PRÁCTICAS DE ANÁLISIS VECTORIAL

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2004/2005

Profesores responsables
Pablo Galindo
Aníbal Moltó

Práctica 1
Integral de línea. Superficies y áreas de superficie.

1 Curvas y longitud de curvas en $\mathbb{R}^n$

Un camino en $\mathbb{R}^n$ es una función $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Si γ es C^1, diremos que el camino es C^1 . Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se llaman extremos del camino . La imagen de γ, γ^*, se llama arco . Si llamamos t a la variable, podemos imaginar t como el tiempo y $\gamma(t)$ como la posición de una partícula en movimiento en el tiempo t .

——————— • ———————

Ejemplo 1.1
(1) La recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por un punto P en la dirección del vector v es la imagen del camino

$$\gamma(t) \;=\; P + tv \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

(2) La circunferencia unidad es la imagen del camino $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) \;=\; (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

——————— • ———————

Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino C^1 entonces γ^* es una curva rectificable y la longitud de γ^* coincide con la integral

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

——————— • ———————

Ejercicio 1.1
Describir y calcular, si es posible, la longitud de los siguientes caminos :
(i) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, siendo $\gamma(t) := (1+5t, 2-t, 3+t)$.
(ii) $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, siendo la cicloide $\gamma(t) := (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$.
(iii) $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, siendo la astroide $\gamma(t) := (cos^3 t, sen^3 t)$.
(iv) $\gamma : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, siendo $\gamma(t) := (t, t^2)$.
(v) $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, siendo $\gamma(t) := (|t|, |t - \frac{1}{2}|)$

Ejercicio 1.2
Parametrizar la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r usando los intervalos $[0,1]$ y $[0,2\pi]$ de forma que se recorra la curva, bien en el sentido de las agujas del reloj, bien en sentido contrario a las mismas. Parametrizar la elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b.

Ejercicio 1.3
Parametrizar la curva intersección de las superficies en $\mathbb{R}^3$, $y = x^2$, $3z = 2xy$,desde el origen al punto $(1, 1, 2/3)$.

Ejercicio 1.4
Calcular, si es posible, la longitud de los caminos descritos en los dos ejercicios anteriores.

Ejercicio 1.5
Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^2 . Suponer que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. El vector

$$T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\parallel \gamma'(t) \parallel}$$

es un vector tangente a γ^* en $\gamma(t)$ y, como $\| T(t)\| = 1$, a T se le llama tangente unitaria a γ. Mostrar que $T'(t) \cdot T(t) = 0$

2 Integrales de línea.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino C^1 y F un campo vectorial C^1 sobre γ^*. Se define la integral de línea de f a lo largo de γ como

$$\int_\gamma Fds = \int_a^b (F(\gamma(t)).\gamma'(t))dt.$$

Como sucede con las funciones escalares, la integral anterior se define de forma análoga si $F(\gamma(t)).\gamma'(t)$ es continua a trozos.

Si $\gamma'(t) \neq 0$ y si $T(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ denota el vector tangente unitario, se tiene que

$$\int_\gamma Fds = \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot T(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

Otra manera común de escribir integrales de línea es

$$\int_\gamma Fds = \int_a^b F_1dx_1 + F_2dx_2 + ... + F_ndx_n,$$

donde $F_1, F_2, ..., F_n$ son las componentes de F.

———— • ————

Ejemplo 1.2
Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x^3, y, z)$; $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(\theta) = (0, a\cos\theta, a\text{sen}\theta)$, siendo $a > 0$.γ^* es el círculo de radio a en el plano yz.

$$\int_\gamma Fds = \int_0^{2\pi} ((0, a\cos\theta, a\text{sen}\theta).(0, -a\text{sen}\theta, a\cos\theta))d\theta = 0.$$

———— • ————

Ejercicio 1.6
Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar la integral de F a lo largo de los caminos siguientes
(i) $\gamma(t) = (t, t, t), t \in [0, 1]$.
(ii) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 0), t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 1.7
Evaluar cada una de las siguientes integrales:
(i) $\int_\gamma xdy - ydx, \gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t), t \in [0, 2\pi]$.
(ii) $\int_\gamma yzdx + xzdy + xydz$, donde γ está formada por los segmentos de rectas que unen $(1, 0, 0)$ con $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$ con $(0, 0, 1)$.
(iii) $\int_\gamma x^2dx - xydy + dz$, donde γ es la parábola $z = x^2, y = 0$ de $(-1, 01)$ a $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 1.8
Considerar la fuerza $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2, z = 0$ de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 1.9
Sea $F(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ definida en todo el plano salvo en el origen y los caminos

$$\alpha, \beta : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) := (\cos\pi t, \text{sen}\pi t) \quad , \quad \beta(t) := (\cos\pi t, -\text{sen}\pi t)$$

Calcular $\int_\alpha Fds$ e $\int_\beta Fds$,e interpretar el resultado .

