observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + 4(-1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + 4(-1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}).$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n} == \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + 4(-1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 6.$$

3.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.10
Suma las siguientes series:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{6^n}$$

3.7 Series hipergeométricas

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos diremos que es hipergeométrica si $a_1 \neq 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\beta}{n+\gamma}$, siendo β y γ constantes diferentes de cualquier entero negativo.

Ejemplo 3.13
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *cumple:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+3}.$$

Sumando las igualdades:

$$(k+3)a_{k+1} = ka_k \quad k = 1, \dots n$$

se obtiene:

$$2(S_n - \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

de donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

3.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.11
Suma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}$

3.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$, con P polinomio.

La suma de la serie anterior puede obtenerse descomponiendo el término general en la forma:

$$\frac{P(n)}{n!} = \frac{A_0}{n!} + \frac{A_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{A_q}{(n-q)!}$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_q$ son constantes a determinar y q es el grado de P.

El proceso de sumación se concluye ahora utilizando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Ejemplo 3.14
Así, para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$$

se obtiene:

$$\frac{n^2+1}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \; n \geq 3,$$

y por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2 + \frac{5}{2} = 3e - 1$$

3.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 3.12

Halla la suma de las series (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+1)}{n!}$ *(ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)!} 2^n$.

4 Problemas de convergencia de series

Estudia el carácter de las siguientes series:

Ejercicio 3.13

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{2} - 1)$$

Ejercicio 3.14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} n}{n}$$

Ejercicio 3.15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

Ejercicio 3.16

Comparando con $\sum \frac{1}{n^2}$ *vuelva a estudiar el ejercicio 3.3.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

Ejercicio 3.17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a} + \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 2$$

Ejercicio 3.18

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^p}$$

Ejercicio 3.19

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^q, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3.20

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-1}{2n}$$

Ejercicio 3.21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

Ejercicio 3.22

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$$

Ejercicio 3.23

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n-1} b_n \ \textit{con} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{divergente}$$

Ejercicio 3.24

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Ejercicio 3.25

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2\cdots\log n}{n!}$$

5 Problemas de suma de series

Halla la suma de las siguientes series:

Ejercicio 3.26

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Ejercicio 3.27

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

Ejercicio 3.28

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{n\log n \log(n+1)^{n+1}}$$

Ejercicio 3.29

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$$

Ejercicio 3.30

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}}$$

Ejercicio 3.31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

6 Cuestiones y problemas complementarios

Ejercicio 3.32
Si $\{a_n\}$ *es una sucesión monótona decreciente tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

Ejercicio 3.33
Demostrar que la serie hipergeométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, con* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\beta}{n+\gamma}$*, es convergente si y sólo si* $\gamma > \beta+1$*, y además se tiene en tal caso:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\gamma a_1}{\gamma-\beta-1}.$$

Ejercicio 3.34
Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones de términos positivos tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *convergen. Probar que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ *convergen.*

Ejercicio 3.35
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie absolutamente convergente. Demostrar que también convergen absolutamente las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+a_n)$ *(si* $a_n \neq -1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *) y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2/(1+a_n^2)$.

Ejercicio 3.36

Si $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *y* $b_n = a_n - \frac{1}{n}$ *comprobar que* $lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ *pero* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge mientras que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *no converge.*

Ejercicio 3.37

Si $a_n = \frac{1}{2^n}$ *cuando* n *es par y* $a_n = \frac{1}{3^n}$ *cuando* n *es impar, averiguar el carácter de la serie*$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejercicio 3.38

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

Ejercicio 3.39

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente con límite* 0 *y de terminos positivos. Probar que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ *tienen el mismo carácter.*

Ejercicio 3.40

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie divergente de términos no negativos. Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+a_n)$ *también diverge pero* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+n^2 a_n)$ *converge ¿ Qué puede decirse de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+a_n^2)$. ?.

Ejercicio 3.41

Averiguar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{n^{\frac{1}{100}}}$.

Práctica 4
Límites de funciones.Continuidad

1 Límites elementales de funciones

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $a \in ac(D)$, sea además f una función con dominio D, se dice que $f(x)$ tiende a r cuando x tiende hacia a ($\lim_{x\to a} f(x) = r$), si se cumple que para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - r| < \epsilon$ para todo $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$.

Ejemplo 4.1
Demostrar que

$$\lim_{x\to 2}(5x - 1) = 9.$$

Según la definición anterior, para cualquier $\epsilon > 0$ que nos den, tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que $|(5x - 1) - 9| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Nótese, sin embargo, que

$$|(5x - 1) - 9| = |5(x - 2)| = 5|x - 2|$$

luego la desigualdad

$$|(5x - 1) - 9| < \epsilon$$

se cumplirá si $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{5}$. Por tanto, si nos dan $\epsilon > 0$ siempre podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{5}$.

1.1 Problemas propuestos

Ejercicio 4.1
Demostrar, siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior , que

(a)
$$\lim_{x\to 1}(3x - 2) = 1.$$

(b)
$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = 1/2.$$

(d)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = 0.$$

Ejemplo 4.2
Si a es un número real cualquiera, probar que

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a).$$

Como caso preliminar observemos que la desigualdad $|\operatorname{sen}(x)| \le |x|$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. Supóngase que $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Si formamos un ángulo de x radianes, denotamos por P el punto del primer cuadrante correspondiente al corte de la recta que pasa por el origen de pendiente $\tan x$ y la circunferencia de centro el origen y radio 1 y denotamos Q el simétrico de P respecto al eje OX, *tendremos que la longitud de la cuerda PQ es $2\text{sen}(x)$, mientras que la del arco PQ es $2x$. Como "la línea recta es el camino más corto entre dos puntos ", resulta que $2\text{sen}(x) \leq 2x$, lo que implica que $|\text{sen}(x)| \leq |x|$. Para $\frac{\pi}{2} \leq x$ la desigualdad es trivial, pues en este caso*

$$|\text{sen}(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x = |x|.$$

En consecuencia, $|\text{sen}(x)| \leq |x|$ para todo x positivo. Si $x \leq 0$, entonces $-x$ es positivo y

$$|\text{sen}(x)| = |-\text{sen}(x)| = |\text{sen}(-x)| \leq |-x| = |x|.$$

Una vez probada la desigualdad, pasemos a demostrar la afirmación original .. Usaremos la siguiente identidad:

$$\text{sen}(x) - \text{sen}(a) = 2\cos\frac{1}{2}(x+a)\text{sen}\frac{1}{2}(x-a).$$

Como los valores de la función coseno están comprendidos entre -1 y 1

$$|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| \leq 2|\text{sen}\frac{1}{2}(x-a)| \leq |x-a|.$$

Luego tomando $\delta = \epsilon$, obtenemos el resultado.

1.2 Problemas propuestos

Ejercicio 4.2
Demostrar que para todo número real a se tiene:

(*a*)
$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a).$$

(*b*)
$$\lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a).$$

Mediante la aplicación de las propiedades de los límites se puede sustituir el cálculo de un límite de una expresión complicada por el cálculo de otros límites más simples.

Ejercicio 4.3
Calcular los límites: (a).- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2+2}$ (*b*).- $\lim_{x\to 1}(x-1)x^2\text{sen}(\frac{1}{1-x})$.

Sin embargo, a veces, las expresiones a las que se llega no son tan sencillas o conducen a límites que no tienen sentido; son los llamados casos de **Indeterminación** que se escriben en la forma simbólica:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty.$$

Ejemplo 4.3
Calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 2x^2 - 10x + 6}.$$

Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que puede resolverse utilizando que 1 es una raíz de los dos polinomios:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 2x^2 - 10x + 6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(2x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(2x+6)} = \frac{3}{8}.$$

Hay otras indeterminaciones que pueden resolverse utilizando el procedimiento de sustituir la expresión dada por otra equivalente, es el caso de los **Infinitésimos equivalentes**. Se dice que una función real f es un *infinitésimo* en a, (se representa por $< f(x), a >$), si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Se dice que un infinitésimo $< f(x), a >$ es de orden menor, igual o mayor que otro infinitésimo $< g(x), a >$ si el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiende (cuando $x \to a$) respectivamente a infinito, a un número real distinto de cero, o a cero. Para la comparación de infinitésimos, se suele definir uno que se llama principal y respecto de él se definen los órdenes de los restantes. Se suele tomar como infinitésimo principal $< x - a, a >$, de este modo, diremos que el infinitésimo $< f(x), a >$ tiene orden k si:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = r \neq 0.$$

Dos infinitésimos $< f(x), a >, < g(x), a >$ se dice que son **equivalentes** si se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

En este caso escribiremos $< f(x), a > \cong < g(x), a >$.

Ejemplo 4.4
Probar que $< \operatorname{sen}(x), 0 > \cong < x, 0 >$ *. Que el seno es un infinitésimo en $x = 0$ es consecuencia inmediata del ejemplo 4.2. Para obtener el resultado debemos comprobar que:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Sean P el punto de corte de la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 y la recta que pasa por el origen O con pendiente $\tan x$. Sea S el punto de corte de la circunferencia y el eje OX. Denotemos por R la proyección de P sobre el eje $0X$ y por Q el punto de corte de la recta que pasa por el origen O con pendiente $\tan x$ y la perpendicular al eje OX en el punto S. Es claro que el área del triángulo OPR es menor que la del sector circular OPS, y ésta a su vez inferior al área del triángulo OQS:

$$\triangle OPR = \frac{1}{2}|OR|.|RP| = \frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x),$$

$$\triangle ORS = \frac{1}{2}|OS|.|SQ| = \frac{1}{2}\tan(x).$$

El área del sector circular será igual al área del círculo, a saber π, multiplicada por la fracción $\frac{x}{2\pi}$. Luego, tenemos

$$\frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x) \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan(x);$$

desigualdades válidas para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. De la desigualdad $\cos(x)\operatorname{sen}(x) \leq x$ resulta

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Análogamente, de la desigualdad $x \leq \tan(x)$ se tiene

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Luego

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. *Nótese que cada término de esta desigualdad es invariante bajo el cambio de* x *por* $-x$. *Según el ejercicio 4.2*

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

De aquí, por el criterio del emparedado,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

1.3 Problemas propuestos

Ejercicio 4.4
Encontrar el orden de los siguientes infinitésimos: (a).- $< 1 - \cos(x), 0 >$, *(b).-* $< e^x - 1, 0 >$, *(c).-* $< \log(1 + x), 0 >$ *(d).-* $< \tan(x), 0 >$, *(e).-* $< a^x - 1, 0 >$ *siendo* $a > 0$ *(f).-* $< \arctan(x), 0 >$, *(g).-* $< (1 + x)^n - 1, 0 >$.

