PRÁCTICAS DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA DE QUÍMICAS

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2002/2003

Práctica 1
Álgebra lineal

Ejercicio 1.1
Aplicando el método de reducción estudiar y resolver los sistemas:

a)

$$\begin{aligned} x+2y-z&=1\\ -3x+y-2z&=2\\ -x+5y-4z&=-2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x+4y-z&=0\\ x-y+4z&=0\\ 11x+7y+17z&=0 \end{aligned} \quad .$$

Ejercicio 1.2
Discutir por el método de reducción los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros:

a)

$$\begin{aligned} ax+3y-z&=5\\ x-(a-1)y+3z&=8\\ (a+1)x+y-2z&=-1\\ x+y+z&=6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x+y&=1\\ ay+z&=0\\ x+(a+1)y+az&=a+1 \end{aligned} \quad .$$

Ejercicio 1.3
Aplicando el método de reducción discutir y resolver (cuando tenga solución única) el sistema:

$$\begin{aligned} ax+y+z&=a\\ x+ay+z&=a^2\\ x+y+az&=a^3 \end{aligned} \quad .$$

Ejercicio 1.4
Aplicando el método de reducción hallar los valores de a, b que hacen compatible y determinado al sistema:

$$\begin{aligned} (a+1)x+2y&=a\\ x-2y&=2\\ bx-4y&=4 \end{aligned} \quad .$$

Ejercicio 1.5
Resolver por el método de reducción

$$\begin{aligned} x+y+t&=0\\ x+2y+z&=2\\ 2z+t&=1\\ z+t&=-1 \end{aligned} \quad .$$

Ejercicio 1.6
Resolver por el método de reducción

$$\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{array} \ .$$

Ejercicio 1.7
Si a, b, c son números reales distintos, discutir y resolver, aplicando el método de reducción, el sistema

$$\begin{array}{r} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{array} \ .$$

Ejercicio 1.8
Demostrar que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que dos forma, con la suma habitual y el producto por un número real, un espacio vectorial real.

Ejercicio 1.9
Probar que el conjunto de las matrices 2×3, $\mathcal{M}_{2\times3}$, forman con sus leyes habituales un espacio vectorial de dimensión 6.

Ejercicio 1.10
Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

a) $H_1 = \{(1,x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$
b) $H_2 = \{(0,x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$
c) $H_3 = \{(x,x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$
d) $H_4 = \{(x,y,z):\ x+y+z=1\}$
e) $H_5 = \{(x,y,z):\ x+y+z=0\}$.

Ejercicio 1.11
En $\mathbb{R}^3$, comprobar si los sistemas siguientes están formados por vectores linealmente independientes, hallando su relación de dependencia si la hay:

a) $S_1 = \{(1,0,-2);(-1,1,3);(1,2,0)\}$
b) $S_2 = \{(1,-1,3);(0,-1,2)\}$.

Ejercicio 1.12
Determinar los valores de a, b para que el vector $u=(1,0,a,b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1,4,-5,2)$ y $(1,2,3,-1)$.

Ejercicio 1.13
Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$(1,-1,-1);(2,0,-3);(-1,-3,3).$$

Ejercicio 1.14
Dado el subespacio $H=\{(0,x,y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

a) *Demostrar que los vectores $(0,1,2);(0,1,-1);(0,1,-3)$ generan H.*
b) *¿Forman dichos vectores una base de H?*

Ejercicio 1.15
Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, calcular $A^2-7A+7I$.

Ejercicio 1.16
Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Si $B = 2A - I$, comprobar que $B^{-1} = B$.

Ejercicio 1.17
Si A es una matriz cuadrada cualquiera, demostrar que las matrices $A + A^t$ y AA^t son siempre simétricas, mientras que $A - A^t$ es antisimétrica.

Ejercicio 1.18
a) Estudiar si, en el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ de las matrices cuadradas de orden 2, las siguientes matrices son linealmente independientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Estudiar si la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$ *pertenece al subespacio generado por las matrices anteriores.*

Ejercicio 1.19
Calcular el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.20
Sin desarrollar los siguientes determinantes, comprobar que valen cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x+y & x-y & -x+5y \\ x-z & y+z & 2x-3y-5z \\ 2x+z & 3x+2z & -5x-4z \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 1.21
Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^6.$$

Ejercicio 1.22
Usando determinantes volver a calcular los rangos de las matrices del problema 1.19.

Ejercicio 1.23
Si A es una matriz cuadrada, obtener los posibles valores de su determinante en cada uno de los casos siguientes:

a) $3A^2 - 2A = 0$

b) $AA^t = I$.

Ejercicio 1.24
Estudiar según los valores del parámetro x la invertibilidad de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, *hallando la matriz inversa cuando exista.*

Ejercicio 1.25
Calcular, si existen, las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.26
Indicar cuales de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son lineales:
a) $f(x,y) = (2x,y)$
b) $g(x,y) = (x^2,y)$
c) $h(x,y) = (2x+y, x-y)$
d) $p(x,y) = (1, x+y)$
e) $q(x,y) = (y,x)$.

Ejercicio 1.27
Dada la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) \;=\; (x+y+z, x+y-z).$$

a) Demostrar que es lineal.
b) Hallar su matriz asociada.
c) Calcular $f(1,2,3)$ y $f^{-1}(3,1)$.

Ejercicio 1.28
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
a) Hallar las ecuaciones de la aplicación lineal que A define.
b) Hallar su núcleo y rango.
c) Clasificar la aplicación lineal.

Ejercicio 1.29
Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \end{array}.$$

a) Demostrar que define un isomorfismo.
b) Hallar las ecuaciones del isomorfismo recíproco.

Ejercicio 1.30
Comprobar matricialmente lo hecho en el problema anterior.

