

Documento de Trabajo/Working Paper
Serie Economía

**Cambios en persistencia o cambio estructural en las series de comercio
internacional de Canarias**

Julio A. Afonso Rodríguez

January 2010

DT-E-2010-01

ISSN: 1989-9440

CAMBIOS EN PERSISTENCIA O CAMBIO ESTRUCTURAL EN LAS SERIES DE COMERCIO INTERNACIONAL DE CANARIAS

Julio A. Afonso Rodríguez

Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría
Instituto Universitario de Desarrollo Regional (IUDR)
Universidad de La Laguna
e-mail: jafonsor@ull.es

RESUMEN:

En este trabajo se estudia el comportamiento de las series mensuales de comercio internacional de Canarias (importaciones, exportaciones y total) para el período enero 1995-marzo 2009. El análisis de estas series se basa en los resultados de los contrastes de cambio en persistencia de Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004) de la hipótesis de $I(0)$ (estacionariedad estocástica) frente a un cambio de $I(0)$ a $I(1)$ (estacionariedad en diferencia o raíz unitaria), o cambio de $I(1)$ a $I(0)$. Se observa además que una serie que presente un cambio de persistencia del tipo descrito puede confundirse con una serie $I(0)$ con cambio estructural en el componente determinista. Por esta razón se analizan también los resultados de una serie de contrastes habituales de la hipótesis nula $I(0)$ incorporando cambio estructural. Buseti y Harvey (2001) derivan la distribución asintótica nula del contraste KPSS bajo distintos tipos de cambio estructural y nosotros extendemos estos resultados para el caso de los contrastes V/S de Giraitis et.al. (2003) y KS de Xiao (2001) y para varias especificaciones del modelo con cambio estructural, incorporando además la posibilidad de puntos de cambio diferentes para cada término del componente determinista.

Palabras clave: *Cambios en persistencia, estacionariedad estocástica, raíz unitaria, cambio estructural, series de comercio en Canarias.*

Clasificación JEL: *C12, C22, F14, R11*

ABSTRACT:

This paper analyses the behaviour of monthly foreign trade series (imports, exports and total trade) in the Canary Islands for the period January-1995 to March-2009. This analysis is based on tests for change in persistence of Kim (2000), Kim et.al. (2002) and Buseti and Taylor (2004). This tests are for the null hypothesis of $I(0)$ (or stochastic stationarity) against the alternative of a change in persistence from $I(0)$ to $I(1)$ (unit root processes or difference-stationary) or from $I(1)$ to $I(0)$. Time series that presents such a change in persistence could be mistaken for an $I(0)$ series with a structural change in the deterministic component. For that reason, results of the test of the null hypothesis $I(0)$ process with structural changes are also presented. Buseti and Harvey (2001) give the asymptotic null distribution of the KPSS statistic under the assumption of different type of structural changes. We extent this results for the cases of the V/S test of Giraitis et al (2003) and KS test of Xiao (2001) with different specifications of the model with structural change, and incorporating the possibility of different breakpoints for each term in the deterministic component.

Key-words: *Persistence changes, stochastic stationarity, unit root, structural change, Canary international trade series.*

JEL Classification: *C12, C22, F14, R11*

1. Introducción.

El estudio del orden de integración de series temporales representa un amplio campo dentro del análisis econométrico de series temporales, tanto teórico como aplicado. Recientemente se ha planteado la posibilidad de que determinadas series puedan experimentar un cambio en persistencia moviéndose entre $I(1)$ e $I(0)$ o al contrario. Con la finalidad de examinar esta posibilidad se han propuesto múltiples procedimientos de contraste de la hipótesis de estacionariedad estocástica, $I(0)$, frente a un cambio en persistencia de $I(0)$ a $I(1)$ (o al contrario), o bien con dirección de cambio desconocida a priori, así como contrastes de la nula $I(1)$ frente a las mismas posibilidades. En este trabajo nos vamos a centrar en el estudio del comportamiento de algunos de los contrastes del primer tipo en presencia de un cambio de naturaleza diferente para el que están diseñados, en particular, bajo cambio estructural en el componente determinista. Los contrastes considerados son los denominados contrastes basados en ratios debidos a Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004). Cook (2004) ha estudiado el comportamiento bajo la hipótesis nula $I(1)$ del contraste de cambio en persistencia de Leybourne et.al. (2003) bajo cambio estructural, encontrando distorsiones en el tamaño empírico del contraste. En nuestro caso, puesto que la alternativa se representa como un proceso estacionario con cambio estructural, los resultados se referirán a la potencia empírica del contraste, encontrando efectos similares sobre esta característica de los contrastes. Adicionalmente vamos a estudiar el comportamiento y la potencia de los contrastes tipo KPSS de estacionariedad con cambio estructural propuestos por Buseti y Harvey (2001) frente a la alternativa de un cambio en persistencia. La omisión de un cambio estructural provoca que estos contrastes tiendan al sobrerrechazo de la hipótesis nula, de forma que en presencia de un potencial cambio de estructura del componente sistemático es preciso incorporar este fenómeno en el proceso de construcción de estos estadísticos. Con objeto de contar con una familia de contrastes con una estructura similar a la de estos y con mejores propiedades, en este trabajo se han modificado en el mismo sentido los estadísticos de contraste de estacionariedad V/S de Giraitis et.al. (2003, 2005) y KS de Xiao (2001) para la inclusión de cambios estructurales potenciales, se ha obtenido su distribución nula asintótica y se han calculado los percentiles críticos relevantes.

En las Secciones 2 y 3 se presentan los contrastes analizados de cambio en persistencia y de estacionariedad con cambio estructural, respectivamente, mientras que las Secciones 4 y 5

están dedicadas al estudio del comportamiento de cada uno de estos contrastes bajo la alternativa de un cambio de naturaleza diferente para el que están diseñados, tal como se ha descrito anteriormente, encontrando que en ambos casos dichos contrastes tienen potencia frente a las alternativas planteadas, pudiendo hacer cuestionable en algunos casos las conclusiones que puedan derivarse de su utilización. Las pruebas de los Teoremas enunciados en estas secciones se recogen en los Apéndices A y B, mientras que el Apéndice C presenta los resultados de distintos ejercicios de simulación.

Finalmente, con objeto de ilustrar el interés empírico del trabajo detallado anteriormente, en la Sección 6 se recogen los resultados de la aplicación de los contrastes de cambio de persistencia analizados así como los de estacionariedad con cambio estructural a las series mensuales de comercio exterior para Canarias (importaciones, exportaciones y total) para el período enero 1995-marzo 2009 (171 observaciones).

2. Contrastes de cambio en persistencia (PC) en series temporales lineales

Para el contraste de la hipótesis de estacionariedad estocástica $I(0)$, H_0 , frente a las alternativas de cambio en persistencia de $I(0)$ a $I(1)$, H_{01} , de $I(1)$ a $I(0)$, H_{10} , o de cambio en persistencia con dirección de cambio desconocida, $H_{01} \cup H_{10}$, vamos a considerar la clase de estadísticos de contraste basados en ratios propuesta por Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004) a partir del siguiente modelo de componentes inobservados

$$y_t = d_t(p) + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t h_t(\tau_0) \quad (2.2)$$

donde $h_t(\tau_0) = I(t > [n\tau_0])$, con $\tau_0 \in (0,1)$ e $I(\cdot)$ la función indicador usual. Alternativamente a (2.2) podría considerarse que el componente r_t viene dado por

$$r_t = r_{t-1} + u_t(1 - h_t(\tau_0)) = r_{t-1} + u_t I(t \leq [n\tau_0]) \quad (2.3)$$

donde, en cualquier caso, ε_t y u_t son mutuamente independientes, de media nula, con $\sigma_u^2 = \text{Var}(u_t) \geq 0$, y ambos verifican las condiciones de regularidad necesarias para la aplicabilidad de cualquier versión existente del principio de invarianza (TCLF), de forma que $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{[nr]} (\varepsilon_t, u_t) \Rightarrow (\omega_\varepsilon W_0(r), \omega_u W_u(r))$, donde ω_ε^2 y ω_u^2 son las varianzas a largo plazo de

