REQUISITOS BÁSICOS
Matemáticas (12907)

Licenciatura en Químicas
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Rafael Crespo

curso 2002/2003

0 Preliminares

Las notas que siguen contienen, con diferente precisión, temas introductorios a la asignatura de Matemáticas (código 12907) de la Licenciatura de Ciencias Químicas en la Universitat de València. Rigurosamente hablando son temas que cualquier alumno que se matricule en el primer curso de esta titulación (y en el fondo de cualquiera de las de Ciencias Básicas o Ingenierías) debería conocer para afrontar el curso con una cierta comodidad. El cada vez mayor abismo que separa los contenidos y el nivel que un estudiante recibe en el Bachiller y los que los planes de estudio universitarios precisan hace necesario fijar algunos conceptos o, al menos, incitar al alumno a recordarlos. Ahora bien, la realidad es tozuda y no podemos permanecer ajenos a ella. No todos los estudiantes llegan con la misma preparación y la enseñanza en Secundaria y Bachiller favorece el olvido de lo aprendido. Para paliarlo y equilibrar el nivel general optaremos por una doble vía: por un lado listaremos una serie de aspectos que servirán de guía, y por otro desarrollaremos temas que quizás convenga reforzar en el programa en sí.

Es misión del profesor, a la vista del grupo que le corresponda, elegir la profundidad o la ligereza con la que pasará sobre uno u otro. No se trata de un tema más, sino de cuestiones que irán apareciendo durante el curso. No se busque en ellas todo cuanto se debe decir al respecto sino unos contenidos de mínimos.

Es misión imprescindible del alumno medir sus fuerzas, leyendo desde el primer día estas notas, comparandolas con su nivel de conocimientos y con lo que haya aprendido en Bachiller e incluso (muy recomendable) releer los textos o apuntes que utilizó en su día. Como una ligera ayuda se listan ejercicios de autocomprobación al final de cada sección. Es importantísimo intentarlos y, caso de encontrar dificultades, paliarlas cuanto antes. El más mínimo retraso repecutirá negativamente en su rendimiento.

Mención aparte corresponde a aquellos alumnos que no hayan cursado la Asignatura de Matemáticas en Segundo de Bachiller (o en el ya casi desaparecido COU). Es un gravísimo error aunque la ley o la estrategia para optar a una mejor nota de Selectividad lo permiten. Las Matemáticas son el lenguaje de la ciencia y como tal están presentes cada vez más en todos y cada uno de los procesos científicos. Cabe citar que la Biología, la llamada a ser la ciencia del siglo XXI, empieza a despuntar gracias a su interrrelación con la Matemática. La Física y la Química ya ha mucho que comenzaron ese recorrido. Esos estudiantes, más que el resto, deben llenar rápidamente la laguna creada por esa decisión para lo que pueden servir estas hojas y cualquier texto del curso eludido.

1 Conjuntos y aplicaciones

El concepto de *conjunto* es innato en la mente y lo entenderemos como una reunión de elementos. Un conjunto se puede expresar por *extensión* explicitando sus elementos, por ejemplo, $A := \{a, e, i, o, u\}$, o por *comprensión* citando las propiedades que lo caracterizan, así A es el conjunto de las vocales en castellano. Para citar que un elemento está en un conjunto usaremos el símbolo $\in$, *pertenece*, y para citar que no está su negación $\notin$, *no pertenece*. En nuestro ejemplo

$$e \in A \quad , \quad m \notin A$$

Las operaciones básicas con conjuntos son:

Inclusión: denotada por $A \subset B$ nos indica que todo elemento de A lo es a su vez de B, i.e. $x \in A \Rightarrow x \in B$. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o bien que éste es un *superconjunto* de aquél.

Unión: denotada por $\cup$ nos construye, a partir de dos conjuntos un nuevo conjunto formado por los elementos que están o bien en uno o bien en otro conjunto. Así

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}$$

Intersección: denotada por $\cap$ nos construye, a partir de dos conjuntos un nuevo conjunto formado por los elementos que están uno y en otro conjunto. Es decir los elementos comunes. Así

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Si dos conjuntos no tienen elementos en común se llaman *disjuntos* y escribimos $A \cap B = \emptyset$.

Producto cartesiano: Dados dos conjuntos A y B se denota por $A \times B$ el conjunto de pares (a, b) ordenados en el que el primer elemento está en A y el segundo en B.

Aplicaciones

Otro concepto importante en la teoría de conjuntos es el de *aplicación*. Daremos una definición precisa pero mejorando su comprensión con la notación práctica: denominamos *correspondencia* entre dos conjuntos A y B a un subonjunto de su producto cartesiano. El nombre se debe a que, en el fondo, lo que hacemos al tomar un par (a, b) es hacer "corresponder" a un elemento de A, el a, uno de B, el b. A b se le llama *imagen* de a, y a a *antiimagen* de b. Una aplicación es una correspondencia en la que todos los elementos de A tienen imagen y ésta es única. La forma práctica de denotar una aplicación es escribiendo

$$f : A \longrightarrow B$$

Si no hay peligro de confusión hablaremos de la aplicación f. En ese caso si el par (a, b) es de la aplicación escribimos $f(a) = b$. Al conjunto de todas las imágenes de los elementos de A se le llama *conjunto imagen* y se denota por $Im(f)$ ó $f(A)$. Distinguiremos algunos tipos de aplicaciones, a saber

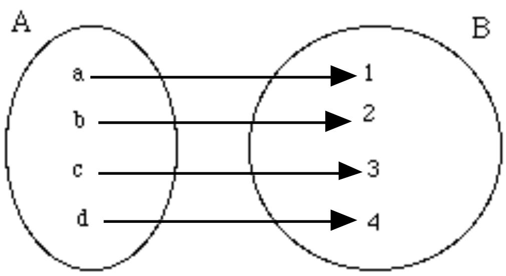
Aplicaciones inyectivas: Son aquéllas para las que en las que elementos distintos nos proporcionan imágenes distintas, técnicamente

$$\text{Si} \quad x \in A \ , \ y \in A \ , \{x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$$

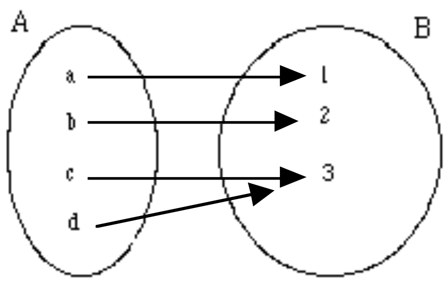
Aplicaciones suprayectivas o exhaustivas: Son aquéllas en las que todo elemento de B es imagen de otro de A. Técnicamente $f(A) = B$

Aplicaciones biyectivas: Son aquéllas que a la vez son inyectivas y exhaustivas. Cada elemento de A tiene una única y distinta imagen y cada elemento de B es imagen de un sólo elemento de A. Si A y B son finitos y existe una aplicación biyectiva entre ambos tienen los mismos elementos.

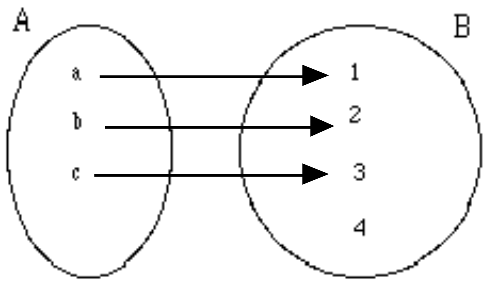
Según estas definiciones las aplicaciones pueden ser: biyectivas, exhaustivas no inyectivas, inyectivas no exhaustivas y finalmente no exhaustivas no inyectivas. En la siguiente figura vemos ejemplos de dichos tipos usando los denominados *diagramas de Venn*:



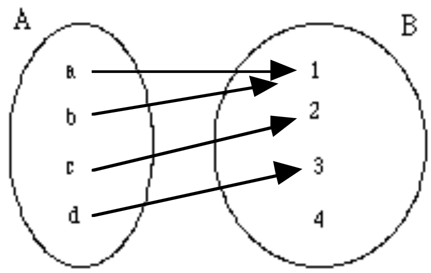
BIYECTIVA



EXHAUSTIVA NO INYECTIVA



INYECTIVA NO EXHAUSTIVA



NO EXHAUSTIVA NO INYECTIVA

Ejercicios de autocomprobación:

1. Sean A y B sendos conjuntos con n y m elementos, respectívamente. ¿Qué se puede decir del número de elementos de $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \times B$?

2. Si f es una aplicación inyectiva entre los conjuntos A y B anteriores, ¿qué relación hay entre n y m? ¿Y si f es exhaustiva?

3. ¿Cuántas aplicaciones biyectivas distintas se pueden establecer entre un conjunto de cuatro elementos y sí mismo?

4. Si $A := \{1, 2, 3, ...\}$ estudiar las aplicaciones f y g de A en sí mismo tales que $f(n) := n^2$, $g(n) := n + 1$.

5. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son sendas aplicaciones, ¿es aplicación $H : A \times C \longrightarrow B \times D$ definida como

$$H(a, c) := (b, d)$$

siendo $f(a) = b$, $g(c) = d$? ¿Qué propiedades de f y g se trasladan a H?

2 Los números reales y sus subconjuntos básicos

Cuando hablamos de Matemáticas es imposible eludir la idea de número. En cualquier (buen) diccionario de la lengua castellana *número*, con la nota Aritmética, significa "Expresión de la cantidad en relación a la unidad". Todos sabemos que hay diversas clases de números. En esta sección listaremos los diversos tipos con los que trabajaremos habitualmente.

El conjunto básico numérico con el que trabajaremos será el conjunto de los *números reales*. Hay varias maneras de introducirlo pero la mejor y más expeditiva es la axiomática: postulamos pues la existencia de un conjunto denotado por $\mathbb{R}$, cuyos elementos se llamarán números reales, que tiene dos operaciones llamadas *suma*, denotada por $(+)$, y *producto*, denotada por $(\cdot)$, que cumplen los axiomas

Axioma 1: Conmutatividad

Dados x e y en $\mathbb{R}$ se cumple $x + y = y + x$, $x.y = y.x$

Axioma 2: Asociatividad

Dados x , y , z en $\mathbb{R}$ se cumple $x+(y+z) = (x+y)+z$, $x.(y.z) = (x.y).z$

Axioma 3: Distributividad del producto sobre la suma

Dados x , y , z en $\mathbb{R}$ se cumple $x.(y + z) = x.y + x.z$

Axioma 4: Existencia de elementos neutros

Existen dos números reales distintos llamados cero (0) y uno (1) tales que para cada real x

$$x + 0 = x \quad , \quad x.1 = x$$

Estos elementos son únicos en su función (Ejercicio 1).

Axioma 5: Existencia de elementos simétricos

Para cada real x existe un elemento llamado opuesto y denotado por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$; si, además, x no es cero existe un elemento llamado recíproco y denotado por x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$.

Para cada x sus simétricos son únicos (Ejercicio 2). Es usual denotar $x - y := x + (-y)$; $xy := x.y$; $\frac{x}{y} := x.y^{-1}$. La primera operación se llama *resta* y la última *cociente*.

Los cinco axiomas anteriores se denominan *axiomas de cuerpo*. Los cuatro siguientes se llaman *de orden*. Postulamos la existencia de una relación denotada por $<$ que cumple:

Axioma 6: Axioma de tricotomía

Para x e y reales se cumple una y sólo una de las tres relaciones

$$x = y \quad , \quad x < y \quad , \quad x > y$$

Axioma 7: Estabilidad de la suma

Si $x < y$ entonces para todo z se tiene $x + z < y + z$.

Axioma 8: Estabilidad de los positivos

Un número real x se llamará positivo si $x > 0$. Entonces el producto de dos reales positivos es positivo.

El conjunto de los reales positivos se denota por $\mathbb{R}^+$.

Axioma 9: Transitividad

Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

Es usual denotar $x \leq y$ si queremos indicar que $x = y$ ó $x < y$. Se trata de una relación de orden en $\mathbb{R}$, esto es, se trata de una relación reflexiva (todo elemento está relacionado consigo mismo), antisimétrica (si un elemento está relacionado con otro y viceversa entonces son iguales) y transitiva (si un elemento está relacionado con otro y éste con un tercero implica que el primero está relacionado con el tercero). La relación es total en el sentido de que dados dos elementos cualesquiera uno está relacionado con el otro o el otro con el uno, cuestión que se deduce del axioma 7.

El décimo y definitivo axioma necesita de unos conceptos relativos a la estructura de orden introducida.

