PRÁCTICAS DE TEORÍA DE LA MEDIDA

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2002/2003

Profesor responsable
Oscar Blasco

Práctica 1
Espacios de medida

Ejercicio 1.1
Sea $\mathcal{R}$ un anillo, es decir un conjunto verificando que $\emptyset \in \mathcal{R}$, si $A, B \in \mathcal{R}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{R}$ y $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Probar que $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ es un anillo en sentido algebráico.

Solución: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{R}$, $A \cap B = A \cup B \setminus (A \triangle B) \in \mathcal{R}$. Las propiedades de anillo se prueban de manera directa, es decir $(\mathcal{R}, \triangle)$ es un grupo (nótese que el neutro es $\emptyset$ y que el opuesto de A es el propio A), $(\mathcal{R}, \cap)$ verifica la asociativa y conmutativa. Finalmente $(A \triangle B) \cap C = (A \cap B) \triangle (B \cap C)$ para toda terna A, B y C en $\mathcal{R}$. ■

Ejercicio 1.2
Sea $\mathcal{M}$ una clase no vacía de subconjuntos de X y $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ el anillo generado por $\mathcal{M}$. Probar que todo elemento de $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ se puede cubrir por un número finito de elementos de $\mathcal{M}$.

Solución: Consideremos $\mathcal{R} = \{A \subset \cup_{i=1}^{n} E_i : E_i \in \mathcal{M}, \setminus \in \mathbb{N}\}$. Claramente $\mathcal{R}$ es anillo y $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ y por tanto $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R}$. ■

Ejercicio 1.3
Sea $\mathcal{R}$ la familia de uniones finitas de intervalos n-dimensionales del tipo $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ...(a_n, b_n]$. Probar que $\mathcal{R}$ es un anillo sobre $\mathbb{R}^n$.

Solución: Obviamente preserva uniones finitas. Dados dos intervalos $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ...(a_n, b_n]$ y $(a'_1, b'_1] \times (a'_2, b'_2] \times ...(a'_n, b'_n]$ la diferencia es unión de intervalos de la misma forma, pues el hecho de que $(x_1, x_2, ..., x_n) \notin (a'_1, b'_1] \times (a'_2, b'_2] \times ...(a'_n, b'_n]$ significa que existe $i = 1, 2, ..., n$ de modo que $x_i \notin (a'_i, b'_i]$, de donde se deduce que que resulta ser $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ...(a_n, b_n] \setminus (a'_1, b'_1] \times (a'_2, b'_2] \times ...(a'_n, b'_n] = \cup_{i=1}^{n} (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ...(a_i, b_i] \setminus (a'_i, b'_i] \times ...(a_n, b_n]$. Usando el hecho de que que $(a_i, b_i] \setminus (a'_i, b'_i]$ es, a lo más, unión de intervalos de ese tipo se tiene el resultado para diferencia de dos intervalos. El caso de diferencias de uniones de intervalos es consecuencia de este último. ■

Ejercicio 1.4
Muestra que la unión de σ-álgebras no es necesariamente una σ-álgebra.

Ejercicio 1.5
Halla la σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ generada por los puntos de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.6
Sea $\mathcal{M}$ una clase no vacía de subconjuntos de X y sea $Y \subset X$. Denotamos $\mathcal{M}_Y$ la colección $\{Y \cap E : E \in \mathcal{M}\}$.

i) Comprobar que si $\mathcal{M}$ es σ-álgebra sobre X entonces $\mathcal{M}_Y$ es σ-álgebra sobre Y (se llama σ-álgebra inducida por $\mathcal{M}$ sobre Y.).

ii) Dar una caracterización de $\mathcal{M}_Y$ en el caso que $Y \in \mathcal{M}$.

iii) Si $\mathcal{A}$ está engendrada por la familia $\mathcal{M}$, probar que $\mathcal{A}_Y$ está engendrada por la familia $\mathcal{M}_Y$.

iv) Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X entonces la σ-álgebra de Borel asociada a la topología en Y inducida por X es la σ-álgebra inducida sobre Y por la σ-álgebra de Borel de X. Examinar el caso en que Y es un boreliano de X.

Ejercicio 1.7
Sea (A_n) una colección de subconjuntos de X.

(a) Si definimos lim sup$A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Probar que lim sup$A_n$ coindide con el conjunto de puntos que están en infinitos conjuntos A_n.

(b) Si definimos $lim\ inf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$. Probar que $lim\ inf A_n$ coindide con el conjunto de puntos que están en todos los conjuntos A_n salvo un número finito de ellos.

Ejercicio 1.8
Se dice que una colección de conjuntos tiene límite si $lim\ inf A_n = lim\ sup A_n$.

Probar que toda sucesión monótona creciente o decreciente tiene límite y calcularlo.

Ejercicio 1.9
Probar que, si $\sigma(\mathcal{A})$ denota la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, entonces $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$ coincide con $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$.

Ejercicio 1.10
Sean μ_1, μ_2 medidas en $(X, \mathcal{A})$. Prueba que si $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, entonces $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ es una medida.

Ejercicio 1.11
Sean μ_n medidas con $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots$. Prueba que $\mu(A) = \lim \mu_n(A) = \sup \mu_n(A)$ es una medida.

Ejercicio 1.12
Sea μ_n sucesión de medidas en $(X, \mathcal{A})$ y sean $\alpha_n > 0$. Sea $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$. ¿ Es μ una medida?

Ejercicio 1.13
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea (A_n) una sucesión de modo que cada A_j corta a lo sumo a otro conjunto de la sucesión. Demostrar que

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq 2\mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

Ejercicio 1.14
Estudiar si las siguientes funciones de conjunto son medidas exteriores sobre $\mathcal{P}(X)$ o no.

(i) Sea X arbitrario, $a \in X$ y $\lambda = \delta_a$.

(ii) Sea X arbitrario y $\lambda(A) = 1$ para todo $A \subset X$.

(iii) Sea $X = (a_{i,j})$ matriz 10 por 10 y $\lambda(A)$ el número de columnas donde hay un elemento de A.

(iv) Sea $X = \mathbb{N}$ y $\lambda(A) = limsup \frac{card(A \cap \{1,2,\ldots,k\})}{k}$.