Ejercicio 1.10
Calcular

$$\int_{\mathbf{T}} \frac{y^2dx + x^2dy}{1 + x^2 + y^2}$$

siendo $\mathbf{T}$ *el triángulo determinado por los puntos* $(1,0)$, $(1,1)$ *y* $(0,0)$ *recorrido de forma positiva.*

Ejercicio 1.11
Calcular $\int_\gamma xdx + ydy$ *siendo* $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t), t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 1.12
Considerar el campo de fuerza gravitacional definido por

$$F(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}(x,y,z) \ \forall \ (x,y,z) \neq 0.$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) *a* (x_2, y_2, z_2) *a lo largo de cualquier camino, depende sólo de los radios*

$$R_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \ \ y \ \ R_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}.$$

3 Teorema de Green.

Teorema 1.1 (Teorema de Green)
Sea D *una buena región del plano con* ∂D *positivamente orientada y* $F = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial* $\mathbf{C^1}$*,entonces*

$$(1) \quad \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

———— • ————

Como consecuencia de (1) se obtiene que

$$m(D) = \int_{\partial D} -ydx = \int_{\partial D} xdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

———— • ————

Ejemplo 1.3
Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. *Entonces*

$$m(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

Una parametrización positiva de ∂D *es*

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi].$$

Luego

$$m(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 dt = \pi r^2.$$

Teorema 1.2 (Teorema de la divergencia en el plano)
Sea D *una buena región del plano con* ∂D *positivamente orientada.Denotamos por* n *la normal unitaria exterior a* ∂D *.Si* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una parametrización de* ∂D *que conserva la orientación ,*

$$n = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial $\mathbf{C^1}$ en D.Entonces,

$$\int_{\partial D} F \cdot n ds = \int_D div(F).$$

Ejemplo 1.4
Sea $F = (y^3, x^5)$.La integral de la componente normal de F alrededor del cuadrado unitario $I = [0,1]^2$ viene dada por $\int_{\partial D} F \cdot nds = \int_D div(F) = 0$, pues $div(F) = 0$..

———— • ————

Ejercicio 1.13
Sea $F = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) = (P, Q)$.
(i) Probar que salvo en $(0,0)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
(ii) Calcular $\int_\gamma F ds$, siendo $\gamma(t) = (cos^9 t, sen^9 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 1.14
Calcular el área encerrada por una elipse utilizando el Teorema de Green.

Ejercicio 1.15
Aplicando el Teorema de Green calcular

$$\int_{\mathbf{C}} (y + 3x)dx + (9y - x)dy$$

siendo $\mathbf{C}$ la elipse $4x^2 + y^2 = 4$,orientada positivamente.

Ejercicio 1.16
Aplicando el teorema de Green calcular

$$\int_{\mathbf{D}} \frac{2ay - x^2 - y^2}{y} dxdy$$

siendo $\mathbf{D}$ el recinto encerrado por la curva $x^2 + y^2 = 2ay$ e $y \geq a$ $(a > 0)$.

Ejercicio 1.17
Calcular el área encerrada por el folium de Descartes, $x^3 + y^3 = 3xy$ $(x \geq 0, y \geq 0)$. (Indicación: Parametrizar haciendo $y = tx$ y aplicar el teorema de Green.)

Ejercicio 1.18
Calcular el área interior a las curvas $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$.

Ejercicio 1.19
Calcular utilizando integrales curvilíneas el área limitada por la curva

$$(x + y)^2 = ax, \quad (a > 0)$$

y el eje OX.

Ejercicio 1.20
Calcular utilizando integrales curvilíneas el área limitada por la curvas

$$(\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{4})^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

por encima del eje de abcisas.

Ejercicio 1.21
Verificar el teorema de la divergencia para $F = (x, y)$ y $\mathbf{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Evaluar la integral de la componente normal de $F = (2xy, -y^2)$ alrededor de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4 Superficies y áreas de superficies en $\mathbb{R}^3$.

Una representación paramétrica de una superficie en $\mathbb{R}^3$ es una función $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ continua en $\overline{D}$ e inyectiva en D, donde D es un abierto de $\mathbb{R}^2$. La imagen de φ, es decir, $\varphi(D) = S$, es lo que se denomina superficie.

Cuando la función φ es de clase C^1 en un abierto que contiene a $\overline{D}$, diremos que S es de clase C^1. Si, además, las funciones vectoriales continuas

$$T_s = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\right) \quad \text{y} \quad T_t = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}\right)$$

son linealmente independientes en $(s_0, t_0) \in D$, entonces se dice que la representación paramétrica es regular en (s_0, t_0) y que la superficie es suave o regular en $\varphi(s_0, t_0)$. La superficie es suave si es suave en todos sus puntos. (Intuitivamente una superficie es suave si no tiene ni picos ni crestas).

