PRÁCTICAS DE TEORÍA DE FUNCIONES

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2000/2001

Profesores responsables
Josep Martínez

Práctica 1
Transformaciones de Moebius

Ejercicio 1.1
Demuestra que la inversión transforma cualquier circunferencia que pase por 1 *y* -1 *en sí misma.*

Ejercicio 1.2
Halla todas las transformaciones de Moebius que transforman $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.3
Prueba que una transformación de Moebius que fija el origen y conserva distancias es una rotación.

Ejercicio 1.4
Halla todas las transformaciones de Moebius que fijan la circunferencia unidad.

Ejercicio 1.5
Calcula todas las transformaciones de Moebius que transforman el semiplano superior en el círculo unidad.

Ejercicio 1.6
Prueba que, si T *es una transformación de Moebius que toma valores reales sobre el eje real y valores imaginarios sobre el eje imaginario, entonces* T *es impar.*

Ejercicio 1.7
Describe $T(A)$*, donde* T *es la transformación de Moebius y* A *el conjunto dados por:*

i) $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $\quad A = \{\ z \in \mathbb{C} : \Re z > 0,\ \Im z > 0\}$.

ii) $T(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$, $\quad A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \Im z > 0\ \}$.

iii) $T(z) = \frac{z}{z-1}$, $\quad A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$

iv) $T(z) = \frac{z-1}{z-2}$, $\quad A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1\}$.

v) $T(z) = \frac{z}{z-1}$, $\quad A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Ejercicio 1.8
Halla una transformación de Moebius que mande $\{|z| = 2\}$ *en* $\{|w+1| = 1\}$*, de manera que transforme* -2 *en* 0 *y* 0 *en* i*. ¿es única?*

Ejercicio 1.9
Sea $0 < R < h, r > 0$*. Prueba que existe una transformación de Moebius que aplica* $A = \{\Re z > 0, |z-h| > R\}$ *en* $B = \{r < |z| < 1\}$ *si y sólo si* $r = \frac{h}{R} - \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}$.

Ejercicio 1.10
Encuentra todas las transformaciones de Moebius que aplican el dominio acotado por las circunferencias $|z| = 1$ *y* $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ *sobre el anillo limitado exteriormente por la circunferencia* $|w| = 1$ *e interiormente por* $|w| = r$.

Ejercicio 1.11
Encuentra todas las transformaciones de Moebius que aplican el dominio acotado por las circunferencias $|z| = 2$ *y* $|z - 1| = 1$ *sobre la banda limitada por las rectas* $\Re z = 0$ *y* $\Re z = a$.

Ejercicio 1.12
Muestra que el simétrico de un ciclo respecto de un ciclo es un ciclo.

Ejercicio 1.13
Sea T un triángulo curvilíneo. Prueba que existe una aplicación de Moebius que transforma T en un triángulo rectilíneo si y sólo si los tres círculos tienen un punto en común

Ejercicio 1.14 (*)
Definimos $\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ como la métrica de Poincaré en $D = \{z : |z| < 1\}$. Dada $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ curva C^1 a trozos, definimos su longitud en la métrica ρ como:

$$l(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Además se define la distancia hiperbólica en D como:

$$d(P, Q) = \text{ínf } \{l(\gamma) : \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ a trozos que une } P \text{ y } Q \ \}.$$

a) Prueba que las transformaciones de Moebius que dejan D invariante son isometrías de la métrica hiperbólica en D.
b) Prueba que el segmento $(0, 1)$ es una geodésica en D.
c) Prueba las geodésicas de la métrica hiperbólica son los ciclos en D ortogonales a ∂D.
d) Prueba que:

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + |\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}|}{1 - |\frac{P-Q}{1-\overline{P}Q}|}\right)$$

Ejercicio 1.15 (*)
Definimos $\rho(z) = \frac{1}{\Im z}$ como la métrica de Poincaré en $H = \{z : \Im z > 0\}$. Dada $\gamma : [a, b] \longrightarrow H$ curva C^1 a trozos, definimos su longitud en la métrica ρ como:

$$l(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Además se define la distancia hiperbólica en H como:

$$d(P, Q) = \text{ínf}\{ \ l(\gamma) : \gamma \text{ es una curva } C^1 \text{ a trozos que une } P \text{ y } Q \ \}.$$

a) Prueba que las transformaciones de Moebius que dejan H invariante son isometrías de la métrica hiperbólica en H.
b) Prueba las geodésicas de la métrica hiperbólica son los ciclos en H ortogonales a ∂H.
c) Prueba que:

$$d(P, Q) = \log \frac{|P - \overline{Q}| + |P - Q|}{|P - \overline{Q}| - |P - Q|}$$