cada uno de estos procesos y $W_0(r)$ y $W_u(r)$ son dos procesos de Wiener estándar (movimientos Brownianos) e independientes, con $r \in [0,1]$. El término $d_t(p)$ representa el componente determinista, parametrizado como $d_t(p) = \mathbf{z}'_{t,p} \boldsymbol{\gamma}_p$ y que generalmente viene dado por una tendencia polinomial de orden p dado, $\mathbf{z}'_{t,p} = \mathbf{x}'_{t,p} = (1, t, \dots, t^p)$, con $\boldsymbol{\gamma}_p = \boldsymbol{\beta}_p$, pero que puede extenderse al caso de inclusión de cambios estructurales en los componentes de la tendencia de la forma $\mathbf{z}'_{t,p} = (1 + \phi_0 h_t(\lambda_0), t[1 + \phi_1 h_t(\lambda_1)], \dots, t^p [1 + \phi_p h_t(\lambda_p)])$, de forma que $d_t(p) = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\gamma}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\delta}_p$, con $\delta_i = \gamma_i \phi_i$ y $\mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) = (h_t(\lambda_0), t h_t(\lambda_1), \dots, t^p h_t(\lambda_p))$, $h_t(\lambda_i) = I(t > [n \cdot \lambda_i])$ y $\lambda_i \in (0,1)$, $i = 0, 1, \dots, p$. Respecto de este componente se impone como condición de regularidad la existencia de una matriz de normalización, cuadrada y no singular, \mathbf{D}_p , tal que $\mathbf{D}_p \mathbf{x}_{[nr],p} = \mathbf{x}_{[nr],p} \rightarrow \mathbf{X}_p(r)$ uniformemente sobre $r \in [0,1]$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mathbf{X}_p(r)$ es una función continuamente diferenciable en $[0,1]$. En el caso de una tendencia polinomial de orden p , la esta matriz tomaría la forma $\mathbf{D}_p = \text{diag}(1, n^{-1}, \dots, n^{-p})$, con $\mathbf{X}_p(r) = (1, r, \dots, r^p)$.

Por otro lado, haciendo $\tau_0 = 0$ en (2.2), o bien $\tau_0 = 1$ en (2.3), (2.1) se reduce al modelo utilizado por Kwiatkowski et.al. (1992) para el contraste de estacionariedad estocástica I(0) frente a la alternativa de estacionariedad en diferencias, I(1). En cualquier otro caso, $\tau_0 \in (0,1)$, la ecuación (2.2) representa el cambio en persistencia de I(0) a I(1) en el punto $[n\tau_0]+1$, mientras que (2.3) representa el cambio en persistencia de I(1) a I(0) en el punto $[n\tau_0]$, siempre que $\sigma_u^2 > 0$. Por tanto, las hipótesis alternativas H_{01} y H_{10} se corresponden con el contraste de $\sigma_u^2 = 0$ en los modelos (2.2) y (2.3), respectivamente. Para el contraste de estas hipótesis, Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Busetti y Taylor (2004), han desarrollado una serie de contrastes basados en el estadístico ratio

$$\hat{K}_{n,p}(\tau) = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{S}_{2,t}^2(p)}{\frac{1}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{S}_{1,t}^2(p)} = \frac{\frac{1}{n-[n\tau]} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n-[n\tau]}} \sum_{i=[n\tau]+1}^t \hat{\eta}_{2,i}(p) \right)^2}{\frac{1}{[n\tau]} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \left(\frac{1}{\sqrt{[n\tau]}} \sum_{i=1}^t \hat{\eta}_{1,i}(p) \right)^2} = \frac{\hat{A}_{n,p}(\tau)}{\hat{B}_{n,p}(\tau)} \quad (2.4)$$

donde $\hat{\eta}_{j,i}(p)$, $j = 1, 2$, son los residuos MCO del ajuste del modelo (2.1) bajo la hipótesis nula $\sigma_u^2 = 0$ en dos submuestras separadas para las primeras $[n\tau]$ ($j=1$) y las últimas $n-[n\tau]$

($j=2$) observaciones respectivamente. El estadístico (2.4) es aproximadamente, salvo por la omisión del estimador de la varianza a largo plazo basado en los correspondientes residuos MCO, el ratio de dos estadísticos tipo KPSS calculados en cada submuestra. Buseti y Taylor (2004) obtienen la distribución asintótica nula de (2.4), lo que permite implementar un contraste condicional para un punto de cambio potencial τ dado. Sin embargo, resulta más apropiado resumir la información muestral para un rango de valores suficientemente amplio de τ que considerar un único valor particular. Así, estos tres autores consideran tres estadísticos basados en la secuencia de estadísticos $\{\hat{K}_{n,p}(\tau), \tau \in \Lambda\}$, donde $\Lambda = [\tau_l, \tau_u]$ es un subconjunto compacto de $[0,1]$, con $\tau_l \leq \tau_0 \leq \tau_u$ y $[n\tau_l], n - [\tau_u] \geq p$. Los estadísticos propuestos se basan en la tasa de divergencia de los componentes del numerador y denominador de (2.4) bajo cada una de las alternativas propuestas y son los siguientes:

Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1), H_{01}	Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0), H_{10}
$H_j(\hat{K}_{n,p}(\tau)) = \hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n) \quad j=1,2,3$	$H'_j(\hat{K}_{n,p}(\tau)) = \hat{H}'_{j,p}(\hat{\tau}_n) \quad j=1,2,3$
$\hat{H}_{1,p}(\hat{\tau}_n) = \max_{s=[\tau_l n], \dots, [\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})$	$\hat{H}'_{1,p}(\hat{\tau}_n) = \max_{s=[\tau_l n], \dots, [\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})$
$\hat{H}_{2,p}(\hat{\tau}_n) = \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})$	$\hat{H}'_{2,p}(\hat{\tau}_n) = \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})$
$\hat{H}_{3,p}(\hat{\tau}_n) = \ln \left\{ \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \exp[\hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})] \right\}$	$\hat{H}'_{3,p}(\hat{\tau}_n) = \ln \left\{ \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \exp[\hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})] \right\}$

Para el contraste de la hipótesis nula I(0) frente a la alternativa de un cambio en persistencia de dirección desconocida, Buseti y Taylor (2004) proponen emplear los siguientes

$$\hat{H}_{3+i,p}(\hat{\tau}_n) = \max(\hat{H}_{i,p}(\hat{\tau}_n), \hat{H}'_{i,p}(\hat{\tau}_n)), \quad i = 1, 2, 3$$

En cualquiera de los casos indicados, dada la distribución asintótica nula de estos nueve estadísticos derivada de la de (2.4) por aplicación del Teorema del Mapeado Continuo, se detectará un rechazo de la hipótesis nula para un valor grande de los mismos. En Kim (2000), Buseti y Taylor (2004) y Taylor (2005) pueden encontrarse tabulados los percentiles críticos de estos estadísticos para $p = 0$ (corrección por la media) y $p = 1$ (corrección por la media y una tendencia lineal) para distintos tamaños muestrales. El Cuadro C.1.0 del Apéndice C presenta los cuantiles superiores más relevantes de estos estadísticos obtenidos por el autor para tamaños muestrales $n = 100, 200$ y 1000 . Como producto final de este análisis, Kim (2000) propone un estimador n -consistente del punto de cambio, $\hat{\tau}_n$, basado en el estadístico

$$\hat{\Lambda}_{n,p}(\tau) = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{\eta}_{2,t}^2(p)}{\frac{1}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{\eta}_{1,t}^2(p)} \quad (2.5)$$

donde $\hat{\tau}_n = \arg \max_{\tau \in \Lambda} \hat{\Lambda}_{n,p}(\tau)$ bajo la alternativa H_{01} , y $\hat{\tau}_n = \arg \min_{\tau \in \Lambda} \hat{\Lambda}_{n,p}(\tau)$ bajo H_{10} .

3. Contrastes de estacionariedad con cambio estructural (SB)

En este caso, el modelo que se asume genera las observaciones de la serie bajo consideración viene dado por

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \cdot \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\delta}_p + r_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad (3.2)$$

donde los términos $(\mathbf{x}'_{t,p}, \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}))$ del componente determinista se han descrito en la sección anterior, con $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)'$ de forma que es posible considerar, a priori, un punto de cambio diferente para componente de la tendencia polinomial, o bien haciendo algún $\lambda_i = 1$ el término correspondiente no se vería afectado por el cambio estructural. Haciendo $\lambda_i = \lambda$ para todo $i = 0, 1, \dots, p$, entonces $\mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda)$. Haciendo $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$ en (3.1) se tiene el modelo de nivel-local generalizado en el que se basan los estadísticos KPSS de Kwiatkowski et.al. (1992) para el contraste I(0) frente a I(1). Lee et.al. (1997) demuestran que en los casos $p = 0$ y $p = 1$ ¹, estos estadísticos KPSS divergen a una tasa $O(n/q_n)$ bajo la hipótesis nula I(0) cuando se omite un cambio estructural, donde $q_n = o(n)$ es el parámetro bandwidth empleado en la estimación de la varianza a largo plazo basado en los residuos MCO de esta regresión, lo que provoca un sobrerrechazo de la hipótesis nula a favor de la alternativa I(1) por omisión del cambio estructural, mientras que bajo la alternativa el componente de paseo aleatorio domina el error de especificación y en este caso las distribuciones asintóticas no se ven afectadas por el error de especificación. Buseti y Harvey (2001) deriva un contraste tipo KPSS condicional a la elección de un punto de cambio a priori de la forma

$$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 \quad (3.3)$$

¹ En **Afonso-Rodríguez, J.A. (2009)**: On Breitung's nonparametric unit root test under structural change, mimeografía, se puede encontrar una prueba alternativa y más general de este resultado para el caso de una tendencia polinomial de orden p arbitrario.

