

Capítulo 2

Reacciones nucleares a bajas energías

Las reacciones nucleares a bajas energías han proporcionado la mayor parte del conocimiento que tenemos actualmente del núcleo atómico. Si bien es cierto que la observación de desintegración espontánea de núcleos radiactivos naturales proporcionó una parte de la información necesaria para el establecimiento de los modelos nucleares que condujeron al empleo de la desintegración nuclear en aplicaciones tanto energéticas como militares, el propio descubrimiento por Rutherford de la existencia del núcleo atómico y el inmenso volumen de conocimientos existente hoy en día, se deben en gran medida al análisis de datos experimentales de reacciones nucleares inducidas por núcleos sobre blancos. En el inicio de la Física Nuclear, la única fuente de proyectiles disponible eran fuentes radiactivas α de núcleos transuránicos, que proporcionaban partículas α con una energía del orden de 5 MeV, hasta que al principio de los años 30 surgieron los primeros aceleradores, en particular el acelerador lineal de Cockcroft y Walton y el Ciclotrón inventado por Alvarez, que permitieron acelerar protones, deuterones y partículas α hasta algunas decenas de MeV. La información obtenida del estudio de reacciones nucleares es relevante no sólo para el conocimiento del núcleo atómico, sino también para otras ciencias, como la Astrofísica. Los conocimientos adquiridos mediante experimentos de reacciones nucleares permiten hoy día la síntesis eficiente de un gran número de isótopos radiactivos de importancia en Medicina y Tecnología. Por último, el estudio de las reacciones nucleares ha sido la fuerza impulsora del desarrollo de nuevos aceleradores, que han encontrado el amplio espectro de aplicaciones mencionado en el capítulo anterior. En primer lugar, vamos a describir algunos conceptos fundamentales de reacciones nucleares.

Las partículas nucleares y subnucleares son las sondas que nos permiten obtener información sobre el núcleo atómico. Ello está ligado a su longitud de onda de Broglie, que para una partícula de energía cinética T viene dada por

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

Cuadro 2.1: Longitudes de onda de de Broglie expresadas en fermis para diferentes partículas

Energía (MeV)	γ	e^-	p	α	^{40}Ca	^{208}Pb
1	197	140	4.5	2.3	0.72	0.32
10	19.7	18.7	1.4	0.72	0.23	0.10
100	2.0	2.0	0.45	0.23	0.072	0.032
1000	0.20	0.20	0.12	0.068	0.023	0.010

En la tabla 2.1 se dan las longitudes de onda para algunas partículas a 1, 10, 100 y 1000 MeV.

Para ser capaces de investigar la estructura nuclear con una determinada partícula, no basta que su longitud de onda sea del orden del fermi. Hace falta además que pueda penetrar el núcleo. En el caso de partículas neutras como n y γ , no hay ningún obstáculo que les impida penetrar la materia nuclear. Por el contrario, en el caso de núcleos pesados como el plomo aunque se alcancen longitudes de onda del fermi a energías del MeV, la energía suficiente para vencer la repulsión Coulombiana es mayor. La energía de repulsión electrostática de dos núcleos en contacto se conoce como *barrera de Coulomb* y se denota por V_C . Viene dada aproximadamente por la expresión¹:

$$V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_C}$$

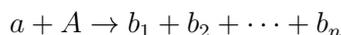
donde R_C se conoce como radio de Coulomb y viene dado aproximadamente por

$$R_C(\text{fm}) = 1,44 \cdot (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$$

donde A_1 y A_2 son los números másicos de los núcleos. Notemos que hemos utilizado el sistema Gaussiano en la fórmula del potencial electrostático ($1/4\pi\epsilon_0 = 1$). Para núcleos medios, hacen falta varias decenas megaelectronesvoltio para vencer la repulsión electrostática.

La denominación de reacciones nucleares a bajas energías se aplica a reacciones en las que la energía incidente del proyectil no es muy superior a la energía de Coulomb. De hecho, las reacciones nucleares a energías por debajo de la barrera de Coulomb proporcionan información relevante para el conocimiento de la Estructura Nuclear.

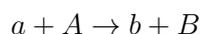
Una reacción nuclear es un proceso



donde el proyectil a es un núcleo, nucleón o partícula (γ , e , μ , ν , π , K), A es el núcleo blanco y $b_1 \dots, b_n$ son los productos de la reacción, formados por

¹Utilizaremos el sistema gaussiano

los nucleones y fragmentos nucleares provenientes del proyectil y del blanco, y por las partículas producidas en la reacción. En las reacciones nucleares a bajas energías, las únicas partículas que se pueden producir son fotones, electrones y positrones. No consideramos como productos de la reacción los producidos en la desintegración de estados excitados de los fragmentos nucleares producidos en los primeros instantes de la colisión. Una reacción con sólo dos partículas en el estado final



se denomina reacción binaria. Las reacciones binarias son particularmente importantes debido a la simplicidad de su estudio, tanto desde el punto de vista experimental como teórico.

Se denomina *calor de reacción* Q a la diferencia de las energías cinéticas de los productos de reacción finales y de las partículas en el estado inicial (la energía cinética del proyectil en experimentos de blanco fijo):

$$Q = E_f - E_i$$

Cuando $Q > 0$ la reacción se denomina exotérmica y cuando $Q < 0$ endotérmica. Si $Q = 0$ la reacción se denomina elástica. Cuando $Q > 0$, la ganancia en energía cinética proviene de un aumento de la energía de enlace. Cuando $Q < 0$, la pérdida de energía cinética se debe simultáneamente a una disminución de la energía de enlace y a la energía invertida en la excitación de los fragmentos nucleares producidos en la reacción (que se desexcitan esencialmente emitiendo fotones y pares electrón positrón antes de llegar a los detectores, lo que suele ocurrir en unas decenas o centenares de nanosegundos).

2.1. Clasificación de las reacciones nucleares

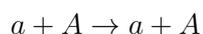
Existen diversas formas de clasificar las reacciones nucleares de acuerdo con el canal de salida, con las energías de colisión a las que tienen lugar, con el tamaño del proyectil, con los observables accesibles a la medida, con el tipo de interacción que media en la producción, o con el tiempo de interacción. Vamos a introducir los principales tipos de clasificación, más con objeto de mostrar la variedad de procesos existentes y de introducir nomenclatura que por el hecho de que las clasificaciones en sí mismas sean de alguna utilidad.

2.1.1. Clasificación con respecto al canal de salida

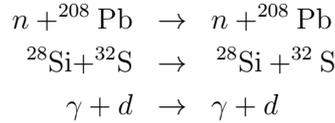
Una de las clasificaciones empleadas de las reacciones a bajas energías se basa en el canal de salida y el calor de reacción. Se introducen los siguientes tipos:

(i) **Dispersión elástica**

Son reacciones del tipo



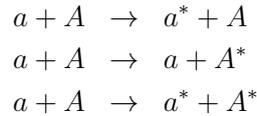
con $Q = 0$. Los canales de entrada y salida son idénticos. Ejemplos de dispersión elástica son



Cuando se escriben de esta forma la primera partícula es el proyectil y la segunda el blanco, lo cual es importante puesto que las energías incidentes se suelen dar como energía incidente del proyectil en el sistema laboratorio. Las anteriores reacciones también se pueden escribir como ${}^{208}\text{Pb}(n, n){}^{208}\text{Pb}$, ${}^{32}\text{S}({}^{28}\text{Si}, {}^{28}\text{Si}){}^{32}\text{S}$, y $d(\gamma, \gamma)d$.

(ii) **Dispersión inelástica**

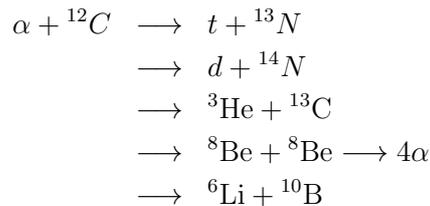
En este caso, la partición del canal de salida es la misma que la del canal de entrada, salvo que uno o ambos núcleos finales están en estados excitados. Podemos escribir para una reacción inelástica



donde la estrella significa que el núcleo correspondiente está en un estado excitado. El tercer caso, en el que tanto el proyectil como el blanco emergen en un estado excitado, se denomina excitación mutua. Ejemplos de dispersión inelástica son: ${}^{208}\text{Pb}({}^{12}\text{C}, {}^{12}\text{C}'){}^{208}\text{Pb}^*$, ${}^{208}\text{Pb}({}^{12}\text{C}, {}^{12}\text{C}^*){}^{208}\text{Pb}$ y ${}^{208}\text{Pb}({}^{12}\text{C}, {}^{12}\text{C}^*){}^{208}\text{Pb}^*$. En el caso de la dispersión inelástica, el calor de reacción es siempre negativo y es igual a la suma de las energías de excitación de los núcleos en el estado final. Se suele poner el símbolo ' en el núcleo proyectil en el estado final cuando este se encuentra en el estado fundamental, para indicar que ha cambiado la dirección de su momento, sobre todo en el caso de núcleos ligeros y partículas elementales: (p, p') , (α, α') , (e, e') .

(iii) **Reacciones de transferencia o reorganización**

En este caso $b \neq a$ y $B \neq A$. Usualmente, es a este tipo de reacciones al que se denomina con propiedad reacciones nucleares, dejando los términos dispersión o difusión para los casos anteriores. Para un canal incidente dado, hay muchas particiones posibles en el canal de salida. Por ejemplo,



Cada canal de salida tiene una probabilidad de ocurrir distinta, y las probabilidades relativas de los canales de salida dependen en forma detallada de la interacción núcleo-núcleo y de la estructura de los núcleos que colisionan, además de la energía incidente. Entre las reacciones estudiadas más exhaustivamente se encuentran el *pick-up* de un neutrón por un proton, (p, d) , y el stripping del deuterón, (d, p) , que han servido para consolidar el modelo de capas.

(iv) **Reacciones de captura**

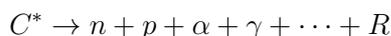
En este caso, el par de núcleos iniciales, a y A , forman un núcleo compuesto en un estado excitado, que se desintegra mediante la emisión de uno o varios rayos gamma, o bien mediante otros procesos electromagnéticos (emisión de pares electrón positrón, emisión de electrones atómicos), dependiendo del momento angular relativo en el que se produce la captura y de los estados disponibles para la desintegración. Como ejemplo, podemos dar la reacción



Las reacciones de captura son de gran interés en nucleosíntesis. Un gran número de isótopos radiactivos de interés médico, industrial y científico se sintetizan en pequeños ciclotrones dedicados a este fin, mediante reacciones de captura. Un tipo particular de reacciones de captura es la fusión de iones pesados:



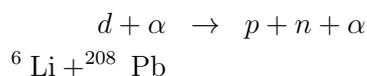
El núcleo C^* tiene una energía de excitación igual a la energía cinética disponible en el sistema CM en el canal incidente menos la diferencia de energías de enlace entre los núcleos a y A y el núcleo C en el estado fundamental. Además puede tener un momento angular elevado. La desintegración de C^* suele ser un proceso complejo, en el que se emiten neutrones, partículas cargadas en la etapa inicial de desintegración nuclear, y rayos γ en la desintegración electromagnética posterior:



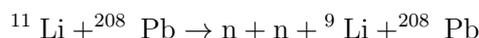
R es el núcleo resultante después del proceso de desintegración de C^* . Al núcleo R se le denomina residuo de evaporación. El número de neutrones y partículas cargadas suele ser pequeño, mientras que el número de rayos γ es aproximadamente la mitad del espín de C^* (la desintegración tiene lugar esencialmente mediante fotones de momento angular $L = 2$).

(v) **Reacciones de ruptura o break-up**

Estas reacciones tienen lugar en colisiones lejanas de núcleos débilmente ligados y núcleos de carga elevada.



En estas reacciones hay al menos tres cuerpos en el estado final. Recientemente se han estudiado en detalle para núcleos exóticos llamados núcleos halo, entre los cuales se encuentra el ^{11}Li .



(vi) **Reacciones de knock-out**

Son reacciones en las que un proyectil arranca un nucleón del núcleo blanco. El proyectil es generalmente un protón o un electrón de alta energía, aunque puede ser cualquier otra partícula elemental. Las reacciones de knock-out, junto con las de stripping y pick-up han servido para verificar la estructura en capas de los núcleos y las correlaciones entre nucleones.

Cuando el calor de reacción es de unos pocos MeV, o más explícitamente, es pequeño en comparación con la energía disponible en el sistema CM, se dice que la reacción es cuasielástica. Cuando el calor de reacción es una fracción considerable de la energía disponible en centro de masas, pero los núcleos iniciales conservan en parte su identidad, es decir no hay la formación de un núcleo compuesto, las reacciones se denominan profundamente inelásticas.

Cada uno de los posibles resultados de una reacción, especificado por la masa, carga y energía de excitación de cada núcleo en el estado final, se denomina canal de reacción. Los canales de reacción endotérmicos ($Q < 0$) necesitan una energía mínima incidente para poder ocurrir. Cuando el valor absoluto del calor de reacción $|Q|$ de un canal endotérmico es menor que la energía disponible en CM, decimos que el canal está abierto, mientras que si la energía incidente es menor que $|Q|$ el canal está cerrado. Los canales de reacción exotérmicos ($Q > 0$) siempre están abiertos, pero en el caso de partículas cargadas hace falta una energía mínima para vencer la repulsión electrostática entre los núcleos y ponerlos en contacto. Se denomina a esta energía *barrera de Coulomb*.

2.1.2. Clasificación con respecto a la interacción fundamental

Las reacciones nucleares son frecuentemente producidas por la interacción fuerte. Este es el caso de las interacciones entre núcleos a energías superiores a la barrera de Coulomb y de las interacciones de hadrones con núcleos. Sin embargo, en casos especiales son producidas únicamente por la interacción electromagnética o débil. Entre las reacciones mediadas por la interacción electromagnética más frecuente están:

1. Electroexcitación y dispersión de electrones $A(e,e')A^*$, $A(e,e')A$. Dispersión de muones. Se estudian en instalaciones con sincrotrones o microtrones.
2. Fotoexcitación $A(\gamma, \gamma')B$. Se estudian en instalaciones de fotones etiquetados, generalmente sincrotrones o microtrones. Requieren haces intensos.

3. Bremsstrahlung ($p, p'\gamma$), ($e, e'\gamma$), ($A, A'\gamma$). Se produce un fotón por radiación de frenado. Se estudian esencialmente en instalaciones con ciclotrones o con haces de electrones.
4. Dispersión y excitación Coulombiana. Se produce a energías inferiores a la barrera de Coulomb. Estas reacciones se estudian a bajas energía en instalaciones con aceleradores Tandem van de Graaf.

La interacción débil se puede estudiar en canales con violación de paridad, esencialmente con haces de electrones. Actualmente se están diseñando haces de neutrinos cada vez más intensos, que permitan medir las interacciones entre neutrinos y núcleos.

2.1.3. Clasificación de los dominios de energía incidente

Es usual clasificar las reacciones nucleares con respecto a la energía de colisión. Los términos acuñados en la bibliografía son los siguientes:

1. **Bajas energías:** Hasta 10A MeV. Usualmente reacciones a energías cercanas a la barrera de Coulomb, con el propósito de estudiar los mecanismos de reacción y la estructura de los núcleos y de obtener información espectroscópica.
2. **Energías intermedias.** Son energías por encima de la energía de Fermi, típicamente desde 20A MeV hasta 200A MeV. Se estudian esencialmente en ciclotrones y aceleradores lineales como el UNILAC.
3. **Energías relativistas.** Son energía que van desde unos 500A MeV hasta unos 10A GeV. Se estudian con sincrotrones.
4. **Energías ultrarelativistas.** Es cuando la energía cinética es muy superior a la masa del nucleón. Se estudiaron en un principio en el sincrotrón SPS del CERN entre 60A GeV y 200A GeV de energía incidente. Actualmente se estudian en anillos de colisión como el RHIC a 200A GeV en el sistema CM y próximamente en el LHC a 5.5A TeV en CM para iones pesados y 14 TeV para $p + p$.

2.1.4. Clasificación con respecto a la masa del proyectil

Dependiendo de la masa del proyectil, se acostumbra a clasificar las reacciones nucleares en

1. **Reacciones de partículas ligeras:** Es cuando el proyectil es un nucleón o un núcleo de masa $A \leq 4$. Esto incluye las siguientes partículas: p, n, d, t, ^3He , α .

2. **Reacciones de iones pesados.** Son todas las reacciones con núcleos de masa $A > 4$. A veces se emplea el nombre de iones pesados ligeros para designar aquellos con masa $4 < A < 12$.

2.1.5. Mecanismos de reacción y dinámica de la colisión

Una reacción nuclear es esencialmente un proceso cuántico. Sin embargo, a altas energías las longitudes de onda llegan a ser extraordinariamente pequeñas con lo que la aproximación clásica de la Mecánica Cuántica es válida con gran aproximación. En este caso, el concepto de trayectoria de las partículas está bien definido, y la relación entre parámetro de impacto y momento angular es aplicable. Esto también sucede a energías relativamente bajas en colisiones de iones pesados, ya que la longitud de onda es inversamente proporcional a la masa. En estos casos, la aproximación BKW da una buena descripción de la dispersión elástica, por ejemplo. La necesidad de la Mecánica Cuántica se restringe prácticamente al cálculo de las probabilidades de transición entre los diferentes estados discretos de los núcleos. Es por esto que, a energías intermedias y relativistas, el uso de conceptos clásicos como trayectoria y parámetro de impacto están bien justificados.

2.1.5.1. Clasificación con respecto al tiempo de interacción

A bajas energías existen dos mecanismos esenciales mediante los que una reacción nuclear puede tener lugar, dependiendo del tiempo necesario para que el proceso de reacción ocurra. Si v_{aA} es la velocidad relativa de los núcleos y R_1 y R_2 sus radios, el tiempo de colisión es aproximadamente

$$\tau_{col} = \frac{R_1 + R_2}{v_{aA}}$$

Este tiempo es del orden $\tau_{col} \leq 10^{-22}$ s. Cuando el tiempo de interacción durante el cual una reacción tiene lugar es del orden del tiempo de colisión, entonces se dice que se trata de una reacción directa. La idea es que una reacción directa tiene lugar mediante uno o unos pocos procesos elementales. Por otro lado, en determinadas circunstancias puede formarse un estado intermedio de tiempo de vida muy largo en comparación con el tiempo de colisión. En este caso tienen lugar una multitud de interacciones elementales. El estado intermedio pierde, a lo largo de todas estas interacciones, la información sobre el canal de entrada, salvo en lo que concierne a los números cuánticos conservados: Energía, momento angular, carga, etc. Entonces se dice que la reacción tiene lugar mediante el mecanismo de núcleo compuesto. La presencia de un estado intermedio de largo tiempo de vida se pone de manifiesto mediante la existencia de una resonancia en la sección eficaz de reacción. Si Γ es la anchura de la resonancia, el tiempo de vida del estado

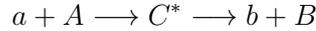
intermedio viene dado por la relación de incertidumbre tiempo energía

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

La sección eficaz tiene la forma de Breit-Wigner a las energías cercanas a la resonancia

$$\sigma(E) = \frac{\sigma_0 \Gamma^2}{4(E - E_r)^2 + \Gamma^2}$$

Para anchuras del orden de 1 eV el tiempo de vida es del orden de 0.7 fs, mientras que para anchuras del orden de 1 MeV el tiempo de vida es del orden de 10^{-21} s. Estos son los intervalos energéticos de resonancias que se miden experimentalmente. Vemos que estos tiempos son muy superiores al tiempo de colisión. En este tiempo ocurren entre decenas y millones de procesos elementales, que hacen que se alcance un estado intermedio de equilibrio en el que se pierde la memoria del estado inicial. Este estado intermedio se desintegra en uno de los posibles estados accesibles, de acuerdo con el espacio de fases disponible y la dinámica de la desintegración. Podemos suponer de forma muy aproximada que el proceso de una reacción a través del mecanismo de núcleo compuesto se puede separar en una fase de formación, en la cual se forma el núcleo compuesto en equilibrio, y una fase de desintegración. Por lo tanto, si consideramos la reacción



la sección eficaz podrá escribirse como el producto de una sección eficaz de formación de C^* en el canal de entrada $a + A$ y de una probabilidad de desintegración de C^* en el canal de salida $b + B$:

$$\sigma_{a+A \rightarrow b+B}(E, J, \alpha) = \sigma_{a+A}^{C^*}(E, J, \alpha) P_{B+b}^{C^*}(E, J, \alpha)$$

donde cada uno de los factores depende de la energía, el momento angular y otros números cuánticos conservados, representados por α .

La desintegración α de núcleos tiene lugar mediante efecto túnel, y su probabilidad viene dada por $P_{B+\alpha}^A(E, J, \alpha)$ donde B es el estado residual del núcleo hijo.

2.2. Cinemática de las reacciones nucleares a bajas energías

Los observables que se suelen medir en primer lugar en una reacción nuclear son las masas, cargas y energías de las partículas producidas en el estado final. No siempre es posible realizar esta tarea para todas las partículas producidas. Cuando los datos medidos son suficientes para establecer la identidad y energía

de cada uno de los productos de la reacción, se dice que la medida es *exclusiva*. En caso contrario, cuando solo se conoce parte de la información concerniente al estado final, se dice que la medida es *inclusiva*. El dato de más interés en una reacción nuclear es el calor de reacción Q , definido como la suma de las energías cinéticas en el estado final menos las energías cinéticas en el estado inicial:

$$Q = \sum_k T_{k,f} - \sum_k T_{k,i}$$

La conservación de la energía nos da la relación

$$\sum_k T_{k,i} + \sum_k m_{k,i}c^2 = \sum_k T_{k,f} + \sum_k m_{k,f}c^2$$

donde suponemos que todas las partículas en el estado final están en el estado fundamental o, en caso contrario, conocemos su masa en el estado excitado. Entre las partículas del estado final hay que incluir los fotones emitidos por partículas excitadas que se desintegran antes de llegar a los detectores. En cualquier caso, el estado final relevante de una partícula es el estado en el que es detectada. Tenemos por lo tanto que el calor de reacción se puede expresar como

$$Q = \sum_k T_{k,f} - \sum_k T_{k,i} = \left(\sum_k m_{k,i} - \sum_k m_{k,f} \right) c^2$$

En una reacción a dos cuerpos

$$Q = (m_a + m_A - m_b - m_B)c^2$$

Cuando el estado final B es un estado excitado A^* de A , que se desintegra mediante la emisión de un fotón de energía E_γ , tenemos que con gran aproximación se cumple (ignoramos la energía de retroceso del núcleo)

$$m_{A^*}c^2 = m_Ac^2 + E_\gamma$$

por lo que

$$Q = -E_\gamma$$

Los fotones frecuentemente no se detectan y se emiten antes de que A^* llegue al detector, por lo que detectamos a los núcleos en el estado fundamental, pero llegan a los detectores con una pérdida de energía cinética.