Ejercicio 1.16 (*)
Sean T, S dos transformaciones de Moebius.
a) Prueba que si T tiene puntos fijos z_1 y z_2, entonces $S^{-1}TS$ tiene puntos fijos $S^{-1}z_1$ y $S^{-1}z_2$.
b) T fija 0 y ∞ si y sólo si es una dilatación.
c) S tiene como único punto fijo ∞ si y sólo si es una traslación.
d) T y S distintas de la identidad conmutan si y sólo si tienen los mismos puntos fijos.

Ejercicio 1.17 (*)
Sea T transformación de Moebius tal que $T(D) = D$, $T \neq I$. Prueba que se da una de las siguientes posibilidades:

a) Existe $S : D \longrightarrow D$ tal que $STS^{-1}(z) = \lambda z \quad \forall z \in D$, con $|\lambda| \neq 1$ (tranformación hiperbólica).

b) Existe $S : D \longrightarrow D$ tal que $STS^{-1}(z) = \lambda z \quad \forall z \in D$, con $|\lambda| = 1$ (tranformación elíptica).

c)Existe $S : \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\} \longrightarrow D$ tal que $STS^{-1}(z) = z + 1, \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, (tranformación parabólica).

Ejercicio 1.18 (*)
Sea T transformación de Moebius tal que $T(D) = D,\ T \neq I$. Prueba que se da una de las siguientes posibilidades:
a) Existe $\alpha \in \overline{D}$ tal que

$$\lim_n T^n(z) = \alpha \quad \forall z \in D.$$

b) Existen g Moebius, $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$g^{-1}T^n g(z) = e^{i\theta n} z \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Ejercicio 1.19 (*)
Dada f meromorfa, sea $S_f = (\frac{f''}{f'})' - \frac{1}{2}(\frac{f''}{f'})^2$ su derivada de Schwarz. Prueba que f es Moebius si y sólo si $S_f = 0$.

Práctica 2 Aplicaciones conformes. Lema de Schwarz.

Ejercicio 2.1
Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$ tal que $f(a) = 0$ y $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in D(a,R)$. Prueba que $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z-a|, \forall z \in D(a,R)$.

Demuestra que se da la igualdad si y sólo si $f(z) = c(z-a)$, donde c es una constante de módulo $\frac{M}{R}$.

Ejercicio 2.2
Sea f una función holomorfa en el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ tal que $|f(z)| < 1$, $\forall z \in H$. Supóngase además que $f(i) = \frac{1}{2}$.
i) Demuestra que $|f'(i)| \leq \frac{3}{8}$.
ii) Encuentra todas las f que cumplen las hipótesis para las cuales $|f'(i)| = \frac{3}{8}$.

Ejercicio 2.3
Sea $f : D \longrightarrow D$ holomorfa cuyo desarrollo de Taylor en torno al origen es:

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Halla a_n para $n > 2$.

Ejercicio 2.4
Halla todas las aplicaciones holomorfas y biyectivas de Ω en D, Donde Ω es:

i) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Argz < a,\ a < \pi\}$.
ii) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1\}$
iii) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Argz < \frac{\pi}{4},\ |z| < 1\}$
iv) La región limitada por las rectas $y = x,\ x - y = 2$.
v) El sector limitado por las rectas $x = 1,\ x - y = 1$ en el que se halla el punto $2 + 2i$.

Ejercicio 2.5
Sea Ω una región simplemente conexa distinta de $\mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$.
i) Prueba que existe un único $r = r(a, \Omega) > 0$ y una función $\Phi : \Omega \longrightarrow D(0,r)$ conforme tal que $\phi(a) = 0, \Phi'(a) = 1$.
ii) Calcula $r(a, D(0,R))$ para $R > |a|$.
iii) Calcula $r(ih, \{\Im z > 0\}), h > 0$.
iv) Si $f : D \longrightarrow \Omega$ es conforme y $z_0 \in D$, prueba que $r(f(z_0), \Omega) = (1 - |z_0|^2)|f'(z_0)|$.