(v) Sea $X = \mathcal{R}$ y $\lambda(A) = 0$ si A es numerable,

$$\lambda(A) = 1 \text{ si } A \text{ es no numerable y } A \setminus I \text{ es numerable para } I \text{ interv. acot.},$$

$$\lambda(A) = \infty \text{ en otro caso .}$$

(vi) Sea $X = \mathbb{Z}$ y $\lambda(A) = 0$ si A es vacío,

$$\lambda(A) = \frac{a}{a+1} \text{ si } A \text{ es finito, siendo } a = sup\{|n| : n \in A\} \text{ ,}$$

$$\lambda(A) = 1 \text{ si } A \text{ es infinito .}$$

(vii) Sea X un espacio métrico con distancia d y $\alpha > 0$. Sea

$$\lambda_\alpha = sup_{\varepsilon > 0} \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} (\delta(A_k))^\alpha : A = \cup A_k, \delta(A_k) < \varepsilon\},$$

donde $\delta(A_k) = diam(A_k) = sup\{d(x,y) : x, y \in A_k\}$.

Ejercicio 1.15
Sea λ^* la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sea $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$. Sea $\mu^*(A) = \lambda^*(\pi(A))$. Prueba que μ^* es una medida exterior y que B es μ^*-medible si y sólo si existen conjuntos medibles Lebesgue B_0, B_1 tales que $B_0 \subseteq B_1$, $\lambda^*(B_1 - B_0) = 0$, $B_o \times \mathbb{R} \subseteq B \subseteq B_1 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.16
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable y positiva. Prueba que* $\mu(A) = \int_A f(x)dx$ *es una medida sobre los conjuntos medibles Lebesgue.*

Ejercicio 1.17
Sea $F_n \in \mathcal{A}$ *una sucesión de conjuntos. Prueba que* $\mu(\liminf F_n) \leq \liminf \mu(F_n)$. *Además si* $\exists n_0$: $\mu(\cup_{i=n_0}^{\infty} F_i) < \infty$ *entonces* $\mu(\limsup F_n) \geq \limsup \mu(F_n)$.

Ejercicio 1.18
Sea I *un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$ *y* $F : I \to \mathbb{R}$ *una función continua y estrictamente creciente. Probar que la medida de Borel-Stieljes definida por* F *coincide con la imagen por* F^{-1} *de la medida de Lebesgue sobre los borelianos de* $F(I)$.

Ejercicio 1.19
Describir la medida de Lebesgue-Stieltjes m_F *asociada a las siguientes funciones:*
(i) $F(x) = [x]$,
(ii) $F(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)$,
(iii) $F(x) = (x-1)^+$.

Ejercicio 1.20
Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) = (1+x)\chi_{[-1,0)} + (2+x^2)\chi_{[0,2)} + 9\chi_{[2,\infty)}$.
Hallar m_F *de los siguientes conjuntos:*
(i) $\{2\}$ *(ii)* $[\frac{-1}{2}, 3)$,
(iii) $(-1,0] \cup (1,2)$, *(iv)* $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

Ejercicio 1.21
Sea $F(x) = \frac{-1}{x}\chi_{(0,1)} + (log(x) - 1)\chi_{[1,\infty)}$.
(i) Hallar un boreliano no acotado A *con* $m_F(A) < \infty$.
(ii) Hallar un abierto G *con* $0 \in G'$ *de modo que* $m_F(G) < \infty$.

Ejercicio 1.22
Consideremos la medida de Lebesgue-Stieltjes en $(0,\infty)$ *dada por* $F(x) = x^\alpha$ *con* $\alpha > 0$ *y sea* $A = \cup_{n=1}^{\infty}(n, \frac{n^2+1}{n})$. *Hallar los valores de* α *de modo que* $m_F(A) < \infty$.

Ejercicio 1.23
Sea $\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(n,\frac{2n+1}{2})}(t)$.
Hallar F *de modo que la medida de Lebesgue-Stieltjes de* F *coincida con la imagen por* ϕ *de la medida de Lebesgue* m, *es decir* $m_F = \phi(m)$.

Ejercicio 1.24
Sea $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(t) = log(t)$. *Demostrar que*
(i) $m_F = exp(m)$ *donde* m *es la medida de Lebesgue y* $exp(x) = e^x$.
(ii) m_F *es invariante por dilataciones.*
(iii) Si $\mu : \mathcal{B}((0,\infty)) \to [0,\infty]$ *es una medida finita sobre los intervalos acotados e invariante por dilataciones entonces* $\mu = Cm_F$ *para alguna constante* $C > 0$.
(iv) Hallar un abierto no acotado $G \subset (0,\infty)$ *con* $0 \in G'$ *y* $m_F(G) < \infty$.

Práctica 2
Medibilidad e integrabilidad.

Ejercicio 2.1
Sea (X, Σ) un espacio medible y (A_n) una sucesión de conjuntos medibles tales que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

i) Dada f una función definida en X tal que $f_n = f\chi_{A_n}$ es medible respecto a la σ-álgebra $\Sigma_n = \{E \cap A_n : E \in \Sigma\}$. Probar que f es Σ- medible.

ii) Supongamos que A_n sean disjuntos dos a dos y sean f_n funciones Σ_n-medibles definidas en A_n. Si definimos la función f en X tal que $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$. Probar que f es Σ- medible.

iii) Supongamos que A_n sea una sucesión creciente y sean f_n funciones Σ_n-medibles definidas en A_n tales que $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ si $x \in A_n$. Si definimos la función f en X tal que $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$. Probar que f es Σ- medible.

Ejercicio 2.2
Sea (X, Σ) un espacio medible, $S \in \Sigma$ y Σ_S la σ-álgebra inducida por S. Sea f una aplicación de X en un espacio topológico Y e $y \in Y$. Probar que f es Σ_S- medible si y sólo si $\bar{f}$ dada por $\bar{f} = f\chi_S + y\chi_{X\setminus S}$ es Σ-medible.

Ejercicio 2.3
Sea (X, Σ) un espacio medible, $A \in \Sigma$ diferente del vacío y el total. Probar que

$$\Sigma_1 = \{E \in \Sigma : A \cap E = \emptyset \text{ ó } A \subset E\}$$

es una σ-álgebra . Averiguar que condición debe cumplir una función Σ-medible para ser Σ_1 -medible.

Ejercicio 2.4
Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to [0, \infty]$ una función Σ-medible. Demostrar que puede escribirse de la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{A_n}$$

donde $c_n \geq 0$ y $A_n \in \Sigma$.

Ejercicio 2.5
Sea (Y, τ) un espacio topológico y $(f_\alpha)_{\alpha\in J}$ una familia de aplicaciones de un conjunto X en Y. Probar que existe la mínima σ-álgebra sobre X que hace medibles f_α y dar una descripción de la misma (se denomina σ-álgebra generada por f_α y se denota $\sigma(f_\alpha : \alpha \in J)$.)