donde $n^{-1/2}\hat{S}_{[nr],p}(\lambda) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nr]}\hat{\eta}_{j,p}(\lambda)$, $\hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)$ es un estimador consistente de la varianza a largo plazo basado en los residuos MCO², con $\hat{\eta}_{j,p}(\lambda)$ los residuos del ajuste MCO de la regresión auxiliar del contraste dada por el modelo (3.1) bajo la hipótesis nula, es decir,

$$\hat{\eta}_{t,p}(\lambda) = \eta_t - \mathbf{x}'_{t,p}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) - \mathbf{x}'_{t,p}h_t(\lambda)(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p) \quad (3.4)$$

donde $\eta_t = r_t + \varepsilon_t = r_0 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^t u_i$, y

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

con

$$\mathbf{Q}_{[nr]}(p) = \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p}, \quad \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) = \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \mathbf{Q}_n(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}(p) \quad (3.6)$$

y

$$\mathbf{H}_{[nr]}(p) = \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}_{j,p} \eta_j, \quad \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) = \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \eta_j = \mathbf{H}_n(p) - \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) \quad (3.7)$$

Utilizando la estructura de la inversa de la matriz en (3.5) particionada en bloques, se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p), \quad (3.8)$$

y

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) \quad (3.9)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) (\mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

² Para un tratamiento completo de la estimación consistente a heterocedasticidad y autocorrelación de la varianza a largo plazo (LRV-HAC) pueden consultarse los trabajos de den Haan y Levin (1997,2000) y sobre su utilización en la construcción de estadísticos de contraste de la hipótesis de estacionariedad, Carrion-i-Silvestre y Sansó (2006).

donde $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) = 0$ si $r < \lambda$, y para todo $\lambda \leq r \leq 1$, se tiene que

$$n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} = n^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} - \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}'_{t,p} \right).$$

Entonces, bajo la hipótesis nula de estacionariedad, de forma que $\eta_t = \varepsilon_t$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda) &\Rightarrow \omega_\varepsilon \left\{ W_0(r) - \int_0^r \mathbf{X}'_p(s) ds \left(\int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right) \int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) dW_0(s) \right\} \\ &\quad - \omega_\varepsilon I(r \geq \lambda) \left(\int_0^r \mathbf{X}'_p(s) ds - \int_0^\lambda \mathbf{X}'_p(s) ds \right) \\ &\quad \times \left\{ \left(\int_\lambda^1 \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 \mathbf{X}_p(s) dW_0(s) - \left(\int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) dW_0(s) \right\} \\ &= \omega_\varepsilon V_p(r, \lambda) - \omega_\varepsilon I(r \geq \lambda) U_p(r, \lambda) = \omega_\varepsilon B_p(r, \lambda) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $B_p(r, \lambda) = V_p(r, \lambda) - I(r \geq \lambda) U_p(r, \lambda)$. Busetti y Harvey (2001, 2003) y Harvey y Mills (2003), proporcionan expresiones explícitas para estos términos en los casos $p = 0$ y $p = 1$, para un conjunto de modelos particulares con cambio estructural en el nivel, en la tendencia y en el nivel y en la tendencia lineal, además del cálculo de los valores críticos apropiados. Así, dada la consistencia del estimador de la varianza a largo plazo, $\hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda) \xrightarrow{p} \omega_\varepsilon^2$, la distribución asintótica nula y en muestras finitas del estadístico (3.3) depende de λ , con $\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds$. Bajo el supuesto más general de punto de cambio desconocido, Busetti y Harvey (2001) proponen también un contraste incondicional, dado por el resultado más favorable para la hipótesis nula de estacionariedad estocástica utilizando una secuencia de estadísticos (3.3) de la forma

$$\tilde{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \hat{\lambda}_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) \quad (3.12)$$

con $\hat{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$, y cuya distribución dependerá tanto de la localización del verdadero punto de cambio, λ_0 , como de la magnitud de los parámetros de salto, δ_p . Busetti y Harvey (2003) proponen un procedimiento en dos etapas empleando un estimador superconsistente de λ .

Además del contraste no paramétrico KPSS, con la adaptación descrita al caso de corrección por un posible cambio estructural, se han propuesto recientemente otros contrastes alternativos, similares en construcción, que presentan mejores propiedades en muestras finitas, tal como un mejor balance entre tamaño y potencia empírica. A continuación se presenta la adaptación de dos de estos estadísticos para el contraste de la hipótesis nula de estacionariedad en torno a un componente determinista con un posible cambio estructural, así como su distribución asintótica nula. Se trata del estadístico basado en el ratio V/S de Giraitis et.al. (2003, 2005)

$$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)} \left\{ \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 \right\} \quad (3.13)$$

y el estadístico KS de Xiao (2001), dado por

$$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) = \frac{1}{\hat{\omega}_n(q_n, \lambda)} \max_{t=1, \dots, n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) - \frac{t}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{n,p}(\lambda) \right) \right| \quad (3.14)$$

El estadístico de varianza reescalada basado en el estadístico V/S, ecuación (3.13), puede interpretarse como una corrección del estadístico KPSS por el nivel promedio del proceso de suma parcial de residuos MCO, mientras que el estadístico KS de Xiao (2001), ecuación (3.14), propone identificar una excesiva fluctuación en la serie temporal que indique evidencia de no estacionariedad empleando la métrica de Kolmogorov-Smirnov. En (3.13) se tiene que el estadístico V/S se reduce al de KPSS cuando $p = 1$, puesto que en este caso se puede demostrar que $\sum_{t=1}^n n^{-1/2} \hat{S}_{t,1}(\lambda) = 0$, mientras que en (3.14), el estadístico KS se reduce a $\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) = \hat{\omega}_n^{-1}(q_n, \lambda) \cdot \max_{t=1, \dots, n} |n^{-1/2} \hat{S}_{t,p}(\lambda)|$ siempre que la regresión auxiliar del contraste contenga un término constante, puesto que en este caso $\hat{S}_{n,p}(\lambda) = 0$. La siguiente Proposición 1 establece la distribución asintótica nula de estos dos estadísticos en el caso del contraste de estacionariedad con cambio estructural condicional a un punto de cambio dado.

Proposición 1. *En el modelo con cambio estructural y los supuestos relativos al término de error y el componente determinista, se tiene que los contrastes V/S y KS condicionales, fijado un punto de cambio $\lambda \in (0,1)$, tienen distribución asintótica nula dada por:*

$$(i) \hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds - \left(\int_0^1 B_p(s, \lambda) ds \right)^2, \quad (ii) \hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \sup_{0 \leq s \leq 1} |B_p(s, \lambda) - sB_p(1, \lambda)|.$$

Prueba. La prueba de esta Proposición se sigue directamente de la distribución asintótica nula del contraste KPSS con cambio estructural y del Teorema del Mapeado Continuo. El cuadro C.2.0 del Apéndice C muestra los percentiles críticos calculados mediante simulación para estos tres contrastes de estacionariedad en el caso $\lambda_0 = 0.20$ para los modelos 1, 2, 2a y 2b en Buseti y Harvey (2001). En el caso $p = 1$, corrección por la media y una tendencia lineal con cambio estructural en uno de los o en ambos términos, $\int_0^1 B_p(s, \lambda) ds = 0$, de forma que la distribución asintótica nula del estadístico V/S se reduce a la del estadístico KPSS, mientras que en el caso de que la regresión auxiliar contenga un término constante, con o sin cambio estructural, se tiene que en (ii) $B_p(1, \lambda) = 0$.

4. Comportamiento de los contrastes de cambio en persistencia bajo la alternativa de estacionariedad con cambio estructural.