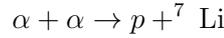
Frecuentemente, el calor de reacción se calcula a partir de las energías de enlace B_A definidas para un núcleo de masa A y número atómico Z , con $N = A - Z$, como

$$B_A = (ZM_H + NM_n - M_A)c^2$$

donde M_H es la masa del átomo de hidrógeno y M_n la masa del neutrón. En función de la energía de enlace, como el número de nucleones de cada clase se conserva, tenemos

$$Q = \left(\sum_k m_{k,i} - \sum_k m_{k,f} \right) c^2 = \left(\sum_k B_{k,f} - \sum_k B_{k,i} \right) = \Delta B$$

Consideremos por ejemplo la reacción



Tenemos

$$Q = B({}^7\text{Li}) - 2B({}^4\text{He}) = 39,245 - 2 \times 28,247 = -17,35 \text{ MeV}$$

ó bien

$$Q = (2 \times m_\alpha - m_{{}^7\text{Li}} - m_p)c^2 = (2 \times 4,001506 - 7,014357 - 1,007276)c^2 = -0,018626 \text{ umac}^2 = -17,35 \text{ MeV}$$

Este canal no estará abierto hasta que la energía disponible en el sistema CM no sobrepase 17.35 MeV. Como la energía del proyectil en el sistema CM es la mitad que la energía del proyectil en el laboratorio, hará falta bombardear con partículas α de 34.70 MeV para producir el ${}^7\text{Li}$ en el estado fundamental.

Cuando el proyectil es mucho más ligero que el blanco, la energía de retroceso del blanco es muy pequeña y no puede ser detectada, ya que el blanco deposita toda su energía en los recubrimientos y capa muerta del detector, sin llegar a entrar en la parte activa. Esto es especialmente importante en el caso de núcleos pesados, debido a su gran poder de ionización. Cuando los dos núcleos tienen masas comparables, se distribuye la energía entre ambos, y usualmente ambos pueden ser detectados. Los detectores proporcionan usualmente la posición del impacto y la energía de cada uno de los productos de la reacción. Debemos de determinar de estos datos la masa de cada uno de ellos y el calor de reacción. Si θ y ξ son los ángulos emergentes de los núcleos b y B con la dirección incidente del haz, que tomamos como eje x , la conservación de la cantidad de movimiento y la energía proporcionan las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_a &= p_b \cos \theta + p_B \cos \xi \\ 0 &= p_b \sin \theta - p_B \sin \xi \\ Q &= T_b + T_B - T_a \end{aligned}$$

junto con las relaciones $p_a = \sqrt{2m_a T_a}$, $p_b = \sqrt{2m_b T_b}$ y $p_B = \sqrt{2m_B T_B}$. Obtene-
mos, resolviendo las ecuaciones,

$$\begin{aligned}
p_b &= \frac{\begin{vmatrix} p_a & \cos \xi \\ 0 & -\sin \xi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \cos \xi \\ \sin \theta & -\sin \xi \end{vmatrix}} = \frac{-p_a \sin \xi}{-\cos \theta \cos \xi - \sin \theta \sin \xi} = \frac{p_a \sin \xi}{\sin(\theta + \xi)} \\
p_B &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & p_a \\ \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \cos \xi \\ \sin \theta & -\sin \xi \end{vmatrix}} = \frac{p_a \sin \theta}{\sin(\theta + \xi)} \\
m_b &= \frac{p_a^2 \sin^2 \xi}{2T_b \sin^2(\theta + \xi)} = \frac{2m_a T_a \sin^2 \xi}{2T_b \sin^2(\theta + \xi)} = \frac{m_a T_a \sin^2 \xi}{T_b \sin^2(\theta + \xi)} \\
m_B &= \frac{p_a \sin^2 \theta}{2T_B \sin^2(\theta + \xi)} = \frac{2m_a T_a \sin^2 \theta}{2T_B \sin^2(\theta + \xi)} = \frac{m_a T_a \sin^2 \theta}{T_B \sin^2(\theta + \xi)}
\end{aligned}$$

En la figura 2.1 se muestra una cámara de reacción equipada con dos detectores de silicio sensibles a la posición y una rejilla para realizar el calibrado angular.

Cuando el retroceso del blanco no es importante, como es el caso de la dispersión de partículas α y núcleos ligeros sobre núcleos pesados a bajas energías, sólo se puede medir el núcleo b en que se transforma el proyectil después de la colisión. Por lo tanto, los datos experimentales serán θ_b y T_b . El calor de reacción de cada suceso se puede obtener de la fórmula

$$Q = T_b \left(1 + \frac{m_b}{m_a} \right) - T_a \left(1 - \frac{m_a}{m_B} \right) - 2 \left(\frac{m_a m_b}{m_B^2} - T_a T_b \right)^{1/2} \cos \theta_b^{LAB}$$

Una representación de un histograma de sucesos en función de Q muestra los picos correspondientes a los distintos estados finales de la reacción. El pico correspondiente al canal elástico es el más intenso, y el pico correspondiente al primer estado excitado suele ser el segundo pico más intenso. Esto permite calibrar el espectro de energía, e identificar el resto de los picos.

2.2.1. Cinemática de reacciones binarias en el sistema centro de masas

Tenemos la reacción



donde 2 es el blanco, en reposo. Tenemos

$$T_1 + Q = T_3 + T_4$$

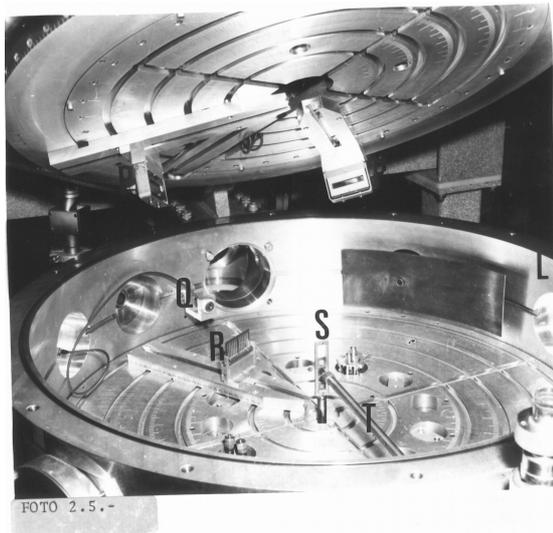


Figura 2.1: Cámara de reacción con dos detectores de estado sólido sensibles a la posición (arriba) y rejilla (R) para el calibrado angular. En el soporte S se coloca el blanco.

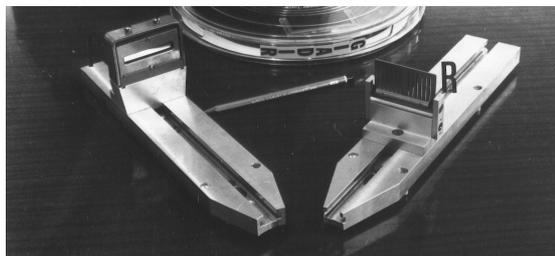


Figura 2.2: Detector de estado sólido sensibles a la posición (izquierda) y rejilla (derecha) para el calibrado angular.

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$$

Denotamos con primas las magnitudes en CM. La energía edel CM es

$$T_{CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{cm}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1$$

donde

$$V_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

La energía disponible en CM en el canal de entrada es

$$T'_{CM}{}^\alpha = T^\alpha - T_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1$$

mientras que en el canal de salida es $T'_{CM}{}^\beta = T'_{CM}{}^\alpha + Q$. Las velocidades de las partículas en el CM son

$$v'_1 = v_1 - V_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v'_2 = -V_{CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Las energías cinéticas de cada una de las partículas iniciales en CM es

$$T'_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{m_1 m_2^2}{2M^2} v_1^2 = \frac{m_2^2}{M^2} T_1$$

$$T'_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{m_1^2 m_2}{2M^2} v_1^2 = \frac{m_1 m_2}{M^2} T_1$$

$$T'^\alpha = T'_1 + T'_2 = \frac{m_1 m_2}{2M} v_1^2 = \frac{m_2}{M} T_1 = \frac{1}{2} \mu_\alpha v_1^2$$

donde $M = m_1 + m_2 = m_3 + m_4$, ya que suponemos despreciables los efectos relativistas sobre la masa, y μ_α es la masa reducida de las dos partículas en el canal de entrada. Vemos que

$$T'^\alpha + T_{CM} = T_1$$

como era de esperar. En el canal de salida tenemos

$$T'_3 + T'_4 = T'^\alpha + Q = \frac{m_2}{M} T_1 + Q$$

$$\mathbf{p}'_3 = -\mathbf{p}'_4$$

De la segunda ecuación tenemos

$$T'_3 + T'_4 = \frac{1}{2}v_3'^2 \left[1 + \frac{m_3^2}{m_4^2} \right] = \frac{m_2}{M}T_1 + Q$$

de donde

$$v_3' = \left(\frac{2m_4^2}{m_3^2 + m_4^2} \left[\frac{m_2}{M}T_1 + Q \right] \right)^{1/2}$$

En el sistema LAB tenemos

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}m_3(\mathbf{v}'_3 + \mathbf{V}_{CM})^2 = T'_3 + \frac{m_3m_1}{M^2}T_1 + \frac{1}{2}m_3v_3'V_{CM} \cos \theta'_3 \\ &= \frac{m_3m_4^2}{m_3^2 + m_4^2} \left[\frac{m_2}{M}T_1 + Q \right] + \frac{m_3m_1}{M^2}T_1 + \frac{m_3m_4m_1^{1/2}}{M} \sqrt{\frac{T_1}{m_3^2 + m_4^2} \left[\frac{m_2}{M}T_1 + Q \right]} \cos \theta'_3 \end{aligned}$$

2.3. Observables

La información proporcionada por las reacciones nucleares se obtiene mediante la medida de diferentes observables. Los observables más frecuentemente medidos son las secciones eficaces diferenciales. Se define la sección eficaz diferencial de un proceso que emite una partícula x , como la sección eficaz de las partículas x difundidas en un ángulo sólido diferencial $\Delta\Omega$, dividida por $\Delta\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_x(\Delta\Omega)}{N_P n_B \Delta\Omega} = \frac{N_x A_B Z_h e}{\Delta\Omega N_A \rho_S Q_h}$$

donde N_P es el número de proyectiles en el experimento, $N_x(\Delta\Omega)$ es el número de partículas producidas por el proceso x , detectadas en un ángulo sólido diferencial $\Delta\Omega$, n_B es el número de núcleos blanco por unidad de volumen, ρ_S es la densidad superficial del blanco, Q_h la carga integrada del haz durante el experimento, Z_h es el número de cargas elementales de los iones del haz, $N_P = Q_h/eZ_h$ es el número total de proyectiles empleado, y A_B es el peso atómico del blanco.

En el caso general, la sección eficaz diferencial depende de los ángulos azimutal θ y polar ϕ . Sin embargo, en el caso frecuente de haces despolarizados, hay simetría cilíndrica, es decir, la sección eficaz diferencial es independiente de ϕ . En este caso podemos escribir $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. La sección eficaz promediada en ϕ , que depende sólo de θ , se denomina distribución angular y se denota usualmente como $\frac{d\sigma}{d\theta}$.

La sección eficaz integrada es la integral de la sección eficaz diferencial a todo el ángulo sólido

$$\sigma = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{d\sigma}{d\theta}$$

La suma de las secciones eficaces de todos los canales distintos del elástico se denomina sección eficaz de reacción o absorción, y la denotamos por σ_r .

Las distribuciones angulares se miden con detectores que subtienden un ángulo sólido elemental $\Delta\Omega$. Este ángulo sólido elemental determina el error $\Delta\theta$ de la distribución angular. Las secciones eficaces integradas se pueden medir a partir de las distribuciones angulares medidas en todo el intervalo angular. Cuando es posible, es mucho más eficiente medir un rayo γ característico de la reacción con un detector de gran eficiencia (como por ejemplo un cristal de INa o BaF₂).

La suma de la sección eficaz de reacción y de la sección eficaz elástica se denomina sección eficaz total, y la denotaremos por σ_T . Es la sección eficaz de todos los procesos en que una partícula que cambia de dirección o de estado. La forma más usual de medirla es midiendo la atenuación del haz, es decir midiendo el haz integrado antes y después de atravesar un blanco.

Un observable frecuentemente empleado es la sección eficaz integrada de un estado en función de la energía incidente del proyectil. Se denomina a este observable *función de excitación* del estado.

Cuando hay varias partículas en el estado final, las secciones eficaces diferenciales dobles proporcionan mayor información sobre el sistema que las secciones eficaces diferenciales simples. Por ejemplo, si tenemos una partícula b y un rayo γ en el estado final, el observable apropiado a medir es la sección eficaz doble diferencial

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_b d\Omega_\gamma}$$

A energías bastante superiores a la barrera de Coulomb, la sección eficaz de reacción viene dada aproximadamente por la llamada sección eficaz geométrica

$$\sigma_G = \pi(R_1 + R_2)^2$$

con $R_1 + R_2 \simeq 1,4(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ fm la suma de los radios nucleares efectivos. A energías alrededor de la barrera de Coulomb, las resonancias y los efectos de estructura nuclear pueden hacer que la sección eficaz de reacción sea muy diferente de la geométrica. Esto ocurre de forma muy pronunciada con la sección eficaz de neutrones lentos sobre núcleos. Cuando consideramos un canal determinado, la sección eficaz de excitación de dicho canal puede ser mucho más pequeña que la geométrica, o incluso nula. La sección eficaz es particularmente pequeña cuando el sistema interacciona sólo mediante la interacción electromagnética o débil, hasta el punto de que puede ser imposible medirla experimentalmente como sucede con la reacción $p + p \rightarrow p + n + e^+ + \nu_e$, de gran interés en Astrofísica. El límite medible de secciones eficaces en un tiempo T viene dado por la condición de detectar al menos una cuenta. Si R es la tasa de producción y \mathcal{L} la luminosidad, podemos escribir esta condición como $RT = \mathcal{L}\sigma T > 1$, siempre que el fondo sea despreciable. En caso contrario, hay que imponer además que el error estadístico de la señal y el fondo $\sigma_{S+B} = \sqrt{S+B} + \sqrt{B}$ es menor que la señal $S = \mathcal{L}\sigma T$ ($S+B$

es el número de cuentas medido, B el fondo, y σ_{S*B} el error de la sustracción del fondo del pico):

$$\mathcal{L}\sigma T > \sqrt{\mathcal{L}\sigma T + bT} + \sqrt{bT}$$

donde b es la tasa de recuento del fondo, lo que da

$$\sigma > \frac{\sqrt{\mathcal{L}\sigma + b} + \sqrt{b}}{\mathcal{L}\sqrt{T}}$$

que se cumple siempre que T sea suficientemente elevado. Si $b = 0$ esta condición es simplemente $\mathcal{L}\sigma T > 1$, mientras que si $b \neq 0$ debemos de medir durante un tiempo T suficientemente grande, para que se cumpla la desigualdad anterior para a sección eficaz que deseamos medir. Si $b > \mathcal{L}\sigma$, entonces

$$\mathcal{L}\sigma T > 2\sqrt{bT}$$

2.3.1. Medida de la sección eficaz total mediante experimentos de atenuación del haz

Cuando un haz de partículas pasa a través de la materia, su intensidad se atenúa debido a que que parte de las partículas que lo integran se desvían de su dirección incidente o reaccionan con los núcleos del blanco. La sección eficaz que determina esta atenuación del haz es la denominada sección eficaz total. Si la intensidad incidente es I , la disminución de intensidad después de atravesar un grosor de blanco dx vendrá dadas por el número de partículas que sufren alguna interacción (dispersión o reacción):

$$dI = -\sigma_T n'_B dx I$$

donde el signo negativo indica que la intensidad disminuye y $n'_B = n_B \times \text{unidad área}$ es el número de núcleos blanco por unidad de volumen ($n'_B dx$ es el número de núcleos blanco por unidad de área en una lámina del blanco de grosor dx). La integración de esta ecuación diferencial, con la condición inicial de una intensidad del haz I_0 da

$$I = I_0 \exp(-\sigma_T n'_B x) = I_0 \exp\left(-\frac{x}{\Lambda}\right)$$

donde $\Lambda = \frac{1}{n'_B \sigma_T}$ es el recorrido libre medio de las partículas del haz en el blanco. Por lo tanto, si medimos la atenuación del haz, podemos determinar σ_T si conocemos n'_B . Al producto $\Sigma_T = n'_B \sigma_T$ se le conoce con el nombre de *sección eficaz macroscópica*, y da la atenuación del haz con el grosor de material atravesado:

$$I = I_0 \exp(-\Sigma_T x)$$

Se utiliza en protección radiológica y para calcular blindajes en experimentos de bajo fondo.

2.3.2. Haces polarizados

Si uno o ambos de los núcleos que intervienen en una reacción nuclear tiene espín, entonces se les puede polarizar, lo que significa orientar su espín en una dirección preferente. Esto se puede conseguir con la ayuda de un campo magnético, ya que un núcleo con espín tiene un momento magnético asociado, dado por

$$\vec{\mu} = g_I \mathbf{I}$$

donde a g_I se le conoce con el nombre de *constante giromagnética*. Los momentos magnéticos tienen una tendencia a alinearse con el campo magnético, contrarrestada por la agitación térmica. Si $w(M)$ es la probabilidad de encontrar M como proyección del espín \mathbf{I} en la dirección del campo magnético \mathbf{B} , se define la polarización P como

$$P = \left\langle \frac{M}{I} \right\rangle = \frac{1}{I} \sum_{M=-I}^I w(M)M$$

Como $\sum_M w(M) = 1$ y $\left| \frac{M}{I} \right| \leq 1$, se cumple

$$-1 \leq P \leq 1$$

En el caso frecuente de $I = \frac{1}{2}$,

$$P = w\left(\frac{1}{2}\right) - w\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Cuando $I > \frac{1}{2}$, la polarización es insuficiente para caracterizar la distribución de las orientaciones de los espines del haz. Por ejemplo, si $I = 1$ y $w(M) = w(-M)$, P se anula aún cuando la distribución sea no uniforme, por ejemplo $w(0) = 0$ y $w(1) = w(-1) = 0,5$. En este caso hay que utilizar operadores adicionales a la polarización para caracterizar completamente la distribución de momentos magnéticos del haz, como por ejemplo

$$\left\langle M^2 - \frac{1}{3}I(I+1) \right\rangle = \sum_{M=-I}^I w(M) \left[M^2 - \frac{1}{3}I(I+1) \right]$$

Este operador es proporcional a una de las denominadas polarizaciones tensoriales, que se definen para caracterizar haces polarizados de espín mayor de $\frac{1}{2}$.

El caso más usual de experimentos de polarización es el de haces polarizados sobre blancos despolarizados. Los haces más frecuentemente utilizados han sido \vec{p} , \vec{n} , \vec{d} , $\vec{^3\text{He}}$, \vec{t} (las flechas simbolizan polarización) aunque también se han realizado algunos experimentos con $\vec{^6\text{Li}}$ y $\vec{^7\text{Li}}$ polarizados. En Heidelberg se

han utilizado haces polarizados del isótopo $^{23}\text{Na}(\frac{7}{2})$. La medida más usual con haces polarizados consiste en polarizar las partículas con sus espines orientados perpendicularmente al plano de reacción, de forma que a la derecha el ángulo polar vale $\phi = 0^\circ$ y a la izquierda $\phi = 180^\circ$. Se mide la sección eficaz diferencial en el plano de la reacción. En ausencia de polarización las intensidades a la izquierda y a la derecha son iguales, pero con un haz polarizado, si la interacción depende del espín, hay una asimetría entre la izquierda y la derecha: $I_{izquierda}(\theta) \neq I_{derecha}(\theta)$. Se define la asimetría $A(\theta)$ como

$$A(\theta) = \frac{I_{izquierda}(\theta) - I_{derecha}(\theta)}{I_{izquierda}(\theta) + I_{derecha}(\theta)}$$

La asimetría es proporcional a la polarización P del haz incidente.

Incluso cuando se utiliza un haz despolarizado en una reacción nuclear, los productos de la reacción están frecuentemente polarizados. Esta polarización inducida puede ser medida mediante un segundo proceso de dispersión sobre otro blanco que actúe como analizador. La dificultad de este procedimiento radica en que la intensidad del segundo proceso es frecuentemente muy baja, debido a la reducida sección eficaz del primer proceso. Menos frecuentes son las medidas con blancos polarizados, en los que generalmente se utiliza el campo magnético creado por electrones en una red cristalina.