Diremos que un número real b es una *cota superior* de un subconjunto X de $\mathbb{R}$ si para todo elemento $x \in X$ se tiene que $x \leq b$. Similarmente si un número real a cumple que $x \geq a$ se dice que a es una *cota inferior* de X. El conjunto X se dice *acotado superiormente* si tiene al menos una cota superior y *acotado inferiormente* si tiene al menos una cota inferior. Diremos que X es *acotado* si lo es a la vez superior e inferiormente.

Llamamos *supremo* de un conjunto X a la menor de sus cotas superiores e *ínfimo* a la mayor de sus cota inferiores. Si esos elementos pertenecieran al conjunto se les llama. respectívamente, *máximo* y *mínimo*. Los representaremos como

$$supX \quad , \quad infX \quad , \quad maxX \quad , \quad minX$$

Ahora bien, ¿existen tales elementos?. La respuesta es afirmativa en el caso acotado.

Axioma 10: "De completitud"

Todo subconjunto X de $\mathbb{R}$, no vacío, acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$.

El resultado se podría, por simetría, haberse enunciado como "Todo subconjunto X de $\mathbb{R}$, no vacío, acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{R}$." Se puede ver que ambas expresiones son equivalentes.

Hemos introducido el conjunto $\mathbb{R}$ pero en el fondo sólo conocemos dos de sus elementos, el 0 y el 1. Veamos elementos y subconjuntos distinguidos de él:

Los *números naturales* son los que resultan de contar es decir, a partir de la unidad, el 1, vamos sumando unidades obteniendo el conjunto

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Es una discusión no trivial, incluso entre matemáticos profesionales, la que versa sobre si el cero es un número natural o no. De alguna manera hemos tomado partido en ella al definir $\mathbb{N}$ de la forma en que lo hemos hecho. Para zanjar el tema simplemente cabe decir que es una cuestión de definición y, por lo tanto, de opción. En estas notas así se ha considerado y como tal deben leerse. Si el lector tiene otra opinión poca cosa le cabrá modificar en ellas, aunque eso sí, le debe servir este párrafo (o parrafada) para que cuando ojee un libro de Matemáticas, y le sea necesaria la opción, tenga la precaución de ver la del autor.

Los naturales carecen de simétricos en $\mathbb{N}$. Dicho conjunto es insuficiente para algunas cuestiones como, por ejemplo, la resolución de algunas ecuaciones algebraicas como

$$x + 5 = 3.$$

Para resolver el problema introducimos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los *números enteros* formado por los naturales, el cero y los opuestos de los naturales. También ese nuevo conjunto es insuficiente pues no todas las ecuaciones algebraicas se pueden resolver en él, así

$$2x + 1 = 0.$$

Un nuevo subconjunto es $\mathbb{Q}$, el de los números racionales, que se define como el conjunto de todos los cocientes entre un número entero y uno natural (eso es lo mismo que decir el cociente de dos enteros siendo el segundo no nulo). Un mismo racional puede tener varias representaciones, por ejemplo

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{24}{12} = \cdots \quad , \quad \frac{1}{7} = \frac{3}{21} = \frac{11}{77} = \cdots$$

pero obviamente podemos escoger siempre la más sencilla que llamaremos *irreducible*

No todos los reales son racionales, el ejemplo más sencillo es aquél cuyo cuadrado es 2 (la raíz de 2). Este número real existe (es el supremo del conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}$ aunque no lo probemos). En el apéndice se prueba que si se supone racional se llega a una contradicción.

Para ser francos existen muchos reales que no son racionales (aunque son infinitos, son muchos más aunque esta expresión no tenga sentido ahora). A todos los números reales no racionales se les llama *irracionales.* Son irracionales, por ejemplo, la raíz de todo natural que no sea cuadrado perfecto (la prueba es muy similar a la de 2), π el cociente de la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro, $e := \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n$ la base de los logaritmos neperianos (ver la sección 5) etc. Digamos como anécdota que muchos números reales que aparecen en el cálculo básico no se sabe, aún, si son o no racionales.

De todo lo visto se deduce que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Otros subconjunto muy útiles de $\mathbb{R}$ son los *intervalos.* Dependen fuertemente de la relación de orden. Dados $a < b$, sendos reales, definimos el *intervalo abierto* de extremos a y b como

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x < b\}$$

El *intervalo cerrado* de extremos a y b como

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \leq x \leq b\}$$

y los intervalos *semi abiertos* o *semicerrados* (según se mire)

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x \leq b\} \quad , \quad [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \leq x < b\}$$

Los anteriores se denominan *intervalos acotados* ya que lo son como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Cualquiera de ellos tiene por supremo a b y como ínfimo a a (máximo o mímimo en el caso de partes cerradas).

Los *intervalos no acotados* son:

$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x < b\} \qquad]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \leq b\}$$

$$]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x\} \qquad [a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \geq a\}$$

Es importante hacer mención que los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ son sólo eso símbolos y no números reales. A quien esto ocasione algún conflicto que use $\leftarrow$ y $\rightarrow$ en lugar de ellos.

En el lenguaje del cálculo infinitesimal solemos citar a $\mathbb{R}$ como la recta real. La razón es que una vez introducido el conjunto y estudiadas sus propiedades se prueba (no sin una cierta dificultad) que $\mathbb{R}$ es, salvo cambios de nomenclatura que se denominan isomorfismos, el único cuerpo que cumple los axiomas anteriores y se puede establecer una biyección entre sus elementos y los puntos de una recta de la siguiente manera: escogemos un punto al azar y lo asociamos al cero, a su derecha elegimos otro que lo asociamos al 1. Esto determina la escala. Para asociar puntos a los naturales seguimos a la derecha a intervalos iguales y para los números negativos hacia la izquierda de cero. Basta ya sólo preocuparnos de representar los reales positivos a la derecha de cero pues cual un espejo aparecen los negativos simétricamente a la izquierda. ¿Cómo se representa un racional? Sea éste $\frac{p}{q}$. Se toma el segmento unidad (el que une 0 con 1) y se divide en q partes iguales. A partir de cero se cuentan (a izquierda o derecha según sea p negativo o positivo) p de ellas y ese punto es el correspondiente al racional. Con los irracionales las cuestiones pueden complicarse un poco más. Aunque algunos de ellos se pueden representar por artilugios geométricos como las $\sqrt{n}$ (tomese para $\sqrt{2}$ la diagonal de un cuadrado de lado 1, para $\sqrt{3}$ la diagonal de un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$, ...), en general existe una expresión en nuestro sistema de numeración de forma que a cada número real le corresponde una *expresión decimal* de la forma

$$e_1e_2...e_n, a_1a_2a_3.....$$

La parte posterior de la coma se llama decimal y está formada por ceros en los enteros, por una parte finita o periódica en los racionales y por una parte infinita no periódica en los irracionales. Efectuando divisiones sucesivas vamos dibujando cada vez con mayor precisión el irracional buscado. En el fondo estamos en un proceso de límite y sabemos que el límite es único lo que garantiza que sólo un punto de la recta corresponde a dicho irracional.

Una última operación en $\mathbb{R}$ es el *módulo* o *valor absoluto* de x. Se denota por $|x|$ y se define como el propio x si es positivo o $-x$ en el caso negativo. Sus propiedades básicas son:

(1) $|x|$ es siempre no negativo y vale cero si, y sólo si, x es cero.
(2) $|xy| = |x|\ |y|$
(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Ejercicios de autocomprobación:

1. Probar que el cero y el uno son los únicos que cumplen el axioma 4.
2. Probar que cada número real x tiene un único simétrico para la suma y, caso de no ser cero, para el producto.
3. Usando sólo los cinco primeros axiomas probar que $x.0 = 0$.
4. Probar que el uno es un número real positivo.
5. Si $x < y$ y $z > 0$ probar que $xz < yz$. ¿Qué pasa si $z < 0$?
6. ¿ Es $-x$ negativo?
7. Probar las propiedades del valor absoluto
8. Probar que $||x| - |y|| \leq |x - y|$
9. Construir en la recta real $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$.
10. Probar que si x e y son reales se tiene $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

3 Cónicas

Vamos a listar sucintamente las denominadas *cónicas en el plano* esbozando algunas propiedades. Una superficie cónica de revolución de dos hojas es la generada en el espacio por una recta que gira alrededor de otra fija, secante con ella. Se llaman cónicas a las curvas (planas) que resultan al cortar dicha superficie por un plano. Según las posiciones de éste se pueden clasificar:

Circunferencia (plano horizontal): es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan un valor r , llamado radio, de un punto fijo llamado centro (x_0, y_0). Su ecuación en el plano XY es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Desarrollando podemos afirmar que su ecuación se caracteriza por ser de segundo grado en x e y , tener los coeficientes de x^2 e y^2 iguales y no tener término en xy.

Elipse (plano oblicuo): es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos fijos llamados focos es constante $(2a)$. Si su centro es (x_0, y_0) su ecuación general es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

siendo $2a$ el eje mayor (en abscisas), $2b$ el menor (en ordenadas) y $2c$ la distancia entre los focos, con $a^2 = b^2 + c^2$. Si $a < b$ la situación es análoga pero el eje mayor está en el de ordenadas.

Desarrollando podemos afirmar que su ecuación se caracteriza por ser de segundo grado en x e y , coeficientes de x^2 e y^2 del mismo signo y no tener término en xy. Una circunferencia es un caso particular de elipse con $a = b$ y $c = 0$.

Parábola (plano paralelo a una generatriz del cono): es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a una recta (directriz) y un punto (foco) ambos fijos es constante. Su ecuación general es

$$y = ax^2 + bx + c \quad ó \quad x = ay^2 + by + c$$

Hipérbola (plano vertical): es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es contante ($2a$). Su ecuación es

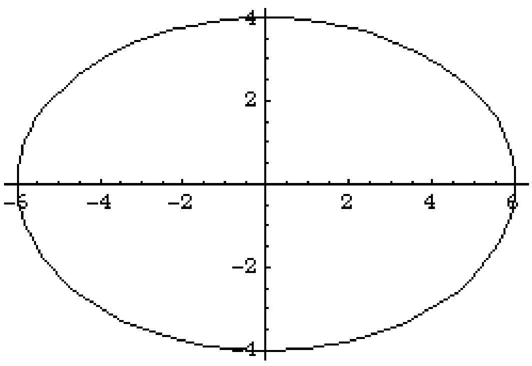
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

si sus asíntotas son las rectas $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, mientras que

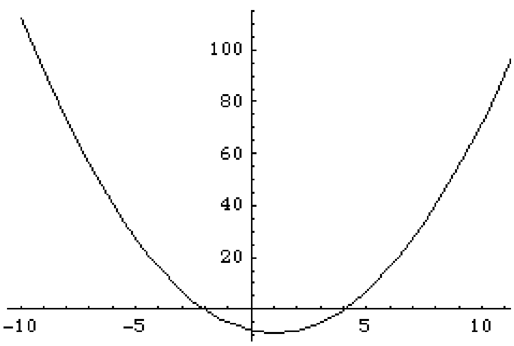
$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

si sus asíntotas son paralelas a los ejes ($y = y_0 \quad x = x_0$). En el primer caso, desarrollando, podemos afirmar que su ecuación se caracteriza por ser de segundo grado en x e y , coeficientes de x^2 e y^2 de distinto signo y no tener término en xy. En el segundo el término en xy es capital.