Ejercicio 1.31
Dadas las aplicaciones

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 /\ f(x,y,z) = (x+y-z, x+2y+3z) \\ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 /\ g(x,y)) = (x+y, x-y, x, y) \end{array}.$$

Hallar las ecuaciones de la aplicación compuesta $g \circ f$.

Ejercicio 1.32
Comprobar matricialmente lo hecho en el problema anterior.

Ejercicio 1.33
Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *la aplicación tal que* $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ x+y & x-y \end{pmatrix}$.

a) *Demostrar que es lineal.*
b) *Clasificarla.*
c) *Calcular* $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.34
Analizar los parecidos y diferencias entre los espacios vectoriales $\mathcal{M}_{2\times 3}$, $\mathcal{M}_{3\times 2}$ *y* $\mathbb{R}^6$.

Ejercicio 1.35
Estudiar y resolver los sistemas del problema 1.1 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Ejercicio 1.36
Discutir los sistemas del problema 1.2 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Ejercicio 1.37
Resolver el problema 1.3 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Ejercicio 1.38
Resolver el problema 1.4 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Ejercicio 1.39
Resolver por la regla de Cramer el problema 1.5.

Ejercicio 1.40
¿Existe alguna manera más rápida de resolver el sistema del problema anterior ?

Ejercicio 1.41
Resolver matricialmente el sistema del problema 1.6.

Ejercicio 1.42
Resolver el problema 1.7 aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Ejercicio 1.43
Demostrar que, en cualquier triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman (Teorema del coseno).

Ejercicio 1.44
Demostrar que los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$H_1 = \{(x,y,z) :\ x+y+z=0\};\quad H_2 = \langle (1,1,1) \rangle$$

son ortogonales.

Ejercicio 1.45
Hallar el ángulo que forman el plano $\pi :\ 3x+4y-z=0$ *y la recta* $r :\ \begin{matrix} x-y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{matrix}$.

Ejercicio 1.46
Obtener una fórmula para la distancia de un punto a una recta usando el producto vectorial.

Ejercicio 1.47
Calcular la distancia entre el plano $\pi: \ x+y+z=0$ *y la recta* $r: \ x-1=y+1=\frac{3-z}{2}$.

Ejercicio 1.48
Calcular el área del paralelogramo determinado por los puntos $A(1,1,0); B(1,2,3); C(0,1,-1)$.

Ejercicio 1.49
Calcular el volumen del tetraedro de vértices $A(3,1,0); B(2,0,6); C(1,-3,4); D(-1,-1,6)$.

Ejercicio 1.50
Hallar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.51
Idem. para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.52
Hallar los valores de a, b, c, d *de tal modo que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

admita como vectores propios a $u=(1,0,1); v=(-1,1,0); w=(0,1,-1)$.

Ejercicio 1.53
¿Son diagonalizables las matrices de los tres problemas anteriores?

Ejercicio 1.54
Estudiar la diagonalizabilidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores de a, b.

Ejercicio 1.55
Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y hallar la matriz diagonal equivalente, así como la matriz de paso.

Ejercicio 1.56
Idem. para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.57
Comprobar los dos ejercicios anteriores con la matriz de paso.

Ejercicio 1.58

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$ *se sabe que* $\lambda_1 = 1$ *es un valor propio de* A *cuyo vector propio asociado es* $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ *. Se pide*

a) *Hallar* a, b *y* c.

b) *Hallar todos los valores y vectores propios de* A.

c) *¿Es diagonalizable* A*? Razonar la respuesta.*

d) *Calcular una matriz* P *invertible tal que* $A = PDP^{-1}$ *siendo* D *diagonal.*

e) *Calcular* $\det(A^{2002})$

Ejercicio 1.59
Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calcular la potencia* A^{10}.

Ejercicio 1.60
Hallar la potencia n-ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Práctica 2
Cálculo Diferencial

Ejercicio 2.1
Describir geométricamente el conjunto $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x^2 + y^2 < 9\}$.

Ejercicio 2.2
Describir las curvas $\rho = 4$ *y* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 2.3
Describir el conjunto $A := \{(\rho, \theta) : \rho \leq 6 \cos \theta\}$.

Ejercicio 2.4
Idem $A := \{(\rho, \theta) : \rho > 4 \operatorname{sen} \theta\}$.

Ejercicio 2.5
Describir geométricamente el conjunto $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > x^2 + y^2\}$.

Ejercicio 2.6
Idem $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z^2, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

Ejercicio 2.7
Hallar el campo de existencia y rango de la expresión $f(x, y) := \sqrt{x + y}$

Ejercicio 2.8
Idem $f(x, y) := \log(x^2 - y^2)$

Ejercicio 2.9
Idem $f(x, y) := \operatorname{arcsen}(3x - 2y)$

Ejercicio 2.10
Idem $f(x, y) := -\sqrt{y \operatorname{sen} x}$

Ejercicio 2.11
Idem $f(x, y) := \sqrt{5 - x^2 - 3y^2}$

Ejercicio 2.12
Idem $f(x, y) := \dfrac{e^x}{\cos x}$

Ejercicio 2.13
Idem $f(x, y) := \sqrt{x^2 - 5x + 6 - y}$

Ejercicio 2.14
Idem $f(x, y) := \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

Ejercicio 2.15
Idem $f(x, y) := \dfrac{\log(x^2 + y^2 - 5)}{x}$

Ejercicio 2.16
Idem $f(x,y) := \sqrt[4]{xy}$

Ejercicio 2.17
Hallar las curvas de nivel y esbozar la gráfica de $f(x,y) := x+y$

Ejercicio 2.18
Idem $f(x,y) := x^2 + 4y^2$

Ejercicio 2.19
Idem $f(x,y) := xy$

Ejercicio 2.20
Idem $f(x,y) := \sqrt{9-3x^2-y^2}$

Ejercicio 2.21
Idem $f(x,y) := x^2 - y^2$

Ejercicio 2.22
Idem $f(x,y) := e^{-x}$

Ejercicio 2.23
Idem $f(x,y) := e^{1-x^2-y^2}$

Ejercicio 2.24
Idem $f(x,y) := \dfrac{x}{x^2+y^2}$

Ejercicio 2.25
Idem $f(x,y) := \log(x-y)$

Ejercicio 2.26
Idem $f(x,y) := e^{xy}$

Ejercicio 2.27
Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:
i) $f(x,y) = e^{xy}$
ii) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$
iii) $f(u,v,w) = \log(u^2+vw-v^2)$
iv) $f(\rho,\theta) = \rho^3 cos\theta$
v)$f(x,y,z) = sen(x+ycosz)$.