Una propiedad de los infinitésimos equivalentes que pone de manifiesto su utilidad en el cálculo de indeterminaciones es la siguiente: Si $< f(x), a > \cong < g(x), a >$ y existe $\lim_{x \to a} h(x)g(x)$, entonces se tiene que

$$\lim_{x \to a} h(x)g(x) = \lim_{x \to a} h(x)f(x)$$

En efecto; por la propiedad del producto de límites obtenemos:

$$\lim_{x \to a} h(x)f(x) = \lim_{x \to a} h(x)f(x) \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)h(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} h(x)g(x).$$

Ejemplo 4.5
Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - 1)\operatorname{sen} x}{x^2 - 2x}.$$

Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, *como según el ejemplo 4, tenemos que* $< \operatorname{sen}(x), 0 > \cong < x, 0 >$, *entonces aplicando la propiedad anterior de los infinitésimos equivalentes:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - 1)\operatorname{sen} x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - 1)x}{x^2 - 2x} = \frac{1}{2}$$

1.4 Problemas propuestos

Ejercicio 4.5
Calcular los siguientes límites: (a).-

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}},$$

(b).-

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan(x),$$

(c).-

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - x^3)((x + 1)^{\sqrt{2}} - 1}{\log(1 + 4x)(1 - \cos(2x))}$$

(d).-

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)\text{sen}(x)\tan(x)}{(1-\cos(x))(a^x-1)((1+x)^{\sqrt{2}}-1)}.$$

Una propiedad de los límites de funciones es la siguiente. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$, entonces

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \alpha^{\beta}.$$

en cambio, cuando $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. para resolver este tipo de indeterminación es de gran utilidad el siguiente resultado: (*) Si existe $\lambda = \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)$, entonces

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lambda}.$$

1.5 Problemas propuestos

Ejercicio 4.6

Calcular los siguientes límites: (a).-

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$$

(b).-

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$$

(c).-

$$\lim_{x\to 0}(2-\cos^2(x))^{\frac{1}{(\text{sen}(x)+\tan(x))^2}}.$$

1.6 Límites laterales y por sucesiones.

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $a \in ac(D) \cap (a, \infty)$ (respec. $a \in ac(D) \cap (-\infty, a)$, sea además f una función con dominio D, se dice que $f(x)$ tiende a r cuando x tiende hacia a por la izquierda (respec. por la derecha), denotado $\lim_{x\to a^+} f(x) = r$, (respec. $\lim_{x\to a^-} f(x) = r$), si se cumple que para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - r| < \epsilon$ para todo $x \in D$ con $a < x < a + \delta$ (respec. $a - \delta < x < a$). La existencia del límite en un punto se caracteriza por la existencia y coincidencia de ambos límites laterales. Sea f una función real con dominio D y sea $a \in int(D)$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = r \longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = r.$$

Otro modo de ver la existencia de límite consiste en el estudio del límite por sucesiones, es decir $\lim_{x\to a} f(x) = r$ si y sólo si para toda sucesió n $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = r$

Ejemplo 4.6

Demostrar que no existen los siguientes límites

(a)
$$\lim_{x\to o} \frac{5x-1}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to o} \sin\frac{1}{x^2}$$

(c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

En efecto, para (a) basta observar que

$$\lim_{x\to o^+} \frac{5x-1}{x} = -\infty$$

pero

$$\lim_{x\to o^-} \frac{5x-1}{x} = +\infty.$$

Para resolver (b) tomar las sucesiones (x_n) *tal que* $\frac{1}{x_n^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ *y* (y_n) *tal que* $\frac{1}{y_n^2} = 2\pi n$ *que verifican* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *pero sin embargo*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n^2} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n^2} = 0.$$

para resolver (c) observar que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

1.7 Problemas propuestos

Ejercicio 4.7

Probar la existencia o no de los siguientes límites:

(a)
$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1} \cos\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c)
$$\lim_{x\to 2} \frac{|x^2+x-6|}{x-2}$$

2 Continuidad de funciones.

Se dice que una función real de variable real f con dominio D, es **continua** en $a \in D$ si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Ejemplo 4.7

Comprobar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ *es continua en* $x_0 > 0$. *En efecto; basta considerar la siguiente igualdad:*

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

luego si $x > 0$, *tenemos*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

ahora la demostración es simple, dado $\epsilon > 0$ *tomamos* $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$. *Si* $|x - x_0| < \delta$ *entonces* $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.

2.1 Problemas propuestos

Ejercicio 4.8

Sea f la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1]\cup\{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \hookrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & x\in\mathbf{Q} \\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x\notin\mathbf{Q}\end{array}\right.\end{array}$$

Probar, utilizando la definición, que f es continua en $x=2$.

Ejercicio 4.9

Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \hookrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2-x^2 & x\in\mathbf{Q} \\ x^2-2 & x\notin\mathbf{Q}\end{array}\right.\end{array}$$

Si en la definición de continuidad $a\in D\cap ac(D)$, entonces podemos afirmar que f es continua en a si, y sólo si, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. De este modo, las propiedades de las funciones continuas pueden deducirse de las propiedades de los límites de las funciones. Como consecuencia del comentario anterior y de los ejemplos 2 y 3 se obtiene que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier punto.

Ejercicio 4.10

Probar que $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{sen}(x)$ es continua para todo $x>0$.

Ejercicio 4.11

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones: (a).-

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \hookrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x=0 \\ \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\end{array}\right.\end{array}$$

(b).- $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$. (c).-

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \hookrightarrow & f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2 & x=0 \\ \frac{x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}x} & x\neq 0\end{array}\right.\end{array}$$

3 Teoremas de funciones continuas.

Uno de los resultados de funciones continuas que más se utiliza es el llamado teorema de Bolzano. ”Sea $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una función continua, verificando que $f(a)f(b)<0$, entonces se cumple que existe $c\in]a,b[$ con $f(c)=0$.” El teorema de Bolzano nos permite verificar la existencia de soluciones de determinadas ecuaciones:

Ejemplo 4.8

Probar que el polinomio $x^7+x^4+x^3+x-1$ tiene una raíz real en $[0,1]$. En efecto; LLamamos $f(x):=x^7+x^4+x^3+x-1$, evidentemente f es una función continua en $[0,1]$ y además $f(0)=-1$ y $f(1)=3$, por tanto $f(0)f(1)<0$, ahora aplicando el teorema de Bolzano se tiene el resultado.

3.1 Problemas propuestos

Ejercicio 4.12

Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ *continua. Demostrar que existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = c$. *(Considérese la función* $g(x) := f(x) - x$ *y aplíquese el teorema de Bolzano.)*

Ejercicio 4.13

Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz real.

Otros resultados de funciones continuas fundamentales son los llamados teoremas de Weierstrass: (a).- Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ es continua, entonces f tiene la propiedad de los valores intermedios. (b).- Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ es continua, entonces f alcanza el máximo y el mínimo.

3.2 Problemas complementarios

Ejercicio 4.14

Sea f *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(x) \in \mathbf{Q}$ *para todo* $x \in [a, b]$. *Probar que* f *es constante en* $[a, b]$.

Ejercicio 4.15

Supóngase que f *es una función continua y estrictamente positiva en* $\mathbf{R}$, *verificando que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. *Demostrar que* f *tiene un máximo en* $\mathbf{R}$. *(Dibujar la gráfica de* f.*)*

Práctica 5
Cálculo Diferencial

1 Derivabilidad de funciones

Para comprobar si una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un punto $a \in I$ (intervalo abierto) basta verificar la existencia del límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Por tanto no es extraño que en muchos casos en este tipo de problema se necesite estudiar la existencia de los límites laterales del cociente incremental anterior. Es conveniente recordar (para terminar rápido en algunos casos) que si no hay continuidad no puede haber derivabilidad.

Ejemplo 5.1
Estudiar si la función $f(x) = [x]sen^2\pi x$, $x \in \mathbb{R}$, es derivable en los puntos $x = 1/2$, $x = 1$.

$$f'(1/2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1/2 + h) - f(1/2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[1/2 + h]sen^2\pi(1/2 + h)}{h} = 0,$$

pues $[1/2 + h] = 0, \ -1/2 < h < 1/2.$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[1 + h]sen^2\pi(1 + h)}{h} = 0,$$

pues $[1 + h] = 0, \ -1 < h < 0,$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{[1 + h]sen^2\pi(1 + h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{sen^2\pi(1 + h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{sen(\pi + \pi h)}{h} sen(\pi + \pi h) = 0,$$

pues $[1 + h] = 1, \ 0 < h < 1$*;* $sen(\pi + \pi h) = -sen\ \pi h$*,* $\lim_{h \to 0^+} \frac{sen \pi h}{h} = \pi$*, y,* $\lim_{h \to 0^+} sen\ \pi h = 0$*. Puesto que* $f'_+(1) = f'_-(1)$ *concluimos que* f *es derivable en* $x = 1$ *y además* $f'(1) = f'_+(1) = f'_-(1) = 0$*.*

1.1 Problemas propuestos

Ejercicio 5.1
Estudiar la derivabilidad de las funciones siguientes en los puntos dados:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

en $x = 0, \ x = 1/2, \ x = 1.$

b)

$$f(x) = \begin{cases} max\{x^2, 1/x\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

en $x = 0, \ x = 1.$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

en $x = 0.$

Ejercicio 5.2
Averiguar hasta qué orden es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5.3
Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real y hallar su derivada.

