17 de Noviembre de 2005

Discrepancia Intrínseca Aproximada

JOSÉ-MIGUEL BERNARDO
Universitat de València, España
<jose.m.bernardo@uv.es>

RESUMEN

En modelos regulares y para datos que no sean extremos, el valor de la discrepancia intrínseca puede ser aproximado utilizando una aproximación normal para la distribución en el muestreo de un estadístico suficiente. Su valor esperado proporciona aproximaciones sencillas para la solución a los problemas de estimación (puntual y por intervalos) que se basan en la discrepancia intrínseca como función de pérdida.

Palabras Clave: DISCREPANCIA INTRÍNSECA; PARAMETRIZACIÓN DE REFERENCIA; ESTIMACIÓN PUNTUAL; INTERVALOS CREÍBLES.

1. EL PROBLEMA

Sea $\mathcal{M} = \{p(x\,|\,\theta), \theta \in \Theta, x \in \mathcal{X}\}$ un modelo regular, de manera que $\mathcal{X}$ no depende de θ y, como función de θ, $p(x\,|\,\theta)$ es al menos dos veces derivable, y sea $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una muestra aleatoria de $p(x\,|\,\theta)$, de forma que $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i\,|\,\theta)$. Supóngase además que la función de verosimilitud $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)$ factoriza en la forma $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta) = f(t,\theta)g(\boldsymbol{x})$, para un estadístico $t = t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{T} \subset \Re$, con lo que el par $\{n, t\}$ es suficiente, y que existe un único estimador máximo-verosímil, $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(\boldsymbol{x}) = \hat{\theta}_n(t)$. Finalmente, sea $i(\theta)$ la función de Fisher del modelo $\mathcal{M}$,

$$i(\theta) = \mathrm{E}_{x\,|\,\theta}\Big[-\frac{\partial}{\partial\theta^2}\log p(x\,|\,\theta)\Big] = -\int_{\mathcal{X}} p(x\,|\,\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta^2}\log p(x\,|\,\theta)\,dx,$$

con lo que la distribución final de referencia será

$$\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x}) = \pi(\theta\,|\,n,t) \propto f(t,\theta)\,\pi(\theta), \quad \pi(\theta) = i(\theta)^{1/2}.$$

En estas condiciones, se trata de encontrar una aproximación asintótica (para valores grandes de n) para el *estadístico intrínseco*, es decir (Bernardo & Rueda, 2002), para la discrepancia esperada

$$d(\theta_0\,|\,\boldsymbol{x}) = d(\theta_0\,|\,n,t) = \int_\Theta \delta\{\theta_0,\theta\}\,\pi(\theta\,|\,n,t)\,d\theta.$$

$$\delta\{\theta_i,\theta_j\} = \delta\{p_{\boldsymbol{x}}(.\,|\,\theta_i), p_{\boldsymbol{x}}(.\,|\,\theta_j)\} = \min[\kappa\{\theta_i\,|\,\theta_j\}, \kappa\{\theta_j\,|\,\theta_i\}],$$

$$\kappa\{\theta_i\,|\,\theta_j\} = \int_{\mathcal{X}} p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta_j)\log\frac{p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta_j)}{p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta_i)}\,dx,$$

en términos de $i(\theta)$ y de los primeros momentos $\mu_\theta = \mathrm{E}[\theta\,|\,n,t]$ y $\sigma^2_\theta = \mathrm{Var}[\theta\,|\,n,t]$ de la distribución final de referencia,

2. APROXIMACIÓN A LA DISCREPANCIA INTRÍNSECA

Si n es grande, la distribución en el muestreo del estimador máximo verosímil $\hat\theta_n$ tiene una media aproximada $\mu_{\hat\theta_n} = \mathrm{E}[\hat\theta_n \,|\, \theta] = \theta$, y una varianza aproximada $\sigma^2_{\hat\theta_n} = \mathrm{Var}[\hat\theta_n \,|\, \theta] \approx i^{-1}(\theta)/n$. Para poder aproximar con facilidad la discrepancia intrínseca, se requiere una transformación $\phi = \phi(\theta)$ tal que la varianza de la distribución de $\hat\phi_n$ no dependa de ϕ. Si w es una variable aleatoria de media μ_w y varianza σ^2_w, la varianza de $g(w)$ verifica que $\mathrm{Var}[g(w)] \approx \sigma^2_w\,[g'(\mu_w)]^2$. Consecuentemente, para que la varianza de $\hat\phi_n$ sea aproximadamente igual a $1/n$, independiente de ϕ, deberá cumplirse que