Ejercicio 2.6
Dado el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ numerable} \quad \text{o } B \text{ conumerable }\}$, caracteriza las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-medibles.

Ejercicio 2.7
Sea (X, Σ) un espacio medible y $f, g : X \to [0, \infty]$ una funciones Σ-medibles. Probar que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es medible.

Ejercicio 2.8
Demostrar que el conjunto de puntos donde converge una sucesión de funciones complejas medibles es medible.

Ejercicio 2.9
Sea I un intervalo (acotado o no) en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$.

i) Probar que si f es monótona a trozos entonces f es medible.

ii) Suponer f es derivable. Probar que f' es medible Borel.

Ejercicio 2.10
Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}^n$ donde $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$.
Probar que f una función Σ-medible si y sólo si f_i es Σ-medible para todo $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 2.11
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(i) Probar que f es medible Lebesgue si y sólo si f^2 es una función medible y $\{x : f(x) > 0\}$ es un conjunto medible.
(ii) Dar un ejemplo de una función no medible Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.
(iii) Dar un ejemplo de una función no medible Lebesgue en $\mathbb{R}$ tal que f^2 sea medible.

Ejercicio 2.12
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $A \in \Sigma$, Σ_A la σ-álgebra inducida por A y μ_A la medida concetrada en A.
(i) Sea f una función Σ-medible con valores en $[0, \infty]$ ó compleja.
Probar que f es μ_A-integrable si y sólo si $\int_A |f| d\mu < \infty$. Además si $E \in \Sigma$,

$$\int_E f d\mu_A = \int_{E \cap A} f d\mu.$$

(ii) Sea f una función Σ_A-medible y $f_0 = f\chi_A$ la extensión Σ-medible definida en X.
Probar que si f es μ_A-integrable si y sólo sif_0 es μ-integrable. Además si $E \in \Sigma_A$,

$$\int_E f d\mu_A = \int_{E \cap A} f_0 d\mu.$$

Ejercicio 2.13
Sea (X, Σ) un espacio medible y (μ_n) una sucesión de medidas sobre él. Definimos la nueva medida

$$\mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(E)$$

Describir la μ-integrabilidad y la integral respecto de μ en términos de μ_n.

Ejercicio 2.14
Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y sea $\phi : \Omega \longrightarrow E$. Prueba que $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\phi(\mu)$-integrable si y sólo si $g \circ \phi$ es μ-integrable , y además , en tal caso:

$$\int_\Omega g \circ \phi d\mu = \int_E g d(\phi(\mu)).$$

Ejercicio 2.15
Sea (X, Σ) un espacio mebible, $a \in X$ y δ_a la medida delta de Dirac concentrada en a.
(i) Describir la δ_a-integrabilidad y la integral respecto de δ_a.
(ii) Sea μ definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_n$.
Describir la μ-integrabilidad y la integral respecto de μ.
Calcular $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ para $f(n) = n$.

Ejercicio 2.16
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sean $f_n : X \to [0, \infty]$ medibles. Probar
i) $\int_X (sup_{k \in \mathbb{N}} f_k) d\mu \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu$.
ii) Si $f_{j_1}.f_{j_2}...f_{j_{n+1}} = 0$ para cualquier $(n+1)$-tupla $j_1, j_2, ...j_{n+1}$ entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu \leq n \int_X (sup_{k \in \mathbb{N}} f_k) d\mu.$$

¿Qué significa lo anterior si $f_k = \chi_{A_k}$.?

Ejercicio 2.17
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ medible Lebesgue y positiva. Sea μ la medida definida en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ según:

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx.$$

Prueba que $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow$ medible es μ-integrable si y sólo si $g \cdot f$ es integrable Lebesgue y en tal caso:

$$\int g d\mu = \int g(x)f(x)dx.$$

Ejercicio 2.18
Estudiar la integrabilidad de f respecto de μ, calculando la integral cuando exista, en los siguientes casos:
a) $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu)$, *$\mu$ medida de contar y* $f(n) = e^{-|n|}$.
b) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, *$\mu$ medida de contar y* $f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
c) $((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)), \mu)$, $d\mu(x) = e^{-x}dx$ *y* $f = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{[n-1,n)}$.
d) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, $d\mu(x) = |sen\ x|dx$ *y* $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.
e) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mu)$, $\mu(x) = \phi(m)$ *donde* $\phi(t) = (e^{-|t|}cos\ t, e^{-|t|}sen\ t)$ *y* $f(x,y) = xy$.
f) $([0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{B}([0, \frac{\pi}{2}]), m)$ *y* $f(x) = sen\ x\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]\cap\mathbb{Q}} + cos\ x\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.
g) $([0, \frac{\pi}{2}], \mathcal{B}([0, \frac{\pi}{2}]), m)$*y* $f(x) = sen\ x\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]\cap\{x: cos\ x\in\mathbb{Q}\}} + sen^2\ x\chi_{[0,\frac{\pi}{2}]\cap\{x: cos\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}}$.

Ejercicio 2.19
Estudiar la integrabilidad de f en el intervalo I respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F, definida por F, calculando la integral cuando exista, en los siguientes casos:
a) $I = (0,\infty)$, $F(x) = (x-1)^+, f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
b) $I = (0,1)$, $F(x) = -[\frac{1}{x}], f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
c) $I = (0,1)$, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x), f(x) = x$.
d) $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{(0,x)} |sen\ t|dt, f(x) = \frac{1}{x}\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.
e) $I = (0,\infty)$, $F(x) = -e^{-x}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(n-1,n)}(x)$.
f) $I = (0,\infty)$, $F(x) = log\ x, f(x) = x^{-\alpha}\chi_{(0,1)} + x^{-\beta}\chi_{(1,\infty)}$, $(\alpha, \beta > 0)$.

Ejercicio 2.20
Calcular los siguientes límites:
a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} cos\ nx sen\ \frac{x}{n} dx.$
b) $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{\frac{x}{n}} x^{-2} dx.$
c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} x^{-\frac{1}{2}} log\ x dx.$
d) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 sen\big(\frac{\pi n}{2n+x}\big)\big)dx.$
e) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-ax}\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n dx,\ (a > 0).$
f) $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} arctag\ \frac{t}{n}.$

Ejercicio 2.21
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones $\mu-$integrables. Discutir cuales de las siguientes funciones son ó no son μ-integrables. En caso negativo dar hipótesis sobre el espacio de medida o sobre las funciones para conseguir la integrabilidad y dar ejemplos y contraejemplos de las afirmaciones que se hagan.
a) f^2, *b)*$f^{\frac{1}{3}}$, *c)* $arctag\ f$, *d)* $\sqrt{|f|} + \sqrt{|g|}$

e) $f.g$, *f)*$\sqrt{fg}$, *g) sen*$\left(\frac{1}{1+|f|}\right)$, *h)* $\sqrt{|f|^2+|g|^2}$,
i)$\frac{f}{1+|g|}$, *j)* $f^{\alpha}(\alpha \in \mathbb{R})$.

