Inferencia y Decisión (Feb 2006)

CUESTIONES:

$\boxed{1.00}$ Si la acción a_i es preferible a la acción a_j con la función de utilidad $u_1\{a, \theta\}$, entonces a_i es preferible a a_j con la función de utilidad $u_2\{a, \theta\} = \alpha\, u_1\{a, \theta\} + \beta$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta \in \Re$.

$\boxed{0.00}$ La moda de la distribución final de referencia es invariante ante transformaciones biyectivas del parámetro.

$\boxed{1.00}$ Si $C_p \in \Theta \subset [0, \infty]$ es un intervalo p-creíble para θ, y $\phi(\theta) = \log[\theta]$, entonces $\log[C_p]$ es un intervalo p-creíble para ϕ.

PROBLEMAS:

1. *La función de utilidad monetaria de una persona es $u(c) = 1 - e^{-0.002\, c}$, donde c es su patrimonio total en miles de euros. Quiere asegurar contra un siniestro total un automóvil cuyo valor es de 25,000 euros, y considera que la probabilidad de que requiera el pago total del coche a lo largo de un año es $p = 1/25$. Determinar la máxima prima anual que debería estar dispuesto a pagar por el seguro.*

Valor del coche $v = 25$; Probabilidad de siniestro $p = 1/25$;
Función de utilidad, $u(c) = 1 - e^{-a\, c}$, $a = 0.002$;
Capital disponible t. Prima del seguro x.

$a_1 =$ Asegurar; $a_2 =$ No asegurar.

$$\overline{u}(a_1) = u(t - x) = 1 - e^{-a(t-x)} = 1 - e^{-a\, t} e^{a\, x}$$

$$\begin{aligned}\overline{u}(a_2) &= p\; u(t - v) + (1 - p)\; u(t) \\ &= p\{1 - e^{-a(t-v)}\} + (1 - p)\{1 - e^{-a\, t}\} \\ &= 1 - e^{-a\, t}\{p\, e^{a\, v} + (1 - p)\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{u}(a_1) \geq \overline{u}(a_2)$ si, y solamente si

$$e^{a\, x} \leq p\, e^{a\, v} + (1 - p) \Rightarrow x \leq a^{-1} \log[p\, e^{a\, v} + (1 - p)],$$

que *no depende del capital total* t. Substituyendo, resulta $x \geq 1.024$.
La prima máxima a pagar es **1,024** euros.

2. *Sea $\boldsymbol{x} = \{-0.57, -2.59, 1.09, -1.12, -1.14\}$ una muestra aleatoria de una distribución normal, N($x \,|\, \mu, \sigma$). Sin información inicial adicional, (i) Determinar el estimador óptimo de la varianza que corresponde a una función de pérdida cero-uno para σ^2. (ii) Determinar una región 0.90-creíble exacta, de probabilidad centrada, para el valor de σ^2. Sugerencia: transformar la distribución final en una χ^2. (iii) Utilizando una transformación normalizadora adecuada, determinar un valor aproximado para el estimador intrínseco de σ^2. Sugerencia: trabajar en términos de la distribución final de $\lambda = \sigma^{-2}$, cuyos primeros momentos son conocidos.*

La distribución final de referencia de $\lambda = \sigma^{-2}$ es

$$\pi(\lambda \,|\, \boldsymbol{x}) = \mathrm{Ga}(\lambda \,|\, \frac{n-1}{2}, \frac{n\, s^2}{2}), \quad \mathrm{E}[\lambda \,|\, \boldsymbol{x}] = \frac{n-1}{n\, s^2}, \; \mathrm{Var}[\lambda \,|\, \boldsymbol{x}] = \frac{2(n-1)}{n^2\, s^4}$$

El estadístico suficiente es $\{n, s\} = \{5, 1.325\}$.