$$\sigma^2_{\hat\theta_n}\,[\phi'(\mu_{\hat\theta_n})]^2 = \frac{1}{n\,i(\theta)}[\phi'(\theta)]^2 = \frac{1}{n},$$

y por lo tanto,

$$\phi'(\theta) = \sqrt{i(\theta)}, \quad \phi(\theta) = \int \sqrt{i(\theta)}\,d\theta. \tag{1}$$

Para valores grandes de n, la distribución en el muestreo de este nuevo estadístico será aproximadamente normal; específicamente, será

$$p(\hat\phi_n \,|\, \phi) \approx \mathrm{N}(\hat\phi_n \,|\, \phi, 1/\sqrt{n}) \tag{2}$$

Además, (Bernardo, 2005), la discrepancia intrínseca es invariante ante reparametrizaciones, y también ante sustituciones de los datos por estadísticos suficientes. Consecuentemente,

$$\delta\{\theta_0, \theta\} = \delta\{p_{\boldsymbol{x}}(.\,|\,\phi_0), p_{\boldsymbol{x}}(.\,|\,\phi)\} = \delta\{p_{\hat\phi_n}(.\,|\,\phi_0), p_{\hat\phi_n}(.\,|\,\phi)\}. \tag{3}$$

Por otra parte, la discrepancia intrínseca entre dos distribuciones normales con medias μ_1 y μ_2 y varianza común σ^2 es

$$\delta\{\mu_1, \mu_2 \,|\, \sigma) = \frac{1}{2}\,\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma^2}\,. \tag{4}$$

Combinando (2), (3) y (4), resulta

$$\delta\{\theta_0, \theta\} = \delta\{\phi_0, \phi\} \approx \frac{n}{2}\,(\phi - \phi_0)^2 = \frac{n}{2}\,[\phi(\theta) - \phi(\theta_0)]^2\,. \tag{5}$$

3. DISCREPANCIA ESPERADA

3.1. *Aproximación directa*

Utilizando de nuevo la invariancia de la discrepancia intrínseca,

$$d(\theta_0 \,|\, \boldsymbol{x}) = \int_\Theta \delta\{\theta_0, \theta\}\,\pi(\theta \,|\, n, t)\,d\theta = \int_\Phi \delta\{\phi_0, \phi\}\,\pi(\phi \,|\, n, t)\,d\phi; \tag{6}$$

Sustituyendo $\delta\{\phi_0, \phi\}$ en (6) por la expresión obtenida en (5), resulta

$$\begin{aligned} d(\phi_0 \,|\, \boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}_{\phi\,|\,\boldsymbol{x}}[\frac{n}{2}\,(\phi - \phi_0)^2] = \mathrm{E}_{\phi\,|\,\boldsymbol{x}}[\frac{n}{2}\,(\phi - \mu_\phi + \mu_\phi - \phi_0)^2] \\ &= \frac{n}{2}\left[\mathrm{E}_{\phi\,|\,\boldsymbol{x}}(\phi - \mu_\phi)^2] + (\mu_\phi - \phi_0)^2\right], \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la aproximación buscada resulta ser

$$d(\phi_0 \,|\, \boldsymbol{x}) = \frac{n}{2}\Big[\sigma_\phi^2 + (\mu_\phi - \phi_0)^2\Big], \tag{7}$$

donde μ_ϕ y σ_ϕ^2 son, respectivamente, la media y la varianza de la distribución final de referencia de ϕ. Como puede observarse, $d(\phi_0, \boldsymbol{x})$ es, como función de ϕ_0, una función convexa y simétrica alrededor de μ_ϕ, que tiene su mínimo en el valor $\phi_0 = \mu_\phi$. Consecuentemente,

(i) el estimador intrínseco de ϕ es, aproximadamente, la media de su distribución final, es decir,

$$\phi^*(\boldsymbol{x}) \approx \mathrm{E}[\phi \,|\, \boldsymbol{x}] = \mu_\phi. \tag{8}$$

Puesto que la estimación intrínseca es invariante frente a biyecciones $\theta^*(\boldsymbol{x})$, el estimador intrínseco de θ, será simplemente la solución de $\phi^* = \phi(\theta^*)$, es decir, $\theta^* = \phi^{-1}(\phi^*)$.