———— • ————

Ejemplo 1.5
La ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $0 \le z \le 1$, define una superficie implícitamente. A continuación la identificaremos, daremos una representación paramétrica y veremos que no es regular.

Para describirla e identificarla, veamos cuál es su intersección con los planos coordenados. En el plano $x = 0$, la ecuación que queda es $y^2 - z^2 = 0$, que es la ecuación de dos rectas que se cortan en el origen. En el plano $y = 0$, queda la ecuación $x^2 - z^2 = 0$, que también representa dos rectas que se cortan en el origen. Por otro lado, para cada z fijo, es la ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0, z)$ y radio z. Por tanto, la superficie que describe la ecuación es un cono.

Una representación paramétrica de ese cono viene dada por la función

$$\varphi(s, t) = (s \cos t, s \text{ sen } t, s) \qquad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

puesto que $s^2 \cos t + s^2 \text{sen}^2 t - s^2 = 0$.

Para ver que no es una superficie regular, calculemos $T_s(s, t) = (\cos t, \text{ sen } t, 1)$ y $T_t(s, t) = (-s \text{ sen } t, \ s \cos t, 0)$ con lo cual

$$T_s(s, t) \times T_t(s, t) = (-s \cos t, \ -s \text{ sen } t, s).$$

Por tanto, $T_s(0, t) \times T_t(0, t) \neq 0$ y se deduce que la superficie no puede ser suave en el punto $(0, 0, 0) = \varphi(0, t)$.

Otra representación paramétrica del cono es $\psi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

En este caso,

$$T_x(x, y) = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \text{ y } T_y(x, y) = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

con lo cual la parametrización no es C^1 en el punto $(0, 0, 0)$.

———— • ————

Si una superficie S es regular, en cada punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$, donde $(s_0, t_0) \in D$, el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es paralelo a $T_s(s_0, t_0)$ y a $T_t(s_0, t_0)$ se llama plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

Evidentemente, una representación paramétrica $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ es regular si $T_s(s, t) \times T_t(s, t) \neq 0$ para todo $(s, t) \in D$. Es importante indicar que, entonces, el vector $T_s(s_0, t_0) \times T_t(s_0, t_0)$ es normal al plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$, y por consiguiente a la superficie en dicho punto. Se define el vector normal unitario a la superficie regular en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ como

$$N(x_0, y_0, z_0) = \frac{T_s(s_0, t_0) \times T_t(s_0, t_0)}{\|T_s(s_0, t_0) \times T_t(s_0, t_0)\|}.$$

Así una ecuación del plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(s_0, t_0)$ viene dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot N(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

———— • ————

Ejemplo 1.6
Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. El plano P que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es paralelo a los vectores u y v es la imagen de la representación paramétrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(s, t) = (x_0, y_0, z_0) + su + tv$. Obviamente, $T_s = u$ y $T_t = v$, y por ser T_s y T_t linealmente independientes, P es regular. Además, P coincide con su plano tangente en cada uno de sus puntos. Un vector normal unitario es $N(x, y, z) = \frac{u \times v}{\|u \times v\|}$.

Ejemplo 1.7
Vamos a describir la superficie cuya representación paramétrica es

$$\varphi(s, t) = (\operatorname{sen} s \, \cos t, \operatorname{sen} s \, \operatorname{sen} t, \cos s), \quad (s, t) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

Para identificar la superficie, eliminaremos los parámetros usando las identidades trigonométricas.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\operatorname{sen} s \, \cos t)^2 + (\operatorname{sen} s \, \operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 s = \operatorname{sen}^2 s(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + \cos^2 s = 1.$$

Luego cada punto se encuentra en la esfera de radio 1 centrada en el origen. Recíprocamente, cada punto de la esfera tiene una longitud t y una latitud s medida desde el punto $(0, 0, 1)$, que es el polo norte. Por tanto, cada punto de la esfera se puede poner como $\varphi(s, t)$, con lo cual la superficie coincide con la esfera de radio 1 centrada en el origen.

En este caso, $T_s(s, t) = (\cos s \cos t, \cos s \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} s)$ y $T_t(s, t) = (-\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} s \cos t, 0)$ de donde se sigue que

$$T_s(s, t) \times T_t(s, t) = (\operatorname{sen}^2 s \cos t, \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} s \cos s) = \operatorname{sen} s \; \varphi(s, t) \neq 0$$

para todo $(s, t) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. La superficie es regular y el vector normal unitario es $N(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ para todo $(s, t) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. Evidentemente, esa función continua se puede extender a toda la esfera. (Para hacerlo rigurosamente habría que considerar otras parametrizaciones de la esfera que incluyeran los puntos $\varphi(\partial([0, \pi] \times [0, 2\pi]))$.) Por otro lado, como el vector $\varphi(s, t)$ es perpendicular a la superficie en el punto $\varphi(s, t)$, el plano tangente en (x_0, y_0, z_0) tiene como ecuación $(x - x_0)x + (y - y_0)y + (z - z_0)z = 0$.