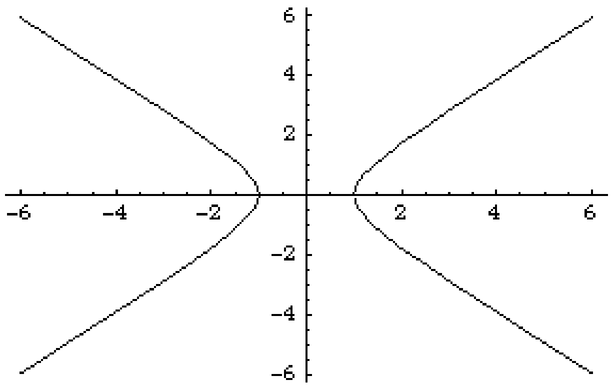
Veamos a modo de ejemplo cuatro gráficas de cónicas: una elipse, una parábola y dos hipérbolas



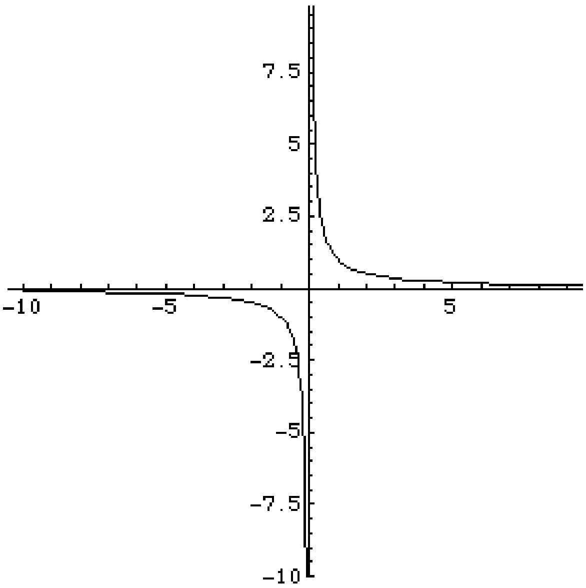
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$



$$y = x^2 - 2x - 8$$



$x^2 - y^2 = 1$



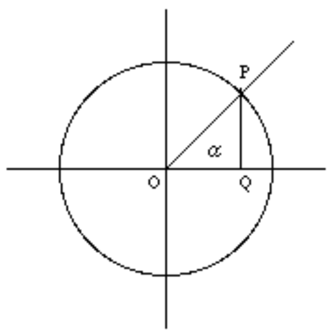
$y = \dfrac{1}{x}$

Ejercicios de autocomprobación:

1. Averiguar qué tipo de cónica es $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
2. Idem $4x^2 + 9y^2 - 18y - 27 = 0$
3. Idem $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
4. Idem $4x^2 + 5x + y - 2 = 0$
5. Idem $xy - x + 2y - 5 = 0$

4 Trigonometría

La trigonometría es una rama de la geometría clásica en la que se estudian ciertos invariantes de los ángulos: seno, coseno, tangente y sus recíprocas: cosecante, secante y cotangente. Conviene conocer sus definiciones tanto en el ambiente de los triángulos rectángulos (que es su origen *tri-gonos-metria* = medida de triángulos) como en el desarrollo a partir de la circunferencia. Ambos son equivalentes aunque este último es más general.



Tomemos una circunferencia de centro el origen y radio unidad, que se conoce como *circunferencia goniométrica*, (de ecuación $x^2 + y^2 = 1$) ya que sirve para medir ángulos. Véase la figura. Sea α un ángulo expresado en radianes, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; la representación en radianes no sólo nos define el espacio entre el eje positivo de abscisas (de donde, y en sentido contrario a las agujas del reloj, se comienzan a medir) y la recta

OP, sino que coincide con la longitud del arco de circunferencia que acoge el ángulo (ahí es donde resulta determinante que el radio sea la unidad). El punto P tiene como coordenadas (x, y): Sea $Q := (x, 0)$ su proyección sobre el eje X. Se llama *seno* del ángulo a la ordenada y *coseno* a la abscisa del punto P. Los representamos como $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. De la ecuación de la circunferencia se deduce la denominada *identidad fundamental de la trigonometría*

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

Se definen la tangente, cotangente, secante y cosecante como

$$\tan\alpha := \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}; \quad \cot\alpha := \frac{1}{\tan\alpha}; \quad \csc\alpha := \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}; \quad \sec\alpha := \frac{1}{\cos\alpha}$$

Así se deducen

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad\qquad \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

Otras identidades importantes son:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Si no hubiésemos utilizado una circunferencia de radio unidad y hubiésemos trabajado con una de radio r la única diferencia es que el punto P tendría como coordenadas no el seno y el coseno de α sino un múltiplo de ellos. En ese caso

$$\operatorname{sen}\alpha := \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos\alpha := \frac{x}{r}$$

De cualquier manera, y para ángulos agudos, las definiciones coinciden con la clásica de seno igual a cateto opuesto partido por hipotenusa y coseno igual a cateto contiguo partido por hipotenusa (vease el triángulo OPQ).

Aunque unas buenas tablas o una aceptable calculadora nos proporcionan los valores de las razones de cualquier ángulo con bastantes cifras decimales, se deben conocer y, a ser posible, recordar las razones trigonométricas de los ángulos 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y cómo se deducen.

A modo de ejercicio compruebe el lector la siguiente tabla:

ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0

(Sugerencia: para conocer las de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$ divídase un triángulo equilátero en dos iguales usando una altura. Para las de $\frac{\pi}{4}$ úsese un triángulo rectángulo isosceles. Para el resto basta observar la circunferencia goniométrica)

Simplemente por inspección sabremos el signo de las razones de un ángulo según el cuadrante en el que se encuentra. Por ejemplo el seno (la ordenada) es positivo si el ángulo se encuentra en el primer y segundo cuadrante siendo negativo si el ángulo se encuentra en el tercer y cuarto cuadrante. Mientras tanto el coseno (la abscisa) es positivo si el ángulo se encuentra en el primer y cuarto cuadrante siendo negativo si el ángulo se encuentra en el segundo y tercer cuadrante.

Tanto el seno como el coseno de un ángulo toman todos los valores entre -1 y 1 infinitas veces ya que

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha + 2\pi = \operatorname{sen}\alpha + 4\pi = \cdots = \operatorname{sen}\alpha + k\pi = \cdots$

$\cos\alpha = \cos\alpha + 2\pi = \cos\alpha + 4\pi = \cdots = \cos\alpha + k\pi = \cdots$

Ejercicios de autocomprobación:

1. Si un ángulo está en el segundo cuadrante y su seno vale 0.1, calcular el resto de sus razones trigonométricas.

2. Calcular la razones del ángulo de $\frac{49\pi}{6}$ radianes.

3. Relacionar las razones de un ángulo α y de los ángulos $\pi-\alpha$ y $\pi+\alpha$.

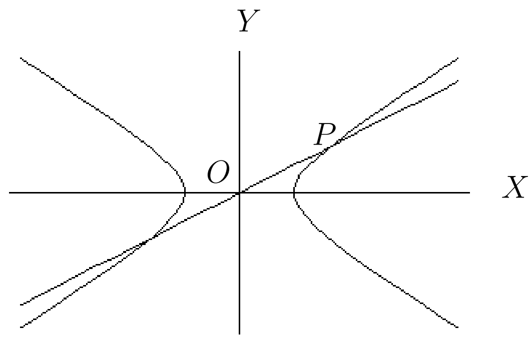
4. Sabiendo las razones de un ángulo α deducir las de $\frac{\alpha}{2}$.

5. Deducir las fórmulas:

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$

NOTA: **La llamada Trigonometría hiperbólica.**



Si queremos calcular las razones trigonométricas de un número real α podemos (ver la figura del principio de la sección) tomar en la circunferencia goniométrica un sector circular de área $\frac{\alpha}{2}$ que corresponde al arco de α radianes y las coordenadas de P nos dan el coseno y el seno. De forma absolutamente paralela podríamos haber realizado el proceso usando en lugar de la circunferencia la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1$$

(ver figura). Supongamos que el área del sector determinado por la hipérbola, el eje positivo de abscisas y la recta es $\frac{\alpha}{2}$ y sea $P := (x, y)$ el punto intersección de la recta y la hipérbola. Llamamos *seno hipérbólico* de α a la ordenada de P y *coseno hipérbólico* de α a la abscisa de P. Al cociente de ambas se le llama *tangente hiperbólica.* Denotaremos

$$y = \operatorname{senh} \alpha \quad , \quad x = \cosh \alpha \quad , \quad \tanh = \frac{y}{x}$$

La *identidad fundamental* es en este caso

$$\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1$$

y se puede desarrollar una teoría similar a la anterior. Es particularmente útil el hecho, que a veces se toma como definición, de que estas expresiones tienen una representación exponencial. Se puede probar que

$$\operatorname{senh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad , \quad \cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

Pruébese, con estas expresiones, la identidad fundamental y

(i) $\operatorname{senh} 0 = 0$; $\cosh 0 = 1$; $\operatorname{senh}(-\alpha) = -\operatorname{senh} \alpha$; $\cosh(-\alpha) = \cosh \alpha$
(ii) $\operatorname{senh}(\alpha + \beta) = \operatorname{senh} \alpha . \cosh \beta + \operatorname{senh} \beta . \cosh \alpha$
(iii) $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha . \cosh \beta + \operatorname{senh} \beta . \operatorname{senh} \alpha$
(iv) $\operatorname{senh} 2\alpha = 2 \operatorname{senh} \alpha . \cosh \alpha$
(v) $\cosh 2\alpha = \cosh^2 \alpha + \operatorname{senh}^2 \alpha$

5 Logaritmos

Dado un número real y positivo x se llama *logaritmo en base a* (siendo a un número real positivo distinto de 1) al número y tal que $a^y = x$. Se denota entonces

$$y = \log_a x$$

Las bases más comúnmente usadas son $a = 10$, en cuyo caso escribimos $y = \lg x$, denominado *logaritmo decimal* y $a = e := \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = 2.718281...$, en cuyo caso escribimos $y = \log x$ ó $y = \ln x$ (aunque ésta última notación está en desuso), denominado *logaritmo neperiano*. En el cálculo se usa fundamentalmente este tipo de logaritmo.

La fórmula de cambio de una base a a otra b es fácil de deducir y afirma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x . \log_a b$$

Listamos ahora las propiedades fundamentales de los logaritmos neperianos (para cualquier otra base serían análogas) que se deducen de las leyes de los exponentes:

$$e^{\log x} = x$$

$$\log 1 = 0 \qquad \log e = 1$$

$$\log(x.y) = \log x + \log y \qquad \log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

$$\log(x^p) = p.\log x \qquad \log(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log x}{n}$$

Ejercicios de autocomprobación:

1. Probar la fórmula de cambio de base (sugerencia: tómense logaritmos base b en $a^x = y$)
2. Si $a := \lg 2$, ¿cuánto vale $\lg 5$?
3. Si $b := \lg 5$, calcular $\lg(1,024)$.
4. Resolver la ecuación $4^x - 5.2^x + 6 = 0$.
5. Estudiar los valores de e^x según los valores de x.

6 Numeros complejos

Los números reales son insuficientes para algunos cálculos básicos. Sabemos que toda ecuación $ax^2+bx+c=0$, de segundo grado con una incognita, tiene por soluciones (ver sección 11)

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

pero si b^2-4ac es negativo no estamos hablando de números reales. El artificio que se usa es introducir la *unidad imaginaria* $\mathbf{i}$ como aquél número (imaginario) cuyo cuadrado nos da -1. Aunque aquí mantengamos esa notación es ya una moda consolidada usar en los textos técnicos $\mathbf{j}$ en lugar de $\mathbf{i}$ para no confundir con la intensidad eléctrica.

Se llama *número complejo* a una expresión de la forma $z = x + y\ \mathbf{i}$, donde x e y son números reales que se denominan, respectívamente *parte real* y *parte imaginaria* del complejo z y que se denotan como $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Se denota por $\mathbb{C}$ el conjunto de todos los números complejos.

Observar que si $x \in \mathbb{R}$, podemos escribir $x = x + 0\mathbf{i}$, con lo cual todo número real se puede considerar como un número complejo; abreviadamente: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos de la forma $0+y\mathbf{i} = y\mathbf{i}$ se llaman *imaginarios puros.*

Dados dos números complejos, $x_1 + y_1\mathbf{i}$ y $x_2 + y_2\mathbf{i}$, se define, de forma natural, su *suma* como

$$(x_1 + y_1\mathbf{i}) + (x_2 + y_2\mathbf{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i}.$$

Es decir el número complejo suma de otros dos se obtiene sumando las partes reales de ellos, que queda como parte real y sumando las partes imaginarias, que queda como parte imaginaria. La suma de números complejos verifica las mismas propiedades que la suma de números reales, a saber:

Conmutativa: Dados dos números complejos z_1 y z_2 se cumple que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Asociativa: Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Existencia de elemento neutro: Existe un elemento, el $0 := 0 + 0\mathbf{i}$, tal que $0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Existencia de elemento simétrico: Para cada $z = x + y\mathbf{i}$, existe un elemento $-z := -x - y\mathbf{i}$, llamado el opuesto de z, tal que $z + (-z) = 0$.

Así, por ejemplo $(2 - 3\mathbf{i}) + (-5 + 5\mathbf{i}) = -3 + 2\mathbf{i}$.