Ejercicio 5.4
Hallar las derivadas n-ésimas de las funciones

a) $f(x) = ln\ kx$. (Porqué da lo mismo que si fuese $ln\ x$?)

b) $f(x) = sen\ kx$.

c) $f(x) = (3x^2 - 4)e^x$. (Usar la fórmula de Leibnitz de la derivada n-ésima de un producto)

d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$. (Descomponer en suma de fracciones.)

e) $f(x) = sen\ 4x\ cos\ 2x$. (Expresar como suma)

Ejercicio 5.5
(Funciones hiperbólicas) Siendo

$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (seno\ hiperbolico),$$

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (coseno\ hiperbolico),$$

demostrar:

a) $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

b) $(sh\ x)' = ch\ x, \quad (ch\ x)' = sh\ x$.

c) Hallar las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas: $argsh\ x$, $argch\ x$.

Ejercicio 5.6
Escribir las funciones x^x, $x^{(x^x)}$ y $(x^x)^x$ como composición de funciones elementales y calcular sus derivadas.

2 Aplicaciones de los teoremas de Rolle y del valor medio

Los teoremas de Rolle y del valor medio se enuncian para funciones que son continuas en un intervalo cerrado acotado y que son derivables al menos en su interior. El primer teorema nos proporciona un punto interior de derivada nula, suponiendo que la función vale lo mismo en los extremos, mientras que el teorema del valor medio nos relaciona el cociente de incrementos en los extremos con la derivada en un punto interior.

Ejemplo 5.2
Estudiar si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ en su dominio de definición.

Dicho dominio es $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x - x^2 = x(1-x) \geq 0\} = [0,1]$. Por tanto, como f es continua en $[0,1]$, derivable en $]0,1[$ (observar que no tiene derivada en $x = 0$, $x = 1$) y $f(0) = f(1)$, el teorema puede aplicarse, con lo que existe un punto $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = 0$. Se trata de $c = 1/2$.

Los teoremas antes citados tienen gran cantidad de aplicaciones, tanto en la estimación del número de raíces reales de ecuaciones polinómicas (notar que si un polinomio tiene dos raíces distintas siempre se le puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo que dichas raíces determinan), como en la demostración de desigualdades y en el cálculo de límites (a través de la regla de L'Hôpital).

Ejemplo 5.3
Estimar el número de raíces reales de la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ según los valores del parámetro m.

En general, el algoritmo que suele seguirse es el siguiente:

–Hallar la derivada de la función de la ecuación:

$$f(x) = x^3 - 3x + m$$

$$f'(x) = 3(x+1)(x-1)$$

–Hallar las raíces de la derivada y estudiar la variación de signos de ésta en los intervalos que determinan las raíces:

f' *se anula en* $x = -1, \ x = 1$.
$f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, -1[$,
$f'(x) < 0, \forall x \in]-1, 1[$,
$f'(x) > 0, \forall x \in]1, +\infty[$.

–El teorema de Rolle nos asegura que en los intervalos donde la derivada no se anula la función no puede tener dos raíces distintas. Así, en cada uno de los intervalos anteriores f tiene a lo sumo una raíz.

–Los signos de la derivada, con ayuda del teorema del valor medio, nos permiten conocer la variación (crecimiento y decrecimiento) de la función en los intervalos determinados. Ello, junto con el teorema de Bolzano, nos dice si hay o no raíz en el intervalo:

f *es estrictamente creciente en* $]-\infty, -1[$,
estrictamente decreciente en $]-1, 1[$,
estrictamente creciente en $]1, +\infty[$.

Como $f(-1) = m + 2$, $f(1) = m - 2$, distinguimos unos cuantos casos posibles:

<u>Caso 1.</u> $m < -2$.

f no tiene raíces en $]-\infty, -1]$, ni en $[-1, 1]$, pues

$$\forall x \in]-\infty, -1], \quad f(x) \leq f(-1) < 0,$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) \leq f(-1) < 0.$$

f tiene una única raíz en $]1, +\infty[$, ya que

$$f(1) = m - 2 < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

del teorema de Bolzano f tiene alguna raíz en $]1,+\infty[$. La unicidad se tiene del teorema de Rolle como indicamos anteriormente.

Caso 2. $m=-2$.

Es un sencillo ejercicio comprobar que $f(x)=(x+1)^2(x-2)$.

Caso 3. $m>-2$.

Como $f(-1)=m+2>0$, y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, otra vez el teorema de Bolzano asegura que hay raíz en $]-\infty,-1[$, única como sabemos en dicho intervalo. Veamos qué sucede en los otros intervalos. Para ello distinguimos unos subcasos:

(3.1) $-2<m<2$.

Como $f(1)=m-2<0$, tenemos que

f tiene única raíz en $[-1,1]$.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

f tiene única raíz en $[1,+\infty[$.

(3.2) $m=2$.

Es elemental que $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

(3.3) $m>2$.

Como $f(1)=m-2>0$,

f no tiene raíces en $[-1,1]$, ni en $[1,+\infty[$.

Resumen

Valor de m	*Número de raíces de f*	*Localización*
$m<-2$	*Una*	$]1,+\infty[$
$m=-2$	*Dos*	$x=-1$ *(doble)*, $x=2$
$-2<m<2$	*Tres*	$]-\infty,-1[,\ ]-1,1[,\ ]1,+\infty[$
$m=2$	*Dos*	$x=1$ *(doble)*, $x=-2$
$m>2$	*Una*	$]-\infty,-1[$.

Ejemplo 5.4

Demostrar la validez de la desigualdad

$$e^x>\frac{1}{1+x},\qquad \forall x>0.$$

Consideremos la función $f(x)=e^x-\frac{1}{1+x}$, definida en $[0,+\infty[$ (aunque fijémonos que su dominio puede ser mayor). Entonces, f es continua en $[0,+\infty[$ y derivable en $]0,+\infty[$ (incluso existe $f'_+(0)$). Es más, $f'(x)=e^x+\frac{1}{(1+x)^2}>0,\quad \forall x>0$. Por tanto, f es estrictamente creciente (consecuencia del teorema del valor medio) en $[0,+\infty[$, de donde, $\forall x>0,\quad f(x)>f(0)=0$, lo que quiere decir que $e^x>\frac{1}{1+x}$.

Ejemplo 5.5

Calcular $\lim_{x\to0^+} x\ ln\ x$.

Al tratarse de una indeterminación del tipo $(0\cdot\infty)$ puede ser apropiado el utilizar la regla de L'Hôpital. Recordemos que para ello necesitamos un cociente entre dos funciones derivables en un intervalo abierto en el que el punto en cuestión ($x=0$ en nuestro caso) sea un punto de acumulación.

Así, consideremos las funciones $f(x) = ln\ x$, $g(x) = 1/x$, $x \in]0, +\infty[$, que cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital, y además

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

Por lo que $\lim_{x\to 0^+} x\ ln\ x = 0$.

Nota. (*Cuidado con la regla de L'Hôpital!*)

Además de todas las condiciones de continuidad y derivabilidad de las funciones que aparecen en el cociente, es conveniente apreciar que lo que la regla de L'Hôpital afirma es la veracidad de un silogismo (una implicación):

"Si existe el límite del cociente de las derivadas, entonces existe el límite deseado y vale lo mismo."

Esto significa que, en el caso de no existir el límite del cociente de las derivadas, no podemos aplicar la regla, es decir, no podemos afirmar nada referente al límite deseado. El siguiente ejemplo es muestra de ello.

Ejemplo 5.6

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen(1/x)}{sen\ x}$.

Si hacemos el límite del cociente de las derivadas, siendo f y g las funciones numerador y denominador, respectivamente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ sen(1/x) - cos(1/x)}{cos\ x},$$

pero este límite no existe, ya que, tomando las sucesiones $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, se ve enseguida que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = 1.$$

Sin embargo, es evidente que el límite deseado existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen\ x}\ x\ \operatorname{sen}(1/x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

2.1 Problemas propuestos

Ejercicio 5.7

Averiguar cuántas raíces reales tiene la ecuación:

$$4x^5 - 5x^4 + 2 = 0.$$

Ejercicio 5.8

Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $e^x \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$

b) $tg\ x \geq x, \quad 0 \leq x < \pi/2.$

c) $\frac{2}{\pi} < \frac{sen\ x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

[estudiar antes la variación de la función $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen\ x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0.] \end{cases}$$

d)	$sen\ x\ +\ tg\ x\ >\ 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$
e)	$\ln(1+x)\ >\ \frac{arctg\ x}{1+x}, \quad x > 0.$

Ejercicio 5.9
Calcular los siguientes límites:

a)	$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}$
b)	$\lim_{x\to 0}(cos\ x)^{1/x^2}$
c)	$\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - arctg\ x)^{\frac{1}{ln\ x}}$
d)	$\lim_{x\to\infty} \frac{x-sen\ x}{x+sen\ x}.$

3 Desarrollo de Taylor. Variación local

Una de las ventajas más importantes de las funciones con buenas propiedades de derivabilidad es que permiten ser aproximadas localmente mediante polinomios, siendo posible incluso estimar el tamaño del error cometido en la aproximación. Este resultado es conocido como el teorema de Taylor, y, muy superficialmente, es el fundamento teórico del procedimiento con el que las calculadoras automáticas nos permiten conocer los valores de funciones tan habituales como las circulares, exponenciales, logarítmicas, etc.

Otra de las aplicaciones del teorema de Taylor es el conocimiento de la variación local de una función (extremos relativos, puntos de inflexión, crecimiento y curvatura), así como el cálculo de límites de funciones.

Ejemplo 5.7
Aproximar el valor $sen\ 70^o$ *mediante un polinomio de Taylor de cuarto grado centrado en* $x = \pi/2$*, acotando el error.*

$f(x) = sen\ x, \qquad x = 70^o = \frac{7\pi}{18}\ rad, \quad x_0 = \pi/2.$

El teorema de Taylor garantiza que

$$sen 70^o = f(\frac{7\pi}{18}) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(\pi/2)}{k!}(\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{2})^k + R_4(\frac{7\pi}{18}),$$

siendo (haciendo uso de la expresión del resto de Lagrange)

$$R_4(\frac{7\pi}{18}) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{2})^5,$$

para cierto valor $c \in]\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{2}[$.

Por tanto,

$$sen\ 70^o \approx 1 - \frac{(\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{2})^4}{24} \approx 1 - 0.0609 + 0.0006 = 0.9397.$$

Para acotar el error

$$\mid R_4(\frac{7\pi}{18}) \mid < \frac{1}{120}(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18})^5 = \frac{(\pi/9)^5}{120} < 0.00005.$$

Ejemplo 5.8
Calcular el valor del número e con dos cifras decimales exactas.