Ejercicio 2.28
Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones en el punto que se indica:
i) $f(x,y,z) = 2x\log y - z^2y^2$ *en* $(1,1,0)$.
ii) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *en* $(1,-1,1)$.
iii) $f(x,y) = x^2 + \log\sqrt{xy}$ *en* $(2,1)$.
iv) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{xy}$ *en* $(5,\sqrt{2})$.
v) $f(x,y) = \log(x^2+2y+1) + \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$ *en* $(1,1)$.

Ejercicio 2.29
Sean $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$ y $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$. Calcular la matriz jacobiana de fog en el punto $(1,1)$.

Ejercicio 2.30
La temperatura en un punto (x,y,z) viene dada por una función $T(x,y,z)$. Una partícula viaja por la hélice $\sigma(t) = (cost, sent, t)$ y denotamos por $f(t)$ la temperatura de la partícula en el instante t. Calcular $f'(\frac{\pi}{2})$ sabiendo que $\bigtriangledown T(0,1,\frac{\pi}{2}) = (2,1,3)$.

Ejercicio 2.31
Calcular las derivadas parciales de $h(x,y) = f(x \operatorname{sen} y, x, e^y)$ en el punto $(1,0)$ sabiendo que $\bigtriangledown f(x,y,z) = (2x+y, x+z, y)$.

Ejercicio 2.32
Dada la función $f(u,v) = g(u-v, u+v, 2u)$ se pide calcular las derivadas parciales de f en términos de las derivadas parciales de g.

Ejercicio 2.33
Suponemos $f(\dfrac{y}{x}, \dfrac{g(x,y)}{x}) = 0$ para cualquier valor de x e y. Si $D_2 f(x,y) \neq 0$ en todos los puntos, se pide probar que $xD_1 g(x,y) + yD_2 g(x,y) = g(x,y)$.

Ejercicio 2.34
Sabemos que $F(x,y,z)$ y $g(x,y)$ son dos funciones de clase C^1 que cumplen que $F(x,y,g(x,y)) = 0$ en todos los puntos (x,y) del plano. Calcular el vector gradiente de g en el punto $(1,0)$ suponiendo conocido que $g(1,0) = 0$ y $\bigtriangledown F(1,0,0) = (-1,1,2)$.

Ejercicio 2.35
Sean $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ y $g(u,v,w) = (uw, sen(v+w))$. Calcula la matriz jacobiana de la función $g \circ f$ en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 2.36
Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ siendo $u = x^2 - xy$, $x = s\cos t$, $y = t \operatorname{sen} s$.

Ejercicio 2.37
Transformar la expresión $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x}$ mediante un cambio a coordenadas polares.

Ejercicio 2.38
Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ en un punto $(x,y) \neq (0,0)$ en la dirección hacia el origen.

Ejercicio 2.39
La temperatura de cada uno de los puntos de una placa cuadrada está determinada por la función $T(x,y) = (x-1)^3(y-2)^2$. Se desea conocer cuales son, en el punto $(0,0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

Ejercicio 2.40
Denotamos por $z = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x,y). ¿En qué dirección desde $(1,0)$ hay que comenzar a caminar para escalar lo más rápidamente posible?.

Ejercicio 2.41
Supongamos que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico $z = 1 - x^2 - 2y^2$, donde x, y son las coordenadas este-oeste y z es la altitud sobre el nivel del mar. Si se suelta una canica en el punto $(1, 1, -2)$ ¿en qué direción comenzará a rodar?.

Ejercicio 2.42
Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad viene dado por $T(x, y, z) = 2x^2 - 4y^2 + \dfrac{1}{1+z^2}$. Si este insecto está en $(-1, 2, 1)$, averigüar en qué dirección debe moverse para que la toxicidad disminuya lo más rápido posible.

Ejercicio 2.43
Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = 2xy^2 + x^2y$ en el punto $(1, -1, 1)$

Ejercicio 2.44
Idem $z = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ *en* $(1, 1, 2)$

Ejercicio 2.45
Idem $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ *en* $(1, -1, 4)$

Ejercicio 2.46
Idem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *en* $(0, 0, 1)$

Ejercicio 2.47
Idem $xy^2 + 3x - z^2 = 4$ *en* $(2, 1, -2)$

Ejercicio 2.48
Idem $y = x(2z - 1)$ *en* $(4, 4, 1)$

Ejercicio 2.49
Idem $xyz = 12$ *en* $(2, -2, -3)$

Ejercicio 2.50
Idem $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *en* $(5, 12, 13)$

Ejercicio 2.51
Idem $xy - z = 0$ *en* $(-2, -3, 6)$

Ejercicio 2.52
Idem $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *en* $(1, 2, 2)$

Ejercicio 2.53
Encuentra el plano tangente a la gráfica de las siguientes funciones:
i) $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y$ *en el punto* $(1, -1, 1)$.
ii) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ *en el punto* $(1, 1, 2)$.