2.3.3. Correlaciones angulares

Las medidas de correlaciones angulares proporciona información similar a la medida con haces polarizados. Por ejemplo, sea una reacción nuclear $A(a,b)B$. El núcleo B puede quedar en un estado excitado, que se desintegra emitiendo una radiación adicional c , que puede ser una partícula o un rayo γ . La dirección (θ_c, ϕ_c) de esta radiación secundaria estará correlacionada con la dirección (θ_b, ϕ_b) . Si el núcleo excitado tiene espín, este espín estará polarizado por la reacción, y el grado y dirección de la polarización dependerá de la dirección de b . En general, la distribución de la radiación emitida por un núcleo polarizado no es isotrópica, sino que presenta una distribución angular característica con respecto a la dirección de la polarización. La correlación entre b y c puede ser medida observando ambas partículas en coincidencia y midiendo la variación de la tasa de coincidencias en función de las direcciones de ambas partículas. El análisis de estas tasas de coincidencia en función de los ángulos proporciona información sobre los espines implicados, el momento angular transportado por la radiación, y el mecanismo detallado de la reacción nuclear. Dado que las direcciones de b y c no necesitan ser coplanares con la dirección del haz de partículas, la distribución de la correlación angular depende tanto de los ángulos azimutales θ_b y θ_c como de los ángulos polares ϕ_b y ϕ_c . Estas correlaciones angulares se expresan como secciones eficaces

doblemente diferenciales,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_b d\Omega_c}$$

2.4. Transformación del sistema laboratorio al sistema centro de masas

Las secciones eficaces se miden en el sistema laboratorio (LAB), pero para comparar con modelos y evitar efectos cinemáticos debidos al movimiento del centro de masas, usualmente se presentan transformadas al *sistema centro de masas* (CM). Vamos a ver las fórmulas no relativistas de transformación del sistema LAB al sistema CM.

Si denotamos por a el proyectil y por A el núcleo blanco, la velocidad del sistema CM viene dada por

$$\mathbf{V}_{CM} = \frac{m_a}{m_a + m_A} \mathbf{v}_a \quad (2.1)$$

La velocidad de a relativa al centro de masas \mathbf{v}'_a viene dada por

$$\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}_{CM} = \frac{m_A}{m_a + m_A} \mathbf{v}_a \quad (2.2)$$

Dividiendo los módulos de las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{V_{CM}}{v'_a} = \frac{m_a}{m_A}$$

que utilizaremos más adelante. Como en el sistema CM la cantidad de movimiento total es nula

$$m_a \mathbf{v}'_a = -m_A \mathbf{v}'_A$$

También se cumple que la energía cinética total, que es la energía cinética de la partícula incidente, puesto que el blanco está en reposo antes de la colisión, se puede expresar como la energía cinética de una partícula cuya masa es la suma de ambas masas y su velocidad la velocidad del CM y de otra partícula cuya masa es la masa reducida de ambas partículas y cuya velocidad es la velocidad relativa de ambas partículas

$$E = \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} \mu_\alpha v_a'^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

donde $M = m_a + m_A$ y $\mu_\alpha = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A}$ es la masa reducida en el canal α . La relación entre las componentes de la velocidad de a en los sistemas LAB (sin primas) y CM (con primas) es la siguiente:

$$\begin{aligned} v'_a \sin \theta_{CM} &= v_a \sin \theta_L \\ v'_a \cos \theta_{CM} + V_{CM} &= v_a \cos \theta_L \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_{CM}}{x + \cos \theta_{CM}}$$

con

$$x = \frac{V_{CM}}{v'_a} = \frac{m_a}{m_A}$$

donde hemos utilizado las ecuaciones 2.1 y 2.2. De esta expresión obtenemos

$$\cos \theta_L = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_L}} = \frac{x + \cos \theta_{CM}}{\sqrt{1 + x^2 + 2x \cos \theta_{CM}}} \quad (2.3)$$

Como el número de partículas que atraviesan un ángulo sólido no depende del sistema de referencia, tenemos

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega_L} d\Omega_L = \frac{d\sigma_{CM}(\theta_{CM})}{d\Omega_{CM}} d\Omega_{CM}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d\sigma_{CM}(\theta_{CM})}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega_L} \frac{d\Omega_L}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega_L} \frac{d(\cos \theta_L)}{d(\cos \theta_{CM})}$$

De la ecuación 2.3 obtenemos finalmente

$$\frac{d\sigma_{CM}(\theta_{CM})}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega_L} \frac{1 + x \cos \theta_{CM}}{(1 + x^2 + 2x \cos \theta_{CM})^{3/2}} = \frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega_L} \frac{(1 - x^2 \sin^2 \theta_L)^{1/2}}{[x \cos \theta_L + (1 - x^2 \sin^2 \theta_L)^{1/2}]^2}$$

De forma análoga, se obtiene que esta ecuación es válida para reacciones de transferencia de nucleones, sin más que sustituir x por

$$x = \left(\frac{m_a m_b}{m_A m_B} \frac{E_\alpha}{E_\alpha + Q_{\alpha\beta}} \right)^{1/2}$$

donde E_α es la energía en CM en el canal de entrada $a + A$ y $Q_{\alpha\beta}$ es el calor de reacción de $a + A \rightarrow b + B$.

Ejercicio: Demostrar la afirmación anterior.

2.5. Sección eficaz clásica

El concepto de sección eficaz es un concepto clásico que ha encontrado su principal aplicación en la descripción cuántica de la colisión de partículas. En reacciones nucleares, sobre todo a altas energías y en el caso de iones pesados, las fórmulas clásicas, y en particular las aproximaciones semiclásicas, dan resultados similares a los cuánticos. Vamos a derivar la fórmula clásica de la sección eficaz.

Sea un haz de proyectiles a que colisionan contra un blanco A . Definimos el parámetro de impacto b como la distancia de máxima aproximación entre los centros de a y A si la partícula incidente a siguiese una trayectoria rectilínea. El momento angular de a con respecto del centro de A es $L = m_a v_a b$. Suponemos por simplicidad que la masa de A es infinita. En caso contrario, tomaríamos la masa reducida del sistema y la velocidad relativa. Si tenemos una superficie de un anillo elemental $d\sigma = 2\pi b db$ y J es el flujo incidente, el número de partículas dispersadas será $dN = J2\pi b db$. Clásicamente, las partículas con parámetro de impacto b siguen una trayectoria que las hace difundirse a un ángulo ϑ . Por lo tanto, las partículas incidentes entre b y $b + db$ se emiten en un ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Notemos que $d\vartheta$ puede ser positivo o negativo para db positivo, pues la interacción puede variar de intensidad. Por lo tanto, la sección eficaz diferencial vendrá dada por el cociente de partículas difundidas y el producto de la intensidad incidente por el elemento de ángulo sólido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J2\pi b db}{|J2\pi \sin \vartheta d\vartheta|} = \left| \frac{b}{\sin \vartheta} \frac{db}{d\vartheta} \right|$$

Por lo tanto, para calcular la sección eficaz clásica necesitamos únicamente conocer la función $\vartheta(b)$, que se denomina función de deflexión. Esto es equivalente a conocer la trayectoria clásica.

2.6. Dispersión Coulombiana

Vamos a estudiar en este apartado la dispersión Coulombiana desde un punto de vista clásico. Sucede que, accidentalmente, la fórmula de la sección eficaz de la dispersión Coulombiana obtenida de la fórmula clásica coincide con la dada por la Mecánica Cuántica.

2.6.1. Sección eficaz clásica

El potencial Coulombiano de dos cargas del mismo signo $Z_1 e$ y $Z_2 e$, en unidades gaussianas, viene dado por

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Como el potencial electrostático es un potencial central, se conserva la energía total, y como además no depende del ángulo azimutal θ , el momento canónico conjugado de θ , que es el momento angular, se conserva. Como la fuerza es central, la trayectoria de la partícula estará contenida en un plano, definido por la velocidad incidente y el radiovector que une ambas partículas. La conservación de la energía mecánica da

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

y la conservación del momento angular

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

donde E y L son constantes del movimiento. De estas dos ecuaciones obtenemos las derivadas temporales de cada una de las coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{\mu r^2} \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera obtenemos una ecuación diferencial para la trayectoria

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

donde cada uno de los signos corresponde a las fases de acercamiento (-) y alejamiento (+).

2.6.2. Distancia de máxima aproximación

El denominador de la expresión anterior se anula en los puntos de máxima aproximación, que son los puntos en los que $\frac{dr}{dt} = 0$. Por lo tanto, para integrar la variación de θ a lo largo de la trayectoria tenemos que descomponer la integral en la parte de acercamiento en la que r varía entre ∞ y la distancia de máxima aproximación d , y la parte de alejamiento, en la que r varía entre d e ∞ . Estas dos variaciones son iguales. Podemos escribir por lo tanto

$$\Delta\theta = 2 \int_d^\infty \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

La distancia de máxima aproximación se obtiene fácilmente de la conservación de la energía cinética y el momento angular. En la distancia de máxima aproximación, la velocidad v_0 tiene sólo la componente en la dirección tangencial ($\mathbf{v}_0 \times \mathbf{d} = v_0 d$). La conservación de L y E dan

$$\begin{aligned} \mu v b &= \mu v_0 d \\ \frac{1}{2} \mu v^2 &= \frac{1}{2} \mu v_0^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{d} \end{aligned}$$

Despejando v_0 en la primera ecuación y teniendo en cuenta que $E = \frac{1}{2}\mu v^2$, tenemos

$$E = \frac{b^2}{d^2}E + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{d} \quad (2.4)$$

Definiendo d_0 como

$$d_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

cuyo significado es la distancia de máxima aproximación en una colisión frontal ($b = 0$), tenemos de la ecuación 2.4 que para b arbitrario se cumple

$$d^2 = b^2 + d d_0$$

que es una ecuación de segundo grado que nos da d a partir de b . Podemos despejar el parámetro de impacto en función de la distancia de máxima aproximación

$$b = [d(d - d_0)]^{1/2}$$

2.6.3. Función de deflexión

El ángulo de dispersión ϑ se mide con respecto a la dirección del haz emergente, de forma que cuando $\Delta\theta = \pi$ entonces $\vartheta = 0$ y cuando $\Delta\theta = 0$ (rebote hacia atrás) entonces $\vartheta = \pi$. Por lo tanto, el ángulo de dispersión viene dado por

$$\vartheta = \pi - \Delta\theta = \pi - 2 \int_d^\infty \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

El nombre de función de deflexión se da a la función $\vartheta(b)$, obtenida poniendo $L = bp = b\sqrt{2\mu E}$ y viene dada por

$$\vartheta(b) = \pi - 2 \int_d^\infty \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{rE} - \frac{b^2}{r^2}}} = 2 \arctan \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2Eb} \right)$$

Se acostumbra a definir el parámetro de Sommerfeld $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$ (dividido por $4\pi\epsilon_0$ en el sistema MKS). En función del parámetro de Sommerfeld η y del número de ondas k , la función de deflexión viene dada por

$$\vartheta(b) = 2 \arctan \left(\frac{\eta}{kb} \right) \quad (2.5)$$

que al invertirla da el parámetro de impacto en función del ángulo de deflexión:

$$b = \frac{\eta}{k} \cot \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \quad (2.6)$$

Vemos de la fórmula 2.5, que el ángulo de deflexión disminuye cuando el parámetro de impacto aumenta. Para grandes parámetros de impacto, el ángulo de deflexión resulta arbitrariamente pequeño, pero nunca nulo. Esto es una manifestación del alcance infinito de la interacción Coulombiana.

2.6.4. Sección eficaz clásica

De la ecuación 2.6 deducimos

$$\frac{db}{d\vartheta} = \frac{\eta}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

de donde

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \vartheta} \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{\eta}{k2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}} \cot \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \frac{\eta}{2k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \left(\frac{\eta}{2k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

que es la conocida fórmula de Rutherford de la dispersión de partículas por un potencial Coulombiano. Este es el método de derivación seguido por Rutherford puesto que en 1911 todavía no existía la Mecánica Cuántica. Como dijimos anteriormente, esta fórmula es idéntica a la obtenida a partir de la Mecánica Cuántica. Su expresión en el sistema MKS y en función de las cargas y la energía incidente es²

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{16E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Vemos que la sección eficaz de Rutherford tiende a infinito cuando el ángulo de deflexión tiende a cero, que es una manifestación del hecho que la interacción coulombiana tiene alcance infinito.

2.6.5. Partículas relativistas y ultrarelativistas

En el caso de partículas relativistas la fórmula correcta es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{16E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

válida con tal que $Z < 137$. En el caso ultrarelativista, $\beta \rightarrow 1$, esta fórmula tiende a la llamada fórmula de Mott

$$\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{16E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

² $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $\eta = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar v$

y tiende a la fórmula de Rutherford cuando $\beta \rightarrow 0$.

2.6.6. Partículas extensas

Estrictamente hablando, la fórmula de Rutherford es válida sólo en el caso de partículas puntuales. Sin embargo también es válida para distribuciones de carga extendidas siempre que no se superpongan. Si los radios de las cargas son R_1 y R_2 , el potencial electrostático se puede representar de forma muy aproximada por

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & r > R_1 + R_2 \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2(R_1 + R_2)} \left(3 - \frac{r^2}{(R_1 + R_2)^2} \right) & r \leq R_1 + R_2 \end{cases}$$

Si la energía incidente E es tal que la distancia de máxima aproximación $d > R_1 + R_2$, sólo se verá la parte del potencial que coincide con el potencial de cargas puntuales, y la fórmula de Rutherford será válida. A energías superiores a

$$E_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2}$$

la sección eficaz se desviará de la de Rutherford a partir de ángulos de dispersión en que $d < R_1 + R_2$. La relación entre el ángulo de dispersión y la distancia de máxima aproximación es

$$\vartheta = 2 \arctan \frac{\eta}{kb} = 2 \arctan \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2Eb} = 2 \arctan \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E\sqrt{d(d-d_0)}} = 2 \arctan \frac{d_0}{2\sqrt{d(d-d_0)}}$$

con

$$d_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

Por lo tanto, la fórmula se desviará de la de Rutherford para distancias de máxima aproximación $d(\vartheta) < R$

$$\vartheta > 2 \arctan \left(\frac{d_0}{2\sqrt{R(R-d_0)}} \right)$$

con $R = R_1 + R_2$. En el caso de núcleos, R no es la suma de los radios de densidad media, pues a estos radios la densidad es lo suficientemente elevada para que haya reacciones nucleares. El análisis de datos experimentales muestra que la sección eficaz de dispersión empieza a desviarse de la sección eficaz de Rutherford cuando la distancia de máxima aproximación d es menor que una *distancia satisfactoria*, cuyo valor experimental es

$$R_{saf} = 1,7(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \text{ fm}$$

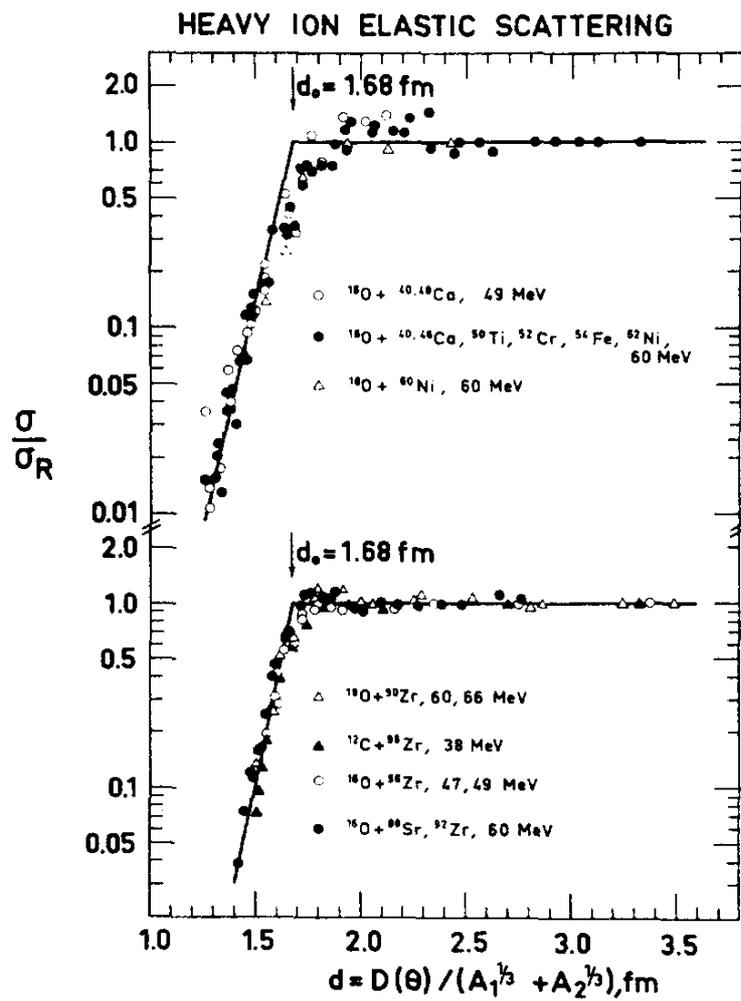


Figura 2.3: Sección eficaz normalizada a la de Rutherford en función de la distancia de máxima aproximación para distribuciones angulares de diversos sistemas.

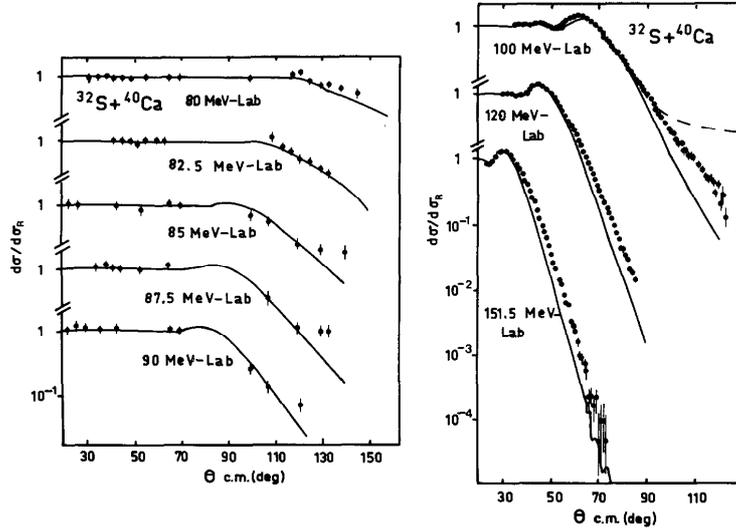


Figura 2.4: Distribuciones angulares normalizadas a la sección eficaz de Rutherford para diversos sistemas.

Cuando la distancia de máxima aproximación es menor que esta distancia, los efectos debidos a la absorción por reacciones nucleares y a la distribución finita de la carga empiezan a ser importantes. Este hecho se ilustra en la figura 2.3, en la que se representa la sección eficaz dividida de la de Rutherford en función de la distancia de máxima aproximación para un gran número de sistemas.

El hecho de que la sección eficaz diferencial coincide con la de Rutherford para ángulos bajos es una poderosa herramienta para normalizar las secciones eficaces experimentales. Se toma el coeficiente de normalización de forma que la sección eficaz dividida por la de Rutherford sea la unidad para ángulos menores que el ángulo en que la distancia de máxima aproximación vale R_{saf} . En la figura 2.4 se muestran las secciones eficaces diferenciales normalizadas a la de Rutherford para el sistema $^{32}\text{S} + ^{40}\text{Ca}$ a diversas energías. Este método permite obtener las distribuciones angulares con errores inferiores al 1%, mientras que los errores debidos al grosor del blanco y la carga del haz son usualmente superiores al 5%.

2.6.7. Excitación Coulombiana

Cuando la distancia de máxima aproximación es mayor que R_{saf} , todavía puede haber excitación a estados colectivos a través del potencial Coulombiano. Este proceso se denomina excitación Coulombiana. Los datos de excitación Coulombiana son especialmente adecuados para estudiar la forma nuclear. Ello es debido a que en el operador que produce la excitación intervienen el potencial de inter-

acción nuclear y la estructura del estado excitado. Si el potencial de interacción nuclear es bien conocido, como es el caso del potencial Coulombiano, podemos determinar los detalles de la estructura del estado excitado. Este procedimiento se ha aplicado extensivamente para determinar formas nucleares. El método determina con precisión tanto la magnitud de la deformación como su signo (es decir, si el núcleo es oblato o prolato).

2.7. Dispersión de electrones por núcleos

La dispersión de electrones por núcleos es el método más usual de determinar distribuciones de carga de núcleos. Este procedimiento comparte la ventaja de la excitación Coulombiana de que el potencial de interacción es conocido. Mediante la dispersión elástica de electrones sólo se puede determinar la distribución esférica de carga del núcleo (no son accesibles los detalles de la deformación nuclear). Para poder determinar las distribuciones de carga nucleares, la longitud de onda reducida de los electrones $\lambda = \hbar/p$

$$\lambda \sim \frac{\hbar c}{pc} = \frac{197}{E(\text{MeV})} \text{ fm}$$

debe de ser como mucho del orden de 1 fm, lo que implica energías del orden de 200 MeV. En este caso, se demuestra que la sección eficaz diferencial se puede expresar como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} F^2(q)$$

donde a $F(q)$ se le conoce con el nombre de factor de forma, y depende únicamente de la transferencia de momento $q = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|/\hbar$, dada por

$$q = \frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}$$

El factor de forma $F(q)$ es una medida de la desviación de la distribución de carga de una carga puntual. Se demuestra la siguiente relación entre el factor de forma y la distribución de carga $\rho_{ch}(r)$

$$F(q) = \frac{4\pi}{qZe} \int_0^\infty r dr \sin(qr) \rho_{ch}(r)$$

Por lo tanto, el conocimiento de $F(q)$ con precisión nos permite determinar la distribución de carga. El factor de forma se determina simplemente como el cociente de la sección eficaz diferencial y la sección eficaz de Mott. Si desarrollamos $\sin(qr)$ en serie de potencias, tenemos

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{4\pi}{qZe} \int_0^\infty r dr \left(qr - \frac{1}{6} q^3 r^3 + \dots \right) \rho_{ch}(r) = \frac{4\pi}{Ze} \int_0^\infty r^2 dr \rho_{ch}(r) \left[1 - \frac{1}{6} q^2 r^2 + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \dots \end{aligned}$$

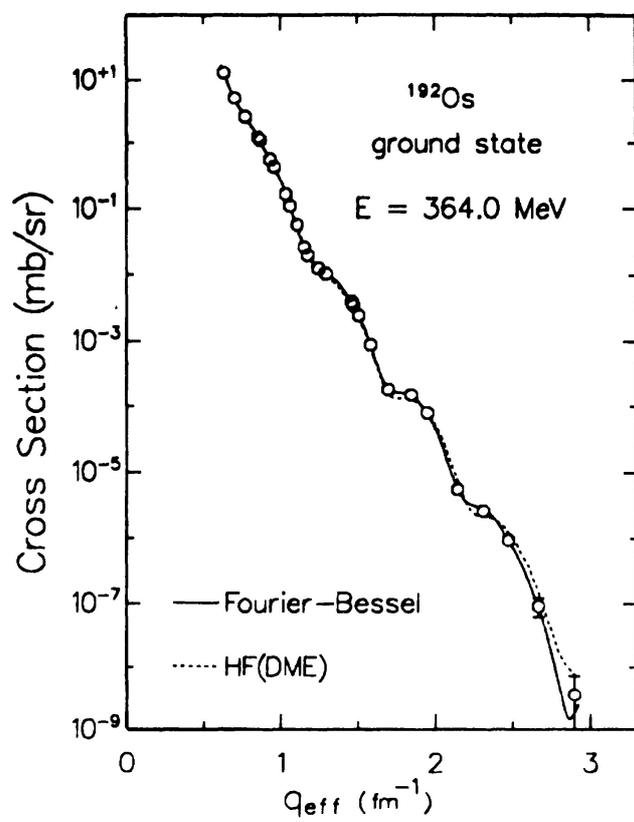


Figura 2.5: Sección eficaz de dispersión de electrones por Os.