———— • ————

Sea $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, donde $\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, la representación paramétrica de una superficie S, suave excepto en un número finito de puntos. Si D es un abierto acotado, entonces el área de la superficie S viene dada por la integral

$$\int\int_D \|T_s(s, t) \times T_t(s, t)\| d(s, t) = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}\right)^2} d(s, t)$$

siendo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

———— • ————

Ejemplo 1.8
Vamos a calcular el área de la esfera de centro el origen y radio 1. *Hemos visto que una representación paramétrica es*

$$\varphi(s,t) = (\text{sen } s\ \cos t, \text{sen } s \text{ sen } t, \cos s), \quad (s,t) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

y que

$$T_s(s,t) \times T_t(s,t) = \text{sen } s\ \varphi(s,t)$$

con lo cual $\|T_s(s,t) \times T_t(s,t)\| = \text{sen } s$. *Por tanto, el área de la esfera es*

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen } s\ dt\ ds = 2\pi(-\cos s)_0^\pi = 4\pi.$$

Ejemplo 1.9
Vamos a calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, *con* $0 \le z \le 1$. *Sabemos que se trata de un cono que se puede parametrizar por la función*

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, s \text{ sen } t, s) \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

$$T_s(s,t) \times T_t(s,t) = (-s\cos t,\ -s \text{ sen } t, s)$$

con lo cual $\|T_s(s,t) \times T_t(s,t)\| = \sqrt{2}\ |s|$. *Por tanto, el área del cono es*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ s\ dt\ ds = \sqrt{2}\pi\Big((\frac{s^2}{2})_0^1 \Big) = \sqrt{2}\pi.$$

———— • ————

Ejercicio 1.22
Sea $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *un camino* C^1, γ *inyectiva, con* $\gamma_2 \ge 0$ *en* $[a,b]$. *Comprobar que el área lateral de la superficie engendrada por el giro alrededor de* OX *de* γ^* *es*

$$2\pi \int_a^b \gamma_2(t)\|\gamma'(t)\|dt.$$

Ejercicio 1.23
Usar el ejercicio anterior para calcular el área del toro engendrado por la rotación de la circunferencia $z^2 + (y-a)^2 = b^2$ $(0 < b < a)$ *alrededor del eje OZ.*

Ejercicio 1.24
Describir las siguientes superficies paramétricas, viendo en cada caso si son regulares. Hallar el área de las dos primeras.

(i) El cilindro $\varphi(s,t) = (2\cos s, 2 \text{ sen } s,\ t)$, *donde* $(s,t) \in [0,2\pi] \times [0,2]$.
(ii) El paraboloide $\varphi(s,t) = (s\cos t, s \text{ sen } t,\ s^2)$, *donde* $(s,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.
(iii) El paraboloide hiperbólico $\varphi(s,t) = (s \text{ ch } t, s \text{ sh } t,\ s^2)$, *donde* $(s,t) \in [-1,1] \times [-1,1]$.
(iv) El cilindro parabólico $\varphi(s,t) = (\text{ch } t,\ \text{sh } t,\ s)$, *donde* $(s,t) \in [-1,1] \times [0,1]$.
(v) El toro $\varphi(s,t) = \big((2+\cos s)\cos t, (2+\cos s) \text{ sen } t,\ \text{sen } s\big)$, *donde* $(s,t) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

Ejercicio 1.25
Utilizando las funciones hiperbólicas, hallar una parametrización del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. *¿Es una superficie regular?*

Ejercicio 1.26
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1. *Representar paramétricamente la superficie que se obtiene al girar la gráfica de* f *alrededor del eje OX. Calcular su área.*

Ejercicio 1.27

Describir la superficie del helicoide cuya representación paramétrica es

$\varphi(s,t) = (s\cos t, s \operatorname{sen} t, t)$, *donde* $(s,t) \in [0,1] \times [0,2\pi]$. *Comprobar que es una superficie regular y calcular su área.*

Ejercicio 1.28

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *y sea* S *la gráfica de* f *en* $\mathbb{R}^2$. *Hallar una parametrización de* S *y demostrar que es suave en todos los puntos.*

Ejercicio 1.29

Sea $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ *la representación paramétrica de una superficie regular. Usando el teorema de la función implícita, demostrar que, cerca de cada punto* $\varphi(s_0,t_0)$, *la superficie es la gráfica de una función de clase* C^1.

Práctica 2 Integración en variedades. Teoremas de Stokes y de la divergencia.