Antes de definir el producto, recordemos que se debe verificar la propiedad fundamental $\mathbf{i}^2 = -1$. Esto determina que si $x_1+y_1\mathbf{i}$ y $x_2+y_2\mathbf{i}$ son números complejos y se cumplen las leyes habituales de la aritmética, entonces

$(x_1 + y_1\mathbf{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathbf{i}) = x_1(x_2 + y_2\mathbf{i}) + y_1(x_2 + y_2\mathbf{i})\mathbf{i} =$
$= x_1x_2 + x_1y_2\mathbf{i} + y_1x_2\mathbf{i} + y_1y_2\mathbf{i}^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{i}$

Se define pues el *producto* de los números complejos, $x_1 + y_1\mathbf{i}$ y $x_2 + y_2\mathbf{i}$, como

$$(x_1 + y_1\mathbf{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathbf{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_2y_1 + x_1y_2)\mathbf{i}$$

El producto así definido tiene las mismas propiedades que el producto de números reales, a saber:

Conmutativa: Dados dos números complejos z_1 y z_2 se cumple que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Asociativa: Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

Existencia de elemento neutro: Existe un elemento, denotado por $1 = 1 + 0\mathbf{i}$, tal que $1 \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Existencia de elemento simétrico: Para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un elemento $1/z$, llamado el inverso de z, tal que $z \cdot (1/z) = 1$.

Distributiva: Dados tres números complejos z_1, z_2 y z_3 se cumple que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Así, por ejemplo, $(1 - \mathbf{i}) \cdot (-3 + 5\mathbf{i}) = (-3 + 5) + (3 + 5)\mathbf{i} = 2 + 8\mathbf{i}$. Es usual, como en el caso de los números reales no poner el punto para denotar el producto.

Para cada número complejo $z = x + y\mathbf{i}$, su *complejo conjugado* es $\overline{z} := x - y\mathbf{i}$.

Observar que siempre se cumple que

$$z \cdot \overline{z} = (x^2 - y(-y)) + \mathbf{i}(0 + 0) = x^2 + y^2.$$

Esta propiedad del conjugado es especialmente importante para calcular cocientes, en el mismo sentido de los reales, ya que si $z = x + y\mathbf{i}$ y $w = u + v\mathbf{i} \neq 0$, entonces

$$\frac{z}{w} := z \cdot w^{-1} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}\mathbf{i}.$$

Por ejemplo $\dfrac{17 - 17\mathbf{i}}{-3 - 5\mathbf{i}} = \dfrac{(17 - 17\mathbf{i})(-3 + 5\mathbf{i})}{(-3 - 5\mathbf{i})(-3 + 5\mathbf{i})} = \dfrac{34 + 136\mathbf{i}}{9 + 25} = 1 + 4\mathbf{i}$.

Otras propiedades del conjugado de un número complejo son:

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(3) $\Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$.
(4) $\Im(z) = \dfrac{1}{2\mathbf{i}}(z - \overline{z})$.

(5) $z \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, $z = \overline{z}$.

Las demostraciones son simples. Por ejemplo, para probar **(1)**, consideremos $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$ y $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}$; entonces

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i}} = (x_1+x_2)-(y_1+y_2)\mathbf{i} = (x_1-y_1\mathbf{i})+(x_2-y_2\mathbf{i}) = \overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Por su parte, la propiedad **(5)** es una consecuencia muy sencilla de **(4)** ya que, dado $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $z \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\Im\mathrm{m} z = 0$ y, por **(4)** esto es equivalente a $z - \overline{z} = 0$; es decir, $z = \overline{z}$.

Una visualización de los números complejos similar a la de la recta real con $\mathbb{R}$ es la que se realiza con el llamado *plano complejo.* Se trata de establecer en un plano dos rectas perpendiculares, la horizontal se denomina *eje real* y la vertical *eje imaginario.* Todo punto del plano se puede describir con dos valores (x, y) que corresponden a sus proyecciones sobre ambas rectas tratadas como rectas reales (la horizontal tal cual y la vertical con los positivos hacia arriba y los negativos hacia abajo). Identificamos dicho plano con $\mathbb{C}$ asimilando cada punto (x, y) con el complejo $x + y\mathbf{i}$ y viceversa. Es habitual leer en algunos textos que (x, y) es la *forma cartesiana* de expresar el complejo $x + y\mathbf{i}$, forma que se denomina *binómica.*

Esta interpretación geométrica nos permite definir módulo y el argumento de un numero complejo: supongamos que unimos con un segmento el punto $z = x + y\mathbf{i}$ y el origen (el $(0, 0)$ identificado como el $0 + 0\mathbf{i}$), el *módulo* de z es la longitud de ese segmento (en otras palabras, indica la distancia de z a 0) y el *argumento de* z es el ángulo, en radianes y en el primer giro, que forma (en sentido contrario de las agujas del reloj) ese segmento con la parte positiva del eje real. Así el módulo de $z = x + y\mathbf{i}$ es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su argumento es un número real, α , entre 0 y 2π tal que $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$. El argumento del cero es cero.

Las principales propiedades del módulo son:

(1) $|z| = 0$ si, y sólo si, $z = 0$.
(2) $|z| = |\overline{z}|$.
(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
(5) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Todas tienen una prueba elemental. La propiedad **(5)** ya la hemos visto al definir el conjugado. Veamos primero **(1)**: Sea $z = x + y\mathbf{i}$ y supongamos primero que $|z| = 0$; esto es, que $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Como la expresión $x^2 + y^2$ sólo se anula cuando los dos números son 0, concluimos que $x = 0$ e $y = 0$. Por tanto, $z = x + y\mathbf{i} = 0$. Recíprocamente, supongamos que

$z = x + y\mathbf{i} = 0$. Entonces se cumple que $x = 0$ e $y = 0$, con lo cual $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. **(2)** y **(3)** son sencillas.

Comprobemos ahora **(4)**: observemos primero que todo número complejo $w = x + y\mathbf{i}$ cumple que $x^2 \leq x^2 + y^2$, con lo cual $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Esto es: todo $w \in \mathbb{C}$ verifica $\Re(w) \leq |w|$. Aplicado a $w = z_1 \cdot \overline{z_2}$ tenemos $\Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq |z_1 \cdot \overline{z_2}|$.

Como consecuencia resulta que

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) == z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 + 2\Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| + |z_2|^2$.

Teniendo ahora en cuenta que, por **(3)** y **(2)**, $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ se obtiene que

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Luego tomando raíces cuadradas se deduce que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Dado un número complejo $z \neq 0$, y $\alpha \in [0, 2\pi[$ su argumento, podemos escribir

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha).$$

Ésta se denomina *forma trigonométrica* de z, mientras que $|z|_\alpha$ se denomina *forma polar*. Una definición interesante que se utiliza entre otras cosas para simplificar la anterior es escribir

$$e^{\mathbf{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

y con ello definir la *exponencial compleja* como

$$e^z = e^x e^{\mathbf{i}\alpha} = e^x(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha).$$

Con esta definición se tiene $e^{\mathbf{i}\pi} = -1$, o mejor, $e^{\mathbf{i}\pi} + 1 = 0$ denominada *fórmula de Euler* y que tiene la curiosidad de contener, relacionados con operaciones, los cuatro números más famosos del cálculo, el 0 , el 1 , el e y el π.

Las propiedades de la exponencial son similares a la correspondiente real pero su desarrollo y la definición de su inversa, el logaritmo complejo, exceden de nuestras pretensiones.

En el fondo podríamos haber elegido el argumento de forma que α estuviera en $\mathbb{R}$ y se tendría que

$$|z|_\alpha = |z|_{\alpha+2\pi} = |z|_{\alpha+4\pi} = \cdots$$

Siempre que calculemos argumentos actuaremos reduciendo a la primera vuelta o giro.

Si z y w son dos números complejos no nulos, con argumentos α y β, respectivamente, el producto zw tiene por módulo $|z| \cdot |w|$ el argumento es $\alpha + \beta$ entendiendo que el ángulo se reduce al primer cuadrante.

La demostración de este resultado es muy sencillo. Supongamos que $z = |z|(\cos\alpha + \mathbf{i}\operatorname{sen}\alpha)$ y que $w = |w|(\cos\beta + \mathbf{i}\operatorname{sen}\beta)$. Entonces

$$zw = |z||w|(\cos\alpha + \mathbf{i}\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\operatorname{sen}\beta).$$

Por un lado, sabemos por la propiedad **(3)** del módulo que $|z||w| = |zw|$. Por otro, $(\cos\alpha + \mathbf{i}\operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta + \mathbf{i}\operatorname{sen}\beta) =$
$= (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + \mathbf{i}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$.

Las fórmulas del seno y el coseno de una suma nos proporcionan ahora que el segundo miembro es igual a

$$\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\alpha + \beta),$$

con lo cual resulta

$$zw = |zw|(\,\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\alpha + \beta)),$$

que indica que un argumento de zw es $\alpha + \beta$.

El cociente z/w tiene por módulo $|z|/|w|$ y uno de sus argumentos es $\alpha - \beta$. La prueba es similar a la anterior.

Así, por ejemplo,
$\mathbf{i}(1 + \mathbf{i}) = (\,\cos(\pi/2) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/2))(\,\cos(\pi/4) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/4)) =$
$(\,\cos(3\pi/4) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(3\pi/4)) = -1 + \mathbf{i}$
mientras que
$\mathbf{i}/(1 + \mathbf{i}) = (\,\cos(\pi/2) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/2))/(\,\cos(\pi/4) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/4)) =$
$(\,\cos(\pi/4) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/4)) = 1 + \mathbf{i}$.

Siempre que tengamos un número complejo $z = x + y\mathbf{i}$ podemos calcular sus potencias naturales $z^n = (x + y\mathbf{i})^n$ usando el desarrollo del binomio de Newton, pero es más sencillo sobre todo para potencias grandes usar la forma polar y la llamada *Fórmula de Moivre* que asegura

$$(|z|_\alpha)^n = (|z|^n)_{n\alpha}$$

Esta fórmula se deduce inmediatamente, por inducción (ver apéndice final), de la fórmula del producto de complejos en forma polar. En efecto, para $n = 1$ es inmediata y si es cierta para $n = p$, esto es, $(|z|_\alpha)^p = (|z|^p)_{p\alpha}$, se tiene

$$(|z|_\alpha)^{p+1} = (|z|_\alpha)^p|z|_\alpha = (\text{Hip. inducción}) = (|z|^p)_{p\alpha}|z|_\alpha = (|z|^{p+1})_{(p+1)\alpha}$$

que es la fórmula para $p+1$.

De igual manera se pueden calcular las raíces complejas de cualquier número z. Un número w diremos que es una *raíz n-sima* de z si $w^n = z$. Se puede probar que todo número complejo tiene exáctamente n raíces n-simas que vienen dadas por la expresiones

$$z_1 := r_{\alpha_1} \quad z_2 := r_{\alpha_2} \quad \cdots \quad z_n := r_{\alpha_n}$$

siendo $r = \sqrt[n]{|z|}$ y $\alpha_i = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi(i-1)}{n} \quad i = 1, 2..., n$

Las raíces cuartas de $1+\mathbf{i}$ se calculan pasandolo a forma polar, esto es $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$, y aplicando la fórmula sus raíces cuartas son:

$$\sqrt[8]{2}_{\frac{\pi}{16}} \qquad \sqrt[8]{2}_{\frac{9\pi}{16}} \qquad \sqrt[8]{2}_{\frac{17\pi}{16}} \qquad \sqrt[8]{2}_{\frac{25\pi}{16}}$$

Calculemos las raíces cúbicas de la unidad, 1, como complejo. En forma polar es 1_0. Sus tres raíces son

$$1_0 \qquad 1_{120} \qquad 1_{240}$$

De forma práctica se ve que todas las raíces tienen el mismo módulo (la raíz correspondiente del módulo de z) y los argumentos comienzan por $\dfrac{\alpha}{n}$ y los demás se conforman añadiendo $\dfrac{2\pi}{n}$, el ángulo que resulta al dividir la circunferencia en n partes. Así, geométricamente, las raíces n-simas de un complejo están situadas sobre una circunferencia de centro el origen y de radio $\sqrt[n]{|z|}$ y equidistantes formando un polígono regular de n lados.

Ejercicios de autocomprobación:

1. Probar las propiedades de la suma y producto de complejos que han quedado pendientes.
2. Probar las propiedades 2 y 3 del conjugado que han quedado pendientes.
3. Dar ejemplos de complejos z y w tales que $|z+w| = |z| + |w|$.
4. Probar que el módulo del complejo $\dfrac{z}{w}$ es $\dfrac{|z|}{|w|}$; ¿cuál es su argumento?
5. Calcular las raíces cuadradas y las raíces cúbicas de $64\mathbf{i}$.