En esta sección vamos a plantear la situación donde se ha considerado el contraste de la hipótesis nula de estacionariedad frente a alguna de las alternativas de cambio en persistencia utilizando alguno de los estadísticos descritos en la sección 2 basados en el estadístico ratio (2.4), pero donde el verdadero PGD viene dado por un modelo con cambio estructural en el componente determinista, del tipo general descrito en la sección 3 (ecuaciones (3.1),(3.2)). Así se tiene que ha construido la secuencia de estadísticos ratio

$$\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \frac{\hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)}{\hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda)} = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{S}_{2,t}^2(p, \lambda)}{\frac{1}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{S}_{1,t}^2(p, \lambda)} \quad (4.1)$$

con $\hat{S}_{1,t}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^t \hat{\eta}_{1,i}(p, \lambda)$ y $\hat{S}_{2,t}(p, \lambda) = \sum_{i=[n\tau]+1}^t \hat{\eta}_{2,i}(p, \lambda)$ los procesos de sumas parciales de residuos MCO, para algún $\tau \in [\tau_l, \tau_u] \subset (0, 1)$, donde $\hat{\eta}_{1,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, [n\tau]}(\lambda)$, $t = 1, \dots, [n\tau]$ y $\hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, n-[n\tau]}(\lambda)$, $t = [n\tau]+1, \dots, n$ los correspondientes residuos MCO del ajuste del modelo en cada una de las dos submuestras separadas. El siguiente Teorema 1 establece el comportamiento de (4.1) cuando el verdadero PGD viene dado por

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

con ε_t una secuencia de errores estacionaria. Es decir, se considera el caso donde el proceso

observado sea estacionario en torno a un componente determinista con cambio estructural.

Teorema 1. *Dado el modelo (4.2), con términos de error ε_t estacionarios y que verifican condiciones suficientes para ser de aplicación un principio de invarianza, se tiene que para un valor dado $\tau \in [\tau_l, \tau_u] \subset (0,1)$ y un punto de cambio estructural $\lambda \in (0,1)$:*

(i) Si $\tau < \lambda$, entonces $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{2p+1})$, y

(ii) Si $\tau \geq \lambda$, entonces $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{-(2p+1)})$.

Prueba. Ver Apéndice A.

El resumen de los resultados relativos al comportamiento de los estadísticos del numerador y denominador del estadístico de contraste $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$ dependiendo de la relación entre los índices (τ, λ) se recoge en el siguiente cuadro.

COMPORTAMIENTO DEL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE DE CAMBIO EN PERSISTENCIA PARA UN PUNTO DE CAMBIO τ FIJO. $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \hat{B}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda) \cdot \hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)$

	(a) $\tau \geq \lambda$	(b) $\tau < \lambda$
$\hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)$	$\hat{A}_{n,p}(\tau)$	$O_p(n^{2p+1})$
$\hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda)$	$O_p(n^{2p+1})$	$\hat{B}_{n,p}(\tau)$
$\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$	$O_p(n^{-(2p+1)})$	$O_p(n^{2p+1})$

El estadístico de contraste básico $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$ diverge bajo la hipótesis nula $I(0)$ cuando el proceso es $I(0)$ con cambio estructural siempre que $\tau < \lambda$, de forma que tenderá a identificar un cambio en persistencia de $I(0)$ a $I(1)$, mientras que si $\tau \geq \lambda$ el estadístico converge rápidamente a cero y tenderá a identificar correctamente que el proceso es $I(0)$. Sin embargo, si se utiliza en este caso el recíproco, $\hat{K}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda)$, tenderá a identificar erróneamente que hay un cambio en persistencia de $I(1)$ a $I(0)$. En el caso general de τ desconocido se requiere especificar un conjunto de valores factible $\tau \in [\tau_l, \tau_u]$ para la implementación de los contrastes incondicionales basados en los estadísticos $H_j(\cdot)$ y $H'_j(\cdot)$ descritos en la sección 2. Así, si $\lambda_0 \leq \tau_l$ se verifican los resultados en (a), mientras que si $\lambda_0 > \tau_u$ son de aplicación los resultados en (b) para toda la secuencia de estadísticos calculados $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$ y $\hat{K}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda)$, así como para los estadísticos resúmenes $H_j(\cdot)$ y $H'_j(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$.

5. Comportamiento de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural bajo la alternativa de cambio en persistencia.

En esta sección se plantea el análisis del comportamiento, tanto potencia como distribución asintótica, de los contrastes de estacionariedad bajo cambio estructural condicional e incondicional considerados en el apartado 3 anterior, en el caso de que el verdadero PGD venga dado por las ecuaciones (2.1)-(2.2), en el caso de cambio en persistencia de I(0) a I(1), o (2.1)-(2.3), en el caso contrario, de cambio en persistencia de I(1) a I(0) en el punto $[n\tau_0]$, con punto de cambio conocido $\tau_0 \in (0,1)$. Así se tiene que los residuos MCO de la regresión auxiliar de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural, ecuación (3.4), vienen dados ahora por

$$\hat{\eta}_{t,p}(\lambda, \tau_0) = \eta_t(\tau_0) - \mathbf{x}'_{t,p}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\beta}_p) - \mathbf{x}'_{t,p}h_t(\lambda)(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\delta}_p) \quad (5.1)$$

donde, de forma similar a (3.5), se tiene que

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix}^{-1} \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j,p} \\ \mathbf{h}_{j,p}(\lambda) \end{pmatrix} y_j \right\} \quad (5.2)$$

siendo, en este caso, el verdadero modelo generador de las observaciones el siguiente

$$y_j = (\mathbf{x}'_{j,p}, \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \eta_j(\tau_0) \quad (5.3)$$

de forma que $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$ en (5.1), y con los términos de error $\eta_j(\tau_0)$ definidos ahora como

$$\eta_j(\tau_0) = \begin{cases} \varepsilon_j + \sum_{i=1}^j u_i I(i > [n\tau_0]) = \varepsilon_j + \sum_{i=1}^j u_i h_i(\tau_0) & \text{en el caso (2.2): } I(0) \text{ a } I(1) \\ \varepsilon_j + \sum_{i=1}^j u_i I(i \leq [n\tau_0]) = \varepsilon_j + \sum_{i=1}^j u_i (1 - h_i(\tau_0)) & \text{en el caso (2.3): } I(1) \text{ a } I(0) \end{cases} \quad (5.4)$$

A partir de (5.1), se tiene que la suma parcial normalizada de residuos MCO viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\beta}_p) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p}h_j(\lambda)\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

para $r \in [0,1]$, con $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p}h_j(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p}h_j(\lambda)I(r \geq \lambda)$. A partir de este proceso de suma parcial de residuos MCO, los estadísticos de contraste de la hipótesis nula

I(0) bajo cambio estructural de la sección 3 se definen ahora como

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(1)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0)} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2, \quad (5.6)$$

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(2)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0)} \left\{ \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 \right\} \quad (5.7)$$

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{\hat{\omega}_{n,q_n}(\lambda, \tau_0)} \max_{t=1, \dots, n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) - \frac{t}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{n,p}(\lambda, \tau_0) \right) \right| \quad (5.8)$$

Teniendo en cuenta la estructura de los términos de error en (5.4), según se considere el caso de una alternativa de cambio en persistencia de I(0) a I(1) o al contrario, en el Apéndice B se demuestra que el proceso (5.5) diverge, de forma que los estadísticos para el contraste de estacionariedad con cambio estructural tienen potencial no trivial frente a la alternativa de cambio en persistencia. Este resultado es evidente, teniendo en cuenta que el PGD considerado en (5.3) está muy próximo, salvo por la no consideración del cambio estructural, a la hipótesis alternativa de no estacionariedad I(1) permanente con cambio estructural de estos contrastes. Sin embargo, en este caso puede comprobarse como la potencia del contraste depende fundamentalmente de la relación entre los valores del par (τ_0, λ) , puesto que si en (5.4) se hace $\tau_0 \rightarrow 1 (\rightarrow 0)$, $\eta_t(\tau_0) = \varepsilon_t$ para casi toda la muestra, de forma que el cambio en persistencia de I(0) a I(1) (de I(1) a I(0)) casi no debe tener efecto sobre el comportamiento de los estadísticos (5.6)-(5.8), más allá de que nos encontraríamos en este caso con un error de especificación por inclusión errónea del componente de cambio estructural. Estos resultados se formalizan en el siguiente Teorema 2 (prueba en el Apéndice B).