Ejercicio 2.22
Sea (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $f : X \to [0, \infty]$ *una función* $\mu-$*integrable. Probar que el conjunto* $\{x \in X : f(x) > 0\}$ *es unión numerable de conjuntos de medida finita.*

Ejercicio 2.23
Sea (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $f : X \to \mathbb{C}$ *una función* $\mu-$*integrable. Probar que dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|\int_E f d\mu| < \varepsilon$ *si* $E \in \Sigma, \mu(E) < \delta$.

Ejercicio 2.24
Sea (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $f : X \to [0\infty]$ *una función medible. Sea* $0 < p < \infty, 0 < \varepsilon < \infty$. *Probar que*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\int_X f^p d\mu.$$

Ejercicio 2.25
Sea (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $f_n : X \to [0\infty]$ *una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a* f.

(a) Supongamos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < \infty$. *Probar que* $\int_X f d\mu < \infty$.

(b) Supongamos que existe $\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu < \infty$. *Probar que para todo medible* $E \subset X$ *se tiene*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu < \infty.$$

(Comprobar que la conclusion puede ser falsa si se suprime la finitud del límite.)

Ejercicio 2.26
Dar un ejemplo donde se obtiene la desigualdad estricta en el Lema de Fatou.

Ejercicio 2.27
Sea $\big((-\pi, \pi], \mathcal{B}((-\pi, \pi]), m\big)$ *el espacio de medida del Lebesgue sobre* $\mathcal{B}((-\pi, \pi])$. *En el grupo multiplicativo* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *se considera* $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ *y la medida* $\mu = \phi(m)$ *donde* $\phi(t) = e^{it}$. *Probar*

(i) μ *es una medida de probabilidad* $(\mu(\mathbb{T}) = 1)$*, invariante por traslaciones.*

(ii) Una función medible $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *es* μ*-integrable si y sólo si la función* $g(t) = f(\phi(t))$ *es* m*-integrable. Además* $\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g dm$.

Ejercicio 2.28
Sea Γ *una curva de clase* C^1 *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una parametrización de* Γ. *Definimos sobre los borelianos de* Γ *la medida* m_γ *dada por* $m_\Gamma = \phi(\mu)$ *donde* μ *corresponde a la medida en* $[a, b]$ *dada por la densidad* $||\phi'||$*, es decir* $d\mu = ||\phi'||dm$.

(i) Probar que m_Γ *depende solamente de* Γ *y no de la parametrización elegida.*

(ii) Caracterizar la integrabilidad de una función medible $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *y comprobar que si* f *es integrable entonces*

$$\int_\Gamma f dm_\Gamma = \int_a^b f(\phi(t))||\phi'(t)||dt.$$

Ejercicio 2.29
Sea $s \in \mathbb{C}$ *y* $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(x) = x^{s-1}e^{-x}$.

Probar que f *es integrable si y sólo si* $Re\ s > 0$.

(Recordar que $\Gamma(s) = \int_{(0,\infty)} x^{s-1}e^{-x}dx$*).*

Ejercicio 2.30
Sean $a, s \in \mathbb{C}$ *y* $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(x) = x^s e^{-ax}$.
(i) Hallar los valores de a *y* s *para los que* f *es integrable.*
Hallar el valor de la integral en el caso de que $a > 0$ *y* f *integrable.*
(ii) Probar que para Re $s > 1$ *se cumple*

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Ejercicio 2.31
Sea $z \in \mathbb{C}$ *y* $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(t) = cos\ zte^{-t^2}$. *Probar que es integrable para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y calcular el valor de su integral.*

Ejercicio 2.32
Demostrar, justificando los cálculos, que

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Ejercicio 2.33
Demuestra, utilizando el teorema de la medida imagen, el siguiente teorema clásico de cambio de variable: Sea $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de clase* C^1, *estrictamente creciente y biyectiva,* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable. Demuestra que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ X)(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) (X^{-1}(x))' dx.$$

Ejercicio 2.34
Sea $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ *medible con* μ *medida finita. Prueba que* f *es integrable si y sólo si* $\sum_n \mu(\{x \in X : f(x) \geq n\}) < \infty$.

Ejercicio 2.35
Sean f, f_n *funciones no negativas integrables tales que:*
a) $\lim f_n = f$ a.e.
b) $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$
Prueba que $\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$

Práctica 3
Medida producto y Teorema de Fubini

Ejercicio 3.1
Sean X, Y dos conjuntos no vacíos, y sean $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(Y)$ de modo que $X \in \mathcal{M}$ y $Y \in \mathbb{R}$. Probar que $\Sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{R}) = \pm(\mathcal{M}) \otimes \pm(\mathcal{R})$.

Ejercicio 3.2
Sean (X, Σ_1, μ) e (Y, Σ_2, ν) espacios de medida Σ-finita. Si denotamos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ las correspondientes complecciones.¿Es cierto que $\hat{X} \otimes \hat{Y} = X \hat{\otimes} Y$,(complección respecto la medida producto).?

Ejercicio 3.3
Sean (X, Σ_1, μ) e (Y, Σ_2, ν) espacios de medida Σ-finita y completos.

Sea $(X \otimes Y, \Sigma_1 \hat{\otimes} \Sigma_2, \mu \hat{\otimes} \nu)$ la complección respecto de $(X \times Y, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu \otimes \nu)$.

Probar que si $A \in \Sigma_1 \hat{\otimes} \Sigma_2$ y $\mu \hat{\otimes} \nu(A) = 0$, entonces $\nu(A_x) = 0$ μ-a. e. y también $\mu(A_y) = 0$ $\nu-$a.e.

Deducir que el Teorema de Fubini sigue siendo válido para toda función $\hat{\Sigma}_1 \otimes \hat{\Sigma}_2$-medible no negativa o $\hat{\Sigma}_1 \otimes \hat{\Sigma}_2$-integrable.