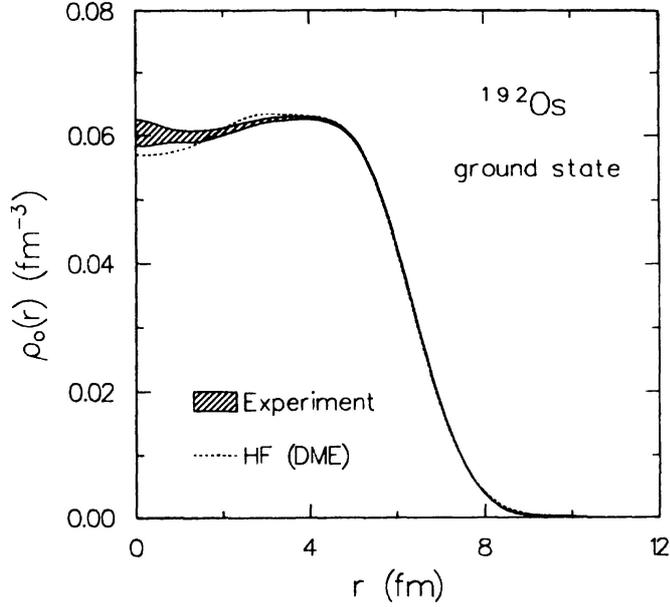


Figura 2.6: Densidad de ^{192}Os obtenida del ajuste del factor de forma medida experimentalmente comparada con la predicha por el modelo de Hartree-Fock.

donde hemos tenido en cuenta que la integral de volumen de la densidad de carga está normalizada a Ze . Vemos que la información que se extrae más fácilmente es el radio cuadrático medio de la densidad de carga. Si los datos tienen buena precisión, se pueden determinar más parámetros de la densidad de carga. Es usual es tomar la densidad parametrizada en la forma de Fermi

$$\rho_F(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - c)/a)}$$

o Gaussiana

$$\rho_G(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r^2 - c^2)/a^2)}$$

Los parámetros ρ_0 , c y a se ajustan a los datos experimentales y sus valores aproximados son $\rho_0 \simeq 0,17 \text{ e/fm}^3$, $a \simeq 0,55 \text{ fm}$ y $c \simeq 1,1A^{1/3} \text{ fm}$. Los datos con buena precisión admiten el ajuste de un parámetro adicional, en la forma conocida como densidad de Fermi parabólica,

$$\rho_{FP}(r) = \frac{\rho_0 (1 + wr^2/c^2)}{1 + \exp((r - c)/a)}$$

Cuando $w < 0$ existe un abultamiento en la parte interior de la densidad y cuando $w > 0$ existe una depresión. Datos de excelente precisión obtenidos en tiempos

recientes admiten el ajuste de un mayor número de parámetros. Una práctica usual es el ajuste mediante una densidad de Fermi parabólica y una serie de Fourier Bessel

$$\rho(r) = \rho_{FP}(r) + \delta\rho(r)$$

con

$$\delta\rho(r) = \sum_i a_i j_0(q_i r)$$

donde $j_0(q_i r)$ son las funciones esféricas de Bessel y a_i parámetros ajustables. De hecho, actualmente se prescinde de la densidad de Fermi parabólica y se ajustan los datos en serie de Fourier-Bessel:

$$\rho(r) = \sum_{n=1}^N a_n j_0(q_n r)$$

donde $q_n = \frac{n\pi}{R}$, donde R es un radio a partir de cual la densidad se toma como nula y N viene determinado por la máxima transferencia de momento medida experimentalmente, $N = \frac{q_{max} R}{\pi}$.

2.8. Desarrollo en ondas parciales de la función de onda. Amplitud de dispersión

Hemos visto que la información sobre las reacciones nucleares se obtiene mediante la medida de observables, esencialmente secciones eficaces y magnitudes relacionadas. Sin embargo, la descripción teórica de las reacciones nucleares se realiza, como para cualquier sistema cuántico, mediante una función de ondas. Los observables se miden a una distancia muy grande del punto de colisión en comparación con las dimensiones nucleares. Podemos tomar esta distancia como infinita. Por lo tanto, los observables estarán relacionados con la forma asintótica de la función de ondas. La función de ondas, en el caso de reacciones nucleares a energías no relativistas, viene descrita por la ecuación de Schrödinger. Si consideramos como única variable relevante en la interacción entre dos núcleos la distancia relativa entre ambos, que denotamos por \mathbf{r} , podemos describir la dinámica de esta variable mediante un potencial. En el caso de simetría esférica, el potencial dependerá únicamente de la distancia r entre ambos núcleos, y lo denotaremos como $V(r)$. La ecuación de Schrödinger toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + V(r) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

donde E es la energía del sistema. La función de onda incidente es una onda plana. Si tomamos en el eje z la dirección del haz, esta función será e^{ikz} , salvo

un factor de normalización. Como consecuencia de la colisión, se producirá una onda esférica (principio de Huygens aplicado a ondas de materia). La amplitud de esta onda esférica puede depender de los ángulos polar ϕ y azimutal θ . En el caso de haces despolarizados y de partículas sin espín, la reacción tiene lugar en un plano, y por lo tanto la onda esférica dispersada depende únicamente del ángulo polar θ . Llamemos $f(\theta)$ a esta amplitud de dispersión. Por lo tanto, podemos escribir para la forma asintótica de la función de ondas:

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

La amplitud de dispersión $f(\theta)$ está directamente relacionada con la sección eficaz diferencial. Para cada partícula incidente $\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$ es la probabilidad de que la partícula sea dispersada un ángulo θ , normalizada a la unidad en una superficie de radio r . Si tenemos N_P proyectiles incidentes, el número de partículas dispersadas por n_B blancos, a través una superficie elemental dS centrada en θ , será

$$N_{disp} = N_P n_B \frac{|f(\theta)|^2 dS}{r^2} = N_P n_B |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Por lo tanto, la sección eficaz diferencial viene dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{disp}}{N_P n_B d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

Por lo tanto, la sección eficaz diferencial viene dada por el cuadrado del módulo de la amplitud de dispersión. La amplitud de dispersión nos permite compararla directamente con los datos experimentales. Debemos ahora obtener una relación directa entre la función de onda y la amplitud de dispersión. La ecuación de Schrödinger es una ecuación en tres dimensiones. Su resolución numérica en tres dimensiones es complicada tanto desde el punto de vista conceptual como numérico. La forma usual de actuar en este caso, es representar la solución como una serie en funciones de onda propias de las variables angulares, que son los polinomios de Legendre, $P_l(\cos \theta)$:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(r) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w_l(r)}{r} P_l(\cos \theta)$$

donde la segunda forma es la que se utiliza para obtener la solución numérica, porque las funciones $u_l(r)$ son singulares en el origen mientras que las funciones $w_l(r)$ son regulares en el origen. A este desarrollo se le denomina el desarrollo en ondas parciales de la función de onda. Cada término del desarrollo corresponde a la componente de momento angular definido $l\hbar$ de la función de onda. Cuando introducimos el desarrollo en ondas parciales de la función de ondas en la ecuación

de Schrödinger, obtenemos que cada una de las funciones radiales $w_l(r)$ debe de satisfacer la ecuación radial:

$$\frac{d^2 w_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w_l(r) = 0$$

donde el número de ondas k está relacionado con la energía del sistema por $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ y $U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$. Es interesante resaltar que el término

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

juega el papel de un potencial efectivo, suma de los potenciales nuclear y Coulombiano $V(r)$, y del denominado potencial centrífugo $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$.

La onda plana incidente e^{ikz} tiene como desarrollo en ondas parciales

$$\psi_{in} = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

donde las funciones esféricas de Bessel $j_l(kr)$ satisfacen la forma asintótica

$$i^l j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} [e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}]$$

Vemos que podemos considerar la onda plana incidente como una suma coherente de ondas planas incidentes e^{-ikr} y emergentes, e^{ikr} , de la misma intensidad. El efecto de la dispersión nuclear es añadir una onda esférica emergente de amplitud $f(\theta)$. La función radial emergente tiene la forma asintótica (salvo una constante compleja, definida por la normalización):

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2l+1}{2ikr} [\eta_l e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}]$$

donde η_l se denomina coeficiente de reflexión, y da la intensidad de la onda emergente. La diferencia entre las formas asintóticas de la función de ondas total y la onda plana incidente viene dada por

$$\Psi(\mathbf{r}) - e^{ikz} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\eta_l - 1) e^{ikr} P_l(\cos \theta)$$

de donde obtenemos el desarrollo en ondas parciales de la amplitud de dispersión:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\eta_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

En el caso de un potencial real, todo lo que entra en el canal de entrada debe de emerger en el canal de salida, y por lo tanto el módulo del coeficiente de reflexión debe ser la unidad. Este hecho permite parametrizar η_l en términos de una fase: $\eta_l = e^{2i\delta_l}$, donde δ_l recibe el nombre de desfase, ya que corresponde al desfase de la onda plana debido al potencial. Cuando la energía incidente sobrepasa el umbral de otros canales de reacción, parte del flujo incidente irá a parar a estos canales. Cuando se sobrepasa la barrera de Coulomb comienza a haber reacciones nucleares con gran intensidad. En las reacciones nucleares a energías superiores a la barrera de Coulomb, muchas de las partículas del canal de entrada acaban en otros canales de reacción y por lo tanto desaparecen de la onda incidente. El módulo de la onda emergente es menor que la unidad. Este hecho se puede representar mediante desfases a condición de permitir desfases complejos $\delta_l = \delta_R + i\delta_I$. Tendremos $\eta_l = e^{-2\delta_I} e^{2i\delta_R}$. Se debe de cumplir $\delta_I > 0$ para que $|\eta_l| < 1$.

La utilidad del desarrollo en ondas parciales radica en que, en general, converge rápidamente y sólo se necesita considerar unos pocos términos. Vamos a estimar cuantas ondas parciales son necesarias para describir una determinada reacción nuclear. Supongamos que el alcance de la interacción es R . Entonces, parámetros de impacto del orden de R corresponden clásicamente a un momento angular $L \simeq pR$. Como $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \simeq l\hbar$, tenemos la condición $l \simeq \frac{p}{\hbar}R = kR$. Aunque estas consideraciones se basan en la suposición de la validez de la relación clásica entre momento angular y parámetro de impacto, en la práctica se encuentra que kR es una estimación adecuada del número de ondas parciales necesarias, incluso para sistemas para los que la aproximación clásica no es adecuada. Cuando $kR \ll 1$, sólo contribuye la onda parcial con $l = 0$, denominada onda s . En este caso

$$f(\theta) = \frac{\eta_0 - 1}{2ik}$$

que da para la sección eficaz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{\eta_0 - 1}{2ik} \right|^2$$

Vemos que en el caso de dominancia de la onda s , la sección eficaz diferencial es isótropa. Estas consideraciones se emplearon en los comienzos de la Física Nuclear para estimar el alcance de la interacción nuclear. Por ejemplo, se encontró que la sección eficaz diferencial de la dispersión $p-n$ a 14 MeV ($k = \sqrt{m_N E_{Lab}}/2\hbar^2 = 0,41 \text{ fm}^{-1}$) era completamente isótropa, empezaba a depender del ángulo a 27 MeV ($k = 0,57 \text{ fm}^{-1}$) y tenía una manifiesta dependencia con el ángulo a 42 MeV ($k = 0,71 \text{ fm}^{-1}$). Esta dependencia de la sección eficaz diferencial con el ángulo indicaba que el alcance de la interacción nuclear era menor de 2 fm.

El modelo más sencillo de reacciones nucleares es el conocido como modelo de absorción fuerte. La suposición de este modelo es que siempre que hay interacción

hay absorción, es decir, las partículas que interaccionan nunca acaban en el canal elástico, sino en canales inelásticos o de reacción. En este modelo tenemos

$$\begin{cases} \eta_l \simeq 0 & l \leq L \\ \eta_l = 1 & l > L \end{cases}$$

con $L \simeq kR$. Este modelo es aproximadamente válido en reacciones nucleares con iones pesados a energías muy por encima de la barrera de Coulomb. La amplitud de dispersión toma la forma

$$f(\theta) = -\frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l(\cos \theta)$$

que representa la absorción de ondas incidentes por un disco negro de radio $r = L/k$.

2.8.1. Dispersión multicanal

Hasta ahora hemos considerado únicamente el canal elástico. Frecuentemente es necesario incluir en el modelo los canales inelásticos y de reacción. En este caso, escribiremos la función de ondas en el canal de salida como una combinación lineal de todos los resultados posibles de la reacción que deseamos incluir en el modelo (recordemos que la realidad puede ser extraordinariamente compleja, y que aquellos canales que no deseamos tener en cuenta explícitamente, están tenidos en cuenta mediante un coeficiente de reflexión menor que la unidad). En el caso multicanal escribimos:

$$\Psi = \sum_{bB} \chi_{bB}(r, \theta, \phi) \psi_b \psi_B$$

donde χ_{bB} es la función de ondas relativa entre los núcleos y ψ_b y ψ_B , son las funciones de ondas internas, descritas por un modelo adecuado (capas, colectivos,...). Denotamos por α el canal incidente, y asignamos el subíndice α a todas las variables en el canal de entrada, mientras que denotamos por β un índice que varía sobre todos los canales, incluido el de entrada. Con esta notación, podemos escribir la forma asintótica de la función de ondas relativa χ_{bB} como:

$$\chi_{bB}(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha} \delta_{\alpha\beta} + f_\beta(\theta, \phi) \frac{e^{ik_\beta r_\beta}}{r_\beta}$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es la delta de Kronecker, que tiene en cuenta el hecho de que sólo hay onda plana incidente en el canal de entrada. Cada una de las funciones de onda relativas satisface una ecuación de Schrödinger, con la correspondiente energía relativa y el correspondiente potencial. Aunque estas ecuaciones están acopladas

en la zona de interacción, como veremos más adelante en este tema, cuando estudiemos la dispersión inelástica, en la zona asintótica están desacopladas, es decir las ecuaciones de cada una de las funciones de ondas son independientes. Cada una de las funciones de onda de los diferentes canales se pueden desarrollar en ondas parciales, que deben de satisfacer las condiciones asintóticas:

$$u_{l,aA} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{(2l+1)}{2ik_\alpha r} [\eta_{l,\alpha} e^{ik_\alpha r} - (-)^l e^{-ik_\alpha r}]$$

$$u_{l,bB} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{(2l+1)}{2ik_\alpha r} \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^{1/2} \eta_{l,\beta} e^{ik_\beta r}$$

donde el factor $\left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^{1/2}$ se introduce para que los coeficientes de reflexión manifiesten simetrías, eliminando dependencias del flujo de partículas con las velocidad relativa del canal. Esto se consigue poniendo todos los flujos de salida a la misma velocidad v_α , de forma que el flujo se conserve sobre una esfera de radio R . Cuando no hay dispersión tenemos $\eta_{l,\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, donde α es el canal de entrada. Cuando sólo hay dispersión elástica, el hecho de que todo el flujo incidente debe de salir en el canal de entrada impone la condición $|\eta_{l,\alpha}| = 1$, lo que nos permite escribir $\eta_{l,\alpha} = e^{2i\delta_{l,\alpha}}$, donde $\delta_{l,\alpha}$ es una fase real, cuyo significado físico es el desfase de la onda emergente con respecto de la onda incidente producido por el potencial de dispersión. Cuando hay canales no elásticos abiertos (inelásticos o de reacción), existe una desaparición del flujo del canal elástico que va a parar a estos canales. La conservación del número de partículas implica que la suma de los flujos en todos los canales de salida debe de ser igual al flujo en el canal de entrada (una vez que se corrige el flujo por la velocidad, como hemos hecho antes, para tener en cuenta el hecho de que el flujo a una distancia dada del centro de colisión es menor si la velocidad del canal de salida disminuye). Tendremos en este caso $|\eta_{l,\alpha}| < 1$, y deberá cumplirse

$$|\eta_{l,\alpha}|^2 + \sum_{\beta \neq \alpha} |\eta_{l,\beta}|^2 = 1$$

que nos dice simplemente que los números de partículas que salen y entran son iguales.

2.9. Matriz S. Secciones eficaces elástica, total y de absorción

Se define la matriz S , como la matriz cuyos elementos son

$$S_{\alpha\beta}^l = \eta_{l,\beta}^\alpha$$

donde el superíndice en el coeficiente de reflexión indica el canal de entrada. El principio de microrreversibilidad de la Mecánica Cuántica ³ implica que la matriz S es simétrica:

$$S_{\alpha\beta}^l = S_{\beta\alpha}^l$$

lo que se conoce como *teorema de reciprocidad*. La conservación del flujo impone por otro lado que

$$\sum_{\beta} |S_{\alpha\beta}^l|^2 = 1$$

Esta última propiedad implica que la matriz S es unitaria.

La amplitud de dispersión en función de la matriz S queda en la forma

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{2ik_{\alpha}} \left(\frac{v_{\alpha}}{v_{\beta}} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (S_{\alpha\beta}^l - \delta_{\alpha\beta}) P_l(\cos\theta) \quad (2.7)$$

donde la delta de Kronecker tiene en cuenta que sólo hay onda incidente en el canal de entrada α . Definimos la sección eficaz integrada σ_{β}^{α} de dispersión en un canal β a partir del canal de entrada α como

$$\sigma_{\beta}^{\alpha} = \int \frac{d\sigma_{\beta}}{d\Omega} d\Omega = \frac{v_{\beta}}{v_{\alpha}} \int |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2 = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) |S_{\alpha\beta}^l - \delta_{\alpha\beta}|^2$$

donde en la derivación de la anterior relación hemos puesto $d\Omega = 2\pi d(\cos\theta)$ y tenido en cuenta la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Se define la sección eficaz de absorción (o reacción) como la suma de las secciones eficaces a todos los canales distintos del elástico

$$\sigma_R^{\alpha} \equiv \sigma_{abs}^{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \sigma_{\beta}^{\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) \sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\alpha\beta}^l|^2$$

Si tenemos en cuenta la relación de unitariedad, podemos escribir la relación anterior como

$$\sigma_R^{\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_{\alpha\alpha}^l|^2)$$

La sección eficaz elástica $\sigma_{el}^{\alpha} = \sigma_{\alpha}^{\alpha}$ viene dada por

$$\sigma_{el}^{\alpha} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_{\alpha\alpha}^l|^2$$

³En palabras, este principio establece que la probabilidad de ocurrencia de un proceso elemental y su inverso en el tiempo son iguales.

Se define la sección eficaz total σ_T como la suma de las secciones eficaces elásticas y de absorción

$$\sigma_T^\alpha = \sigma_{el}^\alpha + \sigma_R^\alpha = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) (2 - S_{\alpha\alpha}^l - S_{\alpha\alpha}^{l*}) = \frac{2\pi}{k_\alpha^2} \sum_l (2l+1) (1 - \text{Re} S_{\alpha\alpha}^l) \quad (2.8)$$

Vemos que los elementos de matriz S en el canal elástico determinan las secciones eficaces, elástica, total y de reacción.