(ii) Puesto que, como función de ϕ_0, $d(\phi_0 \,|\, \boldsymbol{x})$ es aproximadamente simétrica respecto a μ_ϕ, los intervalos de mínima pérdida intrínseca esperada, en términos de ϕ serán aproximadamente simétricos alrededor de μ_ϕ. Además, para tamaños muestrales grandes y datos no extremos, la distribución final de ϕ será aproximadamente normal $\mathrm{N}(\phi \,|\, \mu_\phi, \sigma_\phi)$ y, por lo tanto, en términos de ϕ, las regiones intrínsecas p-creíbles serán de la forma

$$R_p^\phi \approx [\mu_\phi - q_p\,\sigma_\phi,\; \mu_\phi + q_p\,\sigma_\phi] \tag{9}$$

donde q_p es el cuantil de orden $(p+1)/2$ de la distribución normal estándar. Finalmente, por invariancia, los intervalos de mínima pérdida intrínseca esperada, en términos de θ serán de la forma $R_p^\theta = \phi^{-1}\{R_p^\phi\}$.

3.2. *Método delta*

En algunos casos $\mu_\phi = \mathrm{E}[\phi \,|\, n, t]$ y $\sigma_\phi^2 = \mathrm{Var}[\phi \,|\, n, t]$ tienen directamente expresiones analíticas y la aproximación (7) para $d(\phi_0 \,|\, \boldsymbol{x})$ es inmediatamente calculable. Si ese no es el caso, los valores de μ_ϕ y σ_ϕ^2 pueden expresarse de forma aproximada en términos de los primeros momentos μ_θ y σ_θ^2 de la distribución final de θ utilizando el método delta, de forma que

$$\mu_\phi \approx \phi(\mu_\theta) + \tfrac{1}{2}\,\sigma_\theta^2\,\phi''(\mu_\theta), \tag{10}$$

$$\sigma_\phi^2 \approx \sigma_\theta^2\,[\phi'(\mu_\theta)]^2. \tag{11}$$

Por otra parte, bajo condiciones de regularidad la precisión asintótica de θ es $n\,i(\mu_\theta)$ y, consecuentemente,

$$\sigma_\theta^2 = \mathrm{Var}[\theta \,|\, \boldsymbol{x}] \approx i^{-1}(\mu_\theta)/n. \tag{12}$$

Como, por definición (Ecuación 1), $\phi'(\theta) = \sqrt{i(\theta)}$, sustituyendo en (11) resulta

$$\sigma_\phi^2 \approx \frac{1}{n}\,, \tag{13}$$

de forma que la varianza final de ϕ es prácticamente independiente de los datos $\boldsymbol{x}$ y sólo depende del tamaño muestral n. Además, desarrollando en serie alrededor de μ_θ, el valor de μ_ϕ puede expresarse como

$$\mu_\phi = \phi(\mu_\theta + h) \approx \phi(\mu_\theta) + h\,\phi'(\mu_\theta)\,; \tag{14}$$

Igualando (10) y (14) para determinar h, resulta

$$\mu_\phi \approx \phi\biggl(\mu_\theta + \frac{1}{2}\,\sigma_\theta^2\,\frac{\phi''(\mu_\theta)}{\phi'(\mu_\theta)}\biggr), \tag{15}$$

Sustituyendo (13) y (15) en (7) resulta una nueva aproximación para $d(\phi_0\,|\,\boldsymbol{x})$, algo menos precisa que (7) pero típicamente analítica, dada por

$$d(\theta_0\,|\,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\,[\phi(\hat{\theta}^*) - \phi(\theta_0)]^2, \tag{16}$$

donde

$$\hat{\theta}^*(\boldsymbol{x}) = \mu_\theta + \frac{1}{2}\,\sigma_\theta^2\,\frac{\phi''(\mu_\theta)}{\phi'(\mu_\theta)} \tag{17}$$

proporciona una aproximación directa de $\theta^*(\boldsymbol{x})$, el estimador intrínseco de θ. La región intrínseca p-creíble en términos de θ será $R_p^\theta = \phi^{-1}\{R_p^\phi\}$, con

$$R_p^\phi = \hat{\phi}^* \pm \frac{q_p}{\sqrt{n}}, \qquad \hat{\phi}^* = \phi(\hat{\theta}^*). \tag{18}$$