Ejercicio 2.6
Dado un número real $a \in [0,1)$, sea $U_a = D - [a,1]$.
i) Halla una función holomorfa e inyectiva en U_a que transforme U_a en U_0, justificando que $f(U_a) = U_0$.
ii) Halla una función g holomorfa e inyectiva en U_0 tal que

$$g(U_0) = D^+ = \{z \in D : \Im z > 0\},$$

y una función holomorfa e inyectiva h en U_a tal que $h(U_a) = D^+$.

Ejercicio 2.7
Transforma conformemente la región $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |2z - 1| > 1\}$ sobre un semiplano.

Ejercicio 2.8
Transforma conformemente $D \cap D(1,1)$ en D.

Ejercicio 2.9
Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ tal que $|f(z)| < 1$ para cada $z \in D - \{0\}$. Demuestra que:

$$|\frac{f(z) - f(0)}{z}| \leq |1 - \overline{f(0)}f(z)|.$$

Ejercicio 2.10
Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ inyectiva tal que $D \subseteq f(D)$ y $f(0) = 0$. Demuestra que $|f'(0)| \geq 1$, dándose la igualdad si y sólo si $f(z) = e^{ia}z$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.11
Sea $f : D \longrightarrow D$ holomorfa . Si f tiene más de un punto fijo, entonces es la identidad.

Ejercicio 2.12
Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ inyectiva tal que $D \subseteq f(D) \subseteq D(0,R), R > 1$ y $f(0) = 0$. Prueba que $1 \leq |f'(0)| \leq R$.

Ejercicio 2.13
Sea f una biyección holomorfa entre D y un abierto Ω tal que $f(0) = a \in \Omega$. Demuestra que $|f(z)-a| \geq R|z|$ para todo $z \in D$ y que $|f'(0)| \geq R$, siendo R el radio del mayor disco con centro en a contenido en Ω.

Ejercicio 2.14
Sea Ω un abierto convexo y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\Re f'(z) \geq 0, \forall z \in \Omega$. Prueba que f transforma conformemente Ω en $f(\Omega)$. ¿ se llegaría a la misma conclusión si Ω fuese simplemente conexo ?

Ejercicio 2.15
Sea $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ y sea L un arco contenido en $\mathbb{T}$. Si existe

$$\lim_{z \to l} f(z) = 0, \quad \forall l \in L,$$

prueba que f es idénticamente nula.

Ejercicio 2.16
Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que toma valores reales sobre las rectas $y = 0, y = a, a > 0$. Prueba que f es periódica.

Ejercicio 2.17
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Si $f(0) = 0, f'(0) = 1$, prueba que para todo $n \in \mathbf{N}$ existe una función holomorfa e inyectiva $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $(g(z))^n = f(z^n)$, $\forall z \in D, g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

Ejercicio 2.18
Sea f derivable en un abierto que contiene a $\overline{D}$ tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Demuestra que f es una función racional.

Ejercicio 2.19
Prueba que no existe ninguna función holomorfa y biyectiva de $D - \{0\}$ en $D(0,r,R)$, donde $r > 0$.

Ejercicio 2.20 (*)
Prueba que $f(z) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, transforma conformemente D en $\mathbb{C} - [-1,1]$. Demuestra que $\cos z$ transforma conformemente $\{\ z \ \ 0 < \Re z < \frac{\pi}{4}\}$ en $\{\ z = x + iy \ : \ x^2 - y^2 > \frac{1}{2},\ x > 0\} - [1, \infty)$.

Ejercicio 2.21 (*)
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Si $f(D)$ es convexo, prueba que $f(D(0,r))$ es estrellado para $0 < r < 1$.