Ejercicio 2.54
Hallar todos los puntos de la superficie $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ en los que el plano tangente es horizontal.

Ejercicio 2.55
Demostrar que todas las pirámides formadas por los planos coordenados y un plano tangente a la superficie $xyz = 8$ poseen el mismo volumen.

Ejercicio 2.56
El elipsoide $x^2 + y^3 + 3z^2 = 25$ y la curva $\sigma(t) = (2t, \frac{3}{t}, -2t^2)$ se cortan en el punto $(2, 3, -2)$. Calcular el ángulo de intersección.

Ejercicio 2.57
Si en la ecuación $xy = \log \frac{x}{y}$ se puede despejar $y = \varphi(x)$, siendo φ una función de de clase C^∞ definida en un entorno de $x_0 = \sqrt{e}$ tal que $\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, comprobar que φ tiene un máximo local en x_0.

Ejercicio 2.58
Supongamos que el sistema:

$$\begin{array}{l} x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi \\ x^2 + y^2 - xy = \pi^2 \end{array}$$

define implícitamente a Y y z como funciones de x, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ambas de clase C^∞ y definidas en un entorno de 0, tales que $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = \pi$. Calcular $f_1'(0) = 0$, $f_2'(0) = \pi$.

Ejercicio 2.59
Si $f(x, y) = \exp x \cos y$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$.

Ejercicio 2.60
Si $f(x, y) = 3x^2 + 5xy - 5y^2$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2)$.

Ejercicio 2.61
Si $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2) - \cos(x^2 - y^2)$, calcular $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0)$.

Ejercicio 2.62
Transformar la expresión $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en coordenadas polares.

Ejercicio 2.63
Transformar la expresión $z\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en coordenadas cilíndricas.

Ejercicio 2.64
Dada $z = x^2 + y^2 + \frac{y}{x}$, donde $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$, calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Ejercicio 2.65
Sea $f(x) = g(\| x \|)$, $x \in R^n$, siendo g una función de una variable. Calcular $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

Ejercicio 2.66
Calcular el polinomio de Taylor de grado n en el origen de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

Ejercicio 2.67
Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función $f(x, y) = e^{x+y}$.

Ejercicio 2.68
Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 para $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ en el $(0, 0)$.

Ejercicio 2.69
Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en el origen de la función $f(x, y) = e^{xy}\,\mathrm{sen}\,(x + y)$.

Ejercicio 2.70
Si la ecuación $\mathrm{sen}\,(yz) + \mathrm{sen}\,(xz) + \mathrm{sen}\,(xy) = 0$ *admite una solución* $z = \varphi(x, y)$ *de clase* C^1 *en un entorno de* $(\pi, 0)$ *que cumple* $\varphi(\pi, 0) = 1$*, calcular el polinomio de Taylor de primer grado de* φ *alrededor de* $(\pi, 0)$.

Ejercicio 2.71
Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:
(1) $f(x, y) = xye^{x+2y}$
(2) $f(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$
(3) $f(x, y) = xy^2(1 - x - y)$
(4) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1 + t^4}dt.$

Ejercicio 2.72
Hallar tres números cuya suma sea 30 y su producto máximo.

Ejercicio 2.73
Calcular la distancia del punto $(2, 3, 1)$ *al plano* $x + y + z = 3$.

Ejercicio 2.74
Calcular el máximo valor de la función $f(x, y) = 4xy$ *en la parte de la elipse* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ *que se encuentra en el primer cuadrante.*

Ejercicio 2.75
Calcular la mínima distancia del punto $(0, 3)$ *a la parábola* $x^2 - 4y = 0$.

Ejercicio 2.76
Determinar los extremos de la función $f(x, y) = 2x^2-3y^2-2x$ *en el conjunto* $K := \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 5\}$.

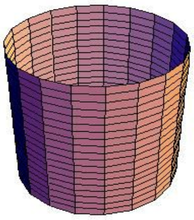
Ejercicio 2.77
La temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ *es* $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$. *Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de la esfera con el plano* $x - z = 0$.

Ejercicio 2.78
El material de la base de una caja abierta cuesta 1,5 veces lo que cuesta el de los laterales. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse con un coste fijo C.

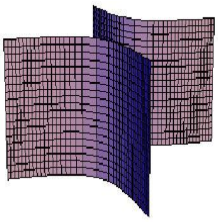
Ejercicio 2.79
Determinar los extremos de la función $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy$ *en el conjunto* $K := \{(x, y) : y - x^2 \geq -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

Ejercicio 2.80
Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2y^3(1-x-y)$ *en el conjunto* $K := \{(x, y) : | x | + | y | \leq 1\}$.

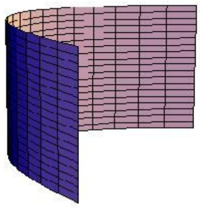
Cuádricas en $\mathbb{R}^3$



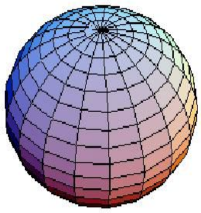
Cilindro elíptico
$a_1x^2 + a_2y^2 = 1$
Imaginario
$a_1x^2 + a_2y^2 = -1$



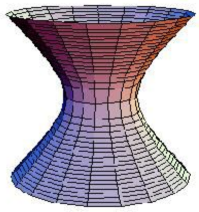
Cilindro hiperbólico
$a_1x^2 - a_2y^2 = 1$



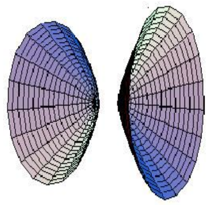
Cilindro parabólico
$a_1x^2 = 2y$



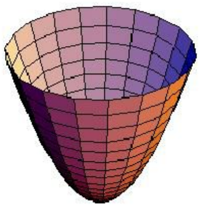
Elipsoide
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$