7 Funciones elementales

Una función real de variable real es una aplicación f de un subconjunto D de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Escribimos entonces

$$y = f(x)$$

Conviene que desde el principio hagamos mención a dos cuestiones sobre un abuso de notación y lenguaje. Al conjunto D se le llama *dominio* de la función y al subconjunto imagen $f(D)$ se le suele denominar rango de la función. Es importante, y no sólo para las funciones reales, entender que una función es una regla que actúa sobre un conjunto y ambas cosas son inseparables. Así son diferentes las funciones

$f(x) := x + 1$ definida en $D = \mathbb{R}$

$g(x) := x + 1$ definida en $[4, 8]$

$h(x) := 5x - 1$ definida en $[4, 8]$

Las dos primeras actúan igual pero con diferente dominio, mientras que las dos últimas actúan en el mismo dominio pero de diferente forma. Tras leer esto el lector puede recordar expresiones del tipo " Sea la función $f(x) := x + 1$ ". Para explicar en qué sentido se usa necesitamos el concepto de *campo de existencia* de una regla que es el mayor subconjunto de la recta real donde dicha regla tiene sentido. Así, por ejemplo, la regla $\log x$ no puede definirse mas que para reales positivos. Podemos pues definirla en subconjuntos de $\mathbb{R}$ que sólo contengan positivos pero si no citamos dicho subconjunto entendemos que es $\mathbb{R}^+$. La expresión " Sea la función $f(x) := x + 1$" tiene ahora sentido y coincide con $f(x) := x + 1$ definida en $D = \mathbb{R}$.

La segunda cuestión es la referente a expresiones que pueden ofrecer ambigüedad en cuanto al rango: por ejemplo " Sea la función $f(x) := \sqrt{x}$ " (ya sabemos que está definida en $\mathbb{R}^+$, que es su campo de existencia). ¿Cuánto vale $f(4)$? , ¿la respuesta es 2, es -2 o valen ambas?. No pueden ser validas las dos pues al ser función el resultado es unívoco. La respuesta correcta es 2. La raíz cuadrada como operación matemática no es una función pues da dos resultados, uno positivo y otro negativo. Dicha operación genera dos funciones $f(x) := +\sqrt{x}$ y $f(x) := -\sqrt{x}$, ahí no surge ningún conflicto. Así cuando nos referimos a la función raíz cuadrada entendemos la positiva al igual que cuando hablamos del 5 no hace falta decir que es $+5$.

Las funciones más importantes son las que denominamos *elementales*, a saber:

Funciones potenciales, $y = x^n$, con n un número real fijo.

Funciones exponenciales, $y = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ fijo. Por antonomasia se suele llamar función exponencial a $y = e^x$.

Funciones logarítmicas, $y = \log_a x$ definidas para los x positivos aunque, como en el caso anterior, se llama función logarítmica a $y = \log x$.

Funciones trigonométricas o circulares, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, $y = \cot x$ en las que obtenemos para un valor real x (un ángulo expresado en radianes) el valor de sus correspondientes razones trigonométricas.

Funciones hiperbólicas, $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$ bien según su definición original bien según su expresión exponencial y sus recíprocas $y = \operatorname{csch} x$, $y = \operatorname{sech} x$, $y = \coth x$.

Como consecuencia de tomar valores reales las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a exponentes etc., con la única restricción de que tenga sentido la operación. Otra operación específica de las funciones es la composición:

Dada una función f de D en $\mathbb{R}$ y dada otra g definida en $f(D)$ se llama *composición* de ambas a

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Así, por ejemplo, si $f(x) := x^2$ y $g(x) := \operatorname{sen} x$ entonces $(g \circ f)(x) = \operatorname{sen} x^2$. Conviene notar que esta operación no es, en general, conmutativa pues, por ejemplo, $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

De esta cuestión se deduce el concepto de función inversa: dada una función f definida sobre D y que sea inyectiva se define su *inversa* como aquella g definida sobre $f(D)$ tal que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$. Así la función logarítmica es la inversa de la exponencial y viceversa.

Detengámonos un momento a hablar de las funciones inversas de las trigonométricas e hiperbólicas:

La función seno no es inyectiva pues a varios valores de la variable corresponde el mismo seno. Hablar de su inversa no tiene sentido, pero sin embargo sí se hace. La razón es de elección como al principio de la sección hemos citado en el caso de la raíz cuadrada. Necesitamos que la aplicación sea inyectiva al menos. La elección que se toma habitualmente es la siguiente: la función seno es biyectiva considerada de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$. A la inversa de esa función se le llama función arcoseno y se representa como $y = \arcsin x$ que equivale a la expresión $\operatorname{sen} y = x$ siempre que $y \in [-1, 1]$. No conviene confundir esta función con la cosecante que es la recíproca (o inversa respecto de la multiplicación).

Con la función coseno la situación es similar; es biyectiva de $[0, \pi]$ en $[-1, 1]$. A la inversa de ésta se le llama función arcocoseno y se representa por $y = \arccos x$ que equivale pues a $\cos y = x$.

La función tangente es biyectiva de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ en $]-\infty,+\infty[$. Su inversa entre esos intervalos se denomina función arcotangente y se denota $y = \arctan x$ que equivale a $\tan y = x$.

Conviene insistir en que podríamos haber considerado otros intervalos de forma que hubiera biyectividad para definir las inversas y así seguir trabajando, pero los elegidos son los más convenientes y los comúnmente aceptados.

También las funciones hiperbólicas tienen sus correspondientes inversas. La función seno hiperbólico es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, luego admite una inversa que denominamos argumento seno hiperbólico y se denota $y = \arg\operatorname{senh} x$ que equivale a $\operatorname{senh} y = x$.

La función coseno hiperbólico es biyectiva de $[0,+\infty[$ en $[1,+\infty[$. Su inversa se denomina argumento coseno hiperbólico y se denota por $y = \arg\cosh x$ que equivale a $\cosh y = x$.

La función tangente hiperbólica es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $]-1,1[$. Su inversa se denomina argumento tangente hiperbólica y se denota por $y = \arg\tanh x$ que equivale a $\tanh y = x$.

Al igual que la función logaritmo es la inversa de la exponencial, y al estar definidas a partir de ésta las funciones hiperbólicas, las inversas citadas tienen una expresión logarítmica fácil de deducir y muy útil. Así si $y = \arg\operatorname{senh} x$ se tiene $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ de donde $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ y resolviendo la ecuación, suponiendo como incognita e^y, se obtiene $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ que nos obliga a desechar el signo menos ya que la exponencial es siempre positiva. Tomando logaritmos se tiene $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Dejamos al cuidado del lector probar, usando el mismo método, que $\arg\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ y $\arg\tanh x = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$

Se llama *gráfica* de una función f de un subconjunto D de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ al subconjunto del plano

$$G(f) := \{(x,y) \;:\; x \in D,\; y = f(x)\}$$

La gráfica de una función nos da una imagen de ella y nos acerca sus propiedades.

Es interesante conocer las gráficas de todas estas funciones. Al igual que un estudiante de Botánica tiene su herbario un estudiante de cálculo debe hacerse con un "graficario" que le permita consultarlo y familiarizarse con las funciones más simples. Se puede consultar, por ejemplo, S. M. Selby "Standard Mathematical Tables" [pgs.370-384]. También se puede utilizar algún paquete informático como Derive, Mathematica, Mapple, MatLab...para ordenador o calculadoras de bolsillo.

Volveremos sobre ello en la sección dedicada a las gráficas de funciones en general.

Ejercicios de autocomprobación: Discutir a partir de las gráficas de las funciones elementales, sin usar derivación, y según diferentes valores de los parámetros a, b, c y d la forma de las gráficas de las funciones:

1. $f(x) := ax + b$
2. $f(x) := ax^2 + bx + c$
3. $f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$
4. $f(x) := \dfrac{a}{x}$
5. $f(x) := a + be^{cx+d}$
6. $f(x) := a + \log_b(cx + d)$
7. $f(x) := a + b\,\mathrm{sen}(cx + d)$
8. $f(x) := a + b\cos(cx + d)$
9. $f(x) := a + b\,\mathrm{senh}(cx + d)$
10. $f(x) := a + b\cosh(cx + d)$

Por ejemplo en el primer caso la gráfica de f es una recta cuyo punto de corte con el eje de ordenadas es el $(0, b)$, mientras que forma con la parte positiva del eje de abscisas un ángulo agudo si a es positiva y obtuso si a es negativa (compruébese cuidadosamente).

8 Límites y continuidad

Dada una función $y = f(x)$ la expresión $\lim_{x\to b} f(x) = L$ nos dice que cuando la variable x se acerca al valor b la función se acerca a L. Rigurosamente, si dado un $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 <\mid x - b \mid< \delta$ entonces $\mid f(x) - L \mid< \epsilon$.

Conviene repasar los diversos métodos de cálculo de límites.

Una función diremos que es *continua* en un punto b de su dominio si $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. Es continua en un conjunto si lo en cada punto del conjunto.

Una función continua en un conjunto se caracteriza por tener una gráfica que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Las propiedades más importantes de las funciones continuas son:

Teorema de Bolzano: Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y toma en los extremos valores de diferente signo existe, al menos, un punto x_0 entre a y b en donde la función se anula, i.e. $f(x_0) = 0$. En realidad la función toma todos los valores entre los que toma en sus extremos (propiedad de los valores intermedios).

Primer Teorema de Weierstrass: Toda función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua está acotada,i.e. $f([a, b])$ es un conjunto acotado.

Segundo Teorema de Weierstrass: Toda función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua alcanza en el intervalo su máximo y su mínimo, i.e. existen x_m y x_M en el intervalo tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

extendiendose el resultado de Bolzano en el sentido que tal función toma todos los valores entre su máximo y su mínimo.

Ejercicios de autocomprobación:

1. Calcular

$$(i) \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + 7x + 2} \quad (ii) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 1}{4x^2 + 7x + 2} \quad (iii) \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^3 + 1}$$

2. Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

3. Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{x+3}{x+1})^x$$

4. Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{3x^4 + 2x^2 + x - 1}{3x^4 - x^2 + 2})^{6x^2+2x-1}$$

5. Calcular

$$\lim_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{4}{x}}$$

6. Calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

7. Calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

8. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + 5x^2 - x}{4x^3 + 7x^2 + 2x}$$

9. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) := \begin{cases} 1 + x, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9 Derivación. Representación de curvas

Se llama derivada de una función en un punto b al

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

si existe como número real. En tal caso, y esa es su interpretación geométrica, ese valor, que se denota por $f'(b)$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(b, f(b))$, cuya ecuación es

$$y - f(b) = f'(b).(x - b)$$

Toda función derivable siempre es continua no siendo cierto el recíproco (tomar $f(x) :=\mid x \mid$ en el punto 0).

Las fórmulas fundamentales de derivación son:

Suma: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Producto: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
Cociente:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$
Derivada de la función inversa: Si f tiene inversa g y $f'(x) \neq 0$ entonces si $y = f(x)$.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Las derivadas de las funciones elementales viene expresadas en la siguiente tabla

$f(x)$		$f'(x)$	$f(x)$		$f'(x)$
k		0	$\arccos x$		$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^p		px^{p-1}	$\arctan x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$		$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{senh} x$		$\cosh x$
a^x		$a^x \log a$	$\cosh x$		$\operatorname{senh} x$
$\log_a x$		$\dfrac{1}{x \log a}$	$\tanh x$		$1-\tanh^2 x$
$\operatorname{sen} x$		$\cos x$	$\arg \operatorname{senh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cos x$		$-\operatorname{sen} x$	$\arg \cosh x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tan x$		$1+\tan^2 x$	$\arg \tan x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			

Un artificio que aligera considerablemente la derivación de funciones complicadas es la denominada *derivación logarítmica*: consiste en tomar logaritmos en la expresión a derivar, aplicar las reglas y despejar la derivada de la función. Está especialmente dedicado a expresiones en las que aparece la variable también en el exponente. Sea, por ejemplo $y = x^x$. Tomando logaritmos (neperianos) queda $\log y = x \ \log x$; derivando se tiene $\dfrac{y'}{y} = \log x + 1$, en definitiva despejando la y,

$$y' = x^x(\log x + 1)$$

fórmula que se puede incorporar a la tabla anterior aunque es más útil recordar la técnica usada (tratar de derivar $y = x^{x^x}$.)

Ejercicio de autocomprobación: Derivar

$$y = \left(\operatorname{sen} e^{\left(\operatorname{arg\,tanh} \dfrac{x \log_3(x^4-1)}{\cos \sqrt[5]{x-3}}\right)} - \sqrt[x-7]{\arccos \log x^3} \right)^{\tan \dfrac{1+\operatorname{senh}(2x-9)}{5-\sqrt{\cos x^2}}}$$

Advertencia: Es evidente que quien sepa derivar con cierta soltura considerará exagerado el ejercicio y quien tenga dificultades huirá de él. En realidad gracias a la regla de la cadena y las reglas de derivación no se trata mas que de muchos ejercicios reunidos en uno solo. Trocee el lector e imagine como lo concluiría. Si le interesan los retos sólo necesita paciencia y papel.