Ejercicio 2.22 (*)
Prueba que

$$f(z) = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$$

transforma conformemente $\mathbf{C} - ([-4, +\infty) \cup [-3i, 3i])$ *en el semiplano superior.*

Ejercicio 2.23 (*)
Prueba que

$$f(z) = (\sqrt{z^{2n} - 1} - z^n)^{\frac{1}{n}}$$

transforma conformemente $\mathbf{C} - \cup_{k=1}^{2n}[0, e^{\pi ik/n}]$ *en el disco unidad .*

Ejercicio 2.24 (*)
Prueba que

$$\arccos(\frac{\cos z}{\cosh \alpha})$$

transforma conformemente $\{\Im z > 0\} - (\cup_{k=-\infty}^{\infty}[k\pi, k\pi + i\alpha])$ *en el semiplano superior.*

Ejercicio 2.25 (*)
Sea $f : D \longrightarrow D$ *holomorfa*

a) Prueba que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \forall z \in D.$$

b) Si d *la métrica hiperbólica en* D, *Pruba que*

$$d(f(P), f(Q)) \leq d(P, Q) \quad \forall P,\ Q \in D.$$

Ejercicio 2.26 (*)
Sea $f : H \longrightarrow H$ *holomorfa y sea* d *la métrica hiperbólica en* H. *Prueba que:*

$$d(f(P), f(Q)) \leq d(P, Q) \quad \forall P,\ Q \in H.$$

Ejercicio 2.27 (*)
Sea $g = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$ *derivable e inyectiva en* $D - \{0\}$.

a) Sea $D_r = \mathbb{C} - g(D(0, r))$. *Demuestra que:*

$$\int_{D_r} dxdy = \pi(\frac{1}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n})$$

b) Prueba que $\sum n|b_n|^2 \leq 1$.

Ejercicio 2.28 (*)
Sea f *derivable e inyectiva en* D *tal que* $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

a) Demuestra que $g(z) = \frac{1}{\sqrt{f(z^2)}}$ *es derivable, inyectiva en* $D - \{0\}$, *y posee en* 0 *un polo simple con residuo* 1.

b) Si $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, *entonces* $|a_2| \leq 2$.

c) Si $c \notin f(D)$ *prueba que* $\frac{cf}{c-f}$ *es derivable e inyectiva en* D, *con* $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$.

d) Prueba que $f(D)$ *contiene* $D(0, 1/4)$.

Ejercicio 2.29 (*)
Demuestra que

$$f(z) := \sqrt{2 + (z + \sqrt{z^2 - 1})^4 + (z - \sqrt{z^2 - 1})^4}$$

transforma conformemente $\Omega = \{z = x + iy : x^2 - y^2 > \frac{1}{2},\ x > 0\}$ *en el semiplano derecho.*

Práctica 3
Productos infinitos

Ejercicio 3.1
Halla el dominio de holomorfía de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$.

Ejercicio 3.2
Determina el dominio de convergencia de los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{n^2}) \quad (z\in\mathbb{C}) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n) \quad (|z|<\frac{1}{e})$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{n} \quad (z\in\mathbb{C}) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{z+n})e^{-\frac{1}{n}}(z\in\mathbb{C}).$$

Ejercicio 3.3
Calcula el valor de los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)+1+i}{n(n+1)+1-i} \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}+1+2^n i}{2^{2n+1}+1-2^n i} \qquad \prod_{n=m+1}^{\infty}(1+\frac{m-1}{n(n-m)}) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{2^n-2})$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}(1+\frac{1}{2n}) \qquad \prod_{n=6}^{\infty}(1+\frac{16}{n^2-25})=45 \qquad \prod_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2-1})$$

Ejercicio 3.4
Calcula

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1).$$

Ejercicio 3.5
i) Sea $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. *Prueba que* $\prod(1+a_n)$ *diverge, pero* $\sum a_n$ *converge.*
ii) Sea $a_{2n-1}=\frac{-1}{\sqrt{n}}, a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$. *Prueba que* $\prod(1+a_n)$ *converge, pero* $\sum a_n$ *diverge.*

Ejercicio 3.6
i) Halla el dominio de holomorfía de la función dada por el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n}$.
ii) Calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\tan^2\frac{x}{2^n})$ *para* $-\pi<x<\pi$.

Ejercicio 3.7
Demuestra que:

$$\cos(\pi z)=\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}).$$

Ejercicio 3.8
Demuestra que:

$$\cos(\frac{\pi z}{4})-\sin(\frac{\pi z}{4})=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^n z}{2n-1})$$

$$chz - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4})$$

$$e^{az} - e^{bz} = (a-b)e^{\frac{(a+b)z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4\pi^2 n^2}).$$

Ejercicio 3.9
i) Demuestra que , dado $z \in \mathbb{C} - (\frac{1}{2} + \mathbf{Z})$

$$\pi \tan(\pi z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{(\frac{2n-1}{2})^2 - z^2}$$

ii) Demuestra que, dado $z \in \mathbb{C} - \mathbf{Z}$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Ejercicio 3.10
Factoriza $sh(z)$ *y* $ch(z)$.