Generalmente, para obtener dos cifras decimales exactas se toma un error de ± 0.001. *No obstante, no será hasta haber concluido el cálculo cuando sabremos si la cantidad de cifras exactas es la deseada, para ello basta comprobar que el valor obtenido mantiene las mismas dos primeras cifras decimales al aplicarle* $\pm error$.

El desarrollo de McLaurin de la exponencial es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad x = 1.$$

El problema se reduce a hallar el número (n) de términos conveniente (el mínimo será obviamente el más interesante) para que $\mid R_n(x) \mid < 0.001$.

La inecuación anterior se traduce en

$$\mid \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \mid = \frac{e^c}{(n+1)!} < 0.001, \quad 0 < c < 1.$$

Como $e^c < e < 3$, *las soluciones de la inecuación*

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0.001, \qquad (n+1)! > 3000,$$

lo son también de la inicial. Esta última es fácil de resolver por tanteo, lo que nos da el resultado $n \geq 6$. *Es decir, con* $n = 6$ *garantizamos que* $|R_n(1)| < 0.001$. *Así*

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{6!} = 2.71805.$$

Además $|e - 2.71805| < 0.001$ *y por tanto e está comprendido entre 2.71705 y 2.71905, con lo cual podemos asegurar que las dos primeras cifras decimales exactas de e son 2.71.*

Los desarrollos de Taylor suelen también aplicarse en el cálculo de límites de funciones. Para ello se utiliza el que el término complementario $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden superior a n en el punto x_0, es decir,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Ejemplo 5.9
Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x^3}$.

Hallamos una aproximación cúbica de sen x (correspondiente al desarrollo de McLaurin):

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x),$$

y tenemos que el límite se convierte en

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3/6 - R_3(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} (\frac{1}{6} - \frac{R_3(x)}{x^3}) = 1/6.$$

Hemos mencionado antes que los desarrollos de Taylor son útiles para estudiar la variación local de una función (lo que nos va a permitir entre otras cosas poder dibujar su gráfica). Dicha aplicación queda puesta de manifiesto en la demostración del siguiente esquema que nos permite determinar los tipos de puntos críticos de una función:

f es una función $n \geq 2$ veces derivable, con $f^{(n)}$ continua, en un entorno de x_0.

Caso 1. $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1.1) Si $n = par$, entonces

Si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en x_0.

Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en x_0.

(1.2) Si $n = impar$, f tiene un punto de inflexión en x_0.

Caso 2. $f'(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(2.1) Si $n = par$, entonces f no tiene un punto de inflexión en x_0.

(2.2) Si $n = impar$, f tiene un punto de inflexión en x_0.

Ejemplo 5.10

Hallar, si existen, los máximos y mínimos absolutos de

$$f(x) = ln \mid x^3 + x + 1 \mid$$

en los intervalos $[-1, 0]$ *y* $[0, 1]$.

f está definida en $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + x + 1 \neq 0\}$. Como $(x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 > 0$, el polinomio $x^3 + x + 1$ sólo tiene una raíz real, $x = a$, que se encuentra en $]-1, 0[$.

Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, y

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 1}, \qquad x \neq a.$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x < a$, $f'(x) > 0$ para $x > a$, de donde f es estrictamente decreciente en $]-\infty, a[$ y estrictamente creciente en $]a, +\infty[$.

Así pues, como $a \in]-1, 0[$ y $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, f no tiene mínimo (ni siquiera ínfimo) en $[-1, 0]$. Pero, $\forall x \in [-1, a[$, $f(x) \leq f(-1) = 0$, $\forall x \in]a, 0]$, $f(x) \leq f(0) = 0$. Luego, $\forall x \in [-1, 0]\backslash\{a\}$, $f(x) \leq f(-1) = f(0)$. Es decir, f tiene máximos absolutos en $x = -1$, $x = 0$.

El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza, ya que f es continua en $[0, 1]$, que se alcanzan los extremos absolutos en dicho intervalo. Además, como f es creciente, tiene en dicho intervalo un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$.

3.1 Problemas propuestos

Ejercicio 5.10

Escribir los desarrollos de McLaurin de las funciones

$$e^x, \; ln(1 + x), \; sen\ x, \; cos\ x, \; sh\ x, \; ch\ x.$$

Ejercicio 5.11

Calcular aproximaciones cúbicas de los valores siguientes acotando los errores cometidos:

a) $e^{0.4}$

b) $cos\ 0.2$ *(rad)*

c) $ln\ 2$.

Ejercicio 5.12
Mediante el desarrollo de Taylor de la función $ln(1+x)$, demostrar que

$$ln\ 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Cuántos términos de dicha serie son necesarios para obtener una aproximación de $ln\ 2$ con seis cifras decimales exactas?

Ejercicio 5.13
Utilizando desarrollos de Taylor, calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-x}{1-cos(x/2)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{sen^5 x}$.

Ejercicio 5.14
Estudiar la variación (crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad e inflexiones) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x + 1$

b) $f(x) = (x-1)^3 x^2$

c) $f(x) = x^2 ln\ x$.

Ejercicio 5.15
Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de

$$f(x) = \frac{1}{x^5 + x + 1}$$

en $[-1/2, 1]$ *y* $]0, 1]$.

Ejercicio 5.16
Estudiar la existencia de extremo relativo en $x = 0$ de las funciones

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ x^4, & x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5.17
Hallar la altura y el radio de la base del cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

3.2 Problemas complementarios

Ejercicio 5.18
Demostrar que, si f es derivable en $x = a$, entonces

$$f'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{2x}.$$

Encontrar una función que no sea derivable en $x = a$ y para la que el límite anterior exista.

Ejercicio 5.19
Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2.$$

Ejercicio 5.20
Si $f(x)$ es un polinomio de grado n con n raíces reales distintas, demostrar que ninguna de ellas puede ser raíz del polinomio derivada.

Ejercicio 5.21
Demostrar que $e^\pi > \pi^e$. *(Estudiar para ello la variación de la función $f(x) = \frac{ln\ x}{x}$)*

Ejercicio 5.22
Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable cuya derivada está acotada. Demostrar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 5.23
Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $]0, 1]$, tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $]0, 1]$. Demostrar que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $]0, 1]$.

Ejercicio 5.24
Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por

$$f(x) = x + \ cos\ x\ sen\ x, \qquad g(x) = (2 + \ sen\ x)^2 f(x).$$

a) Demostrar que $f(x) > x - 1$, $g(x) > x - 1$, deduciendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) Demostrar que $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{cos\ x}{(2+\ sen\ x)f(x)+\ cos\ x(2+\ sen\ x)^2}$, si $cos\ x \neq 0$.

c) Probar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, pero no existe $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Porqué no puede aplicarse la regla de L'Hôpital?

Ejercicio 5.25
Demostrar que, si $| x |< 1/2$, entonces el polinomio $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ aproxima el valor de $\sqrt{1 + x}$ con un error menor que $\frac{1}{2} | x |^3$.

Ejercicio 5.26
Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

se pide:

a) Demostrar por inducción que, para cada entero positivo n, existen ciertas constantes $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}$ tales que

$$\forall x > 0, \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{x^k}\ e^{-1/x}.$$

b) Haciendo uso del primer apartado, demostrar también inductivamente que $f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n$.

c) Deducir que la serie de Taylor de f en $x = 0$ no coincide con f en ningún entorno de cero.

Ejercicio 5.27

Escribir el desarrollo de McLaurin de $f(x) = ln(\frac{1+x}{1-x})$. *Tomando* $x = 1/3$, *cuántos términos del desarrollo nos permitirán aproximar el* $ln\ 2$ *con seis cifras decimales exactas? (Comparar con el problema propuesto número 12)*

Ejercicio 5.28

Calcular, si existen, el máximo y mínimo absolutos en $\mathbb{R}$ *de la función*

$$f(x) = \frac{1}{1+\mid x \mid} + \frac{1}{1+\mid x-1 \mid}.$$

[Recordar que si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, estrictamente positiva y* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *entonces* f *tiene máximo absoluto]*

Ejercicio 5.29

Sea g *una función derivable en un entorno de* $x = 0$ *con* $g(0) = g'(0) = 0$ *y tal que admite derivada segunda en* $x = 0$ *con* $g''(0) = 17$. *Sea* f *una función definida en el mismo dominio de* g *de modo que*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f *es derivable en* $x = 0$. *(Notar que la regla de L'Hôpital sólo se puede usar una vez)*

Ejercicio 5.30

Calcular el valor de $ln\ 3$ *con error menor de dos centésimas.*

Ejercicio 5.31

Demostrar que, si $\alpha \geq 1$, *se tiene la desigualdad*

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \ \leq \ x^{\alpha} + (1-x)^{\alpha} \ \leq \ 1, \quad \forall x \in [0,1].$$

Práctica 6
Cálculo Integral

1 Cálculo de primitivas

En esta sección vamos a estudiar algunos métodos para obtener la función primitiva de una función dada, i.e., dada una función $f :]a,b[\to I\!R$, encontrar $F :]a,b[\to I\!R$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a,b[$. Recordemos que esto no siempre es posible, ya sabemos que existen funciones que no son la derivada de ninguna otra.

1.1 Integrales inmediatas

Se llaman así a aquellas cuya solución sólo requiere recordar las fórmulas elementales de derivación.

Ejemplo 6.1

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-3t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1-(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2})^2}}dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}) + C.$$

Ejercicio 6.1
Calcular las siguientes primitivas
1. $\int \frac{\tan(1/x)}{x^2}dx.$
2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{5+\sin^2 x}}dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}.$

1.2 Integrales por descomposición

Algunas funciones cuya primitiva no es fácil de calcular directamente se pueden descomponer en suma de funciones, cada una de las cuales tiene integral inmediata.

Ejemplo 6.2

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ejercicio 6.2
$\int \tan^2 x \; dx.$

Ejercicio 6.3
$\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx.$

Ejercicio 6.4
$\int (x+3)(1-x^2)^{-1/2}dx.$

1.3 Integración por partes

Algunas integrales pueden resolverse haciendo uso de la fórmula de integración por partes, que asegura que si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables en un abierto en el que existe la primitiva de $u(x)v'(x)$ o de $u'(x)v(x)$, entonces

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Ejemplo 6.3

$$\int \frac{(x+1)^2}{((x+1)^2+3)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x+1)^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+3},$$

siendo la última integral inmediata.