(i) El estimador óptimo correspondiente a una pérdida cer-uno es la moda de la correspondiente distribución final. La distribución final de la varianza, $\sigma^2 = \theta = \lambda^{-1}$ es

$$\pi(\theta \mid \boldsymbol{x}) = \frac{\pi(\lambda \mid \boldsymbol{x})}{|\partial\theta/\partial\lambda|}\bigg|_{\lambda=\theta^{-1}} \propto \theta^{-(n+1)/2} e^{(n\,s^2)/(2\theta)}.$$

La moda buscada es la solución de $\partial \log[\pi(\theta \mid \boldsymbol{x})]/\partial\theta = 0$, que resulta $\mathrm{Mo}[\theta \mid \boldsymbol{x}] = (ns^2)/(n+1)$. Substituyendo valores, $\mathrm{Mo}[\theta \mid \boldsymbol{x}] =$ **1.621**.

(ii) De la distribución final de $\lambda = \theta^{-1}$, la distribución final de $\tau = n\,s^2/\sigma^2 = ns^2/\theta$ es una χ^2_{n-1}. Consecuentemente, si $q_0(p)$ y $q_1(p)$ son, respectivamente, los cuantiles $(1-p)/2$ y $(1+p)/2$ de una distribución χ^2_{n-1} (disponibles en tablas)

$$\Pr\Big[q_0(p) \leq \frac{n\,s^2}{\theta} \leq q_1(p)\Big] = p$$

y el par $\{q_0(p), q_1(p)\}$ define un intervalo centrado p-creíble para τ. Por la invariancia del método,

$$\Pr\Big[\frac{n\,s^2}{q_1(p)} \leq \theta \leq \frac{n\,s^2}{q_0(p)}\Big] = p,$$

y por lo tanto $C_p(\boldsymbol{x}) = [n\,s^2/q_1(p),\, n\,s^2/q_0(p)]$ es un intervalo centrado p-creíble para θ. De las tablas de la χ^2_4, se ontienen $q_0(0.90) = 0.711$ y $q_1(0.90) = 9.488$.
Substituyendo valores, resulta el intervalo $C_{0.90}(\boldsymbol{x}) =$ **[0.926, 12.356]**.

(iii) La distribución de referencia de σ es $\pi(\sigma) = \sigma^{-1}$. Por tanto, La distribución de referencia de la precisión, $\lambda = \sigma^{-2}$ es

$$\pi(\lambda) = \frac{\pi(\sigma)}{|\partial\lambda/\partial\sigma|}\bigg|_{\sigma=\lambda^{-1/2}} = \lambda^{-1}.$$

Consecuentemente, la parametrización de referencia es $\phi = \int \lambda^{-1}\,\mathrm{d}\lambda = \log\lambda$ y, por lo tanto, el estimador intrínseco de λ es $\tilde{\lambda}_{int}(\boldsymbol{x}) \approx E[\phi \mid \boldsymbol{x}]$. Utilizando el método delta,

$$E[\phi \mid \boldsymbol{x}] \approx \phi[\mu_\lambda] + \tfrac{1}{2}\,\sigma^2_\lambda\,\phi''[\mu_\lambda],$$

donde μ_λ y σ^2_λ son la media y la varianza de λ, ya especificadas. Substituyendo y simplificando

$$\tilde{\phi}_{int(\boldsymbol{x})} \approx E[\phi \mid \boldsymbol{x}] \approx \log\frac{n-1}{n\,s^2} - \frac{1}{n-1}.$$

Consecuentemente, puesto que $\theta = \lambda^{-1} = e^{-\phi}$, y la estimación intrínseca es invariante, el estimador intrínseco de la varianza es

$$\tilde{\sigma^2}_{int}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\theta}_{int}(\boldsymbol{x}) = e^{-\tilde{\phi}_{int}(\boldsymbol{x})} \approx \frac{n\,s^2}{n-1}\,e^{\frac{1}{n-1}}\,.$$

Substituyendo valores, resulta $\tilde{\sigma^2}_{int}(\boldsymbol{x}) \approx$ **2.819**.