Ejercicio 3.11
Se define la función beta como

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \qquad u, v > 0.$$

Prueba que

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt.$$

Ejercicio 3.12
Prueba la fórmula de Legendre:

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}).$$

Ejercicio 3.13
Expresa en términos de la función Γ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2n})e^{\frac{1}{2n}} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{2n-1})(1 - \frac{z}{2n}) \qquad (1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{8}) \cdots$$

Ejercicio 3.14
Calcula el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3.15
Sea f *derivable en el semiplano derecho tal que* $f(z+1) = zf(z), f(1) = 1$. *Si*

$$|f(x+iy)| \geq Me^{-\pi|y|/2} \quad \forall x, \forall y : |y| >>,$$

demuestra que:

$$f(z) = \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \forall z : \ \Re z > 0.$$

Ejercicio 3.16
Prueba que $\sum p_n^{-1} = \infty$, *donde* p_n *es la sucesión de los números primos. Deduce que existen infinitos números primos.*

Ejercicio 3.17
Prueba que $\zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z}$, $\Re z > 1$, *donde* $d(n)$ *es el número de divisores de* n.

Ejercicio 3.18
Prueba que $\zeta(z)\zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z}$, $\Re z > 1$, *donde* $\sigma(n)$ *es la suma de los divisores de* n.

Ejercicio 3.19
Prueba que $\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^z}$, $\Re z > 1$, *donde* $\phi(n)$ *es el número de enteros menores que* n *y relativamente primos con* n.

Ejercicio 3.20
Prueba que $\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^z}$, $\Re z > 1$, *donde* $\nu(n)$ *está definido como sigue:*

Si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ *es la descomposición de* n *en factores primos, se define* $\nu(n)$ *como* $(-1)^m$ *si todos los exponentes son* 1 *y como* 0 *en otro caso.*

Ejercicio 3.21
Prueba que $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(n)}{n^z}$, $\Re z > 1$, *donde* $\Delta(n) = \log p$ *si* $n = p^m$ *para* p *primo y* $\Delta(n) = 0$ *en otro caso.*

Ejercicio 3.22
a) Halla una función entera f *tal que* $f(n+in) = 0$ *para todo* n *entero.*

b) Halla una función entera f *tal que* $f(m+in) = 0$ *para* $m,\ n$ *números enteros.*

Ejercicio 3.23 (*)
a) Prueba que:

$$\frac{\Gamma(n)e^n\sqrt{n}}{n^n} = 2\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} (1+\frac{x}{\sqrt{n}})^{2n+1} e^{-2\sqrt{n}x} e^{-x^2}\, dx.$$

b) Deduce del teorema de convergencia dominada la formula de Stirling.

Ejercicio 3.24 (*)
a) Prueba que:

$$\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad \forall z:\ \Re z >> .$$

b) Si K *es un rectángulo cuyos lados verticales pasan por* $x=0,\ x=n+1/2$ *y cuyos lados verticales están sobre* $Y, -Y$, *prueba que:*

$$(\mathrm{VP})\quad \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\pi\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)(w+z)^2}dw = \frac{-1}{2z^2} + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(z+m)^2}.$$

c) Deduce que:

$$\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \int_0^{\infty} \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1} \quad \forall z:\ \Re z >> .$$

d) Prueba queexisten constantes $C,\ D$ *tales que:*

$$\log\Gamma(z) = C + Dz + (z-\frac{1}{2})\log z + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta. \quad \forall z:\ \Re z >>$$

e) Muestra que:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)} \quad \forall z : \Re z >>, \quad \text{con} \lim_{z\to\infty} J(z) = 0$$

f) Deduce la fórmula de Stirling :

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n}} = 1.$$

Ejercicio 3.25 (*)
a) Muestra que:

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}).$$

b) Prueba que $x_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ *es monótona creciente.*
c) Calcula $\lim \frac{x_{2n}}{x_n^2}$ *y deduce la fórmula de Stirling.*