Ejercicio 3.4
(i) Sea Σ una Σ-álgebra sobre X y sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$.

Probar que si f es una función definida en $X \times \mathbb{R}$ de modo que f_x es continua para todo $x \in X$ y f^y es Σ-medible para todo $y \in \mathbb{R}$ entonces f es $\Sigma \otimes \mathcal{B}$-medible.

(ii) Sea E un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ y f es una función real definida en $\mathbb{R}^2$ de modo que f_x es continua para todo $x \in E$ y f^y es medible Lebesgue para casi todo $y \in \mathbb{R}$ entonces f es medible Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.5
(Integración por partes) Sea μ una medida de Borel Σ-finita en un intervalo $[a, b]$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dadas dos funciones μ-integrables f, g definimos

$$F(x) \int_{[a,x]} f d\mu, \qquad G(x) = \int_{[a,x]} g d\mu.$$

Probar que , si definimos $F(a^-) = 0$, entonces

$$\int_{[a,b]} f(x)G(x)d\mu(x) = F(b)G(b) - \int_{[a,b]} F(x^-)g(x)d\mu(x).$$

Ejercicio 3.6
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida Σ-finito y $f : X \to [0, \infty]$ medible. Para cada $E \subset \Sigma$ definimos

$$R(f, E) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : \qquad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

y $F(y) = \mu(\{x \in E : f(x) > y\})$, $y > 0$ (función de distribución de f sobre E).

Probar que, siendo m la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, se tiene

$$\int_E f d\mu = (\mu \otimes m)(R(f, E)) = \int_0^\infty F(y)dm(y).$$

Ejercicio 3.7
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida Σ-finito y $f : X \to [0, \infty]$ medible. Si $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$, $y > 0$ (función de distribución de f) o bien $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq y\})$, $y > 0$ entonces para $0 < p < \infty$ se tiene

$$\int_X f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1} F(t) dm(t).$$

Ejercicio 3.8
Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida Σ-finito, $I = (a, \infty)$ con $-\infty \leq a < \infty$ y $f : X \to I$ medible. Sea $\phi : I \to \mathbb{R}$ una función no decreciente y continua tal que $\phi(a^+) = 0$ y $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$, $y > 0$ (función de distribución de f) entonces

$$\int_X \phi(f) d\mu = \int_0^\infty F(t) dm_\phi(t).$$

Ejercicio 3.9
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finito , $I = (a, \infty)$ con $-\infty \leq a < \infty$ y $f : X \longrightarrow I$ medible. Sea $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente y C^1 tal que $\phi(a^+) = 0$ y $F(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\})$, $y > 0$ (función de distribución de f). Prueba que:

$$\int_X \phi(f) d\mu = \int_0^\infty \phi'(t) F(t) dt.$$

Ejercicio 3.10
Sea G una abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea Φ un difeomorfismo C^2 en G. Prueba que para toda función integrable en $\Phi(G)$ se tiene:

$$\int_{\Phi(G)} f(y) dy = \int_G f(\Phi(x)) |J\phi(x)| dx.$$

Ejercicio 3.11
Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ con ν la medida de contar. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida arbitrario. Definimos, para $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \Sigma$,

$$\mu \otimes \nu(E) = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

Probar que una función f de $\mathbb{N} \times X$ in $[0, \infty]$ o con valores en $\mathbb{C}$ es medible si y sólo si cada sección f_n es Σ-medible ($n \in \mathbb{N}$).

Probar que f es $\mathbb{N} \times X$-integrable si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n| d\mu$ es convergente, en cuyo caso

$$\int_{\mathbb{N} \times X} f d(\mu \otimes \nu) = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu$$

(Nótese que el teorema de Fubini es entonces válido para (X, Σ, μ) arbitrario.)

Ejercicio 3.12
Sean $f, g : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \frac{1}{2}$, $\quad g(x) = sen^2(x)$.
(i) Describir $\mu = f(m)$, $\quad \nu = g(m)$.
(ii) Hallar $\mu \otimes \nu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 4x^2\})$.

Ejercicio 3.13
Sea $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = n x_1 \chi_{\{(x,n): ||x|| \leq \frac{1}{n}\}}.$$

Sea μ una medida sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mu(\{n\}) = \frac{1}{n^\beta}$. Hallar los valores de β para que f sea integrable respecto de $m_k \otimes \mu$, siendo m_k la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$ y para éstos calcular la integral $\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}} f dm_k \times \mu$.

Ejercicio 3.14
Sea $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \times S_{n-1}$ donde $x = rx'$ siendo $r > 0$, $x' \in S_{n-1}$, donde $S_{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}$. Consideremos $d\sigma_{n-1}(x')$ la medida sobre la esfera S_{n-1} dada por $\sigma_{n-1}(A) = nm_n(\hat{A})$ siendo $\hat{A} = \{rx' : 0 < r < 1, x' \in A\}$ y A un boreliano de S_{n-1}.

Probar que $dm_n = r^{n-1}dr \otimes d\sigma_{n-1}$.

Demostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ es medible entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dm_n(x) = \int_{[0,\infty)} \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}drd\sigma_{n-1}.$$

Si $f(x) = \phi(||x||)$, es decir si f es radial entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dm_n(x) = nv_n \int_{[0,\infty)} r^{n-1}\phi(r)dr,$$

donde $v_n = m_n(B_n)$.

Ejercicio 3.15
Determinar si $f(x,y) = \frac{sen(x)cos(xy)}{x}$ es o no integrable en $[0,\infty) \times [0,a]$ con $a > 0$.

Ejercicio 3.16
Estudia la integrabilidad en $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ejercicio 3.17
Sea $m \in (0,\infty)$. Prueba que

$$f(x,y) = \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+m^2)}\chi_{\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}}$$

es integrable en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.18
Sea $X = Y = \mathbb{N}$, con μ la medida de contar. Estudia la $\mu\times\mu$-integrabilidad de $f = \sum_n (2-2^{-n})\chi_{(n,n)} - \sum_n(-2+2^{-n})\chi_{(n+1,n)}$.

Ejercicio 3.19
Sea $m \in (0,\infty)$ probar que

$$f(x,y) = \frac{y^2 sen^2 x}{x^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+m^2)}\chi_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$$

es integrable en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.20
Sea $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{sen(\frac{1}{||x||})-1}{||x||^k(1-||x||)}$.

Probar que no existe $\int_{\{||x||<1\}} f(x)dx$ pero sí que existe su valor principal, es decir

$$\lim_{\mathcal{E}\to\prime} \int_{\{\epsilon<||x||<1\}} f(x)dx.$$

Calcular dicho valor.

