

# Inferencia Bayesiana (2 de Junio de 2008)

## Soluciones

**Problema 1.** Determinar la distribución final de referencia para el parámetro  $\theta$  del modelo probabilístico  $\mathcal{M} = \{p(x|\theta) = (1-\theta)^{-1}, x \in (\theta, 1), \theta \in (0, 1)\}$ , y determinar el estimador bayes correspondiente a una pérdida lineal simétrica, dado el valor  $x$  de una única observación de  $\mathcal{M}$ .

El modelo  $\mathcal{M}$  no es regular, puesto que su soporte  $\mathcal{X}(\theta) = (\theta, 1)$  depende de  $\theta$ . Como  $\mathcal{X}(\theta)$  es decreciente en  $\theta$ , la distribución inicial de referencia (Ghosal and Samanta, 1997) es  $\pi(\theta) \propto |E_{x|\theta}[\partial \log p(x|\theta)/\partial \theta]| = (1-\theta)^{-1}$ . Consecuentemente, la distribución final de referencia dada una observación  $x$  de  $\mathcal{M}$  es  $\pi(\theta|x) = c p(x|\theta) \pi(\theta) = c(1-\theta)^{-2}$ , con  $0 < \theta < x < 1$ , donde  $\int_0^x \pi(\theta|x) d\theta = 1$ . Por tanto,  $c = 1/\int_0^x (1-\theta)^{-2} d\theta = (1-x)/x$ , y la distribución final de referencia es

$$\pi(\theta|x) = \frac{1-x}{x} \frac{1}{(1-\theta)^2}, \quad 0 < \theta < x, \quad (\text{y cero fuera de ese intervalo}).$$

El estimador bayes correspondiente a una pérdida lineal simétrica es la mediana de la distribución final, es decir la solución  $m$  de la ecuación  $\int_0^m \pi(\theta|x) d\theta = \frac{1}{2}$ . Consecuentemente,

$$\frac{1-x}{x} \int_0^m \frac{1}{(1-\theta)^2} d\theta = \frac{1-x}{x} \frac{m}{1-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \text{Mediana}[\theta|x] = \frac{x}{2-x}.$$

**Problema 2.** Dada una muestra aleatoria  $\mathbf{z} = \{x_1, \dots, x_n\}$  de tamaño  $n$  de una distribución gamma  $\text{Ga}(x|2, \omega)$ , con  $x > 0$ , y  $\omega > 0$ , Determinar, en función del estadístico suficiente correspondiente  $\{n, t(\mathbf{z})\}$ , (i) la distribución final de referencia de  $\theta(\omega) = E[x|\omega]$ , (ii) el estimador bayes de  $\theta$  con pérdida cuadrática, (iii) una aproximación al estimador intrínseco de  $\theta$ , y (iv) una aproximación a la región intrínseca  $p$ -creíble de  $\theta$ .

Por definición,  $\text{Ga}(x|\alpha, \beta) = c x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ , con  $c^{-1} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \Gamma(\alpha)/\beta^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ , (integral gamma) y se sabe que  $E[x] = \alpha/\beta$  y  $\text{Var}[x] = \alpha/\beta^2$ . Consecuentemente,  $p(x|\omega) = \omega^2 x e^{-x\omega}$ , y la función de verosimilitud es  $p(\mathbf{z}|\omega) \propto \omega^{2n} e^{-t\omega}$ , con  $t = \sum_{j=1}^n x_j$  suficiente. Se trata de un modelo regular y la inicial de referencia es  $\pi(\omega) \propto \sqrt{i(\omega)}$ ,  $i(\omega) = E_{x|\omega}[-\partial^2 \log p(x|\omega)/(\partial \omega)^2] = 2/\omega^2$ . Consecuentemente,  $\pi(\omega) = \omega^{-1}$ ,  $\pi(\omega|\mathbf{z}) \propto p(\mathbf{z}|\omega) \pi(\omega) \propto \omega^{2n-1} e^{-t\omega}$  y, comparando con la definición de una gamma,  $\pi(\omega|\mathbf{z}) = \text{Ga}(\omega|2n, t)$ , con  $\mu = E[\omega|\mathbf{z}] = 2n/t$  y  $\sigma^2 = \text{Var}[\omega|\mathbf{z}] = 2n/t^2$ .

(i) El parámetro de interés es  $\theta(\omega) = E[x|\omega] = 2/\omega$ . Cambiando variables,  $\pi(\theta|\mathbf{z}) = \pi(\omega|\mathbf{z}) |\partial \omega / \partial \theta|_{\omega=\omega(\theta)}$ , es decir,  $\pi(\theta|\mathbf{z}) = 2\theta^{-2} \text{Ga}(1/\theta|2n, t)$ .

(ii) El estimador bayes de  $\theta$  con pérdida cuadrática es  $E[\theta|\mathbf{z}] = \int_0^\infty 2\omega^{-1} \text{Ga}(\omega|2n, t) d\omega$ . Utilizando la integral gama, resulta inmediatamente  $E[\theta|\mathbf{z}] = 2t/(2n-1)$ .

(iii) La transformación normalizadora es  $\phi(\omega) = \int \pi(\omega) d\omega = \log \omega$ , y cuyos primeros momentos son, utilizando el método delta,  $E[\phi|\mathbf{z}] \approx \phi(\mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 \phi''(\mu) = \log(2n/t) - 1/4n$ ,  $\text{Var}[\phi|\mathbf{z}] \approx \sigma^2 (\phi'(\mu))^2 = 1/(2n)$ . El estimador intrínseco aproximado de  $\phi$  es por tanto  $\phi^* \approx \log(2n/t) - 1/4n$  y, por invarianza, el de  $\omega$  será  $\omega^* = e^{\phi^*} = (2n/t) e^{-1/(4n)}$  y el de  $\theta$  será  $\theta^* = 2/\omega^* = (t/n) e^{1/(4n)} = \bar{x} e^{1/(4n)}$ , que tiende a  $\bar{x}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

(iv) La región intrínseca  $p$ -creíble para  $\phi$  será, aproximadamente,  $E[\phi|\mathbf{z}] \pm z_p D[\phi|\mathbf{z}]$ , donde  $D[\phi|\mathbf{z}] = 1/\sqrt{2n}$  es la desviación típica final de  $\phi$  y  $z_p$  es el cuantil  $(1+p)/2$  de la distribución normal estándar. Deshaciendo la transformación, la región  $p$ -creíble intrínseca para  $\theta$  será, aproximadamente,  $(\bar{x} e^{1/(4n)-z_p/\sqrt{2n}}, \bar{x} e^{1/(4n)+z_p/\sqrt{2n}})$ .