Ejercicio 3.26 (*)
a) Si f es derivable en un abierto que contiene $\overline{D(0,r)}$ y no se anula en $\overline{D(0,r)}$, entonces

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta.$$

b)(Fórmula de Jensen) Si f es derivable en un abierto que contiene a $\overline{D(0,r)}$ y $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$ repetidos tantas veces como sea su multiplicidad, y $f(0) \neq 0$, entonces:

$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n} \log(\frac{r}{|a_k|}) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta.$$

c) Sea f es una función entera tal que $f(0) = 1$. Definimos

$$M(r) = \sup\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

y $n(r)$ como el número de ceros de f en $D(0,r)$ según sea su multiplicidad. Prueba que:

$$n(r)\log 2 \leq \log M(2r).$$

d) (Fórmula de Poisson-Jensen) Sea f es derivable en un abierto que contiene a $\overline{D(0,r)}$ y $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$ repetidos tantas veces como sea su multiplicidad. Si $|z| < r$ y $f(z) \neq 0$, prueba que:

$$\log|f(z)| = -\sum_{k=1}^{n} \log(|\frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(z-a_k)}|) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}) \log|f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Ejercicio 3.27 (*)
Sea $0 < |a| < 1$ y sea $|z| \leq r < 1$. Prueba que:

$$|\frac{a+|a|z}{(1-\overline{a}z)a}| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

b) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $0 < |a_n| < 1$ y $\sum(1-|a_n|) < \infty$. Muestra que el producto infinito

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n}(\frac{a_n - z}{1-\overline{a}_n z})$$

converge en $\mathcal{H}(D(0,1))$ y que $|B(z)| \leq 1$. B se llama un producto de Blaschke.

c) Si $\{a_n\}$ son los ceros no nulos de una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica acotada, entonces $\sum(1 - |a_n|) < \infty$ (aplíquese la fórmula de Jensen).

d) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica acotada y posee un cero de multiplicidad m en 0, entonces

$$f(z) = z^m B(z) e^{-g(z)},$$

donde B es un producto de Blaschke y g es analítica en D con Reg acotada.

Ejercicio 3.28 (*)

Sea f una función entera tal que existen constantes $A,\ B$ tales que $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}\ \ \forall z : |z| >>$. (f es de orden 1.). Sean $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ son los ceros de f repetidos tantas veces como sea su multiplicidad y ordenados según $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$.

a) Prueba que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < \infty.$$

b) Demuestra a partir de la formula de Poisson-Jensen:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a_k}^2}{(r^2 - \overline{a_k} z)^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^3} \log|f(re^{i\theta})| d\theta.$$

c) Muestra que:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^2}.$$

d) (Teorema de Hadamard) Demuestra que existen $m \in \mathbb{N},\ A, B$ constantes tales que:

$$f(z) = z^m e^{A+Bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}.$$

Práctica 4
Desarrollos de Mittag-Leffler.

Ejercicio 4.1
Halla las funciones meromorfas más generales cuyas únicas singularidades son:
(i) polos simples en $n = 1, 2, \cdots$, *con* $Res(f, n) = n$.
(ii) polos simples en a^n, *con* $|a| > 1, n = 1, 2, \cdots,$ $Res(f, a^n) = n$.
(iii) polos simples en a^n, *con* $|a| > 1, n = 1, 2, \cdots,$ $Res(f, a^n) = a^n$.
(iv) polos simples en $\sqrt{n}, n = 1, 2, \cdots$, *con* $Res(f, \sqrt{n}) = 1$.
(v) polos de segundo orden en $n = 1, 2, \cdots$, *con partes singulares* $\frac{n}{(z-n)^2}$.
(vi) polos de segundo orden en $n = 1, 2, \cdots$, *con partes singulares* $\frac{n^2}{(z-n)^2} + \frac{1}{z-n}$.
(vii) polos simples en n *y* $-n$, $n = 1, 2, \cdots$ *con* $Res(f, n) = Res(f, -n) = 1$.
(viii) polos simples en $-n, n = 1, 2, \cdots$, *con* $Res(f, -n) = (-1)^n$.
(ix) polos simples en $n = 0, -1, -2, \cdots$ *con* $Res(f, n) = 1$.
(x) polos simples en $\log n, n = 1, 2, \cdots$, *con* $Res(f, \log n) = n$.
(xi) polos dobles en $\sqrt{n}, n = 1, 2, \cdots$ *con parte singular* $\frac{1}{(z-\sqrt{n})^2}$.