Ejercicio 3.21
Determinar los valores de α para los cuales las siguientes funciones son integrables, calculando su valor:

(i)
$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{dx}{(1+||x||^2)^\alpha}.$$

(ii)
$$\int_{\{||x||<r\}} ||x||^\alpha dx.$$

(iii)
$$\int_{\{||x||<1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + ... + (-1)^{k+1} x_k^2}{||x||^\alpha} dx.$$

(iv)
$$\int_{\{||x||<1\}} \frac{|x_1| + ... + |x_k|}{||x||} dx.$$

Ejercicio 3.22
Hallar las siguientes integrales

$$I_k = \int_{B_k} |x_1...x_k| dm_k(x),$$
$$J_k = \int_{S_{k-1}} |u_1...u_k| d\sigma_{k-1}(u),$$

siendo B_k la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^k$ y S_{k-1} la esfera $||x|| = 1$.

Ejercicio 3.23
Calcular la integral

$$\int_A (\beta + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) dm_k$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R}^k : ||x - a|| < r\}$, $a \in \mathbb{R}^k$, $\alpha_i, \beta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

Ejercicio 3.24
Expresar en términos de la función Γ la siguiente integral para $n \in \mathbb{N}, a_i > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^k} x_1^n e^{-(\sum_{i=1}^k a_i x_i^2)} dm_k(x).$$

Ejercicio 3.25
Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ del conjunto

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, \sum_{j=1}^n x_j < 1\}.$$

Mediante un cambio de variable usar lo anterior para probar que

$$\int_P e^{-(x_1+...+x_n)^2} dx = \frac{\Gamma(n/2+1)}{n!}.$$

Ejercicio 3.26
Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de los conjuntos

(i)
$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1\}.$$

(ii)
$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \leq 1\}.$$

(iii)
$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : max|x_j| \leq 1\}.$$

(iv)
$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| + |x_n| \leq a, j = 1, 2, .., n-1\}.$$

Ejercicio 3.27
Calcular la medida de los siguientes conjuntos

$$A = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, 2, ..., n\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_j < x.v_j < \beta_j, j = 1, 2, ..., n\}$$

donde $v_1, ..., v_n$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, $x.v$ denota el producto escalar y $\alpha_j < \beta_j$ para todo j.

Ejercicio 3.28
Calcular la medida (cuando sea finita) de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y, z, u) : (x+y)^2 + (z+u)^2 < 1, |x-y| + |z-u| < 1\}.$$

$$B = \{x = (x', x") \in \mathbb{R}^{k+j} : ||x'|| \leq 1, ||x'||||x"|| \leq 1\}.$$

Práctica 4
Teorema de Radon-Nikodym.

Ejercicio 4.1
Sea la medida μ *en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dada por* $\mu(A) = \int_A |x| dx$. *Muestra que* $\mu << m$ *pero dado* $\epsilon > 0$, *no existe* δ *tal que* $m(A) < \delta$ *implique* $\mu(A) < \epsilon$

Ejercicio 4.2
Sea (r_n) *una enumeración de los numeros racionales y dado* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de Borel no negativa tal que* $\int f_n dx = 1$ *y se anule en el exterior del intervalo cerrado de longitud* $\frac{1}{2^n}$ *centrado en* r_n. *Sea* $\mu(A) = \int_A \sum f_n dx$ *para* A *un conjunto de Borel.*
i) Muestra que $\sum f_n(x) < \infty$ *para* m*-casi todo* $x \in \mathbb{R}$
ii) Muestra que μ *es* σ*-finita,* $\mu << m$ *y que todo abierto no vacío tiene medida infinita para* μ.

Ejercicio 4.3
Sean μ *y* η *medidas* σ*-finitas en* $(X, \mathcal{A})$, *tales que* $\eta << \mu$ *y sea* g *la derivada de Radon-Nikodym de* η *respecto de* μ. *Muestra que si* f *es* $\mathcal{A}$*-medible, entonces es* η*-integrable si y sólo si* fg *es* μ*-integrable y en tal caso* $\int f d\eta = \int fg d\mu$

Ejercicio 4.4
Sea X *no numerable,* $\mathcal{M}$ *la clase de los conjuntos numerables o conumerables y sea* μ *la medida de contar. Sea* $\eta(E) = 0$ *si* E *es numerable y* $\eta(E) = \infty$ *en otro caso. Prueba que* $\eta << \mu$, *pero no podemos definir la derivada de Radon-Nikodym en este caso.*

Ejercicio 4.5
Sean λ, μ, η *medidas positivas* σ*-finitas y sean* $f = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\mu)}$, $g = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\eta)}, F = \frac{d\lambda}{d(\lambda+\mu+\eta)}$. *Justifica la existencia de* f, g, F *y expresa* F *en términos de* f *y* g.

Ejercicio 4.6
Se considera en $\mathbb{R}^2$ *la medida* μ *dada por* $d\mu = e^{-\sqrt{ax^2+by^2}} dxdy$. *Sea* $v : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow S_1$ *la proyección sobre la esfera unidad y consideremos la medida imagen* $\lambda = v(\mu)$. *Prueba que* λ *es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue* σ *en* S_1 *y halla* $\frac{d\lambda}{d\sigma}$.

Ejercicio 4.7
Sea $(X, \mathcal{M})$ *espacio medible y sea* (P_n) *una sucesión de probabilidades en* $\mathcal{M}$. *Encuentra una probabilidad* P *tal que* $P_n << P$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.8
Sea μ *la medida de contar en* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. *Prueba que la medida* ν *en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *es absolutamente continua respecto a* μ *si y sólo si existe una sucesión* $\{a_n\}$ *de reales positivos tal que*

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n.$$

Calcula en este caso $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Ejercicio 4.9
Sea μ *la restricción de la medida de Lebesgue* m *a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$ *generada por las bandasw verticales en el plano. Si* $\nu(A \times \mathbb{R}) = m(A \times (0, 1))$. *Prueba que* ν *es absolutamente continua con respecto a* μ *pero no posee representación integral.*

Ejercicio 4.10
a) Si (r, ϕ) *son las coordenadas polares en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\bar{\mu}$ *es la medida de Lebesgue sobre el anillo* $\mathcal{F}$ *de los sectores anulares* $A = \{(r, \phi) : 0 \leq r_1 \leq r < r_2, \phi_1 \leq \phi < \phi_2\}$, *con* $\phi_2 - \phi_1 \leq 2\pi$, *entonces* $\bar{\mu}$ *genera la* σ*-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue con la medida de Lebesgue* m.