Teorema 2. *Bajo los supuestos apropiados relativos al comportamiento de los términos de error en el modelo (5.3)-(5.4) de cambio en persistencia, en los contrastes de estacionariedad con cambio estructural se tienen los siguientes resultados:*

- (i) $(n\sqrt{n})^{-1} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_u V_{i,p}(r, \tau_0)$
- (ii) $V_{i,p}(r, \tau_0) = V_i(r, \tau_0) - \int_0^r \mathbf{X}'_p(s) ds \left(\int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) dV_i(s, \tau_0)$
 $- I(r \geq \lambda) \int_\lambda^r \mathbf{X}'_p(s) ds \left(\int_\lambda^1 \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 \mathbf{X}_p(s) dV_i(s, \tau_0) - \left(\int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) dV_i(s, \tau_0)$
- (iii) $\hat{M}_{p,q_n}^{(j)}(\lambda, \tau_0) = O_p(n/q_n), j = 1, 2, 3$

Observación. En el caso $p = 0$ (corrección por la media), se tiene que el proceso límite

$V_{i,0}(r, \tau_0)$ viene dado por

$$V_{i,0}(r, \tau_0) = V_i(r, \tau_0) - \frac{r}{\lambda} V_i(\lambda, \tau_0) + I(r \geq \lambda) \frac{r - \lambda}{\lambda(1 - \lambda)} [V_i(\lambda, \tau_0)] - \lambda V_i(1, \tau_0), \quad (\lambda, \tau_0) \in (0, 1)$$

Con objeto de obtener un resultado útil en términos de una distribución asintótica para estos estadísticos de contraste en el caso analizado, es necesario imponer un supuesto adicional, tal como realizan Buseti y Harvey (2004), sobre la estructura de la varianza a largo plazo del proceso u_t del componente de paseo aleatorio parcial en (5.4). Teniendo en cuenta que la varianza a largo plazo de u_t puede factorizarse como $\omega_u^2 = \sigma_u^2 (1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_u^{-2} \gamma_u(h)) = \sigma_u^2 \cdot \tilde{\omega}_u^2$, entonces es posible establecer una cierta proporcionalidad entre las varianzas a corto plazo de los errores (ε_t, u_t) , de la forma $\sigma_u^2 = \varphi(n, c) \cdot \sigma_\varepsilon^2$, donde $\varphi(n, c) = c^2/n^2$, con $c \geq 0$, lo que representa en el contexto de los contrastes de cambio en persistencia una hipótesis alternativa local. El caso $c = 0$ se corresponde nuevamente con la hipótesis nula I(0) con cambio estructural. Para el propósito del análisis en esta sección, vamos a considerar simplemente el caso donde $\sigma_u^2 = \varphi(n, c) = (c/n)^2$, de forma que $\omega_u^2 = \varphi(n, c) \cdot \tilde{\omega}_u^2$. Así, es posible enunciar el siguiente resultado relativo a la distribución asintótica nula de los contrastes de estacionariedad (5.6)-(5.8) bajo la alternativa de cambio en persistencia, que se prueba también en el Apéndice B.

Teorema 3. *En el caso del modelo de cambio en persistencia (5.3)-(5.4), con $\omega_u^2 = \sigma_u^2 \cdot \tilde{\omega}_u^2$ y*

$\sigma_u^2 = (c/n)^2$ con $c \geq 1$, en el caso de la regresión auxiliar de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural, se tiene que:

$$(i) \quad n^{-1/2} \hat{S}_{[nr], p}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_\varepsilon W_0(r) + \omega_u V_{i,p}^0(r, \tau_0) = \omega_\varepsilon [W_0(r) + c \frac{\tilde{\omega}_u}{\omega_\varepsilon} V_{i,p}^0(r, \tau_0)] = \omega_\varepsilon B_{i,p}^0(r, \tau_0)$$

$$(ii) \quad \hat{\omega}_{n, q_n}^2(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_\varepsilon^2 K(w) \int_0^1 B_{i,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

$$(iii) \quad \hat{M}_{p, q_n}^{(1)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^r B_{i,p}^0(s, \tau_0) ds \right)^2 dr / K(w) \int_0^1 B_{i,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

$$(iv) \quad \hat{M}_{p, q_n}^{(2)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^r B_{i,p}^0(s, \tau_0) ds \right)^2 dr - \left(\int_0^1 \int_0^r B_{i,p}^0(s, \tau_0) ds \right) dr \right\}^2 / K(w) \int_0^1 B_{i,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

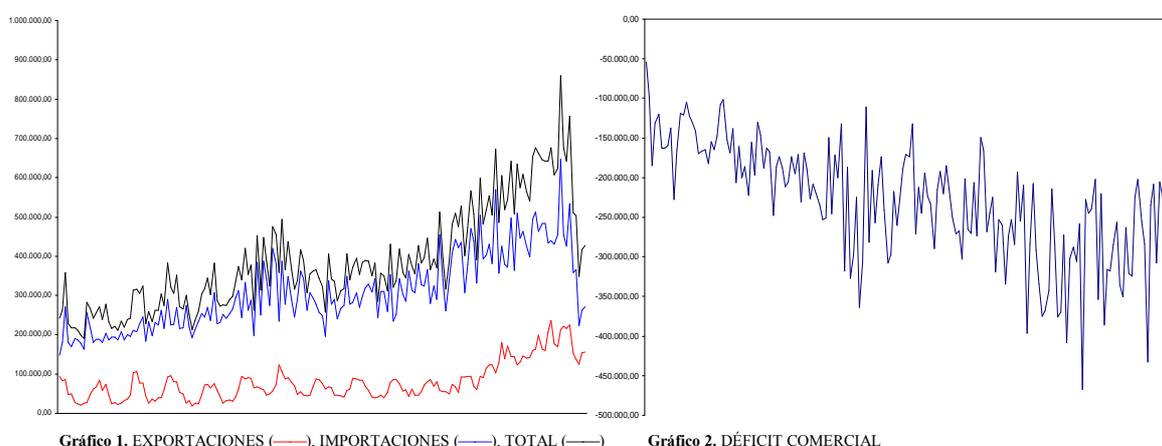
$$(v) \quad \hat{M}_{p, q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \left(K(w) \int_0^1 B_{i,p}^0(s, \tau_0)^2 ds \right)^{-1/2} \sup_{0 \leq s \leq 1} |B_{i,p}^0(s, \tau_0) - s B_{i,p}^0(1, \tau_0)|$$

donde $V_{i,p}^0(r, \tau_0)$ es como $V_i(r, \tau_0)$ en (ii) del Teorema 2, con $V_i(r, \tau_0)$ reemplazado por

$$V_i^0(r, \tau_0) = W_0(r) + c \frac{\tilde{\omega}_u}{\omega_\varepsilon} V_i(r, \tau_0).$$

6. Aplicación empírica a las series mensuales de comercio exterior de Canarias

En esta sección aplicamos los contrastes de estacionariedad estocástica frente a las alternativas de cambio en persistencia y de raíz unitaria descritos en las secciones 2 y 3 a las series de comercio exterior de Canarias para el periodo enero 1995-marzo 2009, con un total de $n = 171$ observaciones, en miles de euros (Fuente: DataComex). Los siguientes gráficos muestran la evolución en la muestra de las tres series consideradas (importaciones, exportaciones y de comercio total), así como del déficit comercial de la economía Canaria.



Tanto la serie de importaciones como de exportaciones (y, por tanto, la del total) presentan un comportamiento tendencial y hacia el tercio final de la muestra, aproximadamente, se evidencia un aparente cambio estructural, cuya posible causa y naturaleza podría inferirse de los resultados de los contrastes considerados, que se presentan en los siguientes cuadros 1 y 2.

CUADRO 1. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA

		Serie 1. Exportaciones		Serie 2. Importaciones		Serie 3. Total	
		$p=0$	$p=1$	$p=0$	$p=1$	$p=0$	$p=1$
Tests $I(0)$ frente a cambio $I(0)$ a $I(1)$	$j=1$	331.4624 (0.731)	39.5670 (0.889)	2431.7199 (0.895)	58.8899 (0.889)	1212.2824 (0.895)	55.2022 (0.889)
	$j=2$	86.6701	13.3825	158.7090	15.9091	90.8468	14.5098
	$j=3$	82.8007	34.9379	54.6078	54.4155	74.6256	50.4061
Tests $I(0)$ frente a cambio $I(1)$ a $I(0)$	$j=1$	14.3149 (0.099)	2.2261 (0.099)	18.0899 (0.099)	0.6589 (0.099)	18.2835 (0.099)	0.9925 (0.099)
	$j=2$	0.6338	0.1995	3.9245	0.1923	2.7193	0.2127
	$j=3$	10.1161	0.2735	15.3468	0.2029	12.0390	0.2288
Tests $I(0)$ frente a dirección de cambio desconocida	$j=4$	331.4624	39.5670	2431.7199	58.8899	1212.2824	55.2022
	$j=5$	86.6701	13.3825	158.7090	15.9091	90.8468	14.5098
	$j=6$	82.8007	34.9379	54.6078	54.4155	74.6256	50.4061

Nota 1. Entre paréntesis se indican los puntos de cambio estimados empleando (2.5), con $\Lambda = [\tau_b, \tau_u]$, $\tau_l = 0.10$ y $\tau_u = 0.90$, y el criterio de estimación indicado bajo H_{01} o H_{10} .