Ejercicio 6.5
1. $\int x^2 \ln x \; dx$.

2. $\int x \arcsin x^2 dx$.

3. $\int \sin(\ln x) dx$.

1.4 Integración por sustitución

Este método se basa en el siguiente resultado: *Sea* $x = g(t)$ *una función que admite derivada continua no nula y función inversa* $t = h(x)$*. Si*

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + C$$

entonces

$$\int f(x)dx = F(h(x)) + C.$$

Ejemplo 6.4

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\frac{-dx}{x^2} =$$

haciendo el cambio $t = 1/x$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-3t^2}}.$$

Ejercicio 6.6
1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

2. $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}dx$.

1.5 Integración de funciones racionales

Veremos un método que nos permite calcular cualquier integral de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios. Podemos suponer que el grado de P, $gr(P)$, es menor que el de Q, i.e., $gr(P) < gr(Q)$, ya que en caso contrario escribiríamos el cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

donde $gr(S) < gr(Q)$.

El método se basa en descomponer el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en cocientes de polinomios más sencillos llamados *fraciones simples*. Para ello comencemos recordando un par de resultados, el primero de los cuales se conoce con el nombre de *Teorema Fundamental del Algebra*.

Todo polinomio complejo no constante $p(z)$ tiene una raíz compleja, por tanto se puede factorizar de la siguiente forma:

$$p(z) = a_0(z - z_1)^{a_1}(z - z_2)^{a_2} \cdots (z - z_n)^{a_n}.$$

Si un polinomio $p(z)$ con coeficientes reales tiene una raíz compleja a, $p(a) = 0$, entonces su conjugada es también una raíz de $p(z)$, i.e., $p(\overline{a}) = 0$, además el grado de multiplicidad de $\overline{a}$ es el mismo que el de a.

Así el polinomio real $P(x)$ tendrá raíces reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$, con grados de multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, y raíces complejas $a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_j + b_j i$, con grados de multiplicidad $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ y sus conjugadas $a_1 - b_1 i, a_2 - b_2 i, \ldots, a_j - b_j i$. Entonces el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer de forma única en *fracciones simples* como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-r_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{12}}{(x-r_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{x-r_1} + \\ & + \cdots + \\ & + \frac{A_{n1}}{(x-r_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_{n2}}{(x-r_n)^{\alpha_n-1}} + \cdots + \frac{A_{n\alpha_n}}{x-r_n} + \\ & + \frac{m_{11}x + n_{11}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1}} + \frac{m_{12}x + n_{12}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1-1}} + \cdots + \frac{m_{1\beta_1}x + n_{1\beta_1}}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \\ & + \cdots + \\ & \frac{m_{j1}x + n_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{\beta_j}} + \frac{m_{j2}x + n_{j2}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{\beta_j-1}} + \cdots + \frac{m_{j\beta_j}x + n_{j\beta_j}}{(x-a_j)^2 + b_j^2}.\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, el cálculo de una primitiva para cada uno de estos sumandos es inmediato salvo quizá los de la forma

$$\int \frac{mx + n}{[(x-a)^2 + b^2]^{\beta}} dx.$$

En este caso tendremos que

$$\int \frac{mx+n}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}dx = \int \frac{m(x-a)+ma+n}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}dx =$$

$$m\int \frac{x-a}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}dx + (ma+n)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^\beta},$$

siendo la primera de las integrales que queda inmediata y resolviéndose la otra de la siguiente manera:

$$J_\beta = \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^\beta} = \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)^2+b^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+b^2]^\beta}dx =$$

$$= \frac{1}{b^2}J_{\beta-1} - \frac{1}{b^2}\int \frac{(x-a)^2}{[(x-a)^2+b^2]^\beta};$$

integrando ahora por partes en el último término obtenemos la siguiente fórmula recursiva en la que J_1 es una integral inmediata:

$$J_\beta = \frac{1}{b^2}J_{\beta-1} + \frac{x-a}{2b^2(\beta-1)[(x-a)^2+b^2]^\beta} - \frac{1}{2b^2(\beta-1)}J_{\beta-1}.$$

Ejemplo 6.5
Para calcular la integral

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$$

podemos descomponer el integrando en

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3},$$

con lo que

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = -\frac{1}{6}\log|x| + \frac{3}{10}\log|x-2| - \frac{2}{15}\log|x-3| + C.$$

Ejemplo 6.6

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2+3} - \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)^2}{((x+1)^2+3)^2}dx.$$

Aquí, la primera integral es inmediata y la segunda se vió al estudiar integración por partes.

Ejercicio 6.7
1. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx.$

2. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx.$

3. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}dx.$

Cuando el polinomio del denominador tiene raíces complejas múltiples, el cálculo de los coeficientes de la descomposición en fracciones simples se puede hacer laborioso, por lo que, a veces, es útil emplear el

1.6 Método de Hermite

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ como en el apartado anterior. Del Método de Reducción es fácil deducir que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{U(x)}{R(x)} + \int \frac{V(x)}{S(x)}dx, \tag{1}$$

donde

$$R(x) = (x-r_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n-1}((x-a_1)^2+b_1^2)^{\beta_1-1}\cdots((x-a_j)^2+b_j^2)^{\beta_j-1},$$

$$S(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_n)((x-a_1)^2+b_1^2)\cdots((x-a_j)^2+b_j^2),$$

y $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios tales que $gr(U) < gr(R)$ y $gr(V) < gr(S)$.

Esta descomposición es única y el cálculo de U y V se puede hacer derivando (1) e igualando los coeficientes de las potencias de x en los numeradores de las funciones racionales que aparecen, previamente representadas con un mismo denominador.

Ejemplo 6.7

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \int \frac{cx+d}{x^2+x+1}dx.$$

De donde

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{a(x^2+x+1)-(2x+1)(ax+b)}{(x^2+x+1)^2} + \frac{(cx+d)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Igualando coeficientes en

$$1 = a(x^2+x+1)-(2x+1)(ax+b)+(cx+d)(x^2+x+1)$$

queda $a = 2/3$, $b = 1/3$, $c = 0$, $d = 2/3$. *Así la integral pedida vale*

$$\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C.$$

Ejercicio 6.8

1. $\int \frac{dx}{(x^2+5)^2}$.

2. $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$.

1.7 Integración de irracionales algebraicos

Si $R(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ es una función racional, p, q, r, s son números reales tales que r y s no se anulan simultáneamente y q_1, $\cdots$, q_n son números racionales, entonces el cálculo de

$$\int R\left(x, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{q_1}, \cdots, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{q_n}\right)dx$$

se reduce al de la primitiva de una función racional mediante el cambio de variable

$$\frac{px+q}{rx+s} = t^M,$$

siendo M el mínimo común múltiplo de los denominadores de $q_1, \cdots, q_n$, cuando están expresadas en forma irreducible.

Ejemplo 6.8

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$$

El cambio de variable

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3$$

reduce el cálculo de la integral anterior al de

$$-6\int \frac{t^3}{t^3-1}dt$$

que es una función racional.

Ejercicio 6.9

1. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$

2. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$

Hay otra forma de calcular $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ que consiste en reducirla a unas formas canónicas. Unicamente trataremos aquí un caso particular, las primitivas del tipo $\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ con $a > 0$ y $A_n(x)$ un polinomio de grado n. Entonces podemos escribir

$$\int \frac{A_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = A_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + D\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

donde A_{n-1} es un polinomio de grado $n-1$ y D es una constante. Derivando en la igualdad anterior determinaremos D y los coeficientes de A_{n-1}. La integración de $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ se ha estudiado ya.

Ejemplo 6.9

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Si escribimos

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4} + e\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx,$$

derivando obtenemos

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4ax^4+3bx^3+2x^2(6a+c)+x(8b+d)+4c}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{e}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Identificando los coeficientes de las potencias de x en el numerador, llegamos a que

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (\frac{x^3}{4} + \frac{x}{2})\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx.$$

Ejercicio 6.10

Calcular la siguiente integral $\int \frac{-4x+10}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx.$

1.8 Integración de funciones trascendentes

Si $R(x)$ es una función racional y la función inversa de $u(x)$ tiene una derivada racional, entonces el cálculo de $\int R(u(x))dx$ se reduce al de una integral de una función racional mediante el cambio de variable $u(x) = t$.

Ejemplo 6.10

1. $\int R(e^x)dx$.

2. $\int R(\tan x)dx$.

Si $R(u, v)$ es una función racional entonces

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

se reduce al cálculo de la primitiva de una función racional mediante el cambio de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. De hecho

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Ejemplo 6.11

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \arctan(t+1) + C = \arctan(\tan\frac{x}{2} + 1) + C.$$

Ejercicio 6.11

Calcular las siguientes integrales

1. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

2. $\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$.

Algunas veces la integral estudiada puede resolverse más rápidamente:

Si la función R cumple $R(u, -v) = -R(u, v)$, entonces el cambio de variable $t = \sin x$ reduce la integral

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

a una integral de funciones racionales.

Si la función R cumple $R(-u, v) = -R(u, v)$, entonces el cambio a realizar es $t = \cos x$.

Si la función R cumple $R(-u, -v) = R(u, v)$, entonces el cambio es $t = \tan x$.

Ejemplo 6.12

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$$

Haciendo $t = \tan x$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int (t^4 + t^2)dt = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C.$$

Ejercicio 6.12
Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx.$

2. $\int \sin^7 x \; dx.$

Si $R(u, v)$ es una función racional entonces las integrales

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})dx,$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})dx,$$

$$\int R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})dx,$$

se transforman en integrales del tipo estudiado anteriormente mediante los cambios de variable $x = \frac{a}{b} \sin z$, $x = \frac{a}{b} \tan z$, $x = \frac{a}{b} \sec z$, respectivamente.