Una de las aplicaciones más interesantes de las derivadas es la de proporcionarnos gráficas de funciones arbitrarias. Para ello nos basamos fundamentalmente en las siguientes propiedades:

Una función derivable es estríctamente creciente en los puntos en los que su derivada es estríctamente positiva siendo estríctamente decreciente en los puntos donde esa derivada es estríctamente negativa.

Los extremos de una función derivable son siempre solución de la ecuación que resulta de igualar su derivada a cero. Ese extremo resulta ser un máximo local si su segunda derivada (si existe) es negativa en el punto, y mínimo local si es positiva.

Una función dos veces derivable es convexa ($\cup$) en un punto si su segunda derivada es positiva en él, siendo cóncava ($\cap$) si es negativa. Los puntos de inflexión (puntos en los que la función pasa de convexa a cóncava o viceversa) son siempre soluciones de la ecuación que resulta de igualar su segunda derivada igualada a cero.

Para esbozar gráficas convendrá hacer uso de otros detalles como el dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, límites en el infinito ...etc.

Otros resultados fundamentales sobre funciones derivables son:

Teorema de Rolle : Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en $]a, b[$ siendo $f(a) = f(b)$, se tiene que existe, al menos, un c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio :: Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en $]a, b[$ existe, al menos, un c entre a y b tal que se cumple la llamada *Fórmula de Lagrange*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo Integral:: Si dos funciones $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y derivables en $]a, b[$ y tienen en este último derivadas iguales entonces se diferencian en una constante.

Regla de Bernouilli-L'Hôpital: Sean dos funciones continuas y derivables en un intervalo cuyas derivadas no se anulen simultáneamente. Si se puede calcular el $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ valiendo un número real o infinito, entonces igual le ocurre al $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(la variable x tiende a b siendo éste un número real o más o menos infinito)

Ejercicios de autocomprobación: Representar las funciones

1. Todas las elementales (hágase una recopilación de gráficas)
2. $f(x) := \dfrac{x}{x-1}$
3. $f(x) := \sqrt{8x^2 - x^4}$
4. $f(x) := x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$
5. $f(x) := \operatorname{sen} x + \cos x$

NOTA: **La fórmula de Taylor**

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admita derivadas hasta el orden $p+1$, siendo la última derivada continua. La *fórmula de Taylor* afirma que si a es un elemento de I se cumple para cualquier x de I la existencia de un c entre a y x tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + R$$

siendo R el llamado *resto de Lagrange* y que vale $\dfrac{f^{(p+1)}(c)}{1!}(x-a)^{p+1}$, (la notación ! significa el factorial, $n! := 1.2.3....n$)

Como caso particular y más usual tenemos la *fórmula de McLaurin* cuando $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + R$$

Los desarrollos más usados son los siguientes (conviene que se comprueben para así recordar la fórmula). Calcule el lector la expresión de R en cada caso.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^p}{p!} + R$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{p+1}\frac{x^p}{p} + R$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R$$

Notemos que las funciones seno y seno hiperbólico sólo tienen exponentes impares ya que son funciones impare $f(-x) = -f(x)$, mientras que las funciones coseno y coseno hiperbólico sólo tienen exponentes pares ya que son funciones pares $f(-x) = f(x)$.

Estos desarrollos (que en nuestros casos, al tratarse de funciones que se pueden derivar indefinidamente, valen para todo orden) nos permiten calcular aproximaciones de valores que por otro lado serían complicados. Por ejemplo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{1000000000!} =$$

$$= 2,718281828459045235360287 4....$$

10 Cálculo de primitivas y aplicaciones

En esta sección vamos a ser más prolijos pues la experiencia indica que es en la que, dentro del cálculo básico, se ha insistido menos.

Sea I un intervalo de la recta real y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que la función F es una primitiva de f en I si para cada elemento x de él se tiene

$$F'(x) = f(x)$$

entendiendo en los extremos, si cabe, la correspondiente derivada lateral. Así la función $F(x) := \operatorname{sen} x$ es una primitiva de la función $f(x) := \cos x$ en toda la recta.

Como una consecuencia del teorema del valor medio en una variable sabemos que dos funciones cuyas derivadas coincidan en un intervalo, en nuestro lenguaje dos primitivas de una misma función, difieren en una constante. Así pues conociendo una primitiva las conocemos todas. Al proceso por el que intentaremos calcular la forma de todas las primitivas de una función f se le denomina *integral indefinida* y lo denotamos como

$$\int f(x)\ dx$$

Por ejemplo

$$\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$$

El teorema fundamental del cálculo afirma que toda función definida y continua en un intervalo cerrado y acotado tiene primitiva. Una cuestión diferente es si esa primitiva se puede expresar con lo que coloquialmente llamamos una fórmula. Por ejemplo las funciones e^{-x^2} , $\dfrac{e^x}{x}$ y $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se sabe que no tienen primitiva elemental, es decir según una fórmula al uso, como se puede ver en D.G. Mead "Integration", *Am. Mathematical Monthly* vol. 68, págs. 152-156 (1961). Con ello advertimos que, siendo nuestro propósito dar métodos de cálculo de primitivas, éste puede ser no sólo costoso sino imposible. Nos ceñiremos a los métodos más simples pues ellos serán suficientes.

De la definición de integral indefinida y de las propiedades de las derivadas se deducen con inmediatez las siguientes :

(**PR1**) $\displaystyle\int f'(x)\ dx = f(x) + C$

(**PR2**) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

(**PR3**) $\displaystyle\int t.f(x)\ dx = t.\int f(x)\ dx \quad , \quad (t \text{ constante})$

Integrales inmediatas

El primer ejemplo que hemos visto de primitiva se ha deducido del conocimiento de que la derivada de la función seno es la función coseno. De idéntica manera podemos deducir rápidamente de las reglas de derivación una tabla de las que denominaremos *integrales inmediatas*. Al obtenerse por mera inspección y ser obviamente un proceso subjetivo deberemos ponernos de acuerdo en una tabla básica que será la siguiente (u es una función de la variable x):

$$(\mathbf{I1}) : \int u^p u' \; dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C \ , \ (p \neq -1) \qquad (\mathbf{I2}) : \int \frac{u' dx}{u} = \log \mid u \mid + C$$

$$(\mathbf{I3}) : \int u' a^u \; dx = \frac{a^u}{\log a} + C \qquad (\mathbf{I4}) : \int u' \operatorname{sen} u \; dx = -\cos u + C$$

$$(\mathbf{I5}) : \int u' \cos u \; dx = \operatorname{sen} u + C \qquad (\mathbf{I6}) : \int u' \tan u \; dx = -\log |\cos u| + C$$

$$(\mathbf{I7}) : \int \frac{u' dx}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C \qquad (\mathbf{I8}) : \int \frac{u' dx}{1+u^2} = \arctan u + C$$

$$(\mathbf{I9}) : \int u' \operatorname{senh} u \; dx = \cosh u + C \qquad (\mathbf{I10}) : \int u' \cosh u \; dx = \operatorname{senh} u + C$$

$$(\mathbf{I11}) : \int u' \tanh u \; dx = \log(\cosh x) + C \qquad (\mathbf{I12}) : \int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2+1}} = \arg \operatorname{senh} u + C =$$

$$= \log(u + \sqrt{u^2+1}) + C$$

$$(\mathbf{I13}) : \int \frac{u' dx}{\sqrt{u^2-1}} = \arg \cosh u + C = \qquad (\mathbf{I14}) : \int \frac{u' dx}{1-u^2} = \arg \tanh u + C =$$

$$= \log(u + \sqrt{u^2-1}) + C \qquad = \frac{1}{2} \log(\frac{1+u}{1-u}) + C$$

Ejemplo 10.1 *Calcular*

$$\int (3x^2-5)^3 x dx$$

Aunque podemos desarrollar el cubo, multiplicar por x y desglosar en integrales del tipo $\int x^n dx$, si nos damos cuenta la derivada del paréntesis es

$6x$ luego

$$\int (3x^2-5)^3 x dx = \frac{1}{6}\int (3x^2-5)^3 6x dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3x^2-5)^4 = \frac{1}{24}(3x^2-5)^4 + C$$

Ejemplo 10.2 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}$$

Si en la raíz sacamos factor común 4 se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-\dfrac{5x^2}{4}}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{5}x}{2})^2}}$$

Multiplicando el integrando por $\sqrt{5}$ y, para compensar, dividiendo fuera de la integral por la misma cantidad queda

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}dx}{\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{5}x}{2})^2}} = \arcsin\frac{\sqrt{5}x}{2} + C$$

Introducción bajo el signo diferencial

Vamos a denominar de esta manera a cuando busquemos transformar el integrando en una fracción en la que en el numerador tengamos la derivada del denominador. El resultado es el logaritmo neperiano del módulo del denominador. Es en realidad utilizar la inmediata **(I2)** pero la remarcamos por la importancia que tiene bien como modo de integrar bien como preludio a otro método.

Ejemplo 10.3 *Calcular*

$$I := \int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx \quad ; \quad J := \int \tan 3x\ dx$$

El resultado obviamente es

$$I = \log|(1+e^x)| + C \quad ; \quad J = -\frac{1}{3}\log|(\cos 3x)| + C$$

Integración por descomposición

En los tratados clásicos de cálculo se suele decir que derivar es técnica e integrar arte. Dicha afirmación se justifica en que, por complicada que sea una función, una buena descomposición de la misma con una correcta aplicación de la regla de la cadena y la tabla de derivación nos puede llevar sin complicaciones a la obtención de la derivada. Otra cuestión es el cálculo de primitivas que puede ser hasta imposible bajo la forma de expresión elemental como ya hemos citado. Hay incluso métodos creados para calcular un tipo particular de integrales. En este apartado pretendemos ver algunas integrales sencillas que, pudiéndose hacer de otros modos, se resuelven por métodos imaginativos descomponiéndolas adecuadamente.

Ejemplo 10.4 *Calcular*
$$I := \int \tan^2 x \; dx$$

Si sumamos y restamos la unidad al integrando y descomponemos se tiene

$$I = \int (1+\tan^2 x) \; dx - \int dx = \int \sec^2 x \; dx + \int dx = \tan x + x + C$$

Ejemplo 10.5 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \; \cos^2 x}$$

Si usamos que $1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ la integral queda

$$I = \int \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \; \cos^2 x} \; dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\text{cotan } x + \tan x + C$$

Ejemplo 10.6 *Calcular*

$$I := \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \; dx$$

Si multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{1+x}$ se tiene

$$I = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x \; dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Integración por sustitución

Teorema 10.7 *Teorema de cambio de variable*

Sea f una función continua y g una función de clase C^1 con derivada no nula. Si $x = g(t)$ tenemos

$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t))\ g'(t)\ dt$$

Decimos entonces que hemos hecho el cambio $x = g(t)$ y $dx = g'(t)\ dt$, lo que coincide con la notación diferencial tradicional.

Ejemplo 10.8 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Hagamos $x := t^2$, con lo que $dx = 2tdt$, y así

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$$

Integración por partes

Si tenemos sendas funciones de x, u y v derivables, sabemos que la derivación del producto nos da

$$(uv)' = u'v + uv'$$

manteniendo la notación $du = u'dx$ e integrando la igualdad anterior se tiene la llamada fórmula de *integración por partes*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

en la que tratamos de reducir la primera integral, a priori maás complicada, a la segunda más sencilla. El problema es cómo elegir u y dv. Una primera indicación obvia, pero necesaria, es que u debe ser una función cuya derivada sea más cómoda, mientras que v debe tener una primitiva más cómoda o, al menos, que se compensen ambas. Aunque no existen reglas generales de cuándo aplicar este método conviene pensar en él cuando aparezcan funciones trigonométricas, hiperbólicas, exponenciales o sus inversas multiplicadas entre sí o con funciones polinómicas.