Nota 2. En cursiva se indican los casos de rechazo de la hipótesis nula $I(0)$ frente a la correspondiente alternativa de cambio en persistencia al 5% de significación nominal, mientras que en negrita se indican los casos de no rechazo.

Los resultados de estos contrastes indican claramente evidencia de un cambio en persistencia de $I(0)$ a $I(1)$, con punto de cambio estimado situado en torno a las observación 152.

CUADRO 2. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL: CONTRASTES INCONDICIONALES

Contrastes de estacionalidad con cambio estructural		Serie 1. Exportaciones		Serie 2. Importaciones		Serie 3. Total	
		$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$
$\hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n)$	$j = 1$	0.8227	0.2301	1.1172	0.0818	1.0732	0.1575
	$j = 2$	0.1677		0.1963		0.1820	
	$j = 3$	1.3920	0.9625	1.4192	0.6651	1.4112	0.8020
$\tilde{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \hat{\lambda}_n)$	$j = 1$	0.1275 (0.743)	0.0424 (0.649)	0.2711 (0.544)	0.0553 (0.515)	0.2611 (0.626)	0.0455 (0.520)
	$j = 2$	0.0499 (0.772)		0.0778 (0.544)		0.0706 (0.619)	
	$j = 3$	0.7737 (0.760)	0.4728 (0.619)	0.8165 (0.573)	0.5751 (0.772)	0.8139 (0.637)	0.5222 (0.427)

Nota 1. Los estadísticos de han calculado empleando $\Lambda = [0.10, 0.90]$. Entre paréntesis de muestran las estimaciones de los puntos de cambio estructural empleando (3.12) para los contrastes de estacionariedad con cambio estructural KPSS, V/S y KS, $\hat{\lambda}_{n,p}^{(j)} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$, $j = 1, 2, 3$.

Nota 2. Estadísticos calculados empleando el estimador noparamétrico de la varianza a largo plazo con kernel de Bartlett y bandwidth fijo, $q_n = [a \cdot (n/100)^{(1/b)}]$, $a = 12$, $b = 4$. En cursiva se indican los casos de rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad con cambio estructural al 5% de significación nominal, frente a la alternativa I(1) y en negrita los casos de no rechazo, con valores críticos obtenidos por interpolación lineal a partir de los puntos de ruptura estimados.

Los resultados del cuadro 2 indican que, salvo para la serie de importaciones, empleando los contrastes de I(0) sin cambio estructural, $\hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n)$ ($j=1,2,3$), dicha hipótesis no puede rechazarse. Sin embargo, al introducir la posibilidad de cambio estructural en el componente sistemático, tanto en el nivel como en la tendencia lineal, la evidencia estadística es de estacionariedad estocástica, I(0), con cambio estructural en el componente sistemático. Para reforzar estos resultados implementamos el procedimiento de contraste en dos etapas sugerido por Busetti y Harvey (2003). La primera etapa requiere obtener una estimación del punto de cambio estructural mediante el estimador superconsistente de Bai (1994, 1997), dado por $\tilde{\lambda}_{n,p} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \hat{R}_{n,p}(\lambda)$, con $\hat{R}_{n,p}(\lambda) = \sum_{t=1, n} \hat{\eta}_{t,p}^2(\lambda)$ la suma de residuos MCO al cuadrado en las regresiones auxiliares de los contrastes $\hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$. La segunda etapa consiste en computar estos estadísticos empleando el valor estimado de λ como si fuese el punto de cambio conocido, $\tilde{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \tilde{\lambda}_{n,p})$. Los resultados, recogidos en el cuadro 3, refuerzan las conclusiones indicadas anteriormente de estacionariedad estocástica con cambio estructural en el componente determinista.

CUADRO 3. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL: CONTRASTE CONDICIONAL EN DOS ETAPAS DE BUSETTI Y HARVEY (2003)

		Serie 1. Exportaciones		Serie 2. Importaciones		Serie 3. Total	
		$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$
$\tilde{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \tilde{\lambda}_n)$	$\tilde{\lambda}_{n,p}$	0.807	0.807	0.719	0.947	0.743	0.795
	$j = 1$	0.2959	0.0517	0.5657	0.1422	0.5194	0.0537
	$j = 2$	0.0729		0.2301		0.1717	
	$j = 3$	1.0954	0.6181	1.3617	0.8289	1.3155	0.5794

Nota. (ver notas 1 y 2 del CUADRO 2)

Por tanto, del análisis de estos resultados no puede extraerse una conclusión clara sobre la naturaleza del comportamiento de estas series, debido a la capacidad de estos contrastes para

identificar erróneamente un cambio estructural de naturaleza diferente para el que están diseñados.

7. Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el problema de la contrastación de la estacionariedad estocástica, $I(0)$, frente a estacionariedad en diferencias, $I(1)$ o raíz unitaria, en el contexto de posibles cambios estructurales de diferente carácter, sistemático (en el componente determinista del modelo) o no sistemático (en el grado de persistencia del término de perturbación del modelo). Este último caso corresponde a la reciente propuesta de tratar de identificar cambios en la estacionariedad de un proceso a lo largo de una muestra, denominado cambios en persistencia. Hemos considerado el comportamiento, en términos de consistencia y potencia (tanto analítica como numéricamente) de algunos contrastes noparamétricos de la hipótesis $I(0)$ frente a cambios en persistencia, así como de algunos de los contrastes noparamétricos más utilizados en la práctica de la hipótesis $I(0)$ con cambio estructural frente a $I(1)$. Se ha demostrado que ambos tipos de contrastes presentan potencia no trivial frente a la alternativa representada por un cambio estructural de naturaleza diferente a la asumida en cada caso, de forma que estos contrastes de cambio en persistencia pueden identificar un proceso estacionario con cambio estructural sistemático, mientras que los contrastes de $I(0)$ con cambio estructural tienden a rechazar, en general, la hipótesis nula en presencia de un cambio en persistencia del proceso, aunque también identificar erróneamente estacionariedad estocástica en torno a un componente determinista con cambio estructural bajo dicha hipótesis de comportamiento, dependiendo de la relación entre la localización estimada y verdadera de ambos puntos de cambio, especialmente cuando ambas están próximas entre sí y hacia el final de la muestra (ver Cuadro C.2.4 del Apéndice C.2).

Bibliografía.

- Bai, J. (1994):** Least squares estimation of a shift in linear processes, *Journal of Time Series Analysis*, 15, pp.453-472.
- Bai, J. (1997):** Estimation of a change point in multiple regression models, *The Review of Economics and Statistics*, 79, pp.551-563.
- Buseti, F. y A.M.R. Taylor (2004):** Tests of stationarity against a change in persistence, *Journal of Econometrics*, 123, pp.33-66.

- Buseti, F. y A. Harvey (2001):** Testing for the presence of a random walk in series with structural breaks, *Journal of Time Series Analysis*, 22, pp.127-150.
- Buseti, F. y A. Harvey (2003):** Further comments on stationarity tests in series with structural breaks at unknown points, *Journal of Time Series Analysis*, 24, pp.137-140.
- Carrion-i-Silvestre, J.L. y A. Sansó (2006):** A guide to the computation of stationarity tests, *Empirical Economics*, 31, pp.433-448.
- Cook, S. (2004):** Detecting changes in persistence in linear time series, *Economics Bulletin*, 3, pp.1-11.
- den Haan, W.J. y A. Levin (1997):** A practitioners guide to robust covariance matrix estimation, *Handbook of Statistics* 15, 12, pp.291-341.
- den Haan, W.J. y A. Levin (2000):** Robust covariance matrix estimation with data-dependent VAR prewhitening order, NBER Technical Working Paper 255.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teysiere (2003):** Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels, *Journal of Econometrics*, 112, pp.265-294.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teysiere (2005):** Corrigendum to “Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels”, *Journal of Econometrics*, 126, pp.571-572.
- Harvey, D.I. y T.C. Mills (2003):** A note on Buseti-Harvey tests for stationarity in series with structural Breaks, *Journal of Time Series Analysis*, 24, pp.159-164.
- Kim, J. (2000):** Detection of change in persistence of a linear time series, *Journal of Econometrics*, 95, pp.97-116.
- Kim, J., J. Belaire Franch y R. Badillo Amador (2002):** Corrigendum to “Detection of change in persistence of a linear time series”, *Journal of Econometrics*, 109, pp.389-392.
- Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992):** Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, 54, pp.159-178.
- Lee, J., C.J. Huang e Y. Shin (1997):** On stationarity tests in the presence of structural breaks, *Economics Letters*, 55, pp.165-172.
- Leybourne, S., T.-H. Kim, V. Smith y P. Newbold (2003):** Tests for a change in persistence against the null of difference stationarity, *Econometrics Journal*, 6, pp.290-310.
- Phillips, P.C.B. (1991):** Spectral regression for cointegrated time series, en: Barnett, ed., *Nonparametric and semiparametric methods in Economics and Statistics*. Cambridge University Press.
- Taylor, A.M.R. (2005):** Fluctuation tests for a change in persistence, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67, pp.207-230.
- Xiao, Z. (2001):** Testing the null hypothesis of stationarity against an autoregressive unit root alternative, *Journal of Time Series Analysis*, 22, pp.87-105.