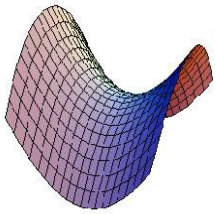
Hiperboloide de una hoja
$a_1x^2 + a_2y^2 - a_3z^2 = 1$



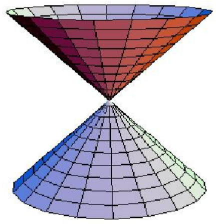
Hiperboloide de dos hojas
$a_1x^2 - a_2y^2 - a_3z^2 = 1$



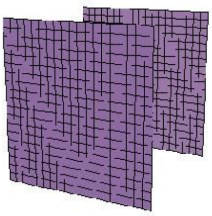
Paraboloide elíptico
$a_1x^2 + a_2y^2 = 2z$



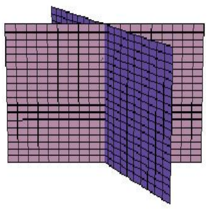
Paraboloide hiperbólico
$a_1x^2 - a_2y^2 = 2z$



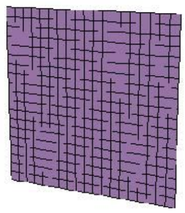
Cono
$a_1x^2 + a_2y^2 - a_3z^2 = 0$
Imaginario
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 0$



Planos paralelos
$a_1x^2 = 1$
Imaginarios
$a_1x^2 = -1$



Planos secantes
$a_1x^2 - a_2y^2 = 0$
Imaginarios
$a_1x^2 + a_2y^2 = 0$



Plano doble
$x^2 = 0$

$a_j > 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Práctica 3
Cálculo Integral

Ejercicio 3.1
Calcular, si es posible, las integrales iteradas de la función $f(x,y) := e^{x+y}$ *en el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(2,2)$ *y* $(4,0)$

Ejercicio 3.2
Idem $f(x,y) := \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *en la región del primer cuadrante limitada por su bisectriz y la parábola* $y = x^2$

Ejercicio 3.3
Idem $f(x,y) := x$ *en la región, con ordenadas positivas, limitada por las circunferencias centradas en el origen y radio* 2 *y* 3 *respectívamente*

Ejercicio 3.4
Idem $f(x,y) := x^2 e^y$ *en la región limitada por las curvas* $y^2 = x$, $y^2 = -x$ *e* $y = 1$

Ejercicio 3.5
Idem $f(x,y) := y$ *en la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2$ *y la parábola* $y = x^2$

Ejercicio 3.6
Invertir el orden de integración en las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\; dydx,$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{6y-y^2}} f(x,y)\; dxdy,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\; dydx,$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{x^2+2} f(x,y)\; dydx,$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{9-(x-2)^2}} f(x,y)\; dydx + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-(x+2)^2}} f(x,y)\; dydx,$

Ejercicio 3.7
Escribir una integral iterada asociada a la región del primer octante en $\mathbb{R}^3$ *limitada por los cilindros* $x^2 + y^2 = 4$ *y* $x^2 + z^2 = 4$

Ejercicio 3.8
Idem para la región limitada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$

Ejercicio 3.9
Idem para la región limitada por $x^2 + y^2 = 6z$ *y* $z = 6$

Ejercicio 3.10
Idem para $A := \{(x,y,z) \ : \ 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$

Ejercicio 3.11
Idem para la región limitada por la esfera de centro $(0,0,0)$ *y radio* 6 *y el cilindro vertical de centro* $(0,3,0)$ *y radio* 3.

Ejercicio 3.12
Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ *con* $A := \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ x^2 \le y \le 2x^2\}$,

(b) $\displaystyle\iint_A |\cos(x+y)|\ dxdy$ *con* $A := [0,\pi] \times [0,\pi]$,

(c) $\displaystyle\iint_A \operatorname{sen}(x+y)\ dxdy$ *con* A *la región acotada limitada por las rectas* $x = 0$, $y = 3\pi$ *e* $y = x$,

(d) $\displaystyle\iint_A xy\ |\operatorname{sen}(x^2+y^2)|\ dxdy$ *con* $A := [0,\sqrt{\pi}] \times [0,\sqrt{2\pi}]$,

(e) $\displaystyle\iiint_A (x+y+z)x^2y^2z^2\ dxdydz$ *siendo* A *la región del primer octante limitada por el plano* $x+y+z=1$.

Ejercicio 3.13
Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$,

(b) $\displaystyle\iint_A x^2y^2\ dxdy$, *siendo* A *la región acotada del primer cuadrante limitada por las hipérbolas* $xy = 1$, $xy = 2$ *y las rectas* $y = x$ *e* $y = 4x$,

(c) $\displaystyle\iint_A x\ dxdy$, *siendo* $A := \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 2x\}$,

(d) $\displaystyle\iint_A \frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)}{4xy^2}\ dxdy$, *siendo* A *la región comprendida entre las circunferencias* $x^2+y^2-4x = 0$, $x^2+y^2-2x = 0$ *y las parábolas* $y = x^2$ *e* $2y = x^2$,

(e) $\displaystyle\iint_A \log(x^2+y^2)\ dxdy$, *siendo* A *la región del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias de centro el origen y radio* 3 *y* 4,

Ejercicio 3.14
Aplicando la fórmula de cambio de variable calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iiint_A (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$, *siendo* A *la esfera de centro el origen y radio unidad,*

(b) $\displaystyle\iiint_A z\ dxdydz$, *siendo* A *la parte del primer octante limitada por el plano* $z = 1$ *y el paraboloide* $z = x^2+y^2$,