Ejemplo 10.9 *Calcular*

$$\int xe^x\ dx$$

Si hacemos $u = x$ y $dv = e^x\ dx$, se tiene $du = dx$ y $v = e^x$, con lo que

$$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

A veces el proceso no parece resolver la integral pero una nueva aplicación nos resuelve no sólo un integral sino dos

Ejemplo 10.10 *Calcular*

$$I := \int e^x \operatorname{sen} x \; dx$$

Si hacemos $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \; dx$, se tiene $du = e^x dx$ y $v = -\cos x$, con lo que

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx$$

Si de principio hubiésemos tenido que calcular $J := \int e^x \cos x \; dx$, haciendo $u = e^x$ y $dv = \cos x \; dx$, se tendría $du = e^x dx$ y $v = \operatorname{sen} x$, es decir

$$J = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - J$$

Resolviendo la ecuación en J queda

$$J = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

donde hemos colocado al final la necesaria constante de integración pues el proceso nos había llevado a una primitiva. Procediendo similarmente para I se tendría

$$I = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ejemplo 10.11 *Calcular*

$$\int \operatorname{arcsen} x \; dx$$

Hagamos $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = dx$ con lo que $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y $v = x$. Así

$$\int \operatorname{arcsen} x \; dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Las integrales del resto de las funciones inversas de las trigonométricas y de las hiperbólicas se resuelven de la misma manera.

Ciertas integrales necesitan de la aplicación del método repetidas veces. Si pretendemos calcular $\int x^2 e^x \; dx$ veremos que haciendo $u = x^2$ y $dv = e^x \; dx$

se reduce a $\int xe^x\,dx$ que ya hemos estudiado. Conseguimos, pues, reducir el exponente de la x. Esto es más general: si queremos calcular $I_n := \int x^n e^x\,dx$ haciendo $u = x^n$ y $dv = e^x\,dx$ se obtiene

$$I_n = x^n e^x - I_{n-1}$$

expresión que se denomina *fórmula de reducción* para ese tipo de integrales. Eso nos simplifica la tarea para calcular integrales como la siguiente:

Ejemplo 10.12 *Calcular*

$$I := \int (x^4 + 5x^3 + x - 3)e^x\,dx$$

Con la notación anterior debemos calcular $I = I_4 + 5I_3 + I_1 - 3I_0 = x^4e^x - 4I_3 + 5I_3 + I_1 - 3I_0 = x^4e^x + I_3 + I_1 - 3I_0 = x^4e^x + x^3e^x - 3(x^2e^x - 2I_1) + I_1 - 3I_0 = (x^4+x^3-3x^2)e^x + 7I_1 - 3I_0 = (x^4+x^3-3x^2)e^x + 7xe^x - 10I_0 = (x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 10)e^x + C$.

Integración de funciones racionales

Para el cálculo de las integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

siendo P y Q polinomios en x de grados p y q, respectivamente, nos centraremos en aquéllas en que $p < q$, ya que si no fuese así bastaría dividir ambos polinomios reduciendo la fracción al cociente más una nueva fracción cuyo numerador (el resto de la división) tiene grado inferior al del denominador (q). Así, por ejemplo,

$$\frac{x^3}{x^2 - x + 1} = x + 1 - \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Comencemos estudiando el tipo más simple

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

con $m \neq 0$. Para resolverlas buscaremos primero en el numerador la derivada del denominador $(2ax+b)$ y descomponiendo en dos integrales, una inmediata del tipo **(I2)** y otra en la que ha desaparecido el coeficiente de la x en el numerador y en la que, completando cuadrados en el denominador, reducimos a las integrales inmediatas **(I8)** ó **(I14)**

Ejemplo 10.13 *Calcular*

$$I := \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$$

Busquemos en el numerador $2x+1$ que es la derivada del denominador:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

Multiplicando numerador y denominador del integrando por $\frac{4}{3}$ se tiene:

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Para resolver el caso general usaremos el método de *descomposición en fracciones simples*. Para ello tendremos en cuenta los siguientes resultados:

Todo polinomio $Q(x)$ de grado q tiene q raíces en $\mathbb{C}$. En tal caso dicho polinomio se puede factorizar como producto de polinomios irreducibles (que ya no se pueden factorizar) asociados a sus raíces del siguiente modo:

(a) Si α es una raíz con índice de multiplicidad r aparece r veces el factor $(x-\alpha)$.

(b) Si $\alpha \pm \beta\mathbf{i}$ son raíces conjugadas complejas con índice de multiplicidad r aparece r veces el factor $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Una vez realizada la factorización el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede escribir como suma de fracciones de la siguiente manera:

i) Si aparece el factor $(x-\alpha)$ colocaremos la fracción $\frac{A}{(x-\alpha)}$ siendo A un coeficiente real a determinar.

ii) Si aparece el factor $(x-\alpha)$ r veces colocaremos las fracciones $\frac{A_1}{(x-\alpha)},\ldots,\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$, siendo A_1,..., A_r coeficientes reales a determinar.

iii) Si aparece el factor $(x-\alpha)^2+\beta^2$ colocaremos la fracción $\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

iv) Si aparece el factor $(x-\alpha)^2+\beta^2$ varias veces podríamos proceder similarmente como en *(ii)*.

Tras la descomposición se calculan los coeficientes indeterminados y la integral original queda reducida a integrales que son inmediatas o del tipo inicial con denominador de grado 2.

Ejemplo 10.14 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

El denominador tiene como raíces $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$ luego planteamos la descomposición

$$\frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Para calcular A, B y C sumemos las fracciones del segundo miembro de la igualdad

$$\frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

Identificando numeradores $1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$ podemos proceder de dos maneras, una igualando los coeficientes de ambos polinomios, y otra al tratarse de una identidad dándole valores a x, exactamente aquéllos que anulan los factores elementales: así si $x = 0$ se tiene $6A = 1$, si $x = 2$ se tiene $-2B = 1$ y si $x = 3$ se tiene $3C = 1$. En definitiva

$$\frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{1}{6}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-3}$$

y, por lo tanto,

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}dx = \frac{1}{6}(\log|x| - 3\log|x-2| + 2\log|x-3|) + C =$$

$$= \frac{1}{6}\log|\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}| + C$$

En la práctica este método se usa cuando estamos en los tres primeros casos; si nos encontramos en el cuarto existe un método llamado de *Hermite* (o de *Ostrogadski* en textos rusos) para reducir la integral a una en la que el denominador tenga sólo raíces simples (el índice de multiplicidad es la unidad). En esencia consiste en escribir

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

donde $Q_2(x)$ es el polinomio que resulta de escribir los factores de $Q(x)$ una sola vez, $Q_1(x)$ el cociente entre $Q(x)$ y $Q_2(x)$, y los numeradores son polinomios con coeficientes indeterminados que se calculan derivando la fórmula del método.

Ejemplo 10.15 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Aparece dos veces en el denominador el factor $(1+x^2)$ cuyas raíces son $\pm\mathbf{i}$. Según el método de Hermite debemos escribir

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \int \frac{Cx+D}{1+x^2}dx$$

Derivando la expresión tenemos

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{A(1+x^2)-2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{Cx^3+(D-a)x^2+(2B+C)x+A+D}{(1+x^2)^2}$$

Identificando numeradores $C = 0$, $B = 0$, $A = D$ y $1 = A + D$, con lo que $A = D = \frac{1}{2}$; luego

$$I = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Este método se puede aplicar siempre que haya raíces múltiples sean o no imaginarias.

Integración de funciones irracionales

Se entiende por funciones irracionales aquellas que son sumas, restas , productos o cocientes de polinomios elevados a exponentes fraccionarios.

Comencemos, como en el método anterior, estudiando el tipo más simple

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

con $m \neq 0$. Para resolverlas, como allí, buscaremos primero en el numerador la derivada del radicando del denominador $(2ax + b)$ y descomponiendo en dos integrales, una inmediata del tipo **(I1)** y otra en la que ha desaparecido el coeficiente de la x en el numerador y en la que, completando cuadrados en el radicando del denominador, reducimos a las integrales inmediatas **(I7)**,**(I12)** ó **(I13)**.

Ejemplo 10.16 *Calcular*

$$I := \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$$

Busquemos en el numerador $2x+1$ que es la derivada de x^2+x+1:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

Multiplicando numerador y denominador del integrando por $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ queda

$$I = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}} = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arg\,senh}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

Unas integrales más generales son las del tipo

$$I := \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

con $P(x)$ un polinomio de grado p , que se resuelven con lo que tradicionalmente se conoce como *Método alemán*. Según éste se escribe

$$I = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

siendo $Q(x)$ un polinomio de grado $p-1$, con coeficientes indeterminados, y λ un número real a determinar. El cálculo de dichos parámetros se realiza derivando la expresión anterior. Así estas integrales quedan reducidas al método básico.

Ejemplo 10.17 *Calcular*

$$I := \int \frac{4x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}}\,dx$$

Escribimos

$$I = (ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{-x^2-2x} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}};$$

derivando se tiene:

$$\frac{4x^4+7x^3-x}{\sqrt{-x^2-2x}} = -(3ax^2+2bx+c)\sqrt{-x^2-2x} - (ax^3+bx^2+cx+d)\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x^2-2x}}$$

operando queda

$$4x^4+7x^3-x=-(3ax^2+2bx+c)(-x^2-2x)-(ax^3+bx^2+cx+d)(x+1)+\lambda$$

Igualando coeficientes se obtiene que $a=-1$, $b=c=0$, $d=-1$ y $\lambda=1$, luego

$$I=(1-x^3)\sqrt{-x^2-2x}+\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}=(1-x^3)\sqrt{-x^2-2x}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2+2x+1)}}=$$

$$=(1-x^3)\sqrt{-x^2-2x}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=(1-x^3)\sqrt{-x^2-2x}+\operatorname{arcsen}(x+1)+C$$

Podemos realizar así, por ejemplo, todas las integrales del tipo

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Son muchas las integrales en las que aparece una función racional de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Si no se pueden reducir a los métodos anteriores se pueden realizar los denominados *Cambios de Euler*:

(i) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+u$, si $a>0$

(ii) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xu\pm\sqrt{c}x$, si $c>0$

(iii) $\sqrt{ax^2+bx+c}=u(x-\alpha)$, si α es una raíz real del trinomio.

Otro tipo habitual de integrales son aquéllas en las que una misma expresión de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$ aparece elevada a varios exponentes racionales $\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_n}{q_n}$. La integral se reduce a una racional con el cambio

$$\frac{ax+b}{cx+d}=u^m$$

siendo m el mínimo común múltiplo de los denominadores q_i.

Ejemplo 10.18 *Calcular*

$$I:=\int\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

La expresión $x+1$ aparece elevada a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, luego conviene ensayar la sustitución $x+1=u^6$, con lo que $dx=6u^5du$ y se tiene

$$I=6\int\frac{(1+u^3)u^5}{1+u^2}\,du=6\int(u^6-u^4+u^3-u^2-u+1-\frac{u+1}{1+u^2})\,du=$$

$$= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 6u - 3\log(1+u^2) - \arctan u + C.$$

Queda sólo deshacer el cambio haciendo $u = \sqrt[6]{x+1}$.

Integración de funciones trigonométricas

Estudiaremos, en primer lugar, las integrales del tipo

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\ dx$$

donde f es una función racional. Estas integrales se reducen a una racional usando el cambio $\tan\frac{x}{2} = t$. En tal caso, como $x = 2\arctan t$, se tiene que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. También es útil saber los valores del seno y del coseno en función de t. Para ello

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo 10.19 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$$

Con el cambio citado queda

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2+2t} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.$$

Sin embargo ciertas integrales quedan muy lejos de resultar simples con este cambio. Así, por ejemplo

Ejemplo 10.20 *Calcular*

$$I := \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\ dx$$

Con el cambio $\tan \frac{x}{2} = t$ se reduce a la racional

$$8 \int \frac{t^2(1-t^2)^3}{(1+t^2)^6}\ dt$$

que requeriría, aplicando el método de Hermite, de la resolución de un sistema de once ecuaciones con once incognitas. Sin embargo si la escribimos como

$$I := \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x\ dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\ dx$$

nos damos cuenta que haciendo $\operatorname{sen} x = t$ se tiene $\cos x\ dx = dt$ y la integral queda inmediata

$$\int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C.$$

En general dada $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\ dx$ podemos reducirla a una integral racional más simple en los siguientes casos:

(i) Si $f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ haremos el cambio $\cos x = t$

(ii) Si $f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ haremos el cambio $\operatorname{sen} x = t$

(iii) Si $f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ haremos el cambio $\tan x = t$

Así, generalizando el ejemplo anterior, seremos capaces de resolver, según la paridad de p o de q, las integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\ dx$$

Para cualesquiera integrales que involucren funciones trigonométricas conviene hacer uso de identidades que faciliten la integración

Ejemplo 10.21 *Calcular*

$$I := \int \operatorname{sen} 3x\ \cos 2x\ dx$$

Sumando las identidades (recordar la sección 4)
$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$
$\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A$
se tiene $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B))$, luego

$$I = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x)\ dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

Integración de funciones hiperbólicas

Lo dicho en el método anterior se puede repetir palabra por palabra para las integrales del tipo $\displaystyle\int f(\operatorname{senh} x, \cosh x)\, dx$ donde

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

teniéndose la identidad básica $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. Sin embargo reduciendo dichas funciones a su expresión exponencial pueden quedar del tipo

$$\int F(e^x)\, dx,$$

donde F es una función racional, que se reducen a racionales por el cambio $e^x = t$.