Los modelos más sencillos de reacciones nucleares son aquellos que parametrizan la matriz S . El modelo de absorción fuerte supone que $S_{\alpha\alpha}^l$ vale 0 hasta un valor crítico del momento angular, l_{cr} , y 1 a partir de este valor. Vemos que para las ondas parciales en las que la matriz S se anula, la sección eficaz de reacción es máxima. En este modelo, tenemos que la sección eficaz de reacción σ_r vale:

$$\sigma_R = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{l=0}^{l_{cr}} (2l+1) = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \left[2 \frac{l_{cr}(l_{cr}+1)}{2} + l_{cr} + 1 \right] = \frac{\pi(l_{cr}+1)^2}{k_\alpha^2} \quad (2.9)$$

De las fórmulas anteriores para las secciones eficaces elástica, de reacción y total, vemos que si $S_{\alpha\alpha}^l = 0$, entonces se cumple $\sigma_R^l = \sigma_{el}^l = \frac{\pi}{k_\alpha^2} (2l+1)$. Por lo tanto cuando la sección eficaz de reacción es máxima, la sección eficaz elástica es igual a la sección eficaz de reacción (y no nula, como se podría pensar). Además, cuando $S_{\alpha\alpha}^l = 1$, tanto la sección eficaz elástica como la de reacción se anulan. Cuando $|S_{\alpha\alpha}^l| = 1$, pero $S_{\alpha\alpha}^l$ es compleja, la sección eficaz de reacción es nula, pero no la sección eficaz elástica. Por lo tanto, puede haber dispersión elástica sin reacciones pero no al revés. En el modelo de absorción fuerte, las secciones eficaces elásticas y de reacción son iguales, y la sección eficaz total es el doble de la elástica. Cuando la matriz S se obtiene de modelos con potenciales realistas, $S_{\alpha\alpha}^l$ vale 0 para momentos angulares bajos, y sube hasta 1 de forma más o menos rápida. Se define entonces el momento angular crítico, l_{cr} , como el valor de l para el cual $S_{\alpha\alpha}^l = \frac{1}{2}$ (en general un número no entero, obtenido interpolando entre los dos valores de l enteros en los que S es inferior y superior a 0.5, respectivamente). Se encuentra que las secciones eficaces de reacción satisfacen aproximadamente la fórmula 2.9, dada por el modelo de absorción fuerte. Si definimos el radio de absorción fuerte R_{SA} como

$$R_{SA} = \frac{l_{cr} + 1}{k_\alpha}$$

de la ecuación 2.9, tenemos para la sección eficaz de reacción:

$$\sigma_R = \pi R_{SA}^2$$

Si las secciones eficaces de reacción entre iones pesados a energías superiores a la barrera de Coulomb, medidas experimentalmente para un gran número de

sistemas a diferentes energías, se ajustan por esta fórmula, se obtiene

$$R_{SA} = r_{SA}(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$$

con r_{SA} comprendido entre 1,4 y 1,5 fm.

En el pasado se utilizaron modelos que parametrizaban la matriz S. Poniendo $S_l^0 = \eta_l^0 e^{2i\delta_l^0}$, se parametrizaba

$$\begin{aligned}\eta_l^0 &= \left[1 + \exp\left(\frac{L-l}{\Delta}\right) \right]^{-1} \\ \delta_l^0 &= \delta \left[1 + \exp\left(\frac{L-l}{\Delta_\delta}\right) \right]^{-1}\end{aligned}$$

con $L, \Delta, \delta, \Delta_\delta$ como parámetros ajustables. Estos modelos reproducían de forma precisa los datos experimentales aunque no daban ninguna información acerca de los mecanismos de reacción en función de la interacción nuclear.

2.10. Teorema óptico

Una relación particularmente importante, conocida con el nombre de *teorema óptico*, liga la amplitud de dispersión hacia adelante ($\theta = 0^\circ$) con la sección eficaz total. Si tenemos en cuenta que $P_l(0) = 1$, la amplitud de dispersión elástica a 0° vale:

$$f_{\alpha\alpha}(0) = \frac{1}{2ik_\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_{\alpha\alpha}^l - 1) = \frac{1}{2k_\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [(1 - \text{Re}S_{\alpha\alpha}^l)i + \text{Im}S_{\alpha\alpha}^l]$$

Comparando con la ecuación 2.8, vemos que

$$\sigma_T^\alpha = \frac{4\pi}{k_\alpha} \text{Im}f_{\alpha\alpha}(0)$$

Esta relación se conoce con el nombre de teorema óptico. De ella se obtienen diversas desigualdades y relaciones de interés. Por ejemplo, si tenemos en cuenta que la sección eficaz diferencial viene dada por el módulo al cuadrado de la amplitud de dispersión, obtenemos la relación

$$\sigma_T \leq \frac{4\pi}{k_\alpha} \sqrt{\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(0^\circ)}$$

conocida como *desigualdad de Wick*. Nos dice que si σ_R es grande $\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(0^\circ)$ también lo es.

2.11. Dispersión de partículas cargadas

Hasta ahora hemos considerado interacciones de alcance finito, para las que la onda emergente es una onda plana. Sin embargo, salvo en el caso de la dispersión de neutrones por núcleos, la interacción Coulombiana, que es de alcance infinito, juega un papel importante en las colisiones nucleares. En primer lugar, vamos a considerar la dispersión Coulombiana pura. En este caso, la ecuación radial de Schrödinger toma la forma

$$\frac{d^2 w_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2mZ_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w_l(r) = 0$$

que se acostumbra a escribir como

$$\frac{d^2 w_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w_l(r) = 0$$

en función del parámetro de Sommerfeld $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$. Las soluciones de esta ecuación son las denominadas funciones regulares e irregulares de Coulomb, $F_l(kr)$ y $G_l(kr)$. Las funciones equivalentes en la dispersión Coulombiana de las ondas planas incidentes y emergentes son las funciones $H_l^{(\mp)}(kr) = F_l(kr) \mp iG_l(kr)$. La forma asintótica de la solución con una onda plana de Coulomb incidente ($F_l(kr)$) y ondas esféricas emergentes es

$$w_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2l+1}{2ik} \left(H_l^{(-)}(kr) + e^{2i\sigma_l} H_l^{(+)}(kr) \right)$$

donde σ_l , conocido como desfasaje Coulombiano, viene dado por

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\eta)$$

La amplitud de dispersión Coulombiana viene dada por lo tanto por

$$f_C(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\sigma_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

Esta serie se puede sumar analíticamente, dando como resultado

$$f_C(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\eta \ln \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sigma_0}$$

La sección eficaz asociada es la sección eficaz de Rutherford

$$\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} = |f_C(\theta)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Cuando además del potencial Coulombiano tenemos un potencial nuclear de corto alcance $V_N(r)$, la ecuación radial de Schrödinger para cada una de las ondas parciales es

$$\frac{d^2 w_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V_N(r) - \frac{2k\eta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w_l(r) = 0$$

El potencial nuclear introduce un desfase adicional δ_l^N , con lo que el desarrollo en ondas parciales de la amplitud de dispersión toma la forma

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i(\sigma_l + \delta_l^N)} - 1) P_l(\cos \theta)$$

que se puede escribir, sumando y restando $e^{2i\sigma_l}$ a la exponencial, como

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\sigma_l} - 1) P_l(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\sigma_l} (e^{2i\delta_l^N} - 1) P_l(\cos \theta) = f_C(\theta) + f'(\theta)$$

donde $f'(\theta)$ es el incremento de la amplitud de dispersión debido a la interacción nuclear. En el caso multicanal tenemos de forma análoga

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{2ik_\alpha} \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i(\sigma_l^\beta + \delta_l^\beta)} - \delta_{\alpha\beta}) P_l(\cos \theta) = f_C(\theta) \delta_{\alpha\beta} + f'_{\alpha\beta}(\theta) \quad (2.10)$$

con $\sigma_l^\beta = \arg \Gamma(l+1 + i\eta_\beta)$. La sección eficaz viene dada por

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = |f_C(\theta) \delta_{\alpha\beta} + f'_{\alpha\beta}(\theta)|^2$$

En el caso de partículas cargadas, el teorema óptico toma una forma diferente

$$[\sigma_{el} - \sigma_{Ruth}] + \sigma_R = \frac{4\pi}{k_\alpha} f'_{\alpha\alpha}(0^\circ)$$

Cuando tenemos absorción fuerte, como es el caso de las colisiones entre iones pesados, $\sigma_R \gg \frac{4\pi}{k_\alpha} f'_{\alpha\alpha}(0^\circ)$ y tenemos que se cumple muy aproximadamente

$$\sigma_{Ruth} - \sigma_{el} = \sigma_R$$

donde σ_R es la sección eficaz de Rutherford. Esta fórmula permite estimar la sección eficaz de reacción como el área entre la sección eficaz diferencial de Rutherford y la sección eficaz diferencial elástica:

$$\sigma_R = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left[\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \right]$$

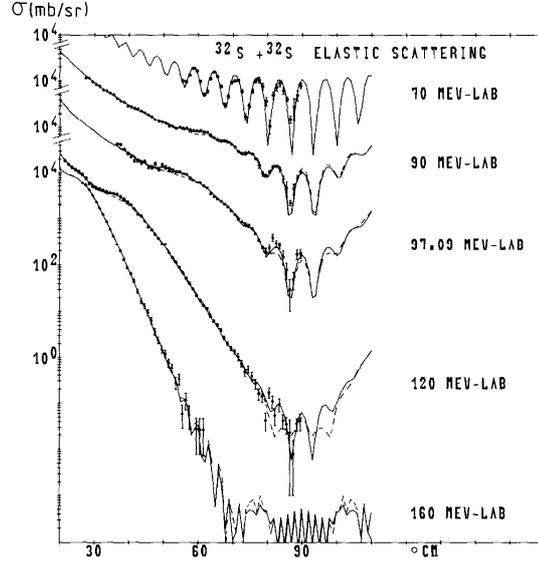


Figura 2.7: Dispersión de partículas idénticas. En la figura se muestra la sección eficaz diferencial de $^{32}\text{S} + ^{32}\text{S}$ a diversas energías cercanas a la barrera de Coulomb. Se observa el patrón de interferencia alrededor de 90° , que disminuye con la energía.

En realidad, como la sección eficaz diferencial elástica es prácticamente la de Rutherford hasta un ángulo θ_m , basta con realizar la integral entre este ángulo y 180° :

$$\sigma_R \simeq 2\pi \int_{\theta_m}^{\pi} d\theta \sin \theta \left[\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \right]$$

Esto proporciona un método de calcular la sección eficaz de reacción a partir de la sección eficaz elástica, que coincide satisfactoriamente con la sección eficaz de reacción medida experimentalmente. Este método se conoce con el nombre de Suma de Diferencias (SOD), puesto que la integral se evalúa numéricamente como la suma de áreas elementales. Si las secciones eficaces se miden en intervalos angulares $\Delta\theta$, tenemos

$$\sigma_R \simeq 2\pi \sum_i \Delta\theta \sin \theta_i \left[\frac{d\sigma_{Ruth}(\theta_i)}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{el}(\theta_i)}{d\Omega} \right]$$

2.12. Dispersión de partículas idénticas

En el caso de dispersión de partículas idénticas, no podemos saber cual de las dos ha llegado a un detector, si el proyectil o el blanco, puesto que son completamente indistinguibles, en el sentido de la Mecánica Cuántica. Como ambas partículas tienen momentos opuestos en el sistema CM, si una es dispersada a un ángulo θ la otra es dispersada a un ángulo $\pi - \theta$. La indistinguibilidad implica que las amplitudes de dispersión en θ y $\pi - \theta$ son idénticas salvo un signo, que es lo mismo que decir que la función de onda es simétrica o antisimétrica en el intercambio de ambas partículas

$$f(\theta) = \pm f(\pi - \theta)$$

con el signo $+$ en el caso de bosones y el signo $-$ en el caso de fermiones. Como los polinomios de Legendre satisfacen la relación $P_l(\cos \theta) = (-)^l P_l(\cos(\pi - \theta))$, la anterior relación implica que cada término en el desarrollo en ondas parciales 2.10 satisface

$$(2l + 1)(e^{2i(\sigma_l + \delta_l^N)} - 1)P_l(\cos \theta) = \pm (-)^l (2l + 1)(e^{2i(\sigma_l + \delta_l^N)} - 1)P_l(\cos \theta)$$

lo cual sólo es posible si no hay dispersión en ondas parciales impares en el caso de bosones o pares en el caso de fermiones. Por lo tanto en el caso de dispersión de bosones sólo hay términos pares en el desarrollo de ondas parciales, mientras que en el caso de fermiones sólo hay ondas parciales impares. La forma de realizar la supresión de las ondas parciales que no contribuyen es calcular la amplitud de dispersión $f(\theta)$ y reemplazarla por una amplitud simetrizada $f_S(\theta)$ de acuerdo con el caracter bosónico o fermiónico del sistema:

$$f_S(\theta) = (f(\theta) \pm f(\pi - \theta))$$

Como consecuencia de la simetrización, la sección eficaz diferencial es simétrica alrededor de 90°

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2) \pm (f(\theta)f(\pi - \theta)^* + f(\theta)^*f(\pi - \theta))$$

y presenta un patrón de interferencia producido por el segundo término del segundo miembro de la ecuación anterior. El primer término del segundo miembro corresponde a la amplitud simetrizada clásicamente. En el caso de dispersión Coulombiana tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{clas} &= (|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2) = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{Ze}{4E}\right)^2 \left(\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

mientras que el término de interferencia vale

$$2 \left(\frac{Ze}{4E} \right)^2 \sin^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(2 \cos \left(\eta \ln \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \eta \ln \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right) = \\ 2 \left(\frac{Ze}{4E} \right)^2 \sin^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \ln \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Este término es oscilatorio con una frecuencia que aumenta cuando nos alejamos de $\theta = \pi/2$. La frecuencia aumenta con la carga y disminuye con la energía. La suma de ambos términos se conoce como sección eficaz de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{Ze}{4E} \right)^2 \left(\sin^{-4} \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^{-4} \left(\frac{\theta}{2} \right) \pm 2 \sin^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{-2} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \ln \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right)$$

El signo + se aplica en el caso de bosones y produce un máximo a 90° mientras que el signo - se aplica a fermiones y produce un mínimo. En la figura 2.7 Se muestra las distribuciones angulares de la dispersión $^{32}\text{S} + ^{32}\text{S}$ (sistema bosónico) a diversas energías alrededor de la barrera de Coulomb. En la figura 2.8 se comparan los datos a 70 MeV con las sección eficaz de Mott.

2.13. Reacciones inversas

El teorema de reciprocidad es equivalente a la simetría de la matriz S , $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$. Esta simetría implica que

$$k_\alpha \left(\frac{v_\beta}{v_\alpha} \right)^{1/2} f_{\alpha\beta}(\theta) = k_\beta \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta} \right)^{1/2} f_{\beta\alpha}(\theta)$$

como es fácil comprobar del desarrollo en ondas parciales 2.7. Cuando esto se traslada a las relaciones entre secciones eficaces, tenemos que los cocientes de velocidades desaparecen y queda

$$k_\beta^2 \sigma_{\beta\alpha} = k_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta}$$

Cuando se trata de reacciones de partículas con spin hay que tener en cuenta los pesos estadísticos en la relación entre la amplitud de dispersión y la sección eficaz:

$$(2I_B + 1)(2I_b + 1)k_\beta^2 \sigma_{\beta\alpha} = (2I_A + 1)(2I_a + 1)k_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta}$$

Los factores $(2I_B + 1)(2I_b + 1)k_\beta^2$ son proporcionales a las densidades de estados en el estado final, pues p^2 es la densidad en el espacio de momentos y el peso

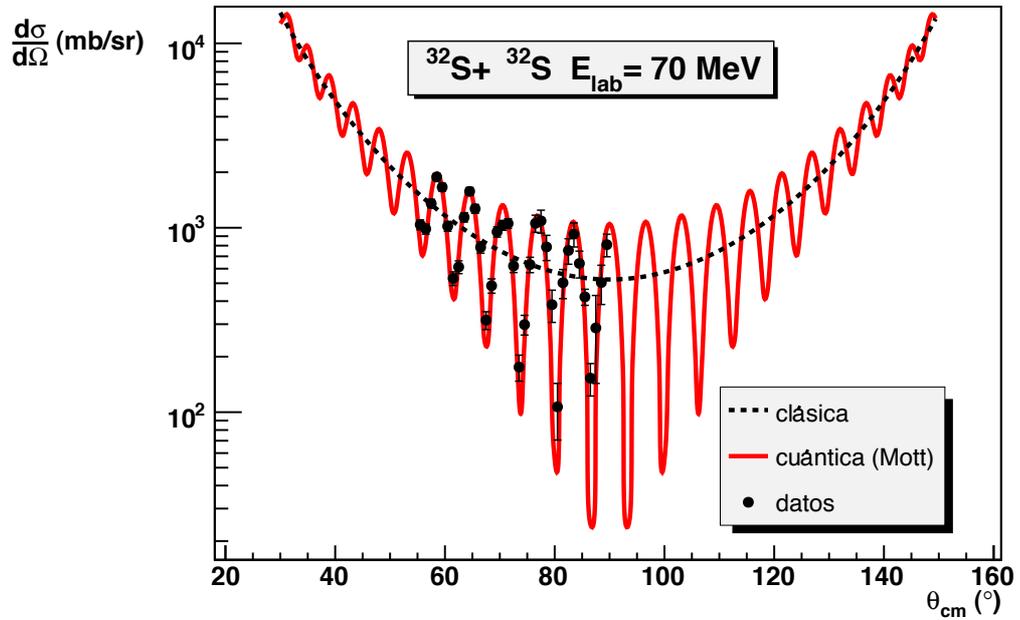


Figura 2.8: Datos experimentales de la dispersión $^{32}\text{S} + ^{32}\text{S}$ a 70 MeV de energía incidente comparados con la sección eficaz de Mott.

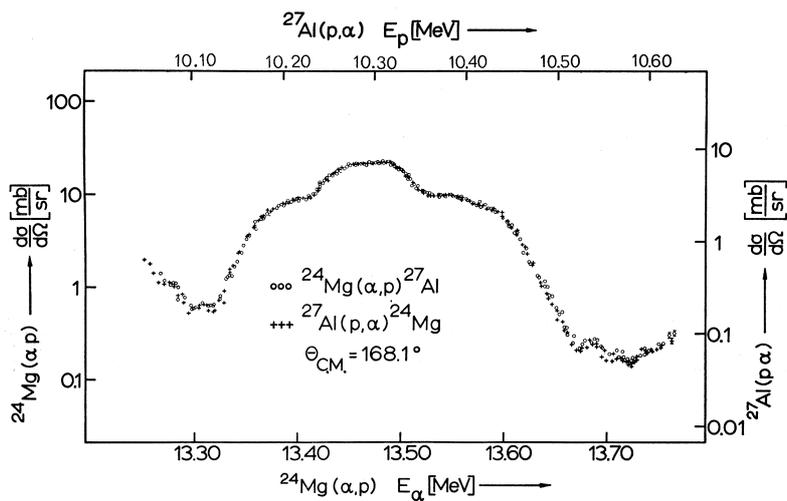


Figura 2.9: Reacciones inversas

estadístico es la multiplicidad de estados de momento angular. Cuando escribimos la relación anterior en la forma

$$\frac{\sigma_{\beta\alpha}}{k_{\alpha}^2(2I_A + 1)(2I_A + 1)} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{k_{\beta}^2(2I_B + 1)(2I_B + 1)}$$

no dice que la probabilidad de transición de un estado inicial a otro final es la misma para la reacción directa e inversa. Esta relación es una manifestación del principio de microreversibilidad. En Mecánica Cuántica la transición entre un estado inicial $|i\rangle$ y un estado final $|f\rangle$ ocurre si existe un operador de transición O que ligue ambos estados. La probabilidad de transición viene dada por

$$P(i \rightarrow f) = |\langle i|O|f\rangle|^2$$

La hermiticidad del operador O resulta en la igualdad de las probabilidades directa e inversa

$$P(i \rightarrow f) = P(f \rightarrow i)$$

2.14. El modelo óptico de la dispersión elástica

Hemos visto en la discusión de la dispersión elástica, que la existencia de canales no elásticos tenía como consecuencia que el módulo del elemento de matriz S , en el canal elástico $S_{\alpha\alpha}$ era menor de la unidad. También vimos que esto se podía materializar mediante desfases complejos. En esta sección nos planteamos el describir la dispersión de partículas mediante un potencial. Si en nuestro modelo pudiésemos incluir todos los (infinitos) resultados del canal de salida de la reacción nuclear, el potencial de interacción debería de ser real. Sin embargo, debido a la magnitud del problema real, lo que no interesa es elaborar un modelo en el que sólo se describan aquellos canales que nos interesen, que frecuentemente serán unos pocos, o uno sólo si únicamente estamos interesados en describir la dispersión elástica. En este caso, nuestro potencial deberá de producir desfases complejos, de la magnitud adecuada para tener en cuenta todo el flujo de partículas que va a parar a aquellos canales no incluidos en nuestro modelo de la reacción, y que por lo tanto, desaparecen del marco de nuestro modelo. La forma en la cual se puede introducir en Mecánica Cuántica la desaparición de partículas mediante desfases complejos, es a través de la introducción de un potencial complejo. Esta técnica se denomina potencial óptico. El origen del término está en las analogías que se hicieron entre la Óptica y la Física Nuclear en los orígenes de esta última disciplina. Los primeros modelos se basaban en modelos de absorción total o esfera opaca. Cuando se descubrió que la probabilidad de que los neutrones atravesasen el núcleo era relativamente alta se habló de esfera translúcida, y finalmente se acuñó el término de modelo óptico para la introducción de un potencial complejo que absorba ondas de materia, en forma análoga a la que un índice de refracción complejo tiene en cuenta la absorción de ondas de luz. El modelo óptico condensa

la complejidad infinita del proceso físico real en un sólo objeto matemático, el potencial complejo, obteniendo una estructura simple del resto del modelo. En cierta manera, el procedimiento no es muy diferente del que se sigue en Mecánica de reemplazar un continuo de partículas infinitesimales por un potencial que es la integral de los potenciales elementales generados por cada una de ellas, o el procedimiento en Óptica de sustituir un continuo de moléculas, cada una de las cuales puede absorber un fotón con cierta probabilidad, por un índice de refracción complejo. En todos estos problemas se comprime la complejidad debida a un número infinito de grados de libertad en un ente matemático (potencial, índice de refracción,...) lo que nos permite abordar un problema con un número reducido de grados de libertad. Ello es ventajoso debido a que, desde el punto de vista numérico, siempre es más conveniente tratar un problema que implique funciones extraordinariamente complicadas pero con pocos grados de libertad que problemas que impliquen un número elevado de grados de libertad pero con interacciones simples. Vamos a estudiar en esta sección la justificación de utilizar un potencial complejo $-(V + iW)$, sin entrar en detalles sobre su forma analítica. Podemos suponer por ejemplo que es constante en la esfera que contiene la materia nuclear y nulo en el exterior.