(c) $\displaystyle\iiint_A \frac{1+x^3}{x}\ dxdydz$, *siendo* $A := \{(x,y,z) \ : \ x^2 \le 2y \le 4x^2 \ , \ y^2 \le z \le 3y^2 \ , \ 1 \le xy \le 2\}$,

(d) $\displaystyle\iiint_A \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, *siendo* A *la región descrita por la desigualdad* $x^2+y^2+z^2 \geq 1$,

(e) $\displaystyle\iiint_A (z+2)(x^2+y^2+1)\ dxdydz$, *siendo* A *la región limitada por las superficies* $z=0$, $z=4$ *y* $x^2+y^2=4$

Ejercicio 3.15
Calcular el área limitada por las rectas $y=x$, $y=4x$, $x+4y=1$, $x+4y=4$

Ejercicio 3.16
Calcular el volumen del sólido descrito por las desigualdades $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $x^2+y^2 \leq 3y$

Ejercicio 3.17
Calcular el área de una elipse y el volumen de un elipsoide.

Ejercicio 3.18
Calcular, por integración, el volumen de un cilindro y un cono, ambos de altura h *y radio de la base* r.

Ejercicio 3.19
Calcular el volumen del sólido que resulta al perforar a través de una esfera de radio 2 *unidades un túnel cilíndrico de diámetro* 1

Ejercicio 3.20
Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z=x^3y$ *e inferiormente por el triángulo de vertices* $(0,0,0)$, $(2,0,0)$ *y* $(0,1,0)$

Ejercicio 3.21
Aplicando el principio de Cavalieri calcular el área de un círculo y el volumen de una esfera

Ejercicio 3.22
Idem el volumen limitado por $z=4-x^2$ *y los planos* $x=0$, $y=6$, $y=0$, $z=0$

Ejercicio 3.23
Idem el volumen del sólido que genera la curva $y=2+\operatorname{sen} x$ *al girar alrededor del eje de abscisas entre* $x=0$ *y* $x=2\pi$

Ejercicio 3.24
Idem el volumen de $A := \{(x,y,z)\ :\ 0 \leq z \leq 2-x^2-y^2\}$

Ejercicio 3.25
Idem el volumen de $A := \{(x,y,z)\ :\ x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

Ejercicio 3.26
Calcular la longitud de la curva $\gamma(t) := (t,t^2)$ *si* $t \in [0,5]$

Ejercicio 3.27
Idem $\gamma(t) := (t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$ *si* $t \in [0,2\pi]$

Ejercicio 3.28
Idem $\gamma(t) := (|\ t\ |, |\ t-\frac{1}{2}\ |)$ *si* $t \in [-1,1]$

Ejercicio 3.29
Idem $\gamma(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *si* $t \in [0, 2\pi]$

Ejercicio 3.30
Deducir la fórmula para calcular la longitud de la gráfica de una función real f, de clase C^1, definida sobre un intervalo $[a, b]$

Ejercicio 3.31
Calcular la longitud de las siguientes curvas en el plano:
(a)$\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
(b) $\gamma(t) = (a \cos^3 \frac{t\pi}{3}, a \operatorname{sen}^3 \frac{t\pi}{3})$, $t \in [0, 1]$.
(c) $\gamma(t) = (\exp t \operatorname{sen} t, \exp t \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 3.32
Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2 dx + x^2 dy}{1 + x^2 + y^2}$, siendo γ el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejercicio 3.33
Calcularla integral $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, siendo γ la gráfica de $y = x^2$ recorrida de $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$.

Ejercicio 3.34
Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, siendo γ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radia $a > 0$ orientada positivamente.

Ejercicio 3.35
Hallar el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ al mover la partícula en sentido contrario a las agujas del reloj recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$, $y = a$ $(a > 0)$.

Ejercicio 3.36
Sea el campo de fuerzas $F(x, y) = (x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, y + \dfrac{x}{x^2 + y^2})$. Calcular $\int_\gamma F$, siendo γ bien el rectángulo de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ bien la circunferencia unidad. Estudiar si F tiene función potencial en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 3.37
Probar que los siguientes campos de fuerzas son conservativos y calcular el correspondiente potencial:
(a) $F(x, y) = (2yx + 3, x^2 + 7y)$.
(b) $F(x, y, z) = (y^3 z^2 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2 y}, 3xy^2 z^2 + 3 \exp y - \frac{8}{xy^2}, 2xy^3 z)$.
(c) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.
(d) $F(x, y, z) = (1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, \dfrac{-xy}{z^2})$.

Ejercicio 3.38
Calcular $\int_\gamma F$ siendo $F(x, y, z) = (yz \cos xz, \operatorname{sen} xz, xy \cos xz)$ y γ una curva con punto inicial $(0, 1, 0)$ y punto final $(1, 1, \dfrac{\pi}{2})$.

Ejercicio 3.39
Sea el campo de fuerzas $F(x,y,z) = \dfrac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$ definido en $D = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. Dados P_1 y P_2 puntos arbitrarios de D y γ una curva en D que una los puntos P_1 y P_2, probar que $\int_\gamma F$ no depende de γ. Calcular $\int_\gamma F$ siendo $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^4 t, t^2)$.

Ejercicio 3.40
Sea $F(x,y) = (-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}) = (P,Q)$. (a) Probar que salvo en $(0,0)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. (b) Calcular $\int_\gamma F$, siendo $\gamma(t) = (\cos^9 t, \operatorname{sen}^9 t)$, $t \in [0,2\pi]$.

Ejercicio 3.41
Calcular el área encerrada por una elipse utilizando el teorema de Green.

Ejercicio 3.42
Aplicando el teorema de Green calcular $\displaystyle\int_\gamma (y+3x)dx + (9y-x)dy$ siendo γ la elipse $4x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.