Ejercicio 4.2
Prueba la validez de los siguientes desarrollos:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2}, \qquad z \in \mathbb{C} - \mathbf{Z}.$$

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + \frac{1}{2})}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C} - (\frac{1}{2} + \mathbf{Z}).$$

$$\pi \tan \pi z = -2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (n + \frac{1}{2})^2}, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbf{Z}.$$

Ejercicio 4.3
Si $\alpha \neq 0$ *y* $\frac{\beta}{\alpha} \neq \pm 1, \pm 2, \cdots$, *demuestra que:*

$$\frac{\pi}{\alpha} cotan \frac{\pi \beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{1}{n\alpha + (\alpha - \beta)})$$

y deduce que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ejercicio 4.4
Si λ_n *son las raíces de la ecuación* $\tan z = z$, *demuestra que para* $z \neq \lambda_n$:

$$\frac{z \sin z}{\sin z - z \cos z} = \frac{3}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}.$$

Ejercicio 4.5
Demuestra que:

$$\frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - (n + \frac{1}{2})\pi)^2}.$$

Ejercicio 4.6
Dado $a \in [0,1]$, prueba que para cada $z \in \mathbb{C} - 2\pi i\mathbf{Z}$:

$$\frac{e^{az}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z\cos(2\pi na) - 4\pi \sin(2\pi na)}{z^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Ejercicio 4.7
Calcula el desarrollo de Mittag-Leffler de $f(z) = \frac{e^z}{(e^z-1)^2}$.

Ejercicio 4.8 (*)
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de puntos en el plano tal que $\lim_n a_n = \infty$ y sea $\{b_n\}$ una sucesión arbitraria de números complejos.

a) Prueba que si los enteros $\{k_n\}$ pueden ser elegidos de forma que

$$(+) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{a_n})^{k_n} \frac{b_n}{a_n}$$

converja absolutamente para todo $r > 0$, entonces

$$(++) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z}{a_n})^{k_n} \frac{b_n}{z - a_n}$$

define una función meromorfa con polos en $\{a_n\}$.

b) Prueba que si $\{b_n\}$ es acotada, entonces $(+)$ converge si $k_n = n$.

c) Prueba que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n^{k+1}}$$

converge absolutamente para algún k entero, entonces $(+)$ converge par $k_n = k$.

d) Supongamos que existe $r > 0$ tal que $|a_n - a_m| \geq r$ para todo $n \neq m$. Prueba que $\sum |a_n|^{-3} < \infty$.

e) Prueba que si $(++)$ define una función meromorfa f, entonces

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n}[1 + (\frac{z}{a_n}) + \cdots + (\frac{z}{a_n})^{k_n - 1}])$$

f) Sean ω y ω' números complejos tales que $\Im(\frac{\omega'}{\omega}) \neq 0$. Prueba que

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in 2\omega\mathbf{Z} + 2\omega'\mathbf{Z}} (\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} + \frac{z}{k^2})$$

es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en los puntos $2n\omega + 2m\omega'$. Esta función recibe el nombre de función zeta de Weierstrass.

g) Sea $\varrho(z) = -\zeta'(z)$. ϱ es la función pe de Weierstrass. Prueba que:

$$\varrho(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in 2\omega\mathbf{Z} + 2\omega'\mathbf{Z}} (\frac{1}{(z-k)^2} - \frac{1}{k^2}).$$

Además ϱ es doblemente periódica con periodos 2ω y $2\omega'$.

Ejercicio 4.9 (*)
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de puntos distintos con límite ∞ y tales que $a_n \neq b_n$. Sea $S_n(z)$ la parte singular en a_n y sea p_m un entero positivo. Muestra que existe una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyos únicos polos y ceros son $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, respectivamente, con parte singular S_n en a_n y b_n un cero de multiplicidad p_n.

Ejercicio 4.10 (*)
Sea $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\lim_n a_n = \infty$. Sean también la sucesión de naturales $\{k_n\}$ y las constantes $A_n^{k_n}$, con $0 \leq k \leq k_n$. Prueba que existe una función entera tal que $f^{(k)}(a_n) = k! A_n^{(k)}$.