PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE FOURIER

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2000/2001

Profesor responsable
José M. Mazón

Práctica 1
Preliminares

1 Funciones de variación acotada y absolutamente continuas

Definición 1.1
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y sea* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *una partición del intervalo* $[a,b]$*; se define*

$$V(P,f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

La variación total de f *en* $[a,b]$ *viene dada por:*

$$V_a^b(f) = \sup\{V(P,f) : P \quad \text{es partición de } [a,b]\}$$

Si $V_a^b(f) < \infty$, *se dice que* f *es de variación acotada en* $[a,b]$ *(brevemente* $f \in VA(a,b)$*).*

Es bien conocido el siguiente resultado.

Teorema 1.2
$f \in VA(a,b)$ *si y sólo si existen* f_1, f_2, f_3, f_4 *crecientes tales que:*

$$f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4).$$

Además, si $f \in VA(a,b)$, *entonces* f' *existe casi por todas partes y se cumple* $f' \in L^1[a,b]$.

Definición 1.3
Se dice que f *es absolutamente continua en* $[a,b]$ *(brevemente* $f \in AC(a,b)$*) si:*

$$\forall \epsilon \quad \exists \delta \ : \ \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

para toda familia finita $\{]a_j, b_j[\}_{j=1}^n$ *de subintervalos de* $[a,b]$ *disjuntos dos a dos.*

Dada $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$, la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es absolutamente continua y además $F' = f$ c.p.p. Se prueba también que:

Teorema 1.4
Si $F \in AC(a,b)$, *entonces* $F' \in \mathcal{L}^1(a,b)$ *y se tiene:*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \quad \forall x \in [a,b].$$

Definición 1.5
Se dice que $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *satisface una condición de Lipschitz (brevemente* $f \in LI(a,b)$*) si existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y| \quad \forall x,y \in [a,b].$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1
Demuestra que:

$$LI(a,b) \subseteq AC(a,b) \subseteq VA(a,b).$$

Además, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es derivable con derivada acotada en* $]a,b[$*, entonces* $f \in LI(a,b)$*.*

Ejercicio 1.2
Prueba que si $f(x) = \sqrt{x}$*, entonces* $f \notin LI(0,1)$ *pero* $f \in AC(0,1)$*.*

Ejercicio 1.3
Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(0) = 0$*,* $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ *y* f *es lineal en cada intervalo* $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$*, probar que* f *es continua pero no absolutamente continua.*

Ejercicio 1.4
Demuestra que una función de variación acotada es acotada.

Ejercicio 1.5
Demuestra que, dadas $f,\ g \in VA(a,b)$*, se cumple* $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$*.*

Ejercicio 1.6
Sea $f \in VA(a,b)$ *y sea* $a < c < b$*. Prueba que* $f \in VA(a,c) \cap VA(c,b)$ *y se verifica* $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$*.*

Ejercicio 1.7
Sean $f,\ g \in VA(a,b)$*. Prueba que* $f \cdot g \in VA(a,b)$*.*

Ejercicio 1.8
Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *es de variación acotada, prueba que existen* $g,\ h$ *únicas tales que:*
a) $f = g + h$*,* *b)* $g \in AC(a,b)$*,* *c)* $h' = 0$ *c.p.p.* *d)* $g(a) = 0$*.*

Ejercicio 1.9
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continua tal que* $f \in VA(a,b)$*. Si, dados* $a < \alpha < \beta < b$*,* $f \in AC(\alpha,\beta)$*, entonces* $f \in AC(a,b)$*.*

Ejercicio 1.10
Sea $f \in AC(a,b)$*. Demuestra que* $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|dt$*.*

Ejercicio 1.11
Sean $F,\ G \in AC(a,b)$*; demuestra que:*

$$\int_a^b FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'G.$$

Ejercicio 1.12
Sea $F \in AC(c,d)$*,* $\phi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *diferenciable c.p.p. Si* $F \circ \phi \in AC(a,b)$*, entonces se verifica:*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} F'(t)dt = \int_\alpha^\beta F'(\phi(t))\phi'(t)dt \qquad \forall \alpha,\ \beta \in [a,b].$$

Ejercicio 1.13
Prueba que, dadas $F \in LI[c,d]$*,* $\phi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *absolutamente continua, entonces* $F \circ \phi \in AC(a,b)$*.*

Práctica 2
Series de Fourier

Dada

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) := \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \text{ medible},\ 2\pi\text{−periodica}\ :\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \infty\},$$

se define su serie de Fourier como:

$$S(f,t) := \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{\imath nt},$$

donde

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\imath nt}dt.$$

Además $\widehat{\ }: \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z})$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo.