Ejercicio 3.43
Aplicando el teorema de Green calcular $\displaystyle\iint_D \frac{2ay - x^2 - y^2}{y} dxdy$ siendo D el recinto encerrado por la curva $x^2 + y^2 = 2ay$ e $y \geq a$ $(a > 0)$.

Ejercicio 3.44
Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie $x = \cos v \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u$, $z = \cos u$, para $u \in [0,\pi]$, $v \in [0,2\pi]$. Identificar la superficie.

Ejercicio 3.45
Idem para la superficie $x = \operatorname{sen} v$, $y = u$, $z = cosv$, donde $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq u \leq 3$.

Ejercicio 3.46
Encontrar una parametrización del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y calcular el área de la porción de cono comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

Ejercicio 3.47
Demostrar que el área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

Ejercicio 3.48
Calcular el área de la porción de la superficie $2z = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b}$ que es interior al cilindro $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 3.49
Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

Ejercicio 3.50
Calcular el área de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que es interior a $x^2 + y^2 = ay$.

Ejercicio 3.51
Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y se encuentra en el semiespacio superior $(z \geq 0)$. Parametrizar la superficie S. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1/2, 1/2, \sqrt{7/2})$. Calcular el área de S.

Ejercicio 3.52
Calcular $\iint_S f ds$, siendo S la porción del paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ situada en el semiespacio superior, y
(a) $f(x, y, z) = 1$,
(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$,
(c) $f(x, y, z) = 3z$.

Ejercicio 3.53
Sea S la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ superior al plano $z = 1$. Parametrizar S y calcular el flujo de $F(x, y, z) = (yz, xz, 1)$ a través de S.

Ejercicio 3.54
Supongamos que la temperatura de un punto del espacio viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Si el calor fluye según el campo vectorial $F = -\bigtriangledown T$, calcular el flujo de calor a través de la superficie $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

Ejercicio 3.55
Con el mismo campo vectorial que en el problema anterior, calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad si la temperatura es $T(x, y, z) = x$.

Ejercicio 3.56
La lluvia fuerte puede considerarse como un fluído uniforme que fluye verticalmente hacia abajo según el campo vectorial $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2+y^2 \leq 1$.

Supongamos que debido al fuerte viento, la lluvia cae de manera que forma un ángulo de 45^0 con la vertical, y se describe por el campo vectorial $F(x, y, z) = -(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Calcular el flujo a través del cono.

Ejercicio 3.57
Calcular $\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz$, donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

Ejercicio 3.58
Hallar $\int_S \bigtriangledown \times F dS$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $F(x, y, z) = (\operatorname{sen} xy, e^y, -yz)$.

Ejercicio 3.59
Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$ y el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ejercicio 3.60
Sean $F(x, y, z) = (x^2, 2xy + x, z)$, C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ dentro del plano $z = 0$.
(a) Determinar el flujo de F hacia afuera de S.
(b) Verificar el teorema de Stokes para este caso.

Práctica 4
Ecuaciones Diferenciales

Ejercicio 4.1

Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:

(a) $y = ax^2$

(b) *Circunferencias centradas en un punto del eje de abcisas y que pasan por el origen de coordenadas.*

(c) $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

(d) *Elipses centradas en el origen con semiejes a y b.*

(e) $y = ax + \dfrac{b}{x} + c$

Ejercicio 4.2

Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales según su orden y comprobar que la función que se ofrece es una solución.

(a)	$1 + y^2 + y^2y' = 0,$	$x + y = \arctan y$
(b)	$y' - y\tan x = 0,$	$y = 5\sec x$
(c)	$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0,$	$y = \sqrt{x^2 - x}$
(d)	$y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2,$	$x = y\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\ dt$
(e)	$(\dfrac{y''}{y'})^2 + 1 = \dfrac{1}{(y''')^2},$	$y = \operatorname{sen} x$

Ejercicio 4.3

Comprobar que las ecuaciones diferenciales siguientes tienen como solución general la que se plantea y calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales dadas:

(a)	$y'' + y = 0,$	$y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$	$y(0) = 1; y'(0) = 0$
(b)	$y' + 2y = 0,$	$y = Ae^{-2x}$	$y(0) = 3$
(c)	$xy'' + y' = 0,$	$y = A + B\log x$	$y(2) = 0; y'(2) = \frac{1}{2}$
(d)	$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0,$	$y = Ax + Bx^3$	$y(2) = 0; y'(2) = 4$
(e)	$4yy' - x = 0,$	$4y^2 - x^2 = A$	$y(0) = 0$

Ejercicio 4.4

Integrar las ecuaciones diferenciales con variables separables:

(a) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$

(b) $4xy' - y = x^2y'$

(c) $x\cos x dx + y^3 \log y dy = 0$

(d) $3e^x \tan y dx + \sec^2 y\sqrt{1 - e^{2x}}dy = 0$

(e) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$

Ejercicio 4.5

Integrar las ecuaciones diferenciales homogéneas:

(a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

(b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

(c) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$

(d) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$
(e) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$

Ejercicio 4.6
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales reduciéndolas, por un cambio, a homogéneas:
(a) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$
(b) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
(c) $(3x + y - 2)dx + (x - 1)dy = 0$
(d) $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
(e) $4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0$

Ejercicio 4.7
Integrar las ecuaciones diferenciales exactas:
(a) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$
(b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
(c) $(2xy^2 + 3y - 1)dx + (2x^2y + 3x - 1)dy$
(d) $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$
(e) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

Ejercicio 4.8
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando un factor integrante dependiente de una sola variable:
(a) $2xy \log y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})dy = 0$
(b) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$
(c) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$
(d) $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$
(e) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

Ejercicio 4.9
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:
(a) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$
(b) $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$
(c) $xdy + 2ydx = (x - 2)e^x dx$
(d) $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$
(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \cos y + \sin 2y}$

Ejercicio 4.10
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Bernouilli:
(a) $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$
(b) $y' + 3x^2y = x^2y^3$
(c) $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$
(d) $yy' - 2y^2 = e^x$
(e) $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

Ejercicio 4.11
Calcular y dibujar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

(a) Las parábolas $y = Cx^2$

(b) Las circunferencias centradas en el origen.