4. EJEMPLOS

4.1. *Datos exponenciales*

Sea $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_i > 0$, una muestra aleatoria de una distribución exponencial $p(x\,|\,\theta) = \theta e^{-x\theta}$. Se trata de un modelo regular, con función de verosimilitud $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta) = \theta^n e^{-t\,\theta}$, donde $t = \sum_{i=1}^n x_i$, de forma que el par $\{n, t\}$ es suficiente, y el estimador máximo-verosímil, la solución de $\partial \log p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)/\partial\theta = 0$, es $\hat{\theta}_n = n/t = 1/\overline{x}$.

La función de Fisher resulta ser

$$i(\theta) = \theta^{-2} \tag{19}$$

y, por lo tanto,

$$\phi(\theta) = \int \sqrt{i(\theta)}\,d\theta = \int \theta^{-1}\,d\theta = \log\theta, \tag{20}$$

y la distribución inicial de referencia para θ es $\pi(\theta) = \sqrt{i(\theta)} = \theta^{-1}$. Por el teorema de Bayes, la distribución final de θ es

$$\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x}) \propto p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta) \propto \theta^{n-1}e^{-t\,\theta} \propto \mathrm{Ga}(\theta\,|\,n, t).$$

Consecuentemente, la media final de $\phi = \phi(\theta)$ es

$$\mu_\phi = \mathrm{E}[\phi(\theta)\,|\,n, t] = \int_0^\infty \log\theta\;\mathrm{Ga}(\theta\,|\,n, t)\,d\theta = \psi(n) - \log t \tag{21}$$

y la varianza final de $\phi(\theta)$ es

$$\sigma_\phi^2 = \mathrm{Var}[\phi(\theta)\,|\,n, t] = \int_0^\infty (\log\theta - \mu_\phi)^2\;\mathrm{Ga}(\theta\,|\,n, t)\,d\theta = \psi'(n), \tag{22}$$

donde $\psi(.)$ es la función digamma. Sustituyendo estos resultados en (7) obtenemos la expresión aproximada para la discrepancia esperada

$$d(\theta_0\,|\,t, n) \approx \frac{n}{2}\Big[\psi'(n) + \{\psi(n) - \log t - \log(\theta_0)\}^2\Big]. \tag{23}$$

Sustituyendo (21) en (8) y utilizando la aproximación de Stirling, $\psi(n) \approx \log n - 1/(2n)$, los estimadores intrínsecos de ϕ y de θ son, respectivamente,

$$\phi^* \approx \mu_\phi = \psi(n) - \log t \approx \log(n/t) - 1/(2n), \tag{24}$$

$$\theta^* = \exp[\phi^*] \approx \frac{n}{t}\, e^{-(1/2n)}. \tag{25}$$

Además, sustituyendo (21) y (22) en (9), la región p-creíble para ϕ de mínima pérdida intrínseca será,

$$R_p^\phi \approx \psi(n) - \log t \pm q_p \sqrt{\psi'(n)}\,, \tag{26}$$

que, utilizando la aproximación de Stirling, se reduce a

$$R_p^\phi \approx \log \frac{n}{t} - \frac{1}{2n} \pm q_p\, \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \tag{27}$$

donde q_p es el cuantil $(p+1)/2$ de la distribución normal tipificada.

Como ejemplo numérico, si la muestra es de tamaño $n = 20$ y la suma de sus valores es $t = 11$, es estimador intrínseco de θ aproximado dado por (25) es $\theta^* \approx 1.773$, mientras que su valor exacto, obtenido por métodos numéricos es $\theta^* = 1.775$.

Además, para $p = 0.95$, $q_p = 1.96$. Substituyendo en (26) y (27) resultan, respectivamente la regiones aproximadas $R_{0.95}^\phi = [0.129, 1.016]$ y $R_{0.95}^\phi = [0.135, 1.011]$. Tomando exponenciales, resulta $R_{0.95}^\theta \approx [1.138, 2.763]$ y $R_{0.95}^\theta \approx [1.144, 2.749]$. La región intrínseca exacta para θ, obtenida por métodos numéricos es $R_{0.95}^\theta = [1.140, 2.763]$.