Ejemplo 6.13

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}dx.$$

Haciendo el cambio $x + 1 = 2 \sin t$ *obtenemos*

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}dx = \int \sqrt{4 - (x + 1)^2}dx =$$

$$= 4 \int \cos^2 t dt = 2t + 2 \sin t \cos t + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x + 1}{2} + (x + 1)\sqrt{1 - \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2} + C$$

Ejercicio 6.13
Calcular

1. $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2}dx.$

2. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} dx.$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx.$

4. $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6} dx.$

1.9 Problemas complementarios

1. $\int \frac{dx}{2x^2+5x+13}$ 2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+6e^x+10}$ 3. $\int x^{-1/2} \sinh \sqrt{x} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+21}}$ 5. $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+18} dx$ 6. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx$

7. $\int \sin^2 ax \ dx$ 8. $\int \cos^2 ax \ dx$ 9. $\int \sin(9x-1)\sin(2x+5) dx$

11. $\int \arcsin \frac{1}{x} dx$ 12. $\int xe^{2x} \cos 3x \ dx$ 12. $\int \arcsin x \ dx$

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ 14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$ 15. $\int \sin \sqrt{x} dx$

16. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$ 17. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)} dx$ 18. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} dx$

19. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx$ 20. $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x} dx$ 21. $\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx$

22. $\int \tan^3 x \ dx$

2 Integración definida

Uno de los teoremas fundamentales del Cálculo nos garantiza la existencia de primitiva para las funciones continuas: *Si* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *es continua, entonces la función definida por* $F(x) = \int_a^x f(t) \ dt$ *es una primitiva de* f. En otras palabras, si f es continua, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$.

Ejemplo 6.14
Sea $F(x) = \int_0^x \sin^3 t \ dt$, $x \geq 0$, *la función* $f(x) = sen^3 \ x$ *es continua en cualquier intervalo* $[0,a]$, *entonces* $F'(x) = sen^3 x$, $x \in [0,a]$, *y esto* $\forall a \geq 0$ *por tanto* $F'(x) = sen^3 x$, $x \geq 0$.

En el siguiente ejemplo se utiliza el Teorema anterior junto con las técnicas fundamentales de derivación, en especial, la regla de la cadena.

Ejemplo 6.15
Dada $F(x) = \int_0^{\cos \ x} (v+3) \ dv$ *,veamos que* $F'(x) = (\cos \ x+3)(-sen \ x)$. *La función* $F(x)$ *es composición de las funciones :* $G(x) = \cos \ x$ *y* $H(x) = \int_0^x (v+3) \ dv$.
$(H \ o \ G) \ (x) = H \ (\ G(x) \ ) = H(\cos \ x) = \int_0^{\cos \ x} (v+3) \ dv = F(x)$. *Por la regla de la cadena,*

$$F'(x) = (H \ o \ G)'(x) = H'(\ G(x)) \ \ G'(x) = (\cos \ x+3) \ (-sen \ x).$$

Ejercicio 6.14
Hallar en cada uno de los siguientes casos la derivada de la función F.

$$\text{(a)} \ F(x) = \int_1^x x\frac{\text{sen } t}{t} \ dt \qquad \text{(b)} \ F(x) = \int_x^3 (u+2)^4 \ du$$

$$\text{(c)} \ F(x) = \int_x^1 e^{-t^2} \ dt \qquad \text{(d)} \ F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} \ dt$$

(e) $F(x)=\displaystyle\int_1^x\Big(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\,dt\Big)\,dy$ (f) $F(x)=\cos\Big(\displaystyle\int_1^{x^2}\sqrt[3]{t^2+t+1}\,dt\Big)$

(g) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\text{sen } x}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$ (h) $F(x)=\displaystyle\int_0^{\int_2^{x^2}\frac{\log t}{t-1}\,dt}\cos t^2\,dt.$

Si una función f es integrable Riemann en $[a,b]$ y posee una primitiva F, la forma más sencilla de calcular su integral (a no ser que la función sea tan simple como una constante) es mediante la **Regla de Barrow**. Ésta afirma que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$.

Ejemplo 6.16
$\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{\log(x^2+4)}{2}|_0^2 = \log\sqrt{2}$.

Ejercicio 6.15
Calcular los valores de las siguientes integrales definidas.

(a) $\int_{-2}^4 (x-1)(x-2)\,dx$.
(b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.
(c) $\int_1^5 e^x\cos x\,dx$.
(d) $\int_0^2 f(x)\,dx$ donde $f(x)=\begin{cases} x^2, & si\ \ 0\le x\le 1;\\ 2-x, & si\ \ 1<x\le 2.\end{cases}$
(e) $\int_0^1 f(x)\,dx$ donde $f(x)=\begin{cases} x, & si\ \ 0\le x\le c;\\ c\frac{1-x}{1-c}, & si\ \ c<x\le 1;\end{cases}$ *siendo* c *un número real tal que* $0<c<1$.

3 Cálculo de áreas

La integral de Riemann de una función positiva f en el intervalo $[a,b]$ tiene como motivación geométrica la medida del área que encierra la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[a,b]$. Luego es natural definir esa área como $\int_a^b f(x)\,dx$. En general, si una función f es integrable y no toma sólo valores positivos, entonces se define el área de la porción de plano determinada por la gráfica de f y el eje x entre $x=a$ y $x=b$ como $A=\int_a^b |f(x)|\,dx$. Para calcular el área es necesario, pues, averiguar primero los intervalos en los que la función es positiva y en los que es negativa.

El área comprendida entre las gráficas de dos funciones integrables f y g en el intervalo $[a,b]$, viene dada por $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

Ejemplo 6.17
Calcular el área limitada por la recta $y=2x+3$ *y la parábola* $y=x^2$.

Dadas las funciones $f(x)=2x{+}3$ *y* $g(x)=x^2$ *, los puntos de corte de ambas son,* $x=-1$ *y* $x=3$. *En el intervalo* $[-1,3]$ *se verifica* $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ *,entonces,* $A=\int_{-1}^3 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_{-1}^3 (2x+3-x^2)\,dx = 32/3$.

Ejemplo 6.18
Calcular el área comprendida entre la función $f(x) = (x-1)(x+2)$ *,los ejes coordenados y las rectas* $x = -3$ *y* $x = -2$. *Si se representa gráficamente la función f(x) se puede apreciar que en el intervalo [-3,2] , f(x) toma valores positivos y negativos,*

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & si \;\; -3 \leq x \leq -2; \\ -f(x), & si \;\; -2 \leq x \leq 1; \\ f(x), & si \;\; 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$A = \int_{-3}^{2} |f(x)|\, dx = \int_{-3}^{-2} (x-1)\,(x+2)\, dx + \int_{-2}^{1} -(x-1)\,(x+2)\, dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,(x+2)\, dx = 49/6.$$

Ejercicio 6.16
Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f *y* g *en el intervalo que se indica.*

(a) $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \text{sen } x \quad$ en $[0, \pi/4]$.
(b) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x\sqrt{x^2+2} \quad$ en $[0, 1]$.
(c) $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x} \quad$ en $[-1, 1]$.
(d) $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen } 2x, \quad g(x) = \text{sen } x$ *entre el origen y el menor punto de corte positivo.*

Ejercicio 6.17
Calcular el área de un círculo de radio R *y de una elipse de semiejes* a *y* b.

Ejercicio 6.18
Hallar el área limitada por la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ *y los ejes de coordenadas.*

Ejercicio 6.19
Calcular el área común a los círculos $x^2 + y^2 = 9$ *y* $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 6.20
Calcular el valor de $a > 0$ *para que la función* $f(x) = x^3$ *divida en dos partes iguales el triángulo determinado por la función* $g(x) = ax$, *el eje* x *y el mayor punto de corte de las funciones* f *y* g.

4 Cálculo de límites por medio de integrales definidas

Intuitivamente, la integral de Riemann de una función integrable es el límite de las sumas de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad \text{siendo} \quad P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Si tomamos una sucesión de particiones cuya norma tiende a cero (por ejemplo, dividiendo el intervalo en partes iguales), entonces podemos escribir la integral como límite de una sucesión de sumas de Riemann. Además de para aproximar la integral, este hecho se puede utilizar para calcular el límite de ciertas sucesiones. Muchos límites de aspecto impresionante, en realidad, no son más que sumas de Riemann de funciones elementales y pueden ser calculados fácilmente para ello haremos uso del siguiente resultado :

Si $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ es integrable, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(k/n\big) = \int_0^1 f(x)\, dx$. Además, si

$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Ejemplo 6.19

Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2}$ *Lo primero que tenemos que hacer es escribirlo de forma adecuada:*

$$\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2} =$$
$$= \frac{1}{n}\Big(\frac{1/n}{1+(1/n)^2} + \frac{2/n}{1+(2/n)^2} + \cdots + \frac{n/n}{1+(n/n)^2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

donde $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. *Luego,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\log 2.$$

Ejercicio 6.21

Hallar los siguientes límites.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}\Big(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4\Big)$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$..

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{3}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{2n^2}}\Big)$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}\Big)$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(1+\sqrt{n^2+1^2})(2+\sqrt{n^2+2^2})\cdots(n+\sqrt{n^2+n^2})}$.

5 Problemas complementarios

9.- Sea f una función definida en $[-a,a]$. Se dice que f es par si $f(-x) = f(x)$ y es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-a,a]$. Demostrar que si f es integrable Riemann en $[0,a]$, entonces

(a) $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$ cuando f es par.

(b) $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$ cuando f es impar.

10.-Calcular cuánto mide la superficie en forma de "luna" delimitada por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{2R^2 - x^2} - R$, en $[-R,R]$.

11.- (a) Si $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ es integrable, probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(k/n\big) = \int_0^1 f(x)\ dx$. (b) Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Práctica 7
Números complejos

Un número complejo se escribe como $z = x + iy$ donde $x = \Re e z$ se denomina parte real de z e $y = \Im m z$ parte imaginaria. El número $\overline{z} = x - iy$ se llama el complejo conjugado de z. El valor absoluto de $z = x + iy$ se define como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Todo número complejo $z \neq 0$ se puede escribir en coordenadas polares como $z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, siendo $t \in \mathbb{R}$. Cada uno de los valores t que cumplen la anterior igualdad se dice que es un argumento de z. Dos de estos valores difieren en un múltiplo de 2π, con lo cual sólo hay un valor en el intervalo $]-\pi, \pi]$, que se denomina argumento principal.

En los siguientes problemas se utilizan únicamente las propiedades elementales de las operaciones con números complejos.