APÉNDICE A. Prueba del Teorema 1

En este caso se considera que el PGD subyacente es el de un proceso estacionario en torno a un componente determinista dado por una tendencia polinomial de orden p con cambio estructural, de la forma

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p + \varepsilon_t \quad t=1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) = \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda)$, con $h_t(\lambda)$ una función indicador de la forma $h_t(\lambda) = I(t > [n\lambda])$ y $\lambda \in (0,1)$.

Así, dada la matriz de normalización $\mathbf{D}_p = \text{diag}(1, n^{-1}, \dots, n^{-p})$, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{h}}_{nr,p}(\lambda) = \mathbf{D}_p \mathbf{h}_{nr,p}(\lambda) \rightarrow \mathbf{H}_p(\lambda, r) = (I(r > \lambda), rI(r > \lambda), \dots, r^p I(r > \lambda)) = \mathbf{X}_p(r) I(r > \lambda)$$

para el índice $(t-1)/n \leq r < t/n$, $t = 1, \dots, n$, de forma que $r \in [0,1]$. Los contrastes de cambio en persistencia basados en ratios que estudiamos se basan en el ajuste MCO de una regresión con $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$ en dos submuestras separadas. Para un valor dado de $\tau \in [\tau_l, \tau_u]$, de forma que $[n\tau_l]$ y $n - [n\tau_u] \geq (p+1)$, se calculan los residuos MCO de la forma

$$\hat{\eta}_{1,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) = \varepsilon_t - \mathbf{x}'_{t,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p \quad t=1, \dots, [n\tau] \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \varepsilon_j + \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) \boldsymbol{\delta}_p, \quad (\text{A.3})$$

con $\mathbf{Q}_{[n\tau]}(p) = \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p}$, y

$$\hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) = \varepsilon_t - \mathbf{x}'_{t,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p, \quad t=[n\tau]+1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{U}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \varepsilon_j + \mathbf{U}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) \boldsymbol{\delta}_p \quad (\text{A.5})$$

con $\mathbf{U}_{n-[n\tau]}(p) = \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p}$. Para los resultados para la primera submuestra, en (A.3) se tiene que

para $\tau < \lambda$, $\mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) \boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$, mientras que para $\tau \geq \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) &= \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) + \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) = \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \\ &= \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} - \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \mathbf{Q}_{[n\tau]}(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}(p) \end{aligned}$$

de forma que

$$\mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) = \mathbf{I}_{p+1} - \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \mathbf{D}_p \left(\mathbf{D}_p^{-1} - \tilde{\mathbf{Q}}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right)$$

Teniendo en cuenta que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \tilde{\mathbf{Q}}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right) \mathbf{D}_p \rightarrow \left(\int_0^{\tau} \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^{\lambda} \mathbf{X}_p(s) \mathbf{X}'_p(s) ds$$

entonces $\tilde{\mathbf{Q}}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = O(n^p)$, y así $\mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) = o(1)$, de forma que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, [n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \boldsymbol{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\varepsilon}_j + o(1)I(\tau \geq \lambda) \quad (\text{A.3'})$$

y

$$\hat{\eta}_{1,t}(p, \lambda) = \hat{\eta}_{1,t}(p) + \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\delta}_p h_t(\lambda) I(\tau \geq \lambda), \quad \hat{\eta}_{1,t}(p) = \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (\text{A.2'})$$

donde $\hat{\eta}_{1,t}(p)$ son los residuos MCO en el caso de no existencia del cambio estructural. En la segunda submuestra, si $\tau < \lambda$, el último término en (A.5) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) &= \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) + \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) = \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \\ &= \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} - \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}(p) - \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \end{aligned}$$

entonces

$$\boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) = \boldsymbol{I}_{p+1} - \boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \boldsymbol{D}_p \left(\boldsymbol{D}_p^{-1} - \tilde{\boldsymbol{Q}}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right)$$

Empleando la matriz de normalización \boldsymbol{D}_p , se tiene que

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \tilde{\boldsymbol{Q}}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right) \boldsymbol{D}'_p \rightarrow \left(\int_{\tau}^1 \boldsymbol{X}_p(s) \boldsymbol{X}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_{\tau}^{\lambda} \boldsymbol{X}_p(s) \boldsymbol{X}'_p(s) ds < \infty$$

de forma que $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = O(n^p)$. Puesto que $\boldsymbol{D}_p^{-1} = O(n^p)$, el término entre paréntesis

es asintóticamente despreciable, de forma que cuando $\tau < \lambda$,

$$\boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \left(\sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) = o(1)$$

Por otro lado, si $\tau \geq \lambda$, entonces $\sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) = \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p}$. Así, se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\varepsilon}_j + \boldsymbol{\delta}_p I(\tau \geq \lambda) \quad (\text{A.5'})$$

de forma que los residuos MCO de la segunda submuestra vienen dados por

$$\hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) = \begin{cases} \hat{\eta}_{2,t}(p) + \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\delta}_p h_t(\lambda) + o(1), & \tau < \lambda \\ \hat{\eta}_{2,t}(p) - \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\delta}_p (1 - h_t(\lambda)) & \tau \geq \lambda \end{cases}, \quad (\text{A.4'})$$

con $\hat{\eta}_{2,t}(p) = \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{Q}_{n-[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=[n\tau]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\varepsilon}_j$, los residuos en el caso de inexistencia del cambio

estructural. En (A.4'), en el caso $\tau \geq \lambda$, se tiene que $[n\tau] \geq [n\lambda]$, de forma que para todo $t = [n\tau] + 1, \dots, n$, se verifica que $t > [n\lambda]$ y, por tanto, $h_t(\lambda) = 1$ y $1 - h_t(\lambda) = 0$ para todas las observaciones. Por tanto, la anterior expresión para los residuos MCO se simplifica a

$$\hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) = \hat{\eta}_{2,t}(p) + (\mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\delta}_p h_t(\lambda) + o(1)) I(\tau < \lambda) \quad (\text{A.4''})$$

Con estos resultados preliminares, se tiene que para la primera submuestra, para un τ fijo, a partir de (A.2'), el proceso de suma parcial normalizado de residuos MCO viene dado por

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{1, [nr]}(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{1,j}(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{1,j}(p) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) I(\tau \geq \lambda)$$

con $n^{-1/2} \hat{S}_{1, [nr]}(p) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{1,j}(p)$ para $0 < r \leq \tau$. Así, si $\tau \geq \lambda$, $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) = 0$ cuando $r < \lambda$,

mientras que si $r \geq \lambda$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p - \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^p \frac{\delta_i}{i+1} ([nr]^{i+1} - [n\lambda]^{i+1}) + \frac{p+1}{\sqrt{n}} (O([nr]) - O([n\lambda])) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

En este punto es necesario realizar el siguiente supuesto en relación con la magnitud de los coeficientes de salto, δ_i , $i = 0, 1, \dots, p$, de la misma que en Busetti y Harvey (2001), p.139.

SUPUESTO. La magnitud de los saltos, δ_i , $i = 0, 1, \dots, p$, se aproxima a cero con el tamaño muestral a una tasa superior a $n^{-(2i+1)/2}$, es decir, $\delta_i = o(n^{-(2i+1)/2})$ para $i=0, 1, \dots, p$.

Bajo este supuesto y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=0}^p \frac{\delta_i}{i+1} ([nr]^{i+1} - [n\lambda]^{i+1}) + (p+1) \frac{O([nr]) - O([n\lambda])}{n^{p+1}} \rightarrow \delta_p \frac{r^{p+1} - \lambda^{p+1}}{p+1}$$

y que $\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{n^{p+1}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) = \frac{n^{-(p+1/2)}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda)$, entonces se tiene finalmente que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) = O(n^{p+1/2})$. Por tanto, cuando $\tau \geq \lambda$, para todo $r \geq \lambda$, se tiene que $n^{-1/2} \hat{S}_{1, [nr]}(p, \lambda) = O_p(n^{p+1/2})$ y, por tanto, el denominador del estadístico para el contraste de cambio en persistencia es $O_p(n^{2p+1})$, de forma que diverge con el tamaño muestral, siempre que el cambio estructural tenga lugar dentro del período que abarca esta primera submuestra.