Ejemplo 2.1
Para hallar la serie de Fourier de $f(x) = e^{ax} \quad x \in]-\pi, \pi]$, *hacemos:*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{at}e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}(\frac{e^{(a-\imath n)t}}{a-\imath n})_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{(a-\imath n)2\pi}.$$

$$S(f,t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{(a-\imath n)2\pi}e^{\imath nt} =$$

$$= \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n e^{\imath nt}}{(a-\imath n)2} + \frac{(-1)^n e^{-\imath nt}}{(a+\imath n)2}) =$$

$$= \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n(a\cos(nt) - n\,\mathrm{sen}(nt))}{n^2+a^2})$$

1 Series de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$

Dada

$$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}) = \{\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})\ :\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\ \},$$

se verifica el siguiente resultado fundamental:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \qquad \text{(IdentidaddeParseval)},$$

$$f = \|\ \|_2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{\imath nt}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1
Si $f \in AC(\mathbb{T}),\ f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, *demuestra que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})} + \sqrt{2\sum_{1}^{\infty} n^{-2}\|f'\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T})}}$$

y por lo tanto la serie de Fourier de f *converge a* f.

Ejercicio 2.2
Demuestra que, dado $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \|\ \|_2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(kn)e^{iknx}$$

Deduce que:

$$\|\ \|_2 - \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+2\pi\frac{k}{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Ejercicio 2.3
Prueba que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Ejercicio 2.4
Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Sugerencia: Utilizar que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} = (1+e^{ix})^n$$

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i(2kx-2nx)} = 2^{2n}\cos^{2n}x$$

Ejercicio 2.5
Sea $f \in C^1(0,\pi)$ tal que $f(0)=0,\ f(\pi)=0$. Demuestra la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{\pi}|f|^2 \leq \int_0^{\pi}|f'|^2$$

Ejercicio 2.6
Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$. Muestra que $f \in AC(\mathbb{T})$ con $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbf{T})$ si y sólo si $k > \frac{3}{2}$.

Ejercicio 2.7
Prueba que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1-2r\cos t+r^2} = \frac{1}{1-r^2} \qquad 0 \leq r < 1.$$

2 Series de Fourier en $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$

Para

$$f \in A(\mathbb{T}) := \{\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) : (\hat{f}(n)) \in \ell^1(\mathbb{Z})\ \},$$

se tiene:

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{\imath nt} \quad t \in \mathbb{T}.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.8
Probar que $H^1(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0\}$ *es un ideal cerrado de* $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Ejercicio 2.9
Resuelve la ecuación $f * f = f$ *en* $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Ejercicio 2.10
Halla la serie de Fourier de:

(1) $f(x) := \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Solución:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(nt)2\pi}{n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2})$$

(2) $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}x) \quad x \in [-\pi, \pi[$

Solución:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{n\operatorname{sen}(nt)}{\frac{9}{4} - n^2}$$

Ejercicio 2.11
Demuestra que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\operatorname{sen}^5(x) = \frac{5}{8}\operatorname{sen} t - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(5t) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \qquad x \in [-\pi, \pi] \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|\operatorname{sen}(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{(4n^2-1)} \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Ejercicio 2.12
Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+16n(n-1)} = \frac{\pi}{8}$$

Ejercicio 2.13
Sea $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ *y sea* $g = \Re f$. *Demuestra que*

$$\hat{g}(n) = \frac{\hat{f}(n) + \overline{\hat{f}(-n)}}{2}.$$

Ejercicio 2.14
Halla la serie de Fourier de

$$\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \qquad |r| < 1.$$

Ejercicio 2.15
Sea $f \in AC(\mathbb{T})$. *Prueba que* $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.

Ejercicio 2.16
Sea $f \in VA(\mathbb{T})$. Prueba que:

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{2\pi|n|}.$$

Ejercicio 2.17
Sea f tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in \mathbb{T}$, donde $0 < \alpha < 1$. Demuestra que:

$$|\hat{f}(n)| = O(\frac{1}{n^{\alpha}}).$$

Ejercicio 2.18
Demuestra que f es analítica en $\mathbb{T}$ si y sólo si existen $K > 0,\ a > 0$tales que $|\hat{f}(n)| < Ke^{-a|n|}$.

Ejercicio 2.19
Sea $c_n \geq c_{n+1} > 0,\ c_n < \frac{A}{n}$. Demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sen}(kx) \leq K.$$

Deduce que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, donde

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)$$

y calcula su serie de Fourier.