(c) Las circunferencias con centro en el eje de abcisas y que son tangentes al eje de ordenadas en el origen.

(d) Las hipérbolas con asíntotas los ejes de coordenadas.

(e) Las parábolas $y^2 = 4C(x + C)$.

Ejercicio 4.12
Hallar las curvas que cumplan:

(a) La pendiente de la tangente en todo punto es el doble de la de la recta que une dicho punto con el origen.

(b) La subtangente es constante.

(c) La relación entre la abcisa y la subnormal en cada punto es constante.

(d) El volumen engendrado al girar el arco de $y = f(x)$ *entre* 0 *y* x *alrededor del eje de abcisas es igual al del cilindro engendrado por el rectángulo de base* x *y altura* $\frac{f(x)}{2}$.

(e) El área comprendida entre ellas, el eje de abcisas y dos verticales, una fija y otra constante, es igual a la longitud del arco de la curva comprendida entre dichas abcisas.

Ejercicio 4.13
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(c) $y'' - 3y' + 2y = 2x$

(d) $y'' + y = x^3$

(e) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

Ejercicio 4.14
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior:

(a) $y''' - 2y'' - 3y' = -6x - 7$

(b) $y^{IV} - y = 15e^{2x}$

(c) $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

(d) $y^{IV} - 10y''' + 37y'' - 60y' + 36y = 36x^4 - 204x^3 + 264x^2 - 18x - 36$

(e) $y^{IV} - 6y''' + 16y'' - 18y' + 7y = 8\,\mathrm{sen}\,x + 12\cos x$

Ejercicio 4.15
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = \dfrac{2x\cos y - y^2\cos x}{x^2\,\mathrm{sen}\,y + 2y\,\mathrm{sen}\,x}$

(b) $xy' = y + x^2\,\mathrm{sen}\,x$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 5\,\mathrm{sen}\,2x - 12\cos 2x$

(d) $(x^4\log x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$

(e) $(x^2 + 4y^2)dx - 3xydy = 0$

Ejercicio 4.16
Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$
(b) $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$
(c) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
(d) $y'' + 3y' = 3$
(e) $y' + 2xy + xy^4 = 0$

Ejercicio 4.17
Calcular, mediante el desarrollo en series de potencias, las soluciones de las ecuaciones diferenciales:
(a) $y' = x^2 + y$
(b) $y' = x^2 - 4x + y + 1$, con $y(2) = 3$
(c) $y'' - xy' - 2y = 0$
(d) $y'' + xy' + y = 0$
(e) $y'' - xy' = 0$

Ejercicio 4.18
Integrar, usando la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a)	$y'' - 5y' + 4y = 4,$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$
(b)	$y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x},$	$y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$
(c)	$y'' + 4y = 2\cos^2 x,$	$y(0) = y'(0) = 0.$
(d)	$y'' - 3y' + 2y = e^x,$	$y(0) = y'(0) = 0.$
(e)	$y''' - y'' = 0,$	$y(0) = 1;\ y'(0) = 3;\ y''(0) = 2.$

Ejercicio 4.19
Integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} + z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + 4y = 0 \end{array}\right\}$ (b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dt^2} = x \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = y \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \operatorname{sen} x \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{array}\right\}$ (d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{array}\right\}$

(e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{array}\right\}$

Ejercicio 4.20
Calcular, usando la transformada de Laplace, las soluciones particulares que se proponen de los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes (las derivadas lo son respecto de t):

(a) $\left.\begin{array}{l} x' + 4y + 2x = 4t + 1 \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2 \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 0$

(b) $\left.\begin{array}{l} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 1$

(c) $\left.\begin{array}{l} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{array}\right\} x(0) = 2; y(0) = 3$

(d) $\left.\begin{array}{l} x' + y - 2x = 0 \\ y' + x - 2y = -5e^t \operatorname{sen} t \end{array}\right\} x(0) = 2; y(0) = 3$

(e) $\left.\begin{array}{l} x' = -7x + y + 5 \\ y' = -2x - 5y - 37t \end{array}\right\} x(0) = y(0) = 0$

Transformada de Laplace

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

(1) Linealidad $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$

(2) Semejanza $\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \dfrac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{s}{\lambda}\right)$

(3) Desplazamiento $\mathcal{L}(e^{\lambda x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f)(s-\lambda)$

(4) $\mathcal{L}(x^n f(x))(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$

(5) Derivación

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)\\
&\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)\\
&\mathcal{L}(f''')(s) = s^3\mathcal{L}(f)(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\mathcal{L}(f^{IV})(s) = s^4\mathcal{L}(f)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

(6) Transformadas de las funciones más corrientes

$\boxed{\text{I}}$ $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$

$\boxed{\text{II}}$ $\mathcal{L}(x^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{III}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$

$\boxed{\text{IV}}$ $\mathcal{L}(\cos\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{V}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{VI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{VIII}}$ $\mathcal{L}(x^n\mathrm{e}^{\alpha x})(s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IX}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{X}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

$\boxed{\text{XI}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{ch}\beta x)(s) = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XII}}$ $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{sh}\beta x)(s) = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$

$\boxed{\text{XIII}}$ $\mathcal{L}(x\cos\beta x)(s) = \dfrac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$

$\boxed{\text{XIV}}$ $\mathcal{L}(x\mathrm{sen}\beta x)(s) = \dfrac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$