1 Variedades diferenciables.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad $k-$dimensional de clase r en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que para cada $x \in M$, existen $W \subseteq \mathbb{R}^k$ abierto y una función inyectiva $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r, con $x \in \varphi(W)$ tales que:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(W') \text{ es abierto en } M \text{ para todo } W' \text{ abierto en } W. \\ \\ \dim d\varphi(y)(\mathbb{R}^k) = k, \quad \forall y \in W. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1
La frontera M de la semiesfera unidad $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ no es una $1-$variedad de clase 1. (Ver Problemas complementarios.*)*

Ejemplo 2.2
Un subespacio vectorial $k-$dimensional de $\mathbb{R}^n$ es una variedad k-dimensional.

1.1 Problemas

Ejercicio 2.1
Prueba que si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son constantes no nulas, entonces $\{\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \cdots + A_nx_n^2 = 1\}$ es una variedad $(n-1)-$dimensional.

Ejercicio 2.2
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^k, entonces su gráfica es una variedad $n-$dimensional de clase k.

2 Integración en variedades

Recordemos que en el caso de 2-variedades M en $\mathbb{R}^3$, el elemento de 2-área en M dado por el sistema de coordenadas φ es

$$\|D_1\varphi(a) \times D_2\varphi(a)\|.$$

Ejemplo 2.3
La superficie S definida por $z = g(x, y) = x^2 + y$, siendo $D = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$ es una 2-variedad pues es la gráfica de g y la función $\varphi(x, y) = (x, y, x^2+y)$ es un sistema de coordenadas.

Calculemos $\int_S x\ dV_2 \equiv \int_S x dS$.

$$\int_S x\ dS = \int_D x\sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}\ \ d(x, y) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big(\int_0^1 x\sqrt{2 + 4x^2}dx\Big)dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{12}(2 + 4x^2)^{3/2})_0^1\ dy = \sqrt{2}(\sqrt{3} - \frac{1}{3}).$$

Ejemplo 2.4
Sea S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ con $0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}$. Se trata de una 2-variedad, que puede parametrizarse usando coordenadas cilíndricas

$$\phi(\theta, z) = (2\cos^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta, z).$$

Se obtiene:

$$D_\theta\phi \times D_z\phi = (2\cos(2\theta), -2\operatorname{sen}(2\theta), 0),$$

y por lo tanto:

$$\int_S x dV_2 = \int_{\{\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ 0<z<2\cos\theta\}} 2(x\circ\phi) = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \int_0^{2\cos\theta} dz) = \frac{32}{3}.$$

3 Variedades orientables.

En cada punto x de una superficie/variedad $S \subset \mathbb{R}^3$ hay dos vectores normales unitarios $n_1(x)$ y $n_2(x)$, siendo $n_1(x) = -n_2(x)$. Cada una de estas normales se puede asociar con un lado de la superficie. Intuitivamente, una superficie es orientable si tiene dos caras o lados. Para especificar una orientación, se escoge uno de los vectores normales unitarios. Así, resulta que S es orientable si puede definirse una aplicación continua de S en $\mathbb{R}^3$ que asigna a cada punto uno de los vectores normales. Una de tales aplicaciones se denomina orientación de la superficie/variedad.

Cuando la variedad está orientada, una de las normales $\mathbf{n}(x)$ antepuesta a una base positivamente orientada $\{e_1(x), e_2(x)\}$ del espacio tangente a S en x forma una base $\{\mathbf{n}(x), e_1(x), e_2(x)\}$ positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. Tal normal se llama **normal exterior**.

Sea S una 2-variedad orientada con vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$ y $\varphi : D \to \mathbf{R^3}$ un sistema de coordenadas de S que preserva la orientación, entonces en todo punto $\varphi(s,t)$ se cumple que

$$\mathbf{n}(\varphi(s,t)) = \frac{D_s\varphi(s,t) \times D_t\varphi(s,t)}{\|D_s\varphi(s,t) \times D_t\varphi(s,t)\|}$$

Ejercicio 2.3
Comprueba que una 2-variedad $M \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si , y sólo si, existe una aplicación continua de M en $\mathbb{R}^3$ que asigna a cada punto uno de los vectores normales. En consecuencia, las variedades $\{(x,y,z) : ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \ \ a, b, \ \ ó \ \ c \neq 0\}$ son orientables.

Un ejemplo de una superficie/variedad no orientable (con un sólo lado) es la cinta de Möbius.