b) Sea $\mathcal{F}$ *el anillo anterior y se define* π *sobre* $\mathcal{F}$ *por* $\pi(A) = (r_2 - r_1)(\phi_2 - \phi_1)$. *Demuestra que*

$$m(A) = \int_A r dr d\phi = \int_A r d\pi.$$

c) Si f *es* m*-integrable en* A, *entonces* $r \cdot f$ *es* π*-integrable sobre* A *y*

$$\int_A f dm = \int_A f \cdot f d\pi = \int_A r \cdot f dr d\phi.$$

Ejercicio 4.11
Sea μ *medida de probabilidad y sea* ν *medida* σ*-finita en* $\mathbb{R}$ *tal que* $\nu << \mu$. *Prueba que la derivada de Radon-Nikodym* f *cumple*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\nu(x-h, x+h]}{\mu(x-h, x+h]} = f(x)$$

en un conjunto de μ*-medida* 1.

Ejercicio 4.12
Sea (X, Σ) *un espacio medible. Denotemos por* $L^0(X)$ *el espacio de las funciones (complejas)* Σ*-medibles y por* $\mathcal{M}(X)$ *el espacio de las medidas complejas sobre* Σ.

(i) Sea $\mu \in \mathcal{M}(X)$. *Probar que existe una, esencialmente única,* $h \in L^1(|\mu|)$ *de modo que* $d\mu = hd|\mu|$ *y además* $|h(x)| = 1 \quad \mu - a.e.$.

Diremos que $f \in L^0(X)$ *es* $\mu-$*integrable (denotado también* $f \in L^1(\mu)$*) si* $f.h \in L^1(|\mu|)$ *y, en este caso, definimos para* $E \in \Sigma$

$$\int_E f d\mu = \int_E f.h d|\mu|.$$

Comprobar que

(ii) Si $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $f \in L^1(\mu)$ *y* $E \in \Sigma$ *entonces* $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$.

(iii) Si $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $f, g \in L^0(X)$, $f \in L^1(\mu)$ *y* $f = g \quad |\mu| - a.e.$ *entonces* $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

(iv) Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *entonces* $T : L^1(\mu) \to \mathbb{C}$ *dado por* $T(f) = \int_X f d\mu$ *es lineal.*

Ejercicio 4.13
Sean λ, μ *medidas complejas absolutamente continuas respecto de una medida* σ*-finita* ν. *Probar que para todo* $a, b \in \mathbb{C}$ *se tiene*

$$\frac{d(a\lambda + b\mu)}{d\nu} = a\frac{d\lambda}{d\nu} + b\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Ejercicio 4.14
Sean λ, μ, ν *medidas* Σ*-finitas sobre* (X, Σ) *de modo que* $\lambda << \mu$ *y* $\mu << \nu$. *Probar la regla de la cadena siguiente*

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\mu} . \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Ejercicio 4.15
Sean μ, ν *medidas* Σ*-finitas sobre* (X, Σ) *de modo que* $\nu << \mu$ *y* $\mu << \nu$. *Probar que*

$$\frac{d\nu}{d\mu} \neq 0 \quad \mu - a.e. \quad , \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{d\nu/d\mu} \quad \nu - a.e.$$

Ejercicio 4.16
Sean μ_1, ν_1 medidas Σ-finitas sobre (X_1, Σ_1) y sean μ_2, ν_2 medidas Σ-finitas sobre (X_2, Σ_2).
(i) Si $\nu_i << \mu_i (i = 1, 2)$ entonces $\nu_1 \otimes \nu_2 << \mu_1 \otimes \mu_2$.
(ii) Calcular $\frac{d(\nu_1 \otimes \nu_2)}{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}$.
(iii) Describir, en el caso general, la descomposición de Lebesgue de $\nu_1 \otimes \nu_2$ respecto de $\mu_1 \otimes \mu_2$ respecto la descomposiciones de Lebesgue respectivas.
(iv) Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2 << \mu_1 \otimes \mu_2$ si y sólo si $\nu_1 << \mu_1$ y $\nu_2 << \mu_2$.
(v) Probar que $\nu_1 \otimes \nu_2$ es mutuamente singular con $\mu_1 \otimes \mu_2$ si y sólo si ν_1 es mutuamente singular con μ_1 o bien ν_2 mutuamente singular con μ_2

Ejercicio 4.17
Sean α, β dos medidas reales definidas sobre (X, Σ) y μ una medida Σ-finita. Probar que
(i) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, $(\alpha + \beta)^+ \leq \alpha^+ + \beta^+$ y $(\alpha + \beta)^- \leq \alpha^- + \beta^-$.
(ii) $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$ si y sólo siα^+, α^- son mutuamente singulares respecto β^+, β^- respectivamente.
(iii) Si α es absolutamente continua respecto de μ y β es mutuamente singular respecto de μ entonces α es mutuamente singular respecto de β.
(iv) Si α es absolutamente continua respecto de μ y α es también mutuamente singular respecto de μ entonces $\alpha = 0$.

Ejercicio 4.18
Sean α, β dos medidas reales definidas sobre (X, Σ) e $(Y, \mathcal{R})$ respectivamente.
(i) Probar que existe una medida real $\alpha \otimes \beta$ sobre $\Sigma \otimes \mathcal{R}$ de modo que $\alpha \otimes \beta(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$ para $A \in \Sigma$ y $B \in \mathcal{R}$.
(ii) Hallar la descomposición de Hahn respecto de $X \times Y$ respecto de $\alpha \otimes \beta$, conocidas las respectivas descomposiciones.
(iii) Calcular $(\alpha \otimes \beta)^+$, $(\alpha \otimes \beta)^-$ y $|\alpha \otimes \beta|$ en términos de las de α y β.

8

Ejercicio 4.19
Sea $\Sigma = \mathcal{B}([/, \infty])$ y $\mu(E) = m(E) + im(E \cap [0, \frac{1}{2}])$.
(i) Expresar $|\mu|$ en términos de m.
(ii) Probar que

$$\mu(E) \leq (Re\mu)^+(E) + (Re\mu)^-(E) + (Im\mu)^+(E) + (Im\mu)^-(E)$$

y que la desigualdad puede ser estricta.
(iii) Encontrar h medible Borel tal que $|h| = 1$ y $\mu(E) = \int_E hd|\mu|$ para $E \in \Sigma$.