Ejemplo 7.1
Sean $z, w \in \mathbb{C}$ *con* $w \neq 0$. *Vamos a probar que* $|z + w| = |z| + |w| \iff z/w \in \mathbb{R}$ *y* $z/w \geq 0$.

Si $|z + w| = |z| + |w|$, *entonces* $|\frac{z}{w} + 1| = |\frac{z}{w}| + 1$. *Llamando* $\frac{z}{w} = x + iy$, *se deduce que* $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$, *con lo cual*

$$(1) \qquad x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

Simplificando y elevando al cuadrado se obtiene $x^2 = x^2 + y^2$ *y por tanto* $y = 0$. *Además, sustituyendo en (1) se llega a que* $x \geq 0$.

Recíprocamente, si $z/w \in \mathbb{R}$ *y* $z/w \geq 0$, *es inmediato que* $|\frac{z}{w} + 1| = |\frac{z}{w}| + 1$. *Multiplicando por* $|w|$ *se sigue que* $|z + w| = |z| + |w|$.

Ejemplo 7.2
Vamos a determinar los valores $x, y \in \mathbb{R}$ *que satisfacen la ecuación* $x + iy = |x - iy|$.

Si $x + iy = |x - iy|$, *entonces* $x = \Re e(x + iy) = \Re e|x - iy| = |x - iy|$, *con lo cual* $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ *lo que implica que* $y = 0$. *Por otro lado,* $x = |x|$ *con lo cual* $x \geq 0$.

Es inmediato que si $x \geq 0$ *e* $y = 0$, *se verifica la ecuación.*

Otra forma de verlo es considerar la ecuación equivalente $z = |\overline{z}|$. *Multiplicando por* $\overline{z}$ *se obtiene que* $|z|^2 = |z| \cdot \overline{z}$ *con lo cual* $\overline{z} = |z| = z$. *Por tanto,* $\Im m z = 0$ *y* $\Re e z = |z| \geq 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 7.1
Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$.

(i) $(1 + 2i)^3$

(ii) $\frac{5}{-3+4i}$

(iii) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

(iv) $i^5 + i^{16}$

(v) $\frac{1+i}{1+i^{-8}}$
(vi) $(1+i)^n - (1-i)^n$
(vii) $\sum_{k=1}^{100} i^k$

Ejercicio 7.2
Probar que
(i) $|z+1| > |z-1| \Longleftrightarrow \Re e z > 0$
(ii) $\Im m z > 0$ *e* $\Im m w > 0 \Rightarrow \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right| < 1$
(iii) $|z-w|^2 \leq (1+|z|^2)\cdot(1+|w|^2)$

Ejercicio 7.3
Probar la ley del paralelogramo: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$ *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7.4
Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$ *tales que* $|z| = 1$. *Probar que* $\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1$.

Ejercicio 7.5
Sea $P(z)$ *un polinomio con coeficientes complejos; esto es,* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, *y sea* $\overline{P}(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^j$. *Probar que*
(i) $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.
(ii) *Si* $a_j \in \mathbb{R}$ *para todo* j *y* z_0 *es una raíz de* $P(z) = 0$, *entonces* $\overline{z}_0$ *también lo es.*

Ejercicio 7.6
Aplicar las fórmulas de De Moivre para obtener expresiones para $\cos 5t$ *y* $\operatorname{sen} 5t$ *en función de* $\cos t$ *y* $\operatorname{sen} t$.

Ejercicio 7.7
Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})t}{2\ \operatorname{sen}\ \frac{t}{2}}$$

para $\operatorname{sen}\frac{t}{2} \neq 0$.

1 Raíces de números complejos

Si $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen exáctamente n números complejos diferentes z_0, z_1, ... ,z_{n-1} tales que $z_k^n = z$ para $k = 0, \ldots, n-1$.

Escribiendo $z = |z|\cdot(\cos t + i\ \operatorname{sen}\ t\ )$ con $t \in [0, 2\pi[$, las raíces vienen dadas por las fórmulas

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\ \operatorname{sen}\ \frac{t+2k\pi}{n}\ ), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Por tanto, dado $z \neq 0$, la expresión $\sqrt[n]{z}$ designa un conjunto de n elementos.

Ejemplo 7.3
Vamos a calcular las raíces cúbicas de 1.

Por ser $1 = \cos 0 + i\ \operatorname{sen}\ 0$, *se sigue de la fórmula anterior que las raíces cúbicas son* $z_0 = \cos 0 + i\ \operatorname{sen}\ 0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \operatorname{sen}\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\ \operatorname{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 7.8

Calcular las siguientes expresiones.

(i) $\sqrt[3]{2+2i}$.

(ii) $\sqrt[4]{i}$.

(iii) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$.

(iv) $\sqrt[3]{-1}$.

Ejercicio 7.9

(i) Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, *siendo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n \neq 2$.

(ii) Determinar los valores $x, y \in \mathbb{R}$ *que satisfacen la igualdad* $x + iy = (x - iy)^2$.

Ejercicio 7.10

Probar que las raíces n*-ésimas de la unidad distintas de* 1 *satisfacen la ecuación* $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0$.

2 El plano complejo

Puesto que cada número complejo tiene asociados dos números reales, su parte real y su parte imaginaria), determina unívocamente un punto en el plano. El plano cuyos puntos representan los números complejos se llama plano complejo o plano de Argand (por el matemático que, junto con Wessel y Gauss, propuso esta interpretación para $\mathbb{C}$). Desde esta perspectiva tanto las operaciones con números complejos como los subconjuntos de $\mathbb{C}$ tienen un significado geométrico.

Ejemplo 7.4

¿Qué interpretación geométrica tiene el producto de un número complejo por i *y por* $-i$*?*

Si $z = |z|\cdot(\cos t + i \text{ sen } t)$, *entonces, por un lado,* $iz = |z|\cdot(-\text{sen } t + i\cos t) = |z|\cdot(\cos(t+\pi/2) + i \text{ sen } (t+\pi/2))$ *y, por otro lado,* $-iz = |z|\cdot(\text{sen } t - i\cos t) = |z|\cdot(\cos(t-\pi/2) + i \text{ sen } (t-\pi/2))$. *Por tanto,* iz *se obtiene de* z *girándolo un ángulo* $\pi/2$ *en sentido contrario de las agujas del reloj, y* $-iz$ *se obtiene de* z *mediante una rotación de ángulo* $\pi/2$ *en el mismo sentido de las agujas del reloj.*

Ejemplo 7.5

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *con* $z_1 \neq z_2$, *vamos a describir el conjunto de los números complejos que verifican* $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Intuitivamente, es el conjunto de los puntos tales que su distancia a z_1 *es igual que su distancia a* z_2. *Por ello, debe de ser la mediatriz del segmento que une* z_1 *y* z_2. *Esta recta pasa por* $\frac{z_1+z_2}{2}$ *y tiene como vector director* $i(z_2 - z_1)$ *con lo cual su ecuación viene dada por* $z = \frac{z_1+z_2}{2} + \lambda i(z_2 - z_1)$, *donde* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es inmediato que todo punto de esta recta cumple la igualdad. En efecto, si $z = \frac{z_1+z_2}{2} + \lambda i(z_2 - z_1)$, *entonces*

$$|z - z_1| = \Big|\frac{z_2 - z_1}{2} + \lambda i(z_2 - z_1)\Big| = |z_2 - z_1|\cdot|\frac{1}{2} + \lambda i|$$

$$|z - z_2| = \Big|\frac{z_1 - z_2}{2} + \lambda i(z_2 - z_1) = |z_2 - z_1|\cdot|\frac{1}{2} - \lambda i|$$

y como $|\frac{1}{2} + \lambda i| = |\frac{1}{2} - \lambda i|$ *se deduce la igualdad* $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Recíprocamente, sea z *tal que* $|z - z_1| = |z - z_2|$. *Se define* $w = z - \frac{z_1+z_2}{2}$ *con lo cual*

$$|w + \frac{z_2 - z_1}{2}| = |z - z_1| = |z - z_2| = |w - \frac{z_2 - z_1}{2}|$$

y, dividiendo por $\frac{z_2-z_1}{2}$, *se llega a que* $|\frac{2w}{z_2-z_1} + 1| = |\frac{2w}{z_2-z_1} - 1|$. *Considerando* $x = \Re\mathrm{e}\frac{2w}{z_2-z_1}$ *e* $y = \Im\mathrm{m}\frac{2w}{z_2-z_1}$ *se obtiene* $(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$ *y, por consiguiente,* $x = 0$. *Tomando* $\lambda = y/2$ *se deduce que* $w = \lambda i(z_2 - z_1)$ *y, por tanto,* $z = \frac{z_1+z_2}{2} + \lambda i(z_2 - z_1)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 7.11

Escribir las ecuaciones de una recta y una circunferencia en términos de z *y* $\overline{z}$.

Ejercicio 7.12

Mostrar que z_1, z_2 *y* z_3 *están en la misma recta si, y sólo si,*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 7.13

Explicar el significado geométrico de las siguientes relaciones.

(i) $\Re\mathrm{e}z \geq cte$.

(ii) $\Im\mathrm{m}z < cte$.

(iii) $|z| = \Re\mathrm{e}z + 1$.

(iv) $\Im\mathrm{m}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

(v) $|z - 2| + |z + 2| = 5$.

(vi) $|z - 2| - |z + 2| = 3$.

Práctica 8
Sucesiones y series de funciones

1 Convergencia puntual

Definición 8.1

Supongamos que (f_n), *con* $n = 1, 2, ...$ *es una sucesión de funciones definidas en un subconjunto* $E \subset \mathbb{C}$, *y que la sucesión de números* $(f_n(x))$ *converge para todo* $x \in E$. *Podemos definir una función* f *por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E) \tag{2}$$

Cuando ocurre 2, decimos que (f_n) *converge en* E *y que* f *es el límite puntual de* (f_n) *en* E. *Del mismo modo, si* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge para todo* $x \in E$ *y definimos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E) \tag{3}$$

a la función f *se le llama suma puntual de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

El principal problema que se presenta es el de determinar qué propiedades de las funciones se conservan con las operaciones de límites 2 y 3. Por ejemplo, si las funciones f_n son continuas, o derivables o integrables, ¿sucede lo mismo con la función límite puntual? ¿Cuáles son las relaciones entre f_n' y f' o entre las integrales de f_n y la de f?