Ejemplo 2.5
La cinta de Möbius es la superficie que se obtiene al unir los dos extremos de una cinta rectangular estrecha y larga, dando previamente media vuelta a uno de los extremos. Una representación paramétrica de la cinta de Möbius viene dada por la siguiente función.

$$\varphi(s,t) = \big((2 + t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\cos s, (2 + t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\operatorname{sen} s, t\cos\frac{s}{2}\big) \qquad (s,t) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

La cinta de Möbius es un ejemplo de superficie no orientable porque

$$D_s\varphi(s,t) = \big((\frac{t}{2}\cos\frac{s}{2})\cos s - (2 + t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\operatorname{sen} s, (\frac{t}{2}\cos\frac{s}{2})\operatorname{sen} s + (2 + t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\cos s, -\frac{t}{2}\operatorname{sen}\frac{s}{2}\big)$$

y $D_s\varphi(s,t) = (\operatorname{sen}\frac{s}{2}\cos s, \operatorname{sen}\frac{s}{2}\operatorname{sen} s, \cos\frac{s}{2})$, *con lo cual*

$$D_s\varphi(s,t)\times D_t\varphi(s,t) = \Big(\frac{t}{2}\operatorname{sen} s + (2+t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\cos\frac{s}{2}\cos s, (2+t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\cos\frac{s}{2}\operatorname{sen} s - \frac{t}{2}\cos s, -(2+t\operatorname{sen}\frac{s}{2})\operatorname{sen}\frac{s}{2})\Big)$$

y $\|D_s\varphi(s,t) \times D_t\varphi(s,t)\| = \frac{t^2}{4} + (2 + t \text{ sen } \frac{s}{2})^2 \neq 0$ *para todo* $(s,t) \in]0, 2\pi[\times] - 1, 1[$.

Por tanto, se puede definir un vector normal a la superficie en esos puntos pero no se puede extender continuamente a los puntos $(2, 0, t)$ *ya que tomando límites cuando* $(s,t) \to (0, t_0)$ *se obtiene* $D_s\varphi \times D_t\varphi = (2, -\frac{t_0}{2}, 0)$ *mientras que tomando límites cuando* $(s,t) \to (2\pi, t_0)$ *se obtiene* $D_s\varphi \times D_t\varphi = (-2, -\frac{t_0}{2}, 0)$.

Es fácil deducir ahora que $\phi([0, 2\pi] \times [-1, 1])$ *es una* $2-$*variedad no orientable.*

Ejemplo 2.6

Sean $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *y* $\mathbf{n}(x,y,z) = (x,y,z)$ *para todo* $(x,y,z) \in S$. S *es una variedad orientable y* $\mathbf{n}$ *define una orientación en* S*. Un sistema de coordenadas de* S *es* $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\varphi(u,v) = (\text{sen } v \cos u, \text{sen } v \text{ sen } u, \cos v)$*. Se verifica que*

$D_u\varphi(u,v) \times D_v\varphi(u,v) = (-\text{sen}^2 v \cos u, -\text{sen}^2 v \text{ sen } u, -\text{sen } v \cos v)$ y $\|D_u\varphi(u,v) \times D_v\varphi(u,v)\| = \text{sen } v$

con lo cual

$$\frac{D_u\varphi(u,v) \times D_v\varphi(u,v)}{\|D_u\varphi(u,v) \times D_v\varphi(u,v)\|} = (-\text{sen } v \cos u, -\text{sen } v \text{ sen } u, -\cos v) = -\mathbf{n}(\varphi(u,v))$$

Por tanto, φ invierte *la orientación de* $\mathbf{n}$ *en* S.

Ejercicio 2.4

Calcular $\int_M ydy \wedge dz - xdz \wedge dx + zdx \wedge dy$ *donde* M *es la esfera unidad.*

A continuación vamos a tratar el análogo de las integrales de línea: las **integrales de flujo a través de una 2-variedad orientable en** $\mathbb{R}^3$**.** Sea S una 2-variedad orientable en $\mathbb{R}^3$ de clase C^1y sea $F : S \to \mathbb{R}^3$ continua. Si $\mathbf{n}(x)$ denota la normal exterior unitaria, se define el flujo de F a través S como

$$\int_S F \cdot \mathbf{n} \, dV_2.$$

De manera que si $\varphi : D \to S$ es un sistema de coordenadas que conserva la orientación

$$\int_{\varphi(D)} F \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_D F(\varphi(s,t)) \cdot (D_s\varphi \times D_t\varphi) d(s,t),$$

donde n es el campo vectorial normal exterior unitario a la superficie:

$$\mathbf{n}(\varphi(s,t)) = \frac{D_s\varphi(s,t) \times D_t\varphi(s,t)}{\|D_s\varphi(s,t) \times D_t\varphi(s,t)\|}.$$

Si F es un campo vectorial que mide la velocidad de un fluido, el flujo de F a través de S representa la cantidad neta de fluido que pasa por la superficie por unidad de tiempo. Similarmente, si T es la función temperatura, la integral de superficie representa el flujo de calor a través de S.