4.2. *Datos binomiales*

Sea $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_i > 0$, una muestra aleatoria de una observaciones Bernoulli, $p(x \,|\, \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x \in \{0, 1\}$, $0 < \theta < 1$. Se trata de un modelo regular, con función de verosimilitud $p(\boldsymbol{x} \,|\, \theta) = \theta^r (1-\theta)^{n-r}$, donde $r = \sum_{i=1}^n x_i$, de forma que el par $\{n, r\}$ es suficiente, y el estimador máximo-verosímil, la solución de $\partial \log p(\boldsymbol{x} \,|\, \theta)/\partial\theta = 0$, es $\hat\theta_n = r/n = \overline{x}$.

La función de Fisher resulta ser

$$i(\theta) = \theta^{-1}(1-\theta)^{-1} \tag{28}$$

y, consecuentemente,

$$\phi(\theta) = \int \sqrt{i(\theta)}\, d\theta = \int \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}\, d\theta = 2 \arcsin \sqrt{\theta}, \tag{29}$$

cuya función inversa es $\theta = \theta(\phi) = \sin^2(\phi/2)$. La distribución inicial de referencia para θ es $\pi(\theta) = \sqrt{i(\theta)} = \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$. Por el teorema de Bayes, la distribución final de θ es

$$\pi(\theta \,|\, \boldsymbol{x}) \propto p(\boldsymbol{x} \,|\, \theta)\pi(\theta) \propto \theta^{r-1/2}(1-\theta)^{n-r-1/2} \propto \mathrm{Be}(\theta \,|\, r + \tfrac{1}{2}, n - r + \tfrac{1}{2}).$$

Consecuentemente,

$$\mu_\theta = \mathrm{E}[\theta \,|\, n, t] = \frac{r + \frac{1}{2}}{n+1}, \quad \sigma_\theta^2 = \mathrm{Var}[\theta \,|\, n, t] = \frac{\mu_\theta(1-\mu_\theta)}{n+2}\,. \tag{30}$$

La media μ_ϕ y la varianza σ^2_ϕ de $\phi(\theta) = 2 \arcsin \sqrt{\theta}$ no tienen expresión analítica, de forma que utilizamos las aproximaciones (16), (17) y (19). Sustituyendo en (30) en (17) resulta

$$\theta^* \approx \hat{\theta}^* = \frac{r + a_n}{n + 2a_n}\,, \quad a_n = \frac{4+n}{2(5+2n)} \approx \frac{1}{4} \tag{31}$$

Sustituyendo (30) en (18), las regiones p-creíbles en términos de ϕ y de θ son, respectivamente,

$$R_p^\phi = 2 \arcsin \sqrt{\hat{\theta}^*} \pm \frac{q_p}{\sqrt{n}}, \qquad R_p^\theta = \sin^2[R_p^\phi/2]. \tag{32}$$

Como ejemplo numérico, con $n = 10$ y $r = 2$ y utilizando (31) es estimador intrínseco aproximado es $\hat{\theta}^* = 0.216$ (y 0.214 utilizando la aproximación $a_n \approx 1/4$) mientras que su valor exacto, determinado numéricamente, es $\theta^* = 0.218$. La región intrínseca 0.95-creíble para θ obtenida utilizando (32) resulta ser $[0.030, 0.508]$, mientras que su valor exacto es $[0.032, 0.474]$.

Como podía esperarse, la aproximación no es tan buena para datos extremos. Por ejemplo, con $n = 10$ y $r = 0$ (ninguna observación positiva) el estimador intrínseco aproximado es $\hat{\theta}^* = 0.026$ (y 0.024 utilizando la aproximación $a_n \approx 1/4$) mientras que su valor exacto es $\theta^* = 0.028$. La región intrínseca 0.95-creíble para θ obtenida utilizando (32) es $[0.021, 0.208]$, mientras que su valor exacto es $[0, 0.176]$.

REFERENCIAS

Bernardo, J. M. and Rueda, R. (2002). Bayesian hypothesis testing: A reference approach. *Internat. Statist. Rev.* **70**, 351–372.

Bernardo, J. M. (2005). Reference analysis. *Bayesian Thinking: Modeling and Computation, Handbook of Statistics* **25** (Dey, D. K. and Rao, C. R., eds.) Amsterdam: Elsevier, (en prensa)