2.14.1. Absorción del flujo de partículas debido a un potencial complejo

Se define la corriente de probabilidad de partículas en Mecánica Cuántica como

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$$

donde Ψ es una función de onda que satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V_{opt}\Psi = E\Psi$$

En el caso de un potencial real, el flujo a través de una superficie cerrada es nulo:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \frac{\hbar}{2im} \int_V dV (\Psi \nabla^2 \Psi^* - \Psi^* \nabla^2 \Psi) = \frac{\hbar}{2im} \frac{2m}{\hbar^2} \int_V dV [E - V_{opt} - (E - V_{opt})] \Psi$$

donde hemos utilizado la relación

$$\nabla^2\Psi = \frac{2m}{\hbar^2}(V_{opt} - E)\Psi$$

y su compleja conjugada:

$$\nabla^2\Psi^* = \frac{2m}{\hbar^2}(V_{pt} - E)\Psi^*$$

En el caso de un potencial complejo $V_{opt} = -(V + iW)$ tenemos que este flujo no es nulo

$$\Phi = -\frac{1}{i\hbar} \int_V dV [V_{opt} - V_{opt}^*] \Psi \Psi^* = -\frac{1}{i\hbar} \int_V dV [-iW - iW] \Psi \Psi^* = \int_V dV \frac{2W}{\hbar} |\Psi|^2$$

Si W es definido positivo Φ es positivo, y se produce una pérdida de partículas. Si tenemos un potencial imaginario $W(r)$ que depende sólo de la coordenada r , y la función de onda Ψ es separable en las coordenadas radial y angulares

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)\chi(\theta, \phi)$$

con ψ y χ normalizadas a la unidad, tenemos que la probabilidad de absorción de una partícula por el potencial imaginario viene dada por:

$$P_{abs} = \frac{2}{\hbar} \int_0^\infty dr r^2 W(r) |\psi(r)|^2$$

2.14.2. Propagación de ondas de materia en un potencial complejo

Otra forma de abordar el problema es considerar una onda plana e^{ikz} que entra en una zona de potencial complejo que induce una modificación en k . Este procedimiento es análogo al tratamiento de la absorción de ondas de luz en metales mediante la introducción de un índice de refracción complejo. En la zona libre de potencial, el número de ondas k viene dado por

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Cuando tenemos una región de potencial V , k viene modificado por

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

En el caso de un potencial óptico complejo $V_{opt} = -(V + iW)$, tenemos

$$k = \frac{\sqrt{2m(E + V + iW)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E + V)}}{\hbar} \sqrt{1 + i \frac{W}{E + V}} \simeq \frac{\sqrt{2m(E + V)}}{\hbar} \left(1 + i \frac{W}{2(E + V)} \right)$$

Definiendo $K = \frac{\sqrt{2m(E + V)}}{\hbar}$ y $\lambda = \frac{E + V}{KW}$, tenemos un número de ondas complejo dado por

$$k = K + i \frac{1}{2\lambda}$$

Una onda plana $\psi = e^{ikz}$ que entra en esta zona de potencial complejo se amortigua exponencialmente

$$\psi = e^{iKz} e^{-\frac{z}{2\lambda}}$$

La probabilidad de encontrar una partícula se amortigua con recorrido libre medio λ :

$$|\psi|^2 = e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

2.15. El potencial óptico fenomenológico y su determinación a partir de datos experimentales

No existe ninguna teoría que permita determinar con precisión el potencial óptico a partir de las funciones de onda nucleares. El procedimiento que se sigue es utilizar el denominado potencial óptico fenomenológico. Este potencial tiene una forma funcional inspirada en la estructura nuclear, pero depende de parámetros ajustables. Vimos anteriormente que las densidades nucleares se describen adecuadamente con densidades del tipo de Fermi

$$\rho(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$$

con $c \simeq 1,2A^{1/3}$ fm y $a \simeq 0,55$ fm. El modelo de Woods Saxon del potencial óptico se basa en tomar las partes real e imaginarias del potencial de la forma de Fermi:

$$V_{opt} = -\frac{V}{1 + \exp((r - R_V)/a_V)} - i\frac{W}{1 + \exp((r - R_W)/a_W)}$$

Los parámetros V y W se denominan las profundidades real e imaginaria, R_V y R_W los radios real e imaginario y a_V y a_W las difusividades real e imaginaria. Los radios real e imaginario se parametrizan como $R_V = r_{0V}(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$ y $R_W = r_{0W}(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$, donde los parámetros r_{0V} y r_{0W} se denominan radios reducidos real e imaginario, respectivamente. En la práctica, la única forma de determinar los parámetros del potencial óptico es ajustando datos experimentales. Se encuentra que los radios reducidos real e imaginario que mejor ajustan los datos experimentales valen entre 1.1-1.4 fm y las difusividades real e imaginaria entre 0.5-0.7 fm. Las profundidades son más difíciles de determinar sin ambigüedad, y en general, se encuentra que unos mismos datos experimentales se pueden reproducir con igual precisión con diversos valores de la profundidad.

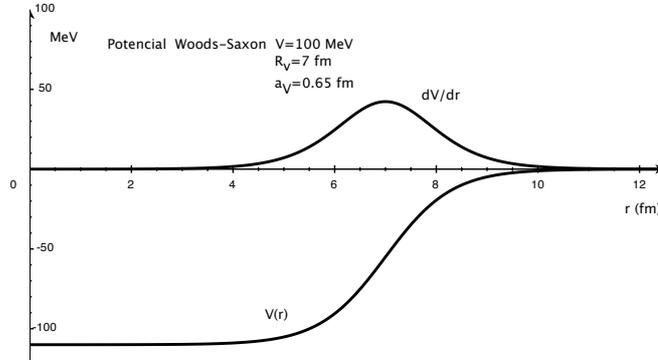


Figura 2.10: Potencial Woods-Saxon y su derivada

Ello es debido a que la parte interior del potencial no es muy sensible a los datos experimentales pues la absorción debida al potencial imaginario hace que la función de onda sea muy pequeña en esta parte interior. En la parte exterior el término exponencial es muy superior al término unidad en el denominador del potencial óptico. Por lo tanto, tenemos que aproximadamente

$$V_{opt} = -V \exp(-R_V/a_V) \exp(r/a_V) - iW \exp(-R_W/a_W) \exp(r/a_W)$$

Conjuntos de parámetros que den los mismos valores de $I_V = V \exp(-R_V/a_V)$ y $I_W = W \exp(-R_W/a_W)$ reproducirán con igual calidad los datos experimentales. Este hecho se conoce como ambigüedad de Igo y es un ejemplo de ambigüedad continua, en el sentido de que tenemos un conjunto continuo de parámetros que describen los datos experimentales con igual calidad de ajuste. Además de las ambigüedades continuas existen ambigüedades discretas, en el sentido de que hay diversos valores discretos de V y W que reproducen los datos experimentales. En la figura 2.10 se muestra la forma del potencial Woods-Saxon y su derivada, también llamada factor de forma.

2.15.1. El potencial espín-órbita

En el caso de partículas con espín, es necesario incluir un potencial espín-órbita en el potencial óptico si se desea reproducir correctamente los datos experimentales. Este potencial espín-órbita es particularmente importante en el caso de nucleones y partículas ligeras, y su importancia disminuye cuando la masa de las partículas aumenta. Se suele tomar el potencial óptico en la forma del potencial de Thomas (derivada del potencial) encontrado en Física Atómica

$$V_{Thomas} = 2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

pero con la masa del pión en vez de la masa del electrón:

$$V_{opt}^{SO} = -2(V_{SO} + iW_{SO}) \left(\frac{\hbar}{m_{\pi}c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{(1 + \exp(r - R_{SO})/a_{SO})} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

Sin embargo, el origen del potencial espín-órbita nuclear no tiene ninguna relación con el potencial de Thomas. Este último surge de reducir la ecuación de Dirac a la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, el origen del potencial espín-órbita nuclear no es bien conocido, y la principal hipótesis es la dependencia de la interacción nuclear con la cantidad de movimiento de los nucleones. Notemos que los parámetros del potencial espín-órbita no se toman iguales a los del potencial real e imaginario. Los radios y difusividades de las partes real e imaginaria del potencial espín-órbita se toman iguales. Por lo tanto el potencial espín-órbita contiene cuatro parámetros libres V_{SO} , W_{SO} , R_{SO} y a_{SO} , todos positivos. De la forma de la derivada del potencial Woods-Saxon, vemos que el potencial spin-órbita actúa esencialmente en la superficie nuclear.

2.15.2. El potencial de superficie

En el caso de colisiones de núcleos con estados excitados colectivos de superficie (rotacionales, vibracionales) se encuentra que es necesario introducir un potencial imaginario con un pico en la superficie. La forma de este potencial imaginario de superficie se toma usualmente como la derivada de un potencial de Woods-Saxon.

$$W_{sup}(r) = -i \frac{d}{dr} \frac{4a_D W_D}{1 + \exp((r - R_D)/a_D)}$$

donde el término $4a_D$ se introduce para que el módulo del potencial de superficie valga W_D en $r = R_D$.

2.15.3. Determinación de los parámetros del potencial óptico mediante ajuste de datos experimentales

Hemos visto que la parte de volumen del potencial óptico depende de seis parámetros, la parte espín órbita de cuatro parámetros y la parte de superficie de tres parámetros más. Este es un número impresionante de parámetros si tenemos en cuenta la dependencia altamente no lineal entre los parámetros y los datos experimentales, usualmente secciones eficaces diferenciales medidas en un intervalo angular relativamente amplio. Si tenemos una serie de N puntos θ_i en los que la sección eficaz experimental vale $\sigma_i^{(exp)}$ con error $\Delta\sigma_i$ y tenemos un modelo que predice en esos puntos unas secciones eficaces $\sigma_i^{(teo)}$, se toma como medida de calidad del ajuste el estadístico χ^2 definido como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_i^{(exp)} - \sigma_i^{(teo)}}{\Delta\sigma_i} \right)^2$$

Podemos considerar χ^2 como una función de los parámetros del potencial óptico $\chi^2(V, W, \dots)$. La relación con los parámetros es altamente no lineal, pues implica la resolución numérica de la ecuación de Schrödinger, para cada onda parcial, la determinación de la matriz S , igualando la solución numérica a la forma asintótica, y la determinación de la sección eficaz mediante el desarrollo en ondas parciales de la amplitud de dispersión. Una de las características de las funciones no lineales es que pueden tener muchos mínimos relativos, por lo que los procedimientos numéricos de minimización no tienen solución única, a diferencia del caso lineal. Por ejemplo, con sólo dos parámetros, la superficie χ^2 puede ser como una complicada superficie geográfica con mínimo en la forma de hoyos estrechos y profundos. Por lo tanto el proceso de minimización implica la división del espacio de parámetros en un reticulado. El proceso de minimización se repite para cada retículo. Consideraciones de tipo físico ayudan a reducir considerablemente la extensión física del espacio de los parámetros en la que se extiende el reticulado, y a eliminar las ambigüedades asociadas al potencial óptico.

Vamos a describir a continuación uno de los métodos frecuentemente utilizados para minimizar χ^2 como una función de los parámetros. Una vez que se elige un punto de partida en el espacio de los parámetros, se determina el gradiente en la superficie de χ^2

$$\nabla\chi^2(V, W, \dots) = \left(\frac{\partial\chi^2}{\partial V}, \frac{\partial\chi^2}{\partial W}, \dots \right)$$

donde las derivadas parciales se calculan numéricamente, evaluando χ^2 en dos valores próximos de cada parámetro

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial V} \simeq \frac{\chi^2(V + \Delta V, W, \dots) - \chi^2(V, W, \dots)}{\Delta}$$

y se avanza en el espacio de los parámetros en la dirección de disminución de χ^2 (dirección opuesta al gradiente). Sea \mathbf{n} el vector unitario en la dirección opuesta al gradiente:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla\chi^2}{|\nabla\chi^2|}$$

Se suele tomar una distancia de avance h en el espacio de los parámetros de forma que, si \mathbf{P} es el punto de partida en el espacio de los parámetros, el nuevo punto es $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + h\mathbf{n}$. Si χ^2 disminuye, h se aumenta en un factor (2 es un valor usual) y si χ^2 aumenta h se disminuye por otro factor (por ejemplo 10). Cuando tenemos tres puntos en los que para h suficientemente pequeño, hay un mínimo local, es decir χ^2 disminuye y luego vuelve a aumentar, el mínimo local se estima como el mínimo de la parábola que pasa por dichos tres puntos.

2.15.4. Solución numérica de la ecuación de Schrödinger

Para cada onda parcial tenemos una ecuación de Schrödinger

$$\frac{d^2 w_l(r)}{dr^2} + \left(k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V_{opt}(r) - \frac{2k\eta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w_l(r) = 0$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por un método de diferencias finitas, usualmente el método de Numerov que es de orden h^6 donde h es el paso de integración. Si utilizamos la notación

$$w''(r) + f(r)w(r) = 0$$

para la ecuación diferencial anterior, el método de Numerov se basa en utilizar para la derivada segunda la aproximación en diferencias finitas

$$w''(r) = \frac{w(r+h) - 2w(r) + w(r-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} w^{(4)}(r) + O(h^4)$$

En esta expresión se estima la derivada cuarta a partir de la ecuación de Schrödinger

$$w^{(4)}(r) = -(f(r)w(r))'' = -\frac{f(r+h)w(r+h) - 2f(r)w(r) + f(r-h)w(r-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} w^{(6)}(r)$$

con lo que nos queda la siguiente relación de recurrencia

$$w(r+h) \left(1 + \frac{h^2}{12} f(r+h) \right) - 2w(r) \left(1 - \frac{5h^2}{12} f(r) \right) + w(r-h) \left(1 + \frac{h^2}{12} f(r-h) \right) = 0$$

que tiene un error del orden de h^6 en $w(r)$. Esta relación de recurrencia se resuelve en una malla de N puntos, con las condiciones iniciales $w(0) = 0$ y $w(h) = \epsilon$ donde ϵ es una cantidad muy pequeña. Esta solución numérica se integra hasta un radio $R_m = Nh$ donde la solución numérica debe de igualar a la asintótica y se imponen las condiciones asintóticas de que la solución numérica sea proporcional a una suma de onda plana de Coulomb y una onda esférica emergente de Coulomb

$$w(R) = C_l \left(F_l(kR) + \frac{1}{2i} (S_l - 1) H_l^{(+)}(kR) \right)$$

en R_m y $R_m + h$. Estas condiciones proporcionan cuatro ecuaciones reales (las funciones de onda son complejas), de las que se determinan las dos constantes complejas C_l y S_l . Una vez obtenidos los S_l para todas las ondas parciales relevantes, se procede a calcular las secciones eficaces y comparar con los datos experimentales, evaluando χ^2 .

Desde el punto de vista numérico es más eficiente plantear una relación de recurrencia para las funciones

$$\xi(r) = w(r) \left(1 + \frac{h^2}{12} f(r) \right) = w(r) - \frac{h^2}{12} w''(r)$$

Esta relación se obtiene inmediatamente de la relación para $w(r)$:

$$\xi(r+h) - 2\xi(r) + \xi(r-h) + \frac{h^2 f(r)\xi(r)}{1 + \frac{h^2}{12}f(r)} = 0$$

Resolviéndola para las funciones $\xi(r)$ en una malla de paso de integración h , podemos obtener las funciones de onda $w(r)$ en el radio de empalme, que es el único punto donde son necesarias para obtenerla matriz S , a partir de la relación válida en orden h^4

$$w(r) = \xi(r) + \frac{h^2}{12}w''(r) \simeq \xi(r) + \frac{h^2}{12} \frac{\xi(r+h) - 2\xi(r) + \xi(r-h)}{h^2} = \frac{\xi(r+h) + 10\xi(r) + \xi(r-h)}{h^2} =$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$w''(r) = \xi''(r) + \frac{h^2}{12}w^{(4)}(r)$$

Des esta forma el número de operaciones numéricas es mucho menor. El error en $w(r)$ es

$$\frac{h^6}{144}f^3(r)w(r) - \frac{h^6}{240}w^{(4)}(r)$$

2.15.5. Potenciales globales

Diversos grupos han obtenido potenciales reales globales, ajustando un gran número de datos experimentales. En estos potenciales, los parámetros están completamente definidos, y dependen de las masas nucleares y quizás, de la energía incidente. Entre los potenciales globales más sencillos, uno de los mas conocidos es el potencial de Christensen y Winther

$$V_{CW}(r) = -50 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(\frac{R_1 + R_2 - r}{a}\right) \text{ MeV}$$

donde $R_i = 1,223A_i^{1/3} - 0,978A_i^{-1/3}$ fm y $a = 0,63$ fm. Una versión posterior es el potencial de Akyüz y Winther

$$V_{AW}(r) = -65,4 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(\frac{R_1 + R_2 - r}{a}\right) \text{ MeV}$$

con $R_i = 1,20A_i^{1/3} - 0,35$ fm y $1/a = 1,16 \left[1 + 0,48(A_1^{-1/3} + A_2^{-1/3})\right] \text{ fm}^{-1}$. Estos potenciales son adecuados para iones ligeros.

2.16. Potenciales folding

Un modelo que ha tenido gran éxito en la obtención de la parte real del potencial óptico es el modelo del potencial de convolución (folding) que se basa en calcular la interacción núcleo-núcleo mediante la convolución de las densidades nucleares con una interacción efectiva nucleón-nucleón en materia nuclear, de forma análoga a como se calcula la interacción electrostática entre dos distribuciones de carga. Sea $v(r)$ esta interacción efectiva. Si tomamos el origen de coordenadas en el centro de masas del núcleo 2 y \mathbf{r} es el radiovector del centro de masas del núcleo 1, \mathbf{r}_1 el radiovector de un elemento de densidad nuclear con respecto al centro de masas del núcleo 1 y \mathbf{r}_2 el radiovector de un elemento de densidad nuclear en el núcleo 2, la interacción entre ambos elementos será $v(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)d^3r_1d^3r_2$. El potencial será la integral de esta interacción elemental sobre las densidades de ambos núcleos:

$$V(\mathbf{r}) = \int \int d^3r_1 d^3r_2 v(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)$$

Esta forma del potencial óptico tiene propiedades interesantes. La primera es que no es necesario calcular la integral doble, pues la transformada de Fourier del potencial es el producto de las transformadas de Fourier de las densidades y de la interacción efectiva.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}) &= \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r = \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \int \int d^3r_1 d^3r_2 v(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) \\ &= \int d^3r \int \int d^3r_1 d^3r_2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} v(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) \\ &= \int d^3r' e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} v(|\mathbf{r}'|) \int d^3r_1 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \rho_1(\mathbf{r}_1) \int d^3r_2 e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \rho_2(\mathbf{r}_2) = v(\mathbf{q})\rho_1(-\mathbf{q})\rho_2(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para calcular el potencial calculamos las transformadas de Fourier de las densidades y la interacción efectiva y luego calculamos la transformada de Fourier inversa del producto de transformadas de Fourier. Esto se realiza de forma muy eficiente con las técnicas de transformadas de Fourier rápidas. Las densidades de materia nuclear se determinan a partir de las densidades de carga determinadas de experimentos de dispersión de electrones, multiplicadas por el cociente A/Z del peso atómico y el número atómico. La interacción es una interacción efectiva en materia nuclear, que se deriva de la interacción libre mediante técnicas de matriz G . Una interacción que da potenciales correctos para un gran número de sistemas es la interacción M3Y

$$v_{M3Y}(r) = 7999 \frac{e^{-4r}}{4r} - 2134 \frac{e^{-2,5r}}{2,5r} - 276 \left(1 - \frac{0,005E}{A} \right) \delta(r) \text{ MeV}$$

En esta interacción el primer término es debido a el intercambio de un pión, el segundo término es debido al intercambio de dos piones y el término de la delta es debido al intercambio de nucleones entre los dos núcleos.

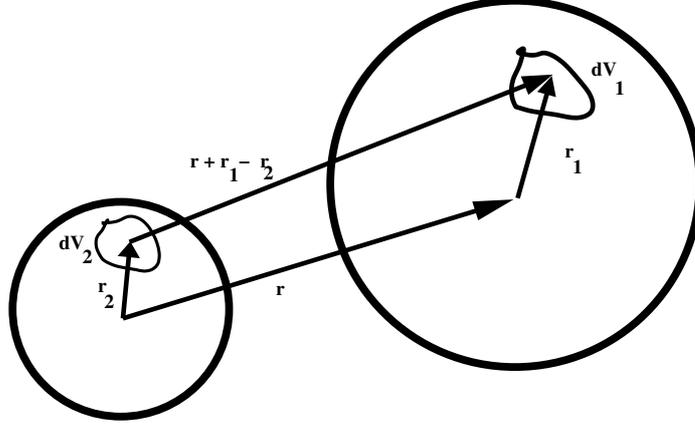


Figura 2.11: Interacción entre dos elementos de materia nuclear

Otras propiedades interesantes de los potenciales folding es que la integral de volumen del potencial es el producto de las integrales de volumen de la interacción y de las densidades de ambos núcleos

$$\begin{aligned} \int d^3r V(\mathbf{r}) &= \int \int \int d^3r d^3r_1 d^3r_2 v(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) \\ &= \int d^3r' v(r') \int d^3r_1 \rho_1(\mathbf{r}_1) \int d^3r_2 \rho_2(\mathbf{r}_2) = J(v) A_1 A_2 \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que el Jacobiano de transformación de variables de \mathbf{r} a $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la unidad. De igual forma, el radio cuadrático medio del potencial es la suma de los radios cuadráticos medios de las densidades y la interacción

$$\langle r^2 \rangle_V = \frac{\int d^3r r^2 V(\mathbf{r})}{\int d^3r V(\mathbf{r})} = \frac{\int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2 d^3r' v(r') \int d^3r_1 \rho_1(\mathbf{r}_1) \int d^3r_2 \rho_2(\mathbf{r}_2)}{J(v) A_1 A_2} = \langle r^2 \rangle_v + \langle r^2 \rangle_1 + \langle r^2 \rangle_2$$

donde hemos tenido en cuenta que las integrales de los productos escalares $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_1$ y similares son nulas.