Ejemplo 2.7

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} : x^2 + y^2 < 25, z = 12\}$ *y sea* $F(x,y,z) = (x,y,z)$*. Vamos a calcular la integral de flujo.*

Un sistema de coordenadas para S *cuya imagen es* $S\backslash\{(0,0,12)\}$ *viene dado por* $\varphi : (0,5) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ *donde* $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r \text{ sen } \theta, 12)$*. En este caso se cumple que* $D_r\varphi = (\cos\theta, \text{sen } \theta, 0)$ *y que* $D_\theta\varphi = (-r \text{ sen } \theta, r\cos\theta, 0)$*, con lo cual* $D_r\varphi \times D_\theta\varphi = (0,0,r)$ *de lo que se deduce*

$$\int_S F \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_{(0,5)\times(0,2\pi)} F(\varphi(r,\theta)) \cdot D_r\varphi \times D_\theta\varphi \, d(r,\theta) = \int_0^5 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta, r \text{ sen } \theta, 12) \cdot (0,0,r) \, d\theta dr =$$

$$= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 12r \, d\theta dr = 12 \cdot 2\pi \frac{25}{2} = 300\pi.$$

3.1 Problemas

Ejercicio 2.5
Calcula la integral de $f(x, y, z) = xyz$ *sobre el rectángulo* R *de vértices* $(1, 0, 1), (2, 0, 0), (1, 1, 1)$ *y* $(2, 1, 0)$.

Ejercicio 2.6
Calcula $\int_S x^2 dV_2$, *donde* S *es la parte del plano* $x = z$ *dentro del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 2.7
Supongamos que la temperatura de un punto de $\mathbf{R^3}$ *viene dada por* $\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. *Si el calor "fluye" según el campo vectorial* $F = -\nabla T$, *calcular el flujo de calor a través de la superficie* $\{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} : x^2 + z^2 = 2, 0 < y < 2\}$.

Ejercicio 2.8
Con el mismo campo vectorial que en el problema anterior, calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad si la temperatura es $T(x, y, z) = x$.

Ejercicio 2.9
Calcular $\int_M xdy \wedge dz + ydz \wedge dx - zdx \wedge dy$ *para* $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \ \ 1 < z < 3\}$.

Ejercicio 2.10
(a) La lluvia fuerte puede considerarse un fluído uniforme que fluye verticalmente hacia abajo según el campo vectorial $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. *Hallar el flujo total a través del cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 1$.

(b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado, de manera que forma un ángulo de 45^o *con la vertical, y se describe por el campo vectorial* $F(x, y, z) = -(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. *¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?*

Ejercicio 2.11
Sean a, b, c *números positivos y* $S = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z > 0\}$. *Calcular el flujo de* $F(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$ *a través de* S.

4 El teorema de Stokes

El siguente es un criterio útil de dominio regular:

Sea M una m-variedad $(m > 1)$ en $\mathbb{R}^n$ y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado tal que para cada $x_0 \in Fr(D) \cap M$ se tiene que:

i) existen un entorno U de x_0 y $\phi : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\nabla\phi(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U$ y

$$Fr(D) \cap U \cap M = \{x \in U \cap M : \phi(x) = 0\} \text{ y } \overset{\circ}{D} \cap U \cap M = \{x \in U \cap M : \phi(x) > 0\},$$

y ii) existe φ, cumpliendo (1) en $x_0 \in M$ tal que $\nabla(\phi \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x_0) \neq 0$.

Entonces $D \cap M$ es un dominio regular en M cuyo borde es $Fr(D) \cap M$.

Ejercicio 2.12
Si $D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ z \geq 0\}$, D *no es dominio regular en* $\mathbb{R}^3$ *y sí lo es en la esfera unidad.*

Ejemplo 2.8
Vamos a calcular $\int_C -y^3\ dx + x^3\ dy - z^3\ dz$, *donde* C *es la intersección del cilindro* $x^2+y^2=1$ *con el plano* $x+y+z=1$, *y la orientación de* C *es en sentido contrario a las agujas del reloj en el plano* XY.

Se cumple que $\{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} : x^2+y^2 \leq 1, x+y+z=1\}$ es un dominio regular cuyo borde es C : Efectivamente, basta aplicar el criterio anterior con M el plano $x+y+z=1$, $D := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\}$ y la función $\phi(x,y,z) = x^2+y^2-1$.

Si $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$, entonces por el teorema clásico de Stokes,

$$\int_C -y^3\ dx + x^3\ dy - z^3\ dz = \int_{\overset{\circ}{D}\cap M} rotF \cdot \mathbf{n}\, dV_2.$$

Por ser $rotF = \nabla \times F = (0,0,3x^2+3y^2)$ y $\mathbf{n}(x,y,z) = (1,1,1)$, se deduce que

$$\int_C -y^3\ dx + x^3\ dy - z^3\ dz = \int_{\overset{\circ}{D}\cap M} (3x^2+3y^2)\ dV_2(x,y) = \int_{0,}^{1} \int_0^{2\pi} r\ (3r^2)\ dr\ d\theta = \frac{3}{2}\pi,$$

teniendo en cuenta que las coordenadas polares son un sistema de coordenadas en $\overset{\circ}{D} \cap M$.