Ejercicio 4.20
Para cada boreliano de $\mathbb{R}$ definimos

$$\mu(E) = \int_{E\cap(0,\infty)} \frac{sen^3 \pi t}{t^3} dt - \int_{E\cap(-\infty,0)} \frac{sen^3 \pi t}{t^3} dt.$$

(i) Probar que μ es una medida real y calcular $\mu(\mathbb{R})$.
(ii) Hallar la descomposición de Hahn de $\mathbb{R}$ relativa a μ.
(iii) Ver si existe la derivada de Radon-Nikodym de $|\mu|$ respecto de m y hallarla en su caso.

Ejercicio 4.21
Comprobar en los siguientes ejemplos que aunque $\mu(E) = 0$ implica que $\nu(E) = 0$, no se cumple la condición ϵ- δ de la continuidad absoluta :
(i) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ν la medida de contar y $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n$.
(ii) $([0, 1], \mathcal{B})$, $d\nu(t) = \frac{1}{t} dt$ y μ la medida de Lebesgue.
(iii) $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| m([n, n + 1) \cap E)$ y μ la medida de Lebesgue.

Ejercicio 4.22
Sea $f(x) = \sqrt{1-x},\ x \leq 1,\ f(x) = 0,\ x > 1,$ *y sea* $g(x) = x^2,\ x \geq 0,\ g(x) = 0,\ x < 0.$ *Sean* $\eta(E) = \int_E f(x)dx,\ \mu(E) = \int_E g(x)dx.$ *Halla la descomposición de Lebesgue de* η *respecto de* μ.

Ejercicio 4.23
Halla la descomposición de Lebesgue de la medida de Lebesgue-Stieljes dada por la función de distribución $F(x) = (E[x])^2 - (x - E[x])^2$ *respecto a la medida de Lebesgue.*

Práctica 5
Espacios L^p.

Ejercicio 5.1
Sea $E_n^i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}],\ i = 1, 2, \ldots, n$. Muestra que la sucesión de funciones medibles Lebesgue $\chi_{E_1^1}, \chi_{E_2^1}, \chi_{E_2^2}, \chi_{E_3^1}, \chi_{E_3^2}, \chi_{E_3^3}, \chi$ converge en media pero no cpp. en $[0, 1]$.

Ejercicio 5.2
Muestra que $x_n = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, \ldots)$ converge en medida pero $x_n = \chi_{\{1,2,\ldots,n\}}$ no converge en medida en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida de contar.

Ejercicio 5.3
Prueba que dada $f \in L^p(\Omega, \mu)$, se cumple:

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{x : |f(x)| > t\})dt.$$

Ejercicio 5.4
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $A_n \in \mathcal{A}$.
a) Prueba que χ_{A_n} converge a 0 en medida si y sólo si $\mu(A_n) \to 0$.
b) Prueba que χ_{A_n} converge a 0 c.p.p. si y sólo si $\mu(\cap_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty A_n) = 0$.

Ejercicio 5.5
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, (f_n) \in \mathcal{L}^1$. Prueba que si $\sum \int_X |f - f_n| < \infty$, entonces f_n converge a f cpp.

Ejercicio 5.6
Sea μ la medida de contar en los subconjuntos de $\mathbb{Z}$ y sean $f, (f_n)$ funciones real-valuadas en $\mathbb{Z}$. Prueba que (f_n) converge a f en medida si y sólo si converge uniformemente.

Ejercicio 5.7
Sea μ medida en $(X, \mathcal{A})$ y sean $(f_n), (g_n), f, g$ funciones real valuadas $\mathcal{A}$-medibles en X
1) Prueba que si μ es finita y $(f_n), (g_n)$ convergen respectivamente a f, g en medida, entonces $(f_n g_n)$ converge a fg en medida.
2) ¿es cierto el resultado si la medida no es finita?

Ejercicio 5.8
Sea $f_n(x) = \frac{1}{n},\ 0 \leq x \leq n,\ f_n(x) = 0, x > n$. Muestra que f_n converge a 0 uniformemente pero no en media.

Ejercicio 5.9
Sea $f_n(x) = 1 - n(x - k)\ \ k \leq x \leq \frac{1}{n} + k,\ f_n(x) = 0\ \ \frac{1}{n} \leq x \leq k + 1$. Prueba que f_n converge a 0 c.p.p. pero no en medida.

Ejercicio 5.10
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y sea f una función $\mathcal{A}$-medible en X.
a) Prueba que $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ si y sólo si
i) $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)\ \ \forall p \geq 1$
ii) $\sup\{\|f\|_p : 1 \leq p < \infty\}$ es finito.
b) Prueba que en las condiciones anteriores:

$$\|f\|_\infty = \lim_p \|f\|_p$$

Ejercicio 5.11
(Desigualdad de Jensen) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa.
a) Prueba que ϕ es continua y por tanto medible Borel.
b) Prueba que si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, entonces:

$$\phi(\int f d\mu) \leq \int \phi f d\mu$$

Ejercicio 5.12
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sean $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Prueba que si $f \in \mathcal{L}^{p_2}(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces $f \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ y además $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$

Ejercicio 5.13
Sea μ una medida finita en $(X, \mathcal{A})$. Prueba que

$$d(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

define una semimétrica en las funciones medibles en X y f_n converge a f en esta semimétrica si y sólo si converge en medida.

Ejercicio 5.14
Sea μ una medida finita en $(X, \mathcal{A})$. Muestra que la sucesión (f_n) converge a f en medida si y sólo si toda subsucesión posee una subsucesión que converge a f c.p.p.

Ejercicio 5.15
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean f, f_n funciones medibles para $\mathcal{A}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible Borel. Si (f_n) converge a f c.p.p. y g es continua cpp en $f(X)$, entonces $g \circ f_n$ converge a $g \circ f$ cpp.

Ejercicio 5.16
Sea $f_n, f \in L^2(\mu)$. Decimos que f_n converge a f débilmente si

$$\lim \int (f_n - f) g d\mu = 0 \quad \forall g \in L^2(\mu).$$

a) Prueba que si $f_n \to f$ en $L^2(\mu)$, entonces $f_n \to f$ débilmente.
b) Prueba que si $f_n \to f$ débilmente, entonces $\|f\|_2 \leq \liminf \|f_n\|_2$.
c) Si $f_n \to f$ débilmente y $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$, entonces $f_n \to f$ en $L^2(\mu)$.

Ejercicio 5.17
Sean $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prueba que

$$F(t) = \int f(x + t) g(x) dx$$

es una función continua.