Ejercicio 2.20
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Demuestra que a) $\Rightarrow$ b):
a) Existe $F : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en D tal que $f(x) = F(e^{\imath x})$.
b) $f \in C(\mathbb{T})$, con $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0$.

Ejercicio 2.21
Prueba que, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad -\pi \leq t \leq \pi$:

$$\cos(zt) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z \operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{z^2 - n^2},$$

$$\pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

$$\log(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2}),$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2}).$$

3 Criterios de sumabilidad

Teorema 2.1
(Condición de Dini)
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}),\ x_0 \in \mathbb{R}$ *y*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt < \infty,$$

entonces la serie de Fourier de f *converge a* f *en* x_0.

Teorema 2.2
(Criterio de Dirichlet-Jordan)
Si $f \in VA(a,b)$, *y* $J \subseteq]a,b[$ *es un intervalo cerrado, entonces la serie de Fourier de* f *converge a*

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

uniformemente en J *si* f *es continua.*

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.22
Sea $f = 1$ *en* $]0,\pi[,\ f=-1$ *en* $]-\pi,0],\ f(-\pi)=f(0)=0$; *demuestra que:*

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Ejercicio 2.23
Sea $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. *Dado* $0 < x < 2\pi$, *prueba que:*

$$\frac{\pi e^{\imath\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\imath(n+\alpha)x}}{n+\alpha} \qquad \frac{\pi e^{-\imath\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\imath(n+\alpha)x}}{n+\alpha}$$

$$\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}((n+\alpha)x)}{n+\alpha} \qquad \pi\cot(\pi\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos((n+\alpha)x)}{n+\alpha}$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Ejercicio 2.24
Demuestra que:

$$f(x) = \frac{1}{\log(\frac{\pi}{|x|})} \quad x \neq 0, \qquad f(0)=0$$

cumple la condición de Dirichlet-Jordan en $x=0$ *pero no cumple la condición de Dini.*

Ejercicio 2.25
a) Sea $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $g(t) = 1 - \frac{|t|}{\epsilon}$ *si* $|t| \leq \epsilon,\ g(t) = 0$ *en otro caso.*
1. Prueba que

$$|\hat{g}(n)| \leq \frac{\epsilon}{\pi}.$$

2. Prueba que

$$|\hat{g}(n)| \leq \frac{2}{\pi\epsilon n^2}.$$

b) Sea $f_j(t) = j^{-1}(1 - 2^{j+2}|t - 2^{-j}|)$ *si* $|t - 2^{-j}| \leq 2^{-j-2}$ *y* $f_j(t) = 0$ *en otro caso. Prueba que* $\sum_{j=1}^{n} f_j$ *converge uniformemente a una función continua* f.
c) Prueba que f *no es de variación acotada.*
d) Si $2^k \leq |n| < 2^{k+1}$*, prueba, usando (a.1), que*

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\hat{f}_j(n)| \leq k^{-1}2^{-k-1}.$$

e) Demuestra, usando (a.2), que

$$\sum_{j=1}^{k-1} |\hat{f}_j(n)| \leq 2\pi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} (j^{-1}2^{j+2})n^{-2}.$$

f) Deduce que:

$$\lim_{|n|\to\infty} n \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}_j(n)| = 0.$$

g) Prueba que $\hat{f}(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_j(n)$ *y deduce que* $\hat{f}(n) = o(|n|^{-1})$.

Ejercicio 2.26
Demuestra que:

$$1 + C_1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos(nx) = 0,$$

pero la serie diverge para $x = \pi$.

Ejercicio 2.27
Demuestra que:

$$C_1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{para} \quad |z| \leq 1,\ z \neq 1.$$

$$C_1 - \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) = \frac{1}{2} \quad C_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2}\cot(\frac{\theta}{2})$$

4 Aplicaciones

La ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$$

regula las vibraciones transversales de una cuerda elística con extremos fijos, donde u es la deflexión de la cuerda y $c^2 = \frac{T}{p}$, donde p es la masa de la cuerda y T la tensión.

El flujo de calor en un cuerpo está determinado por la ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_t = 0,$$

donde u es la temperatura y $c^2 = \frac{K}{p\gamma}$, donde K es la conductividad, γ es el calor espec!fico y p la densidad.