4.1 Problemas

Ejercicio 2.13
Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1-x^2-y^2}, z \geq 0$ *y el campo vectorial* $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

Ejercicio 2.14
Hallar $\int_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n}\, dV_2$, *donde* S *es el elipsoide* $x^2+y^2+2z^2=10$ *y* $F(x,y,z) = (\text{sen}\, xy, e^y, -yz)$.

Ejercicio 2.15
Supongamos que $S = S_1 \cup S_2$, *siendo* $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} : x^2+y^2=1, 0 \leq z \leq 1\}$ *y siendo* $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$. *Comprueba que* S *es un dominio regular. Si* $F(x,y,z) = (zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2)$, *calcula* $\int_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n}\, dV_2$.

Ejercicio 2.16
Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ *una 2-variedad orientable y* $D \subset M$ *un dominio regular compacto. Si* f *y* g *son funciones de clase* C^2, *comprueba que* $\int_{\partial D} f dg = \int_{\overset{\circ}{D}} df \wedge dg = \int_{\overset{\circ}{D}} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dV_2$. *Deduce que la integral de línea* $\int_{\partial D} (f\ \nabla g + g \nabla f)\ = 0$.

Ejercicio 2.17
Sea un globo cuya superficie viene dada por la parte de la esfera $x^2+y^2+(z-\frac{\sqrt{15}}{4}R)^2 = R^2$ *que se encuentra en* $z \geq 0$. *Un gas caliente escapa por su superficie porosa según un campo vectorial de velocidad:*

$$V(x,y,z) = \nabla \times \Phi(x,y,z) \quad \text{donde} \quad \Phi(x,y,z) = (-y,x,0).$$

Si $R = 5$, *calcula la razón de flujo del volumen de gases a través de la superficie.*

Ejercicio 2.18
Sea S *un dominio regular compacto en* $\mathbb{R}^3$ *Usa a) el teorema de Gauss y b) el teorema de Stokes para mostrar que si* F *es un campo vectorial* C^2, *entonces* $\int_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 0$.

Ejercicio 2.19
Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dos funciones de clase* C^2 *y* Ω *un dominio regular en* $\mathbb{R}^3$. *Probar las identidades de Green.*

(a) $\int_{\partial\Omega} f\ \nabla g \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_\Omega (f\ \triangle g + \nabla f \cdot \nabla g) dxdydz$
(b) $\int_{\partial\Omega} (f\ \nabla g - g\ \nabla f) \cdot\ bfn\ dV_2 = \int_\Omega (f\ \triangle g - g\ \triangle f) dxdydz$
siendo Δ *el laplaciano* $\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}$.

5 Campos conservativos

Para un campo vectorial gradiente $F = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, las integrales de línea se evalúan fácilmente:

$$\int_\gamma F ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Los campos gradientes o conservativos son importantes en muchos problemas físicos, pues si $V = -f$ representa el potencial de energía, entonces F representa una fuerza. Los campos conservativos en $\mathbb{R}^3$ se caracterizan fácilmente por la condición:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = 0.$$

Los campos conservativos poseen una importante propiedad, que además también los caracteriza: Si γ_1 y γ_2 son curvas simples orientadas con los mismos puntos finales:

$$\int_{\gamma_1} F ds = \int_{\gamma_2} F ds$$

Ejemplo 2.9
Sea F el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$F(x, y, z) = (y, z \cos yz + x, y \cos yz).$$

Se tiene que

$$\nabla \times F = (\cos yz - yz \sin yz - \cos yz + yz \sin yz, 0, 1 - 1) = 0$$

y por tanto F es el gradiente de alguna función f. Del sistema de ecuacíones :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\cos(yz), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(yz),$$

se obtiene $f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + C$.

5.1 Problemas

Ejercicio 2.20
Una masa M en el origen de $\mathbb{R}^3$ ejerce una fuerza sobre una masa m localizada en $r = (x, y, z)$ de magnitud $GmM/\|r\|^2$ y dirección r. Prueba que este campo es conservativo y halla un potencial escalar.

Ejercicio 2.21
Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^2$. Prueba que F es conservativo si y sólo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$.

Ejercicio 2.22
Dado $F(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$, halla f tal que $F = \nabla f$.

Ejercicio 2.23
Si F es un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{divF} = 0$, entonces existe un campo vectorial G de clase C^1 tal que $F = \mathrm{rotG}$.

Ejercicio 2.24
Sean $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$ y $G(x, y, z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$.

a) Prueba que rot $F \neq 0$, rot $G = 0$.

b) Prueba que si F y G representan los campos de velocidad de dos fluidos y colocamos sendos corchos en los fluidos, ambos recorrerán en el plano xy una trayectoria circular alrededor del eje z.

c) Prueba que el primer corcho gira sobre sí mismo cuando recorre el círculo. ¿qué ocurre con el segundo?