Las principales objeciones al modelo de convolución son:

1) Ignora la antisimetrización de los núcleos, lo que produce potenciales muy profundos. Sin embargo, como debido a la absorción no hay dispersión elástica cuando los núcleos se superponen tanto que la parte interior del potencial juega un papel importante, este exceso de profundidad no impide que el ajuste a las secciones eficaces elásticas sea bueno.

2) Ignora la distorsión de las densidades nucleares cuando ambos núcleos se aproximan, y la densidad total es $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

A altas energías, se encuentra que es necesario incluir una dependencia con la densidad en la interacción efectiva. Una forma conveniente, que es separable en las densidades de cada núcleo y que ha dado buenos resultados en la descripción de datos experimentales es

$$v(r') = v_\alpha(r') + v_\beta(r')e^{-\gamma(\rho_1(r_1)+\rho_2(r_2))}$$

2.17. Teoría de Feshbach del potencial óptico

Una justificación formal del potencial óptico y que proporciona adicionalmente fórmulas para calcular la parte imaginaria, viene proporcionada por la teoría de Feshbach. Esta teoría se basa en considerar todos los estados posibles del sistema nuclear formado por dos núcleos A y a , y separar el conjunto de estos estados en dos subespacios: \mathcal{P} que contiene todos los estados que queremos estudiar explícitamente en nuestro modelo, y \mathcal{Q} , que contiene todos los demás estados. Si el conjunto de todos los estados es un conjunto completo, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{I}$, donde \mathcal{I} es el espacio total. Consideremos ahora dos proyectores P y Q que proyectan una función de ondas sobre los subespacios \mathcal{P} y \mathcal{Q} , respectivamente. Tenemos por tanto $P + Q = I$. Como los subespacios \mathcal{P} y \mathcal{Q} son disjuntos la proyección de una función de ondas sobre uno de ellos no tendrá proyección sobre el otro. En términos matemáticos $PQ = QP = 0$. Además la proyección de una función proyectada será ella misma, es decir, $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$. Para centrar ideas, supongamos que nos interesa estudiar únicamente el canal elástico. Si la función de onda total es

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{\beta} \chi_{\beta}(\mathbf{r})\phi_{\beta}(\xi)$$

donde las funciones $\phi_{\beta}(\xi)$ son las funciones de onda internas que se pueden expresar como producto directo de las funciones de onda internas de cada uno de los núcleos: $\phi_{\beta}(\xi) = \phi_{A_1,\beta}(\xi_1) \otimes \phi_{A_2,\beta}(\xi_2)$, el efecto de los operadores P y Q es

$$\begin{aligned} P\Psi(\mathbf{r}, \xi) &= \chi_0(\mathbf{r})\phi_0(\xi) \\ Q\Psi(\mathbf{r}, \xi) &= \sum_{\beta \neq 0} \chi_{\beta}(\mathbf{r})\phi_{\beta}(\xi) \end{aligned}$$

La teoría de Feshbach se basa en proyectar la ecuación de Schrödinger para la función de onda total sobre los subespacios P y Q y obtener una ecuación de Schrödinger para $P\Psi$ que no dependa de las coordenadas del subespacio \mathcal{Q} que a través de un potencial efectivo. Podemos escribir la ecuación de Schrödinger como

$$(E - H)(P + Q)\Psi = 0$$

Si la proyectamos sobre cada uno de los subespacios, tenemos

$$\begin{aligned} P(E - H)(P + Q)\Psi &= 0 \\ Q(E - H)(P + Q)\Psi &= 0 \end{aligned}$$

Introduciendo la notación $PHP = H_{PP}$, $PHQ = H_{PQ}$, $QHP = H_{QP}$, $QHQ = H_{QQ}$, $P\Psi = \Psi_P$ y $Q\Psi = \Psi_Q$, y teniendo en cuenta que $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$, podemos escribir las ecuaciones proyectadas anteriores como dos ecuaciones acopladas para Ψ_P y Ψ_Q :

$$\begin{aligned}(E - H_{PP})\Psi_P &= H_{PQ}\Psi_Q \\ (E - H_{QQ})\Psi_Q &= H_{QP}\Psi_P\end{aligned}$$

Podemos despejar formalmente Ψ_Q de la segunda ecuación

$$\Psi_Q = \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \Psi_P \quad (2.11)$$

e introducirla en la primera, obteniendo

$$(E - H_{PP})\Psi_P = H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \Psi_P$$

Esta ecuación se puede reescribir como una ecuación de Schrödinger para Ψ_P :

$$(E - H_{PP} - H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP})\Psi_P = 0$$

Vemos que la función de ondas Ψ_P satisface exactamente una ecuación de Schrödinger con Hamiltoniano efectivo

$$H_E = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP}$$

Vamos primero a realizar algunos comentarios sobre la expresión anterior. La ecuación 2.11 es de hecho una ecuación integral. A diferencia de las ecuaciones diferenciales, en las que las condiciones de contorno se imponen como condiciones adicionales, las ecuaciones integrales incluyen en ellas mismas las condiciones de contorno. La condición de contorno para Ψ_Q es que haya únicamente ondas emergentes. Esto se consigue introduciendo una cantidad compleja positiva $i\varepsilon$ en el denominador y tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Escribiremos por lo tanto el potencial efectivo como

$$H_E = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\varepsilon} H_{QP}$$

donde se sobreentiende que se toma el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El término H_{PP} es el potencial entre a y A en el subespacio P si no existiese el subespacio Q . El potencial folding es de hecho una aproximación a H_{PP} . El segundo término es debido únicamente a la existencia de estados excitados. Incluye la complejidad infinita debida al número infinito de grados de libertad del sistema. Hemos pasado

de un conjunto infinito de ecuaciones acopladas para las funciones de onda en cada canal a una ecuación para Ψ_P con un Hamiltoniano infinitamente complicado. Sin embargo es más fácil elaborar aproximaciones para el Hamiltoniano que para el sistema de ecuaciones, de donde radica la importancia de la teoría de Feshbach. Utilizando la relación formal

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{z - z_0 + i\varepsilon} = \mathfrak{P} \frac{1}{z - z_0} - i\pi\delta(z - z_0)$$

donde

$$\mathfrak{P} \frac{1}{z - z_0} = \int_{-\infty}^{z_0 - \varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{z_0 + \varepsilon}^{\infty} \frac{1}{z - z_0} dz$$

se denomina la parte principal, podemos expresar el segundo término del potencial efectivo como

$$H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\varepsilon} H_{QP} = H_{PQ} \left[\mathfrak{P} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\varepsilon} \right] H_{QP} - i\pi H_{PQ} \delta(E - H_{QQ}) H_{QP}$$

donde vemos que aparece de forma explícita una parte imaginaria. Si suponemos que la contribución del operador energía cinética del Hamiltoniano $H = T + V$ al Hamiltoniano efectivo es despreciable o nula, entonces $H_{PQ} = V_{PQ}$ y similarmente para los otros términos, y tenemos

$$H_E = T + V_{PP} + V_{PQ} \left[\mathfrak{P} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\varepsilon} \right] V_{QP} - i\pi V_{PQ} \delta(E - H_{QQ}) V_{QP}$$

Podemos identificar el potencial óptico como el valor esperado de este operador en la función de onda interna del subespacio \mathcal{P} ,

$$V_{opt} = \langle \phi_0 | V_{PP} | \phi_0 \rangle + \langle \phi_0 | V_{PQ} \left[\mathfrak{P} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\varepsilon} \right] V_{QP} | \phi_0 \rangle - i\pi \langle \phi_0 | V_{PQ} \delta(E - H_{QQ}) V_{QP} | \phi_0 \rangle$$

El primer término es el potencial folding. Los dos últimos términos son la contribución adicional al potencial óptico debida a la existencia del subespacio \mathcal{Q} . Vemos de esta expresión que el potencial óptico es complejo y dependiente de la energía. Una propiedad adicional es que el potencial óptico es no-local, lo que significa que el potencial en un punto depende de los valores de la función de onda en un entorno del punto, y no solamente del valor de la función de onda en el punto.

La teoría de Feshbach se emplea actualmente en diversas ramas de la Física, en donde el sistema de muchos estados se reduce a un sistema de un estado con un potencial efectivo que tiene en cuenta los demás estados. La teoría de Feshbach es, por así decirlo, una versión sofisticada del baño de calor de la Física Estadística, en la que el entorno de muchos cuerpos se reemplaza por un baño de calor.

2.18. La aproximación de Born

Si tenemos una ecuación de Schrödinger dada por un Hamiltoniano $H = T + V + H_0$, donde H_0 es el Hamiltoniano de las coordenadas internas ξ , la podemos escribir como

$$(E - T - H_0)\Psi(\mathbf{r}, \xi) = V(\mathbf{r}, \xi)\Psi(\mathbf{r}, \xi)$$

En esta ecuación el potencial aparece como un término inhomogéneo. Escrita de esta forma, la solución de esta ecuación es la suma de una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la inhomogénea. La solución general de la homogénea para un estado interno $\phi_\alpha(\xi)$ es

$$\Psi_{gen}(\mathbf{r}, \xi) = (Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + Be^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})\phi_\alpha(\xi)$$

con

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\frac{2\mu(E - E_0)}{\hbar^2}}$$

mientras que la solución particular de la ecuación inhomogénea, $\Psi_{par}(\mathbf{r})$, se obtiene a a partir de la función de Green, definida como

$$(E - T - H_0)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

mediante

$$\Psi_{par}(\mathbf{r}, \xi) = \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}', \xi) \Psi(\mathbf{r}', \xi)$$

La condición de que tengamos en el canal de salida esencialmente la misma onda plana que en el canal de entrada implica $B \simeq 0$ y $A \simeq 1$ y por lo tanto

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\phi_\alpha(\xi) + \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}', \xi) \Psi(\mathbf{r}', \xi)$$

Utilizando la expresión de la función de Gree para la ecuación de ondas libre,

$$G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

con

$$k = \frac{\sqrt{2\mu(E - E_0)}}{\hbar}$$

y considerando distancias asintóticas $r \gg r'$, que es el caso de la distancia a la cual colocamos los detectores, tenemos

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \longrightarrow \frac{1}{r}$$

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = kr \left(1 + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \approx kr - k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' = kr - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'$$

$$e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \longrightarrow e^{\pm i(kr - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')}$$

con $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}$. Tomamos la función de Green con las coordenadas del canal de salida si es diferente del de entrada, con lo que la masa reducida es μ_β . Tenemos por lo tanto

$$\Psi^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \phi_\alpha(\xi) - \frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{\mp i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}', \xi) \Psi^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \xi)$$

La función de onda total es una combinación lineal de productos de funciones radiales e internas. Esta expresión la podemos proyectar realizando el producto escalar a la izquierda sobre uno de los estados internos β :

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) = \sum_\beta \chi_\beta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \phi_\beta(\xi)$$

$$\chi_\beta^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{\mp i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \langle \beta | V(\mathbf{r}', \xi) \Psi^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \xi) \rangle$$

donde podemos identificar la amplitud de dispersión

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \langle \beta | V(\mathbf{r}', \xi) \Psi^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \xi) \rangle$$

Esta expresión implica la función de onda total $\Psi^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \xi)$ que no conocemos. Cuando hacemos la aproximación de reemplazar Ψ por la función de onda incidente, $\Psi^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) \simeq e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \phi_\alpha(\xi)$ tenemos la aproximación de Born

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = -\frac{\mu_\beta}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \langle \beta | V(\mathbf{r}', \xi) | \alpha \rangle$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ es la transferencia de momento. Cuando consideramos la transición entre un estado inicial $|\alpha\rangle$ y un estado final $|\beta\rangle$ tenemos que la sección eficaz viene dada por

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{v_\beta}{v_\alpha} |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2 = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_\beta}{k_\alpha} |\langle \beta | V(\mathbf{q}) | \alpha \rangle|^2$$

donde

$$\langle \beta | V(\mathbf{q}) | \alpha \rangle = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \langle \beta | V(\mathbf{r}) | \alpha \rangle$$

es la transformada de Fourier del elemento de matriz del potencial entre los estados inicial y final y donde hemos utilizado la relación $\frac{v_\beta}{v_\alpha} = \frac{k_\beta \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_\beta}$.

Aunque esta aproximación se utiliza rutinariamente a altas energías (dominio relativista y ultrarelativista), a bajas energías es una mala aproximación, pues las funciones relativas de los núcleos no son ondas planas sino las funciones de onda del potencial óptico.

2.19. La aproximación de Born de ondas distorsionadas (DWBA)

La aproximación de Born de ondas distorsionadas (conocida como DWBA de su acrónimo en inglés Distorted Wave Born Approximation) mejora la descripción de las funciones de onda radiales, reemplazándolas por funciones de modelo óptico. Se puede derivar de forma análoga a la aproximación de Born. Dividimos el potencial en un potencial central, tomado como el potencial óptico fenomenológico, que es el responsable de la dispersión elástica, y un potencial de transición, que produce todas las otras reacciones directas:

$$V = V_{opt}(r) + V_{tran}(\mathbf{r}, \xi)$$

Escribimos la ecuación de Schrödinger como

$$(T + V_{opt}(r) + H_0 - E)\Psi(\mathbf{r}, \xi) = V_{tran}(\mathbf{r}, \xi)\Psi(\mathbf{r}, \xi) \quad (2.12)$$

Si proyectamos esta ecuación multiplicando a la izquierda por la función de onda interna en el canal de entrada $\phi_\alpha(\xi)$, la ecuación

$$(T + V_{opt} + E_\alpha - E)\chi_\alpha(\mathbf{r}) = 0$$

es la ecuación de Schrödinger de modelo óptico en el canal de entrada. Análogamente, la solución con ondas emergentes en el canal de salida β , $\chi_\beta^+(\mathbf{r})$, la función de onda de modelo óptico en el canal de salida. Esta ecuación de Schrödinger tiene una función de Green $G_{0\beta}^{DW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$(T + V_{opt} + E_\alpha - E)G_{0\alpha}^{DW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

La solución de la ecuación 2.12 se puede poner en función de esta función de Green como

$$\Psi_\beta(\mathbf{r}) = \chi_\alpha(\mathbf{r})\delta_{\alpha\beta} - \int d\mathbf{r}' G_{0\beta}^{DW}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')V_{tran}(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}')$$

Considerando la forma asintótica de la función de Green se llega a la expresión

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \chi_\alpha^-(\mathbf{r}')V_{tran}(\mathbf{r}')\Psi^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}')$$

Cuando se reemplaza $\Psi^+ \simeq \chi_\beta^+\phi_\beta$ obtenemos la aproximación de Born de ondas distorsionadas

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \chi_\alpha^-(\mathbf{k}, \mathbf{r}') \langle \phi_\alpha | V_{tran}(\mathbf{r}') | \phi_\beta \rangle \chi_\beta^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}')$$

de donde obtenemos la sección eficaz como

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2$$

Las funciones de onda distorsionadas se calculan mediante solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial óptico fenomenológico:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha} \nabla_\alpha^2 + V_{opt}^\alpha(r) + iW_{opt}^\alpha(r) - E_\alpha \right) \chi_\alpha(\mathbf{r}) &= 0 \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \nabla_\beta^2 + V_{opt}^\beta(r) + iW_{opt}^\beta(r) - E_\beta \right) \chi_\beta(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Es frecuente utilizar la matriz de transición T definida en el caso de una transición $a + A \longrightarrow b + B$ por

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA} = \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}_\beta \chi_\beta^-(\mathbf{k}_\beta, \mathbf{r}_\beta) \langle b, B | V | a, A \rangle \chi_\alpha^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$$

en función del cual la sección eficaz queda

$$\frac{d\sigma_\beta}{d\Omega} = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{2\pi \hbar^2} \frac{k_\beta}{k_\alpha} |T_{\alpha\beta}^{DWBA}|^2$$

El elemento de matriz es una integral en seis dimensiones. Aunque en el pasado se utilizaron muchas aproximaciones para reducirla a dimensiones más bajas, hoy en día no es ningún problema calcularla numéricamente con el grado de precisión deseado.

2.20. Descripción de la excitación inelástica de estados colectivos mediante DWBA

Vamos a aplicar la aproximación DWBA al cálculo de secciones eficaces de excitación de estados colectivos (rotacionales o vibracionales).

Cuando estudiamos transiciones de un estado inicial a otro final, el principal problema es identificar el potencial de interacción que produce la transición y determinar las funciones de onda internas. Podemos escribir

$$V(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r}) + \Delta V(\mathbf{r})$$

donde $V_0(\mathbf{r})$ es el potencial que produce dispersión elástica y $\Delta V(\mathbf{r})$ el resto del potencial, que contiene en particular la parte que produce transiciones.

Los estados colectivos vibracionales y rotacionales son los que más intensamente se excitan, y de hecho la intensidad de la sección eficaz es la primera

indicación de la naturaleza colectiva de estos estados. Por otro lado, las funciones de onda internas de estos estado colectivos son extremadamente simples.

Como el potencial de interacción entre núcleos depende de sus distribuciones de densidad, si la distribución de densidad no es esférica, tampoco lo será el potencial óptico. En el caso de núcleos vibratoriales, la distribución de densidad es un volumen cuya superficie vibra armónicamente. En el caso general podemos desarrollar $\Delta V(\mathbf{r})$ en armónicos esféricos

$$\Delta V(\mathbf{r}) = \sum_{LM} V_{LM}(r) Y_{LM}(\theta, \phi)$$

Cada término del desarrollo índice una transición de momento angular L con número cuántico magnético M . En el caso de núcleos vibratoriales este desarrollo se realiza a partir de la hipótesis básica del modelo rotacional: que la superficie del núcleo vibra en la forma

$$R = R_0(1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) = R_0 + \delta R$$

El potencial óptico es una función de R , $V(r, R)$ que la podemos desarrollar en serie de Taylor alrededor de R_0 :

$$V(r, R) = V(r, R_0) + \left. \frac{\partial V(r, R)}{\partial R} \right|_{R_0} \delta R + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V(r, R)}{\partial R^2} \right|_{R_0} \delta R^2 + \dots$$

En el caso de un potencial óptico fenomenológico de tipo Woods-Saxon tenemos para las derivadas de la parte real

$$\left. \frac{\partial V(r, R)}{\partial R} \right|_{R_0} = - \left. \frac{\partial V(r, R)}{\partial r} \right|_{R=R_0} = \frac{V_0 e^{\frac{r-R_0}{a}}}{a \left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}} \right)^2}$$

y análogamente obtenemos la parte imaginaria. Vemos que en primer orden en δR tenemos

$$V(r, R) = - \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_{V0}}{a_v}}} - \frac{iW_0}{1 + e^{\frac{r-R_{W0}}{a_w}}} + \left[\frac{V_0 R_{0v} e^{\frac{r-R_{V0}}{a_v}}}{a_v \left(1 + e^{\frac{r-R_{V0}}{a_v}} \right)^2} + \frac{iW_0 R_{0w} e^{\frac{r-R_{W0}}{a_w}}}{a_w \left(1 + e^{\frac{r-R_{W0}}{a_w}} \right)^2} \right] \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}$$

Al término entre paréntesis se le denomina factor de forma de excitación. Como es la derivada de un potencial Woods-Saxon es positivo con un pico en la superficie nuclear, lo cual es razonable pues las vibraciones de superficie se producen esencialmente cuando los núcleos entran en contacto. Si tenemos en cuenta la expresión de los operadores de amplitud de vibración $\alpha_{\lambda\mu}$ en función de los operadores creación y destrucción de fonones, $b_{\lambda\mu}^\dagger$ y $b_{\lambda\mu}$

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}(b_{\lambda\mu} + (-1)^\mu b_{\lambda\mu}^\dagger)$$

donde β_λ es el parámetro de deformación, tenemos para el elemento de matriz de transición,

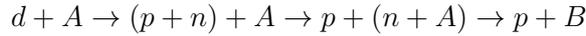
$$T_{if} = - \langle f | \alpha_{\lambda\mu} | i \rangle \int d\mathbf{r} \chi_f^{(-)*}(k_f, \mathbf{r}) R_0 \frac{\partial V(r)}{\partial r} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_i^{(+)}(k_i, \mathbf{r})$$

Si el estado inicial es el fundamental, $|i\rangle = |0\rangle$ y el estado final es un estado de un fonón $|f\rangle = b_{\lambda\mu}^\dagger$, tenemos $\langle f | \alpha_{\lambda\mu} | i \rangle = \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}$ con lo que queda finalmente para la sección eficaz de excitación de un fonón de multipolaridad λ :

$$\frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} = \left(\frac{m^2}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{k_f (\beta_\lambda R_0)^2}{k_i 2\lambda+1} \sum_\mu \left| \int d\mathbf{r} \chi_f^{(-)*}(k_f, \mathbf{r}) R_0 \frac{\partial V}{\partial r} Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_i^{(+)}(k_i, \mathbf{r}) \right|^2$$

2.21. Stripping del deuterón

Vamos a considerar ahora la descripción de reacciones de transferencia. Vamos a considerar la reacción más simple de todas: el stripping del deuterón $A(d, p)B$. Esta reacción podemos considerarla descompuesta en las etapas



El potencial de interacción en el canal de entrada vale

$$V_\alpha = V_{pn} + V_{pA} + V_{nA}$$

mientras que en el canal de salida el potencial es V_{pB} . Podemos hacer la aproximación que $V_{pA} + V_{nA}$ es aproximadamente el potencial óptico entre el núcleo A y el deuterón. Con esta aproximación tenemos para el potencial de transición

$$V_{tran} = V_\alpha - V_{opt}(d, A) \simeq V_{pn}$$

Las funciones de onda en los canales de entrada y salida son

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= \phi_{J_A M_A}(A) \phi_d(r) \chi_{1m_d}(\sigma_p, \sigma_n) \\ \phi_\beta &= \phi_{J_B M_B}(B) \chi_{1/2m_p}(\sigma_p) \end{aligned}$$

Para poder calcular la integral necesitamos descomponer $\phi_{J_B M_B}(B)$ en función de funciones de onda internas de A y de funciones de onda del neutrón en A

$$\phi_{J_B M_B} = \sum_{A' j l} \beta_{j l}(B, A') \mathcal{A}[\phi_{J_A}(A) \phi_{n l j}(\mathbf{r}_n)]_{J_B M_B}$$

los coeficientes $\beta_{j l}(B, A')$ están ligados con los llamados factores espectroscópicos por la relación

$$\beta_{j l} = S_{l j}^{1/2}$$

Un caso particularmente sencillo es cuando el núcleo A tiene capas cerradas. En este caso

$$\begin{aligned} \phi_{J_B M_B} &= \mathcal{A}[\phi_{00}(A) \mathcal{A}[\phi_{J_A}(A) \phi_{n l j m}(\mathbf{r}_n)]_{J_B M_B}]_{J_B M_B} \delta_{j J_B} \delta_{m M_B} \\ \phi_{n l j m}(\mathbf{r}_n) &= [\phi_{n l}(\mathbf{r}_n) \otimes \chi_{1/2}(\sigma_n)]_{j m} \\ \phi_{n l m_l}(\mathbf{r}_n) &= u_{n l}(r_n) Y_{l m_l}(\hat{\mathbf{r}}_n) \end{aligned}$$

El elemento de matriz de transición se puede expresar c

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{DWBA} &= \int \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}_\beta \chi_\beta^-(\mathbf{k}_\beta, \mathbf{r}_\beta) \langle b, B | V | a, A \rangle \chi_\alpha^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) = \\ &= \sum C(J_A j J_B | M_A m_j M_B) C(\frac{1}{2} \frac{1}{2} | \mu_p \mu_n \mu_d) C(l \frac{1}{2} j | m_l \mu_n m_j) S_{l j}^{1/2} \end{aligned}$$

donde

$$B_{l m_l}(k_p, k_d) = \int \int d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}_p \chi_p^-(\mathbf{k}_p, \mathbf{r}_p) \phi_{n l m_l}(r_n) V_{np}(r) \phi_d(r) \chi_d^+(\mathbf{k}_d, \mathbf{r}_d)$$

la sección eficaz de transición viene dada por

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega}(J_A M_A \mu_d \rightarrow J_B M_B \mu_p) = \frac{m_d m_p}{(2\pi \hbar^2)^2} \frac{k_p}{k_d} |T_{dp}^{DWBA}|^2$$

Como no medimos polarizaciones, la sección eficaz se obtiene promediando sobre espines iniciales y sumando sobre espines finales la expresión anterior:

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \frac{1}{3(2J_A + 1)} \sum_{M_B \mu_p} \sum_{M_A \mu_d} \frac{d\sigma_p}{d\Omega}(J_A M_A \mu_d \rightarrow J_B M_B \mu_p) = \frac{1}{2} \frac{m_d m_p}{(2\pi \hbar^2)^2} \frac{k_p}{k_d} \frac{2J_B + 1}{2J_A + 1} \sum_{l j m_l} S_{l j} |B_{l m_l}|^2$$

La reacción de stripping del deuterón se ha usado extensivamente para estudiar la estructura de capas de núcleos. Su principal ventaja es el buen conocimiento existente de la función de onda del deuterón. La coincidencia entre los factores espectroscópicos medidos experimentalmente y calculados teóricamente a partir de funciones de onda de modelo de capas indica la corrección de dichas funciones de onda.