En problemas de flujo de calor en estado estacionario, la función de temperatura satisface la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ejerciicos propuestos

Ejercicio 2.28
Demuestra que:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

tiene por solución

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}((2n-1)x)) e^{-c^2(2n-1)^2 t}$$

Ejercicio 2.29
Demuestra que, dada $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} u_{xx} + f & 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ \lim_{t \to 0} u(x,t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tiene por solucion:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{2}}}{\frac{\pi^2 n^2}{2}} \int_0^1 \sqrt{2} f(y) \operatorname{sen} n\pi y dy \; \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x$$

Ejercicio 2.30
Demuestra que

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 2x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = 2(\pi - x) & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}(2n+1)x \cos(2n+1)t$$

Ejercicio 2.31
Demuestra que:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \; 0 < y < \pi \\ u(0,y) = 0 & 0 < y < \pi \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \\ u(x,\pi) = 0 & 0 < x < \pi \\ u(\pi,y) = 1 & 0 < y < \pi \end{cases}$$

tiene por solución:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{senh}((2n+1)x)}{\operatorname{senh}((2n+1)\pi)} \operatorname{sen}((2n+1)y)$$

Ejercicio 2.32
Demuestra que, dada $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f \qquad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \quad\; t \geq 0 \\ u(1,t) = 0 \quad\;\; t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \quad\;\; 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \end{cases}$$

tiene por solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi t}{n^2\pi^2} \int_0^1 f(y)\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi y)dy\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$$

Práctica 3
La transformada de Fourier

1 Criterios de convergencia

Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, se define la transformada de Fourier $\hat{f}$ de f como:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\, dt.$$

Podemos también trabajar con las transformadas seno y coseno de Fourier:

$$\hat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(t)\cos(xt)dt$$

$$\hat{f}_s(x) = \int_0^\infty f(t)\operatorname{sen}(xt)dt.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1
Sea $f \in LI(0,\infty) \cap \mathcal{L}^1(0,\infty)$. Prueba que:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x \int_0^\infty f(t)\cos(\lambda t)dtd\lambda$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}(\lambda x) \int_0^\infty f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)dtd\lambda.$$

Ejercicio 3.2
Prueba que

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\operatorname{sen} t\cos(tx)}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1. \end{cases}$$

Ejercicio 3.3
Demuestra que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-|a|b} \qquad \forall b>0.$$

Ejercicio 3.4
Halla la transformada de Fourier en seno y coseno de $e^{-x}\cos x$.

Ejercicio 3.5
Halla la transformada en coseno de e^{-x^2}.

Ejercicio 3.6
Halla transformada seno de $\frac{x}{1+x^2+x^4}$ y transformada coseno de $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

Ejercicio 3.7
Dado $a>0$, sea $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$. Usar la transformada de Fourier para demostrar que $f_a * f_b = f_{a+b}$.

Ejercicio 3.8
Dadas

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\beta(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

demuestra que:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ejercicio 3.9
Calcula la transformada de Fourier de la función caracter!stica de un intervalo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n = 1_{[-n,n]}$, calcula $g_n * g_1$ y prueba que es la transformada de Fourier de $A\frac{\sin x \operatorname{sen}(nx)}{x^2}$. Concluye que la transformada de Fourier no es una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en $C_0(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3.10
Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $h_n(t) = \frac{1-\cos(nt)}{\pi n t^2}$. Demuestra que dada $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la sucesión $h_n * f$ converge a f en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3.11
Sabiendo que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ y definiendo, para $f \in \mathcal{L}^p$:

$$F_n(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-y)}{\sqrt{ny(1-ny)}} dy$$

demuestra que

$$\lim nF_n = \pi f \quad \text{en} \quad \mathcal{L}^p.$$

2 Aplicaciones de la transformada de Fourier

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.12
Demuestra que

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & -\infty < x < \infty,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}),\ f' \in L^1(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

Ejercicio 3.13
Demuestra que

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})\ f' \in L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

tiene como solución

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Ejercicio 3.14
Demuestra que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} - u_t = f(x,t) & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & t > 0 \end{array} \right.$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-r)}}}{\sqrt{t-r}} H(t-r) f(s,r) ds dr,$$

donde:

$$H(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3.15
Demuestra que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} = u_t & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u(0,t) = g(t) & t > 0 \end{array} \right.$$

tiene por solución:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} ds$$

Ejercicio 3.16
Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ una función arbitraria y sea F su transformada de Fourier. Prueba que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\imath n 2\pi t}{T}} F(\frac{2n\pi}{T})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\frac{2\pi n}{T}).$$

Ejercicio 3.17
Prueba que para $a > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + (2n\pi)^2}$$

$$\frac{a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{a}} \cos 2\pi n t.$$