Ejemplo 8.1

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *consideremos la función*

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ f_n(x) = x^n. \tag{4}$$

Es claro que cada una de las funciones f_n *es continua en el intervalo* $[0, 1]$ *pero si calculamos el límite puntual de esta sucesión de funciones nos queda.*

Si $0 \leq x < 1$, *es claro que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Si $x = 1$, *entonces, como* $f_n(1) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

Lo anterior pone de manifiesto que la sucesión (f_n) *converge puntualmente en* $[0, 1]$ *a la función* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *que toma los valores* $f(x) = 0$ *si* $0 \leq x < 1$ *y* $f(1) = 1$, *que evidentemente es discontinua en el punto* $x = 1$.

Ejemplo 8.2

Sea $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ *y consideremos*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Como $f_n(0) = 0$, *tenemos que* $f(0) = 0$. *Para* $x \neq 0$, *la última serie es una serie geométrica convergente a* $1+x^2$ *por lo tanto,* f *no es continua en* $x = 0$ *a pesar de que cada una de las funciones* f_n *es derivable en* $x = 0$.

Ejemplo 8.3
Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos la función definida por

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Cuando $m!x$ es entero , $f_m(x) = 1$. Para todo otro valor de x, $f_m(x) = 0$. Sea ahora

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Para x irracional, es caro que $f_m(x) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, con lo cual $f(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, es decir, $x = \frac{p}{q}$, siendo $p, q \in \mathbb{Z}$, es claro que $m!x \in \mathbb{Z}$ si $m \geq q$, de modo que $f(x) = 1$. Por lo tanto f es la función que vale 1 para los racionales y 0 para los irracionales.

Ejemplo 8.4
Dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}},$$

si calculamos el límite puntual de esta sucesión, para cada $x \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Entonces, $f'(x) = 0$ y

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx,$$

de modo que la sucesión (f_n') no converge puntualmente a f'. Por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Ejemplo 8.5
Sea

$$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n \quad (0 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N})$$

Para $0 < x \leq 1$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

Como $f_n(0) = 0$, se tiene que (f_n) converge puntualmente a la función $f \equiv 0$.
Un cálculo sencillo demuestra que

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+2}$$

y por lo tanto,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2}.$$

Del hecho anterior se desprende que

$$0 = \int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \infty$$

Ejercicio 8.1
Estudiar la convergencia puntual de las siguientes sucesiones funcionales.

(a) $f_n(x) = [nx]/x$, *donde* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x \leq -1/n; \\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right), & \text{si } -1/n < x < 1/n; \\ 1, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$, *con* $x \in [-1/2, 1/2]$.

(d) $f_n(x) = (x^2 + nx)/n$, *donde* $x \in \mathbb{R}$.

(e) $f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n; \\ \frac{n}{n-1}(1-x), & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$

(f) $f_n(x) = (\operatorname{sen} x)^n$, *siendo* $x \in [0, \pi]$.

(g) $f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n^3}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n; \\ \frac{1}{x\sqrt{n}}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$

(h) $f_n(x) = \begin{cases} xn, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n; \\ \frac{1}{xn}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$

2 Convergencia uniforme

Definición 8.2
Decimos que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *converge uniformemente en* E *hacia una función* f *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *se tiene que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in E$.

Es claro que toda sucesión uniformemente convergente es puntualmente convergente. Además, de la definición de convergencia uniforme se desprende el siguiente resultado.

Teorema 8.3
Supongamos que (f_n) *es una sucesión de funciones definidas sobre* E *que converge puntualmente en* E *a una funcion* f. *Entonces* (f_n) *converge uniformemente a* f *en* E *si, y sólo si, existe una sucesión* (M_n) *de números reales positivos convergente a cero que verifica*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E$$

Ejemplo 8.6
Dado $n \in \mathbb{N}$ *definimos la función* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$*, si fijamos un* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_0^2}}{n} = 0$$

por lo tanto, la sucesión (f_n) *converge puntualmente a la función* $f \equiv 0$*. Veamos ahora que la convergencia es uniforme. En efecto, como* $e^{-x^2} \leq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene que*

$$|\frac{e^{-x^2}}{n}| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ahora aplicamos el teorema 8.3 obtenemos el resultado.

Definición 8.4
Diremos que una serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* E *a una función* f*, si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente a* f *en* E*.*

A continuación enunciaremos un criterio de convergencia muy útil para saber si una serie de funciones converge uniformemente.

Teorema 8.5 (Criterio M de Weierstrass)
Supongamos que (f_n) *es una sucesión de funciones definidas sobre* E*, y supongamos que*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en estas condiciones, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformente en* E *siempre que* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *sea una serie numérica convergente.*

Ejemplo 8.7
Consideremos la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

esta serie es uniformemente convergente en $[0, \frac{1}{2}]$ *ya que para cada* $x \in [0, \frac{1}{2}]$ *se cumple que* $|x^n| \leq (\frac{1}{2})^n$ *y la serie numerica* $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ *es una serie geométrica de razon* $\frac{1}{2}$ *y por lo tanto convergente. Ahora podemos utilizar el criterio M de Weierstrass para obtener el resultado.*

Ejercicio 8.2
¿Cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 convergen uniformemente?

Ejercicio 8.3
Sean $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ *y* $f(x) = x$*. comprobar que la sucesión* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a* f *en* $\mathbb{R}$*, pero* $(f_n^2)_{n=1}^{\infty}$ *no converge uniformemente a* f^2*. ¿Qué ocurre en los intervalos acotados?*

Ejercicio 8.4
Consideremos la sucesión funcional definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}, & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right] \setminus \{0\}; \\ n, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{n}\right] \cup \left[\frac{\pi}{n}, \pi\right]. \end{cases}$$

Estudiar la convergencia uniforme de la sucesión y la existencia de $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, dx$*.*

Ejercicio 8.5
Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]; \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n}, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]; \\ x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) *Probar que la sucesión* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente.*
(b) *Probar que la sucesión* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *converge puntual pero no uniformemente.*

Ejercicio 8.6
Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \frac{n^p x}{1 + n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

dependiendo de los valores de $p \in [0, 2]$.

Ejercicio 8.7
Consideremos la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^p x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ \left(\frac{2}{n} - x\right) n^p, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ 0, & \text{si } x \in \left]\frac{2}{n}, 1\right]; \end{cases}$$

donde $p > 0$.
(a) *Calcular la función límite puntual* f.
(b) *Identificar los valores de* p *para los que la convergencia es uniforme.*
(c) *¿Para qué valores de* p *se cumple que* $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ *?*

Ejercicio 8.8
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión de funciones definida por* $f_n(x) = x n^p e^{-nx}$, *con* $x > 0$ *y* $p > 0$.
(a) *Calcular la función límite puntual* f.
(b) *Hallar los valores de* p *tales que la convergencia a* f *de la sucesión* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *sea uniforme.*
(c) *¿Existe algún* p *tal que la sucesión* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *converja uniformemente?*

Ejercicio 8.9
Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series.
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, *donde* $x \in [-1, 1]$.
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, *con* $x \in \mathbb{R}$.
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n^2}\right)$, *con* $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, *donde* $x \in [1, +\infty[$.
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$, *con* $x \in [\epsilon, M]$ *siendo* $0 < \epsilon < 1 < M$.

Ejercicio 8.10
¿Para qué valores de $p > 0$ *converge uniformemente la serie funcional*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p(1 + nx^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}?$$

Ejercicio 8.11

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de

(a) $f_n(z) = \begin{cases} nz, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{n}; \\ \frac{z}{|z|}, & \text{si } |z| \geq \frac{1}{n}; \end{cases}$ *donde* $|z| \leq 2$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}$, *con* $|z| \leq 1/2$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(1+|z|)^n}$, *con* $z \in \mathbb{C}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$, *donde* $|z| \leq 1/2$.

Práctica 9
Series de potencias

1 Radios de convergencia.

Presentamos en primer lugar la fórmula de Cauchy-Hadamard para el cálculo del radio de convergencia de una serie de potencias:

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$*, se considera*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Entonces:

a) Si $|z-a| < R$*, la serie converge absolutamente; además, si* $0 < r < R$*, la serie converge uniformemente en* $\{z : |z| \leq r\}$*.*

b) Si $|z-a| > R$*, la serie diverge.*

Ejemplo 9.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2},$$

Obsérvese que puede reescribirse en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq k^2 \quad \forall k \in \mathbf{N} \\ k!, & \text{si} \quad n = k^2 \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Así, $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \sup\{0, \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}\} = 1$, y por lo tanto el radio de convergencia de la serie es 1.

Para calcular el radio de convergencia de las series de potencias, es a veces útil la siguiente propiedad:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia R. Entonces:*

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|,$$

cuando el límite existe.

La fórmula de Cauchy-Hadamard no proporciona información sobre el comportamiento de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en los puntos donde $|z-a| = R$, siendo R el radio de convergencia. En tales puntos, es necesario un estudio particular de la serie considerada.

Ejemplo 9.2
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *tiene radio de convergencia* 1*. Debe estudiarse así su convergencia o divergencia para los valores* $z \in \mathbf{C}$ *tales que* $|z| = 1$*.*

La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente; si $|z| = 1,\ z \neq 1$, se tiene que:

$$|\sum_{j=1}^{n} z^j| = |\frac{z - z^{n+1}}{1-z}| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

y por lo tanto la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge por el criterio de Dirichlet:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{R}^+$ *monótona decreciente y convergente a* 0 *y sea* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{C}$ *tal que* $\{\sum_{j=1}^{n} b_j\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotada. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *es convergente en* $\mathbf{C}$.

2 Problemas propuestos

Ejercicio 9.1

Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty} n^{\log n} z^n \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$$

$$(iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} \qquad (v)\ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{n} z^n \quad a \in \mathbf{N}$$

$$(vi)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ donde } a_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2}, & si \quad n = 3m, \\ \frac{2m}{2m+1}, & si \quad n = 3m+1, \\ m^4, & si \quad n = 3m+2. \end{cases}$$

Ejercicio 9.2

Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las siguientes series:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

$$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n} \quad p \in \mathbf{N} \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n-1}}{\log n}$$