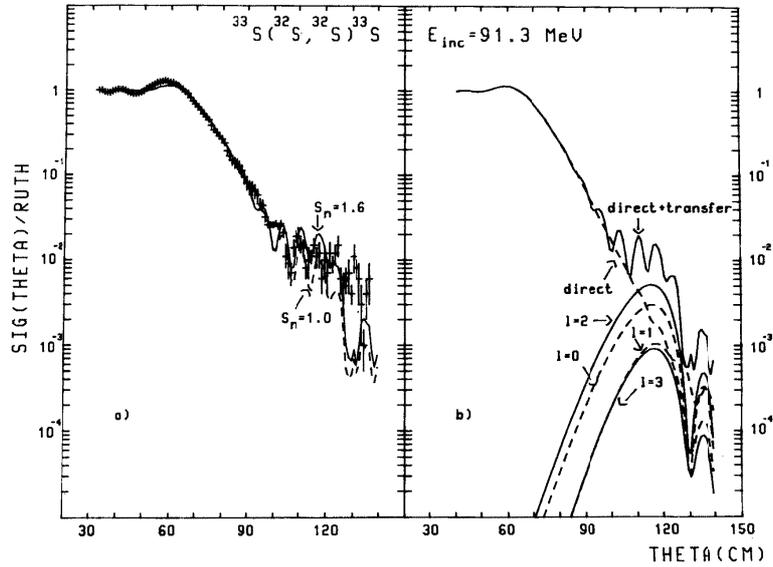


Figura 2.12: Transferencia elástica de un neutrón

2.22. Reacciones de transferencia de muchos nucleones

Las reacciones de transferencia de muchos nucleones tienen más selectividad del estado final, es decir se excita sólo unos pocos estados con cierta probabilidad. Reacciones de transferencia de dos tres y cuatro nucleones también se han estudiado extensivamente. Merece destacar las reacciones de transferencia de una partícula α , como herramienta de estudio de las correlaciones α en núcleos. En la sección eficaz aparecen los factores espectroscópicos de muchos nucleones.

2.23. La aproximación de canales acoplados

La aproximación de ondas distorsionadas no tiene en cuenta los caminos de excitación de dos y más etapas. Sin embargo a bajas energías, los procesos de excitación multietapa son muy importantes. Aunque es posible hacer ondas distorsionadas de segundo orden esto no es suficiente. En estos casos sólo funcionan métodos no perturbativos como el de canales acoplados.

$$\Psi = \sum_{\alpha} \int \phi_{\alpha}(x_{\alpha}) \psi(\mathbf{r}_{\alpha})$$

donde el símbolo \sum_{α} significa suma sobre el espectro discreto e integral sobre el continuo y x_{α} son las variables internas de los núcleos en el canal α . La función de onda $\psi(\mathbf{r}_{\alpha})$ es la función de onda radial entre los núcleos en el canal de entrada. Las condiciones de contorno son ondas incidentes en el canal de entrada y ondas emergentes en todos los canales abiertos. La ecuación de Schrödinger es

$$(E - H)\Psi = 0$$

donde $H = T + V + H_{\alpha}$ y H_{α} es el Hamiltoniano interno en el canal α , es decir $H_{\alpha} = H_a + H_A$. Introduciendo la función de onda en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$(E - H)\Psi = (E - T - V - H_{\alpha}) \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(x_{\alpha}) \psi(\mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (E - T - V - e_{\alpha}) \phi_{\alpha}(x_{\alpha}) \psi(\mathbf{r}_{\alpha})$$

Tenemos que

$$\phi_{\alpha}(x_{\alpha}) = \phi_a(x_a) \phi_A(x_A)$$

$$H_{\alpha} \phi_{\alpha}(x_{\alpha}) = (e_a + e_A) \phi_{\alpha}(x_{\alpha}) = e_{\alpha} \phi_{\alpha}(x_{\alpha})$$

Si multiplicamos escalarmente a la izquierda por un ϕ_{α} determinado (y ponemos el índice de sumación como α') tenemos el sistema de ecuaciones acopladas

$$(E - T - \langle \phi_{\alpha} | V | \phi_{\alpha} \rangle - e_{\alpha}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha'} \langle \phi_{\alpha} | V | \phi_{\alpha'} \rangle \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}_{\alpha'})$$

donde hemos utilizado el hecho que la energía cinética y el Hamiltoniano interno son diagonales en las funciones de onda internas ϕ_{α} . Para simplificar la notación denominamos $V_{\alpha\alpha'} = \langle \phi_{\alpha} | V | \phi_{\alpha'} \rangle$ y $E_{\alpha} = E - e_{\alpha}$ con lo que tenemos que las ecuaciones acopladas quedan como

$$(E_{\alpha} - T - V_{\alpha\alpha}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha'} V_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}_{\alpha'})$$

con $T = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2\mu_{\alpha}}$. Los productos escalares significan integración sobre las coordenadas internas

$$\langle \phi_{\alpha} | V | \phi_{\alpha'} \rangle = \int dx_{\alpha} \phi_{\alpha}^*(x_{\alpha}) V(\mathbf{r}, x_{\alpha}) \phi_{\alpha'}(x_{\alpha})$$

Estas ecuaciones se escriben usualmente en coordenadas esféricas como

$$(E_{\alpha} - T_{\alpha l} - V_{\alpha\alpha}) u_{\alpha\pi}^{JM}(r) = \sum_{\alpha \neq \alpha'} V_{\alpha\alpha'} u_{\alpha'\pi}^{JM}(r)$$

donde π se refiere a todos los números cuánticos que especifican el estado (I, L, J, P, \dots) . Tenemos en la anterior ecuación

$$E_\alpha = E - \varepsilon_a - \varepsilon_A$$

$$k_\alpha^2 = \frac{2\mu_\alpha E_\alpha}{\hbar^2}$$

$$T_{\alpha\ell} = \frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right)$$

En general tenemos dos funciones de onda internas $\phi_a^{I_a}(x_a)$, $\phi_A^{I_A}(x_A)$ correspondientes a cada uno de los núcleos que se acoplan a la función de onda total interna

$$\phi_\alpha^I = [\phi_a^{I_a}(x_a) \otimes \phi_A^{I_A}(x_A)]_{IM}$$

que a su vez se acopla a las funciones de onda orbitales (armónicos esféricos) para formar las funciones totales de momento angular (armónicos esféricos sólidos)

$$\mathcal{Y}_{\ell JM} = [Y_\ell(\mathbf{r}) \otimes \phi_\alpha^I(x_\alpha)]_{JM}$$

con una función de onda total

$$\Psi_{\alpha\pi}^J = \frac{1}{r} \sum_{\ell I} u_{\ell I\pi}^{JM}(r) \mathcal{Y}_{\ell JM}$$

Cuando esta función de onda total se inserta en la ecuación diferencial obtenemos

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu_\alpha r^2} - V_{\alpha\alpha}(r) + E_\alpha \right] u_{\alpha\pi}^{JM}(r) = \sum_{\alpha \neq \alpha'} V_{\alpha\alpha'}(r) u_{\alpha'\pi}^{JM}(r)$$

donde π significa el conjunto de números cuánticos que caracterizan la función de onda, típicamente $(I_a, I_A, I_\alpha, \ell)$.

Consideremos un ejemplo en que tanto el núcleo A como a tienen un estado fundamental 0^+ y un estado excitado 2^+ correspondiente a un fonón vibracional. Entonces son posibles las siguientes funciones de onda internas acopladas a espín total bien definido: $\phi_0(a)\phi_0(A)$, $\phi_2(a)\phi_0(A)$, $\phi_0(a)\phi_2(A)$, $[\phi_2(a) \otimes \phi_2(A)]_0$, $[\phi_2(a) \otimes \phi_2(A)]_2$, $[\phi_2(a) \otimes \phi_2(A)]_4$. Los momentos angulares impares no son posibles por conservación de paridad. Para cada onda parcial incidente $\ell = J$ son posibles las siguientes funciones de onda acopladas caracterizadas por los conjuntos de números cuánticos angulares dados en la tabla:

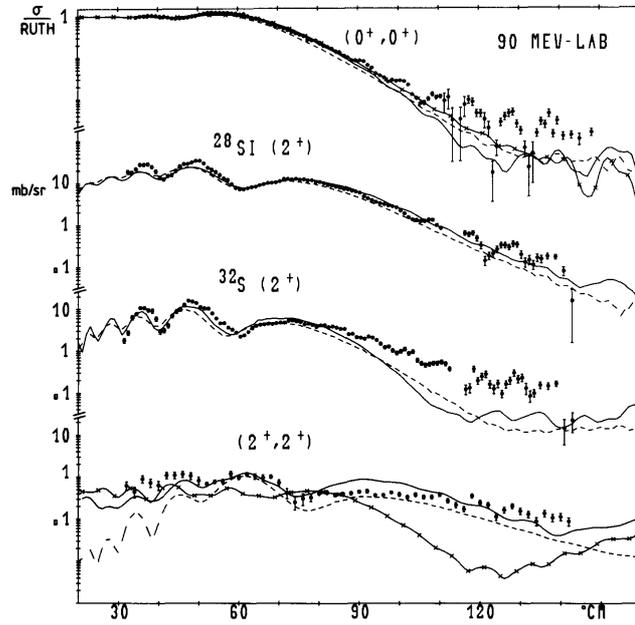


Figura 2.13: Excitacion mutua mediante canales acoplados

ℓ'	I_a	I_A	I	J
ℓ	0	0	0	ℓ
$\ell - 2$	2	0	2	ℓ
ℓ	2	0	2	ℓ
$\ell + 2$	2	0	2	ℓ
$\ell - 2$	0	2	2	ℓ
ℓ	0	2	2	ℓ
$\ell + 2$	0	2	2	ℓ
ℓ	2	2	0	ℓ
$\ell - 2$	2	2	2	ℓ
ℓ	2	2	2	ℓ
$\ell + 2$	2	2	2	ℓ
$\ell - 4$	2	2	4	ℓ
$\ell - 2$	2	2	4	ℓ
ℓ	2	2	4	ℓ
$\ell + 2$	2	2	4	ℓ
$\ell + 4$	2	2	4	ℓ

Vemos que en este caso sencillo hay ya 16 funciones de ondas acopladas para cada onda parcial, caracterizadas por los números cuánticos de la tabla anterior.

Cada una de estas funciones de onda se resuelven con las condiciones de contorno de una onda Coulombiana incidente en el canal de entrada y ondas Coulombianas emergentes en todos los otros canales:

$$u_{\alpha\ell I_a I_A I_\alpha}^{JM}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{2i} \delta_{\alpha\alpha'} F_\ell(kr) + \left(\frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}}\right)^{1/2} \frac{(S_{\alpha\pi, \alpha'\pi'} - 1)}{2i} H_{\alpha'}(k_{\alpha'} r)$$

Vamos a considerar el caso de un sólo estado excitado, que supondremos un fonón vibracional. El potencial, desarrollado en primer orden en los operadores de deformación da:

$$V(r, \alpha_{2\mu}) = V_0(r) - \frac{dV}{dr} R_0 \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}$$

donde los operadores de deformación $\alpha_{2\mu}$ se pueden poner en función de los operadores creación y destrucción de fonones como

$$\alpha_{2\mu} = \frac{\beta_2}{\sqrt{5}} \left(b_{2\mu} + (-)^{\mu} b_{2-\mu}^{\dagger} \right)$$

Las funciones de onda internas se pueden escribir como

$$\phi_{2\mu} = b_{2\mu}^{\dagger} |0\rangle, \quad \phi_0 = |0\rangle$$

El potencial de acoplamiento es

$$V_{02} = -\frac{dV}{dr} R_0 \langle \phi_{2\mu} | \sum_{\mu'} \alpha_{2\mu'} Y_{2\mu'} | \phi_0 \rangle = -\frac{dV}{dr} R_0 Y_{2\mu}$$

Para cada onda parcial habrá cuatro funciones de onda acopladas: $(\ell, I) = (J, 0), (J-2, 2), (J, 2), (J+2, 2)$.

2.23.1. Potencial efectivo

La ecuación radial corresponde a un movimiento unidimensional en la coordenada r con el siguiente potencial

$$V_{ef}(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

denominado potencial efectivo. El tercer término se denomina potencial centrífugo y tiene en cuenta la energía cinética de rotación. Los otros dos términos son el potencial nuclear y Coulombiano. El potencial nuclear lo supondremos parametrizado en la forma Woods-Saxon

$$V_N(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

mientras que el potencial de Coulomb viene dado con suficiente aproximación por

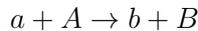
$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & r > R_1 + R_2 \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_C} \left(3 - \frac{r^2}{R_C^2} \right) & r \leq R_1 + R_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

con $R_C = R_1 + R_2$, que aproximaremos por $R_C = 1,4(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$.

Este potencial efectivo tiene bolsillos hasta una onda parcial, que se denomina momento angular crítico. Por debajo de esta onda parcial, cuando la energía incidente no es muy diferente del máximo exterior del potencial efectivo, si uno de los núcleos colisionantes sufre una excitación después de haber penetrado en la zona interior de la barrera de Coulomb, ambos núcleos pueden quedar atrapados, lo que origina que sufran excitaciones adicionales. Esta situación tendrá como consecuencia que ambos núcleos permanezcan un tiempo elevado juntos, lo que puede originar una resonancia, o la fusión de ambos núcleos. Cuando ambos núcleos son ligeros (hasta silicio) y con un número par de protones y neutrones, entonces hay una baja densidad de niveles, lo que produce que el hecho de quedar atrapados sea reversible, y los núcleos finalmente se separan. Este fenómeno origina una resonancia en las secciones eficaces de excitación elásticas e inelásticas, y también de transferencia de unos pocos nucleones. Dicha resonancia se conoce como una resonancia molecular, debido a que el potencial efectivo recuerda el potencial de Morse que liga las moléculas. El momento angular de la resonancia es el de la onda parcial cuyo potencial efectivo ha producido que ambos núcleos queden atrapados.

2.24. Ejercicios

1. Calcular el tiempo de colisión de la reacción $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$ en experimentos de blanco fijo y energías del proyectil de a) 200 MeV, b) 200A MeV y para experimentos en colisionador de c) 200A GeV (100+100).
2. Calcular las barreras y radios de Coulomb V_B y R_C para $\alpha + \alpha$, $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ y $^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$.
3. Calcular el tiempo de interacción de $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ en estados resonantes de 100 keV de anchura observados en colisiones de entre 5 y 12 MeV de energía incidente en el laboratorio. Calcular el tiempo de colisión correspondiente.
4. Obtener la transformación de LAB a CM de una reacción de reordenación



5. Pasar de CM a Laboratorio los siguientes puntos experimentales de la distribución angular elástica de $^{32}\text{S} + ^{40}\text{Ca}$ a 100 MeV de energía incidente en el laboratorio:

$\theta_{cm}(\text{°})$	$d\sigma_{cm}/d\Omega(\text{mb})$
32,5	6731.
49,5	1360.
90,5	15,4

6. Calcular el cociente de las sección eficaz experimental y de Rutherford en el sistema CM de los datos del problema anterior.
7. Calcular el grado de polarización de protones sometidos a un campo magnético de 20 kG y a una temperatura de 0.1 K. El momento magnético del protón es $2.793 \mu_N$ donde el magnetón nuclear vale $\mu_N = 0,50505 \times 10^{-23} \text{erg} \cdot \text{G}^{-1}$; ¿Que campo magnético o que temperatura hacen falta para obtener una polarización del 50 %?
8. Calcular el ángulo de desviación en CM para un núcleo de ^{12}C que incide sobre un núcleo de ^{40}Ca con un parámetro de impacto de 5 fm y una energía incidente en el sistema LAB de 25 MeV. Si se forma un sistema resonante, ¿Cuál será su momento angular (expresarlo como un número entero de unidades \hbar)? Calcular la distancia de máxima aproximación entre los núcleos.
9. ¿Cual es el ángulo de desviación en el problema anterior cuando el parámetro de impacto es del orden del radio atómico (0.1 Å)? ¿Hay alguna razón para que la fórmula de dispersión Coulombiana no sea precisa a estas distancias?
10. ¿ Que ondas parciales describen las colisiones periféricas de $\text{Pb} + \text{Pb}$ a 400 MeV de energía incidente del proyectil? ¿ A que ángulos de dispersión del proyectil en el sistema LAB corresponden? ¿ y en el sistema CM?
11. La reacción $^{12}\text{C} + ^{28}\text{Si} \rightarrow ^{16}\text{O} + ^{24}\text{Mg}$ tiene un calor de reacción de $Q = -2,82 \text{ MeV}$. ¿Cuál es la energía umbral de ^{12}C para que ocurra esta reacción? A partir de que energía incidente de ^{12}C en el sistema LAB se espera una sección eficaz de reacción apreciable? (la transferencia de una partícula α sólo ocurre con probabilidad apreciable cuando ambos núcleos entran en contacto (a energías más bajas ocurre con probabilidades muy bajas por efecto túnel). Repetid los mismos cálculos cuando el proyectil es el ^{28}Si .
12. Supongamos que la reacción anterior se estudia a 96 MeV de energía incidente de ^{12}C en el sistema LAB. ¿A que energía incidente de ^{16}O en LAB tendrá la reacción inversa la misma sección eficaz?

13. Consideremos las colisiones de partículas α sobre ^{208}Pb y supongamos que podemos aproximar el potencial nuclear entre ambos por un potencial Woods-Saxon con $V = 135$ MeV, $r_v = 1,5$ fm y $a_v = 0,5$ fm. Comparar la intensidad del potencial real al potencial Coulombiano a una distancia de separación de $r = 11$ fm. Calcular el valor exacto del radio y la barrera de Coulomb y comparar con las fórmulas de la sistemática dadas en clase.
14. En la reacción del problema anterior ¿A qué energía incidente de la partícula α se espera que la sección eficaz se desvie apreciablemente de la de Rutherford en colisiones frontales? ¿A qué ángulo se desviará la sección eficaz de la de Rutherford a una energía incidente de la partícula α de 25 MeV?
15. Calcular el factor de forma $F(q)$ de la dispersión de electrones por núcleos suponiendo que la densidad de carga es una esfera uniforme. Si consideramos la dispersión de electrones de $E=750$ MeV sobre ^{40}Ca , ¿A qué valor de q se espera el primer mínimo de $|F(q)|^2$? ¿A qué ángulo de dispersión de los electrones corresponde? (Experimentalmente se observan mínimos a 15° , 30° y 45°).
16. La sección eficaz diferencial de la reacción $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ vale 5.9 ± 0.2 mb/sr a 168° para una energía incidente de la partícula α de 13.6 MeV. El valor de Q de esta reacción es -1.59 MeV. La reacción inversa $^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$ tiene una sección eficaz a la energía correspondiente de 2.0 ± 0.1 mb/sr. Calcular el spin en el estado fundamental de ^{24}Mg .