Ejemplo 10.22 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{\operatorname{senh} x}$$

Si hacemos el cambio $\cosh x = t$ (ya que al cambiar $\operatorname{senh} x$ por $-\operatorname{senh} x$ el integrando cambia de signo) se tiene $\operatorname{senh} x = \sqrt{t^2-1}$, con lo que

$$I = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}}{\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t}) + C = \frac{1}{2}\log(\frac{1-t}{1+t}) + C = \frac{1}{2}\log(\frac{1-\cosh x}{1+\cosh x}) + C$$

Si, por el contrario, escribimos $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, podemos hacer el cambio $e^x = t$ y se tiene

$$I = \int \frac{2dx}{e^x - e^{-x}} = 2\int \frac{e^x\ dx}{e^{2x}-1} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = -\log(\frac{1+t}{1-t}) + D =$$

$$= \log(\frac{1-t}{1+t}) + D = \log(\frac{1-e^x}{1+e^x}) + D$$

Notemos también que como $\operatorname{senh} x = 2\operatorname{senh}\dfrac{x}{2}\cosh\dfrac{x}{2} = 2\tanh\dfrac{x}{2}\cosh^2\dfrac{x}{2}$ se podría haber hecho

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh\frac{x}{2}}}{\tanh\frac{x}{2}}\ dx = \log|\tanh\frac{x}{2}| + K$$

que es como si hubiésemos aplicado el cambio general $\tanh\dfrac{x}{2} = t$.

Aunque aquí cada una de las tres expresiones obtenidas por cada método parezca muy distinta a las otras dos cabe recordar que se diferenciaran en una constante, por eso hemos expresado cada una de las constantes genéricas con una letra distinta.

Sustituciones trigonométricas o hiperbólicas

En algunas integrales de funciones irracionales es posible encontrar las expresiones

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad ; \quad \sqrt{a^2 + x^2} \quad ; \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

Si tenemos en cuenta las identidades

$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \quad ; \quad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t \quad ; \quad \operatorname{cotan}^2 t + 1 = \operatorname{cosec}^2 t$

$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \quad ; \quad 1 - \tanh^2 t = \operatorname{sech}^2 t \quad ; \quad \operatorname{cotanh}^2 t - 1 = \operatorname{cosech}^2 t$

podremos eliminar las raíces con sustituciones del tipo

$$x = af(t)$$

siendo $f(t)$ una función trigonométrica o hiperbólica.

Ejemplo 10.23 *Calcular*

$$I := \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \quad ; \quad J := \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Para calcular I hagamos $x = \operatorname{senh} t$ con lo que $dx = \cosh t \; dt$, siendo $1 + x^2 = \cosh^2 x$. Por lo tanto

$$I = \int \frac{\cosh t \; dt}{\cosh^3 t} = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t + C = \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Se podría haber utilizado el cambio $x = \tan t$.

Para calcular J hagamos $x = \operatorname{sen} t$ con lo que $dx = \cos t \; dt$, siendo $1 - x^2 = \cos^2 x$. Por lo tanto

$$J = \int \frac{\cos t \; dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Aquí podríamos haber utilizado el cambio $x = \tanh t$.

Una de las aplicaciones del cálculo de primitivas es el cálculo de áreas de regiones en el plano.

Se llama integral definida de una función f en un intervalo $[a,b]$ a la diferencia de valores que toma cualquier primitiva F en los extremos, es decir, $F(b)-F(a)$. La elección de la primitiva es indiferente en virtud de la forma de todas ellas. Denotamos ese valor por $\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b$.

Si f es una función no negativa en el intervalo $[a,b]$, el área que delimita la gráfica de f, el eje de abcisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es $A := \int_a^b f(x)\ dx$

Si f toma valores positivos y negativos se toma $\mid f \mid$ o equivalentemente se suman los valores absolutos de las correspondientes integrales definidas en esos intervalos.

Es importante insistir en la diferencia entre área e integral definida. Pongamos un ejemplo: $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\ dx = 0$ mientras que el área limitada por la función seno, el eje de abcisas y las rectas $x=0$ y $x=2\pi$ es $A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\ dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\ dx = 2-(-2) = 4$

Finalmente, si queremos calcular el área encerrada ente las funciones f y g desde a hasta b , debemos calcular

$$\int_a^b \mid f(x)-g(x) \mid \ dx$$

Para acabar la sección conviene recordar el Teorema Fundamental del Cálculo que afirma que si tenemos una función continua f definida en un intervalo $[a,b]$, la función

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$$

es derivable en todo el intervalo y su derivada vale $f(x)$.

Así, por ejemplo si $F(x) := \int_0^x \operatorname{sen} t^2\ dt$, se tiene que $F'(x) = \operatorname{sen} x^2$. Si uno o ambos límites de integración son función de la variable se puede aplicar la regla de la cadena: así, por ejemplo, si $G(x) := \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\ dt$, la función G es la composición de la F anterior y la función $g(x) := x^3$, esto es $G = F \circ g$ con lo que

$$G'(x) = F'(g(x)).g'(x) = \operatorname{sen} x^6.3x^2 = 3x^2 \operatorname{sen} x^6$$

Ejercicios de autocomprobación: Calcular las siguientes integrales:

1.
$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\ dx$$

2.
$$\int \frac{\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[5]{2x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\ dx$$
3.
$$\int \frac{dx}{(x-1)^5}$$
4.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$$
5.
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos x + 1}\ dx$$
6.
$$\int \frac{dx}{x \log x}$$
7.
$$\int x\sqrt{3+4x}\ dx$$
8.
$$\int x^3(2+7x^2)\ dx$$
9.
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$
con el cambio $\frac{1}{x} = u$

10.
$$\int \arctan x\ dx$$
11.
$$\int \operatorname{arg\,senh} x\ dx$$
12.
$$\int x^p \log x\ dx \quad ; \quad p \neq -1$$
13.
$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx \quad \text{y} \quad \int \cos^2\ dx$$
usando integración por partes y sin usarla.

14.
$$\int (2x^4 - 5x^3 - x^2 + x - 1) \cos x\ dx$$
hallando previamente una fórmula de reducción para las integrales

$I_p := \int x^p \cos x\ dx$ y $J_p := \int x^p \operatorname{sen} x\ dx$

15.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx \quad ; \quad \int \sqrt{a^2+x^2}\ dx \quad ; \quad \int \sqrt{x^2-a^2}\ dx \quad ;$$

por partes, por el método alemán y por sustituciones trigonométricas o hiperbólicas.

16.

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-2}\ dx$$

17.

$$\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-2x-3}\ dx$$

18.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

por descomposición y por el método de Hermite.

19.

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}\ dx$$

20.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

por el método alemán, por sustitución trigonométrica y por la sustitución $x^2=u$.

21.

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$$

22.

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$

23.

$$\int \cos^2 x\ \ \operatorname{sen}^3 x\ dx$$

24.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}\ dx$$

25.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x \cos 2x\ dx$$

26. Hallar el área encerrada por las curvas $y=x^2$, $x=y^2$

27. Idem $y=x^2$, $x+y=2$

28. Idem $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

29. Idem $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$
30. Idem $y = x$, $y = x + \operatorname{sen}^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$
31. Derivar la función: $F(x) := \int_0^x \cos^3 t \; dt$
32. Idem $F(x) := \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} \; dt$
33. Idem $F(x) := \int_0^{\cos x} (t + 3) \; dt$
34. Idem $F(x) := \int_x^3 (t + 2)^2 \; dt$
35. Idem $F(x) := \int_x^{x^2} x \operatorname{sen} t^2 \; dt$

11 Apéndice: La demostración en Matemáticas

El método habitual de exposición de una teoría matemática es el axiomático: en él se establecen unos principios básicos que se llaman *postulados* o *axiomas* que se admiten como verdades sin demostración. Con un esquema lógico se desarrolla la teoría en la que se demuestran los resultados. Vamos a presentar alguno de los métodos de demostración usados en Matemáticas y, en particular en estas notas. No entraremos en discusiones más o menos profundas sobre la fundamentación y axiomática de las mismas.

Demostración constructiva:

Llamaremos así a aquella en la que debemos probar la existencia de un objeto matemático que construimos explícitamente. Por ejemplo el cálculo de las soluciones de la ecuación de segundo grado con una incognita

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

Vamos a completar el miembro de la izquierda hasta obtener un cuadrado: multipliquemos ambos miembros por a y sumemos $\frac{b^2}{4}$, obteniendo

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} + ca = \frac{b^2}{4}$$

es decir

$$(ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} \Longrightarrow (ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

de ahí

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

y despejando la x se obtienen las soluciones

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración existencial no constructiva:

Es aquella en la que se prueba la existencia de un objeto pero no somos capaces de dar su construcción. Consideremos, como ejemplo, la ecuación

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

Aseguramos que tiene una raíz real entre 0 y 1. En efecto si se toma la función $f(x) := x^3 + x^2 + x - 1$ se tiene que $f(0) = -1$ mientras que $f(1) = 2$. Al ser f continua, el teorema de Bolzano nos asegura que debe existir un número c real tal que $f(c) = 0$. Para poder calcular ese c deberemos buscar otro método pues la prueba no nos lo construye.

Demostración por reducción al absurdo:

Es una demostración basada en el principio de que la negación de la negación de una proposición es ella misma. Supongamos que tenemos que probar una proposición P. Se parte de la hipótesis de que la negación de P es cierta y por procedimientos válidos se llega a una contradicción bien con los principios lógicos bien con las hipótesis planteadas. La contradicción obliga a que la negación de P sea falsa luego P es válida.

Como ejemplo probemos, como hemos anunciado en la sección 2 que $\sqrt{2}$ no es racional. Si tal número fuera racional se podría escribir $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Vamos a considerar que la expresión es irreducible. En tal caso $p^2 = 2q^2$, luego p^2 es múltiplo de 2 y, por lo tanto, también lo es p (¿porqué?). Escribamos $p = 2r$, Así $4r^2 = 2q^2$, y por ende, $2r^2 = q^2$; como antes q^2 es múltiplo de 2 y, por lo tanto, también lo es q. Hemos llegado a la contradicción de suponer $\frac{p}{q}$ irreducible pero obtener que se puede reducir pues su elementos son pares. La suposición era falsa y la raíz de 2 no puede ser racional.

Demostración por inducción matemática:

Se basa fundamentalmnte en la estructura de los números naturales.

Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural n. Para probar que es cierta basta con probar:

(1) Que $P(1)$ es cierta

(2) Que, bajo la hipótesis de que $P(n)$ es cierta, se puede probar $P(n+1)$.

Una imagen interesante es una figura realizada con fichas de dominó de forma que si cae una ficha cae la siguiente. Basta con que tiremos la primera y caerá todo el entramado. Más formalmente $P(1)$ es cierta por (1), $P(2)$ es cierta aplicando (2) para $n = 1$, $P(3)$ es cierta aplicando (2) para $n = 2$, $P(4)$ es cierta aplicando (2) para $n = 3$,... y así sucesivamente cubrimos tras un número finito de pasos cualquier $P(n)$.

Veamos un ejemplo: probaremos que para cualquier natural n la suma de los n primeros números naturales es $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Para $n = 1$ es inmediato pues $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$

Supongamos la fórmula cierta para n; entonces

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n.(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= (n+1).(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

que es la fórmula para $n + 1$.

NOTA FINAL: Como se habrá comprobado el contenido de las secciones no es homogéneo y puede ser incluso discutible. Se trata de una segunda versión de la ya iniciada en Ingeniería Química a finales del siglo pasado y debería ser el germen de un curso "cero" de Matemáticas dirigido a estudiantes de Ciencias e Ingenierías. Su único objeto es ser útiles y son, por supuesto, mejorables. Se agradecerá que cualquier errata o sugerencia se haga llegar por correo electrónico a la dirección Rafael.Crespo@uv.es o, por correo ordinario al Departament d'Anàlisi Matemàtica de la Universitat de València, Edificio de Investigación, Campus de Burjassot-Paterna. 46100 Burjassot (Valencia).