En relación con los resultados de la estimación de la segunda submuestra, a partir de (A.4'') se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{2, [nr]}(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} \hat{\eta}_{2,j}(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} \hat{\eta}_{2,j}(p) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} [\mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) + o(1)] I(\tau < \lambda)$$

con $n^{-1/2} \hat{S}_{2, [nr]}(p) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} \hat{\eta}_{2,j}(p)$ para $\tau < r \leq 1$. Si el cambio estructural tiene lugar en el período que cubre la primera submuestra, entonces la suma parcial de residuos MCO es exactamente la que se obtendría en el caso de inexistencia del cambio, mientras que si el cambio estructural tiene lugar en el período que cubre la segunda submuestra, $\tau < \lambda$, entonces si $r < \lambda$, $n^{-1/2} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} [\mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) + o(1)] = 0$,

mientras que para todo $\tau < \lambda \leq r$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} [\mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) + o(1)] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p + o(1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p - \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p \right) + o(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p - \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p \right) + o(1) \end{aligned}$$

que es igual a (A.6), de forma que es de aplicación el mismo argumento que anteriormente sobre el orden de magnitud de este término, es decir, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\tau]+1}^{[nr]} [\mathbf{x}'_{j,p} \boldsymbol{\delta}_p h_j(\lambda) + o(1)] = O(n^{p+1/2})$. Así, en la segunda submuestra, para todo $\tau < \lambda \leq r$, se tiene que $n^{-1/2} \hat{S}_{2,[nr]}(p, \lambda) = O_p(n^{p+1/2})$ y, por tanto, en el caso donde el cambio estructural tiene lugar en período cubierto por esta segunda submuestra, el numerador del estadístico de cambio en persistencia es $O_p(n^{2p+1})$, de forma que diverge con el tamaño muestral. Combinando todos estos resultados se sigue la prueba del enunciado del teorema. ■

APÉNDICE B.

Prueba del Teorema 2. Teniendo en cuenta (5.3), el último término en (5.2) viene dado por

$$\sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) & \mathbf{0}_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) \\ \mathbf{h}_{j,p}(\lambda) \boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \boldsymbol{\beta}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p, \tau_0) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde las matrices $\mathbf{Q}_n(p)$ y $\mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p)$ se han definido en (3.6), y los vectores $\mathbf{H}_n(p, \tau_0)$ y $\mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0)$ son como en (3.7) empleando las innovaciones dadas en (5.4). Empleando la estructura de la inversa de la matriz particionada por bloques en (5.2),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(p, \lambda) & \mathbf{B}_n(p, \lambda) \\ \mathbf{B}'_n(p, \lambda) & \mathbf{C}_n(p, \lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

con $\mathbf{A}_n(p, \lambda) = \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$, $\mathbf{B}_n(p, \lambda) = \mathbf{B}'_n(p, \lambda) = -\mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$ y $\mathbf{C}_n(p, \lambda) = \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) + \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$, entonces combinando este resultado y (B.1) se tiene que (5.2) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(p, \lambda) & \mathbf{B}_n(p, \lambda) \\ \mathbf{B}'_n(p, \lambda) & \mathbf{C}_n(p, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p, \tau_0) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de forma que el proceso de suma parcial de residuos MCO, ecuación (5.5), viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} (\mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0)) \\ &\quad - n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} \cdot I(r \geq \lambda) (\mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

El factor clave en el comportamiento de este proceso viene dado por el primer término en (B.4) convenientemente reescalado. A partir de (5.4), se tiene que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_j \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^j u_i h_i(\tau_0) \quad (\text{B.5})$$

en el caso de considerar la alternativa de cambio I(0) a I(1), mientras que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_j \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^j u_i (1 - h_i(\tau_0)) \quad (\text{B.6})$$

en el caso opuesto, es decir, de cambio I(1) a I(0). Teniendo en cuenta que, con un poco de álgebra,

puede demostrarse que las expresiones en el segundo término de (B.5) y (B.6) pueden escribirse como

$$\sum_{j=1}^{[nr]} \sum_{i=1}^j u_i h_i(\tau_0) = \sum_{j=[n\tau_0]+1}^{[nr]} \left(\sum_{i=1}^j u_i - \sum_{i=1}^{[n\tau_0]} u_i \right) I(r > \tau_0) \quad (\text{B.7})$$

y

$$\sum_{j=1}^{[nr]} \sum_{i=1}^j u_i (1 - h_i(\tau_0)) = \sum_{j=1}^{[n\tau_0]} \left(\sum_{i=1}^j u_i \right) + ([nr] - [n\tau_0]) \sum_{j=1}^{[n\tau_0]} u_j \cdot I(r > \tau_0) \quad (\text{B.8})$$

respectivamente, donde $I(\cdot)$ es la función indicador usual. Así, de nuevo, bajo supuestos apropiados que permitan aplicar un principio de invarianza a los procesos (ε_t, u_t) , se tiene que si $r \in (\tau_0, 1]$ en (B.5), entonces

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^j u_i h_i(\tau_0) \Rightarrow \omega_u V_1(r, \tau_0) \quad (\text{B.9})$$

con $V_1(r, \tau_0)$ definido como $V_1(r, \tau_0) = \int_{\tau_0}^r [W_u(s) - W_u(\tau_0)] ds = \int_{\tau_0}^r W_u(s) - (r - \tau_0) W_u(\tau_0)$, mientras que en

(B.6) se tiene que

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^j u_i (1 - h_i(\tau_0)) \Rightarrow \omega_u V_2(r, \tau_0) \quad (\text{B.10})$$

con el proceso límite $V_2(r, \tau_0)$ dado por $V_2(r, \tau_0) = \int_0^{\min(r, \tau_0)} W_u(s) ds + (r - \tau_0) W_u(\tau_0) I(r > \tau_0)$. Teniendo en cuenta que $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \varepsilon_j \Rightarrow \omega_\varepsilon W_0(r)$ y, por tanto, $n^{-1} (n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \varepsilon_j) = o_p(1)$, entonces $(n\sqrt{n})^{-1} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) \Rightarrow \omega_u V_i(r, \tau_0)$, $i = 1$ (B.5), 2 (B.6). Por tanto, en cualquiera de las dos situaciones posibles consideradas, se tiene que $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) = O_p(n)$. Considerando estos resultados y que a partir de (B.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr], p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \left(\tilde{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n^2} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \cdot I(r \geq \lambda) \\ &\quad \times \left(\tilde{\mathbf{U}}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n^2} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \tilde{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n^2} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

con $\tilde{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}(p) = n^{-1} \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p}$ y $\tilde{\mathbf{U}}_{n-[n\lambda]}(p) = n^{-1} \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p}$ matrices que convergen a sus respectivos

límites, y que, para $i = 1, 2$ correspondientes a cualquiera de dos casos de cambio en persistencia considerados anteriormente, se tiene que

$$n^{-2} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \eta_j(\tau_0) \right) \Rightarrow \omega_u \int_0^\lambda \mathbf{X}_p(s) dV_i(s, \tau_0), \quad (\text{B.12})$$

$$n^{-2} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \eta_j(\tau_0) \right) \Rightarrow \omega_u \int_\lambda^1 \mathbf{X}_p(s) dV_i(s, \tau_0) \quad (\text{B.13})$$

De esta forma, entonces

$$\begin{aligned}
(n\sqrt{n})^{-1}\hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &\Rightarrow \omega_u \left\{ V_i(r, \tau_0) - \int_0^r X'_p(s) ds \left(\int_0^\lambda X_p(s) X'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda X_p(s) dV_i(s, \tau_0) \right. \\
&\quad \left. - I(r \geq \lambda) \int_\lambda^r X'_p(s) ds \left(\left(\int_\lambda^1 X_p(s) X'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 X_p(s) dV_i(s, \tau_0) - \left(\int_0^\lambda X_p(s) X'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda X_p(s) dV_i(s, \tau_0) \right) \right\} \\
&= \omega_u V_{i,p}(r, \tau_0)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Por tanto, puesto que en (B.4) se tiene que $n^{-1}\tilde{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) = O_p(n)$ y $n^{-1}\tilde{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) = O_p(n)$, entonces $n^{-1/2}\hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) = O_p(n)$. Así, los numeradores de los tres estadísticos de contraste de estacionariedad en torno a un componente determinista con cambio estructural, ecuaciones (5.6)-(5.8), divergen de la forma

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 = O_p(n^2), \tag{B.15}$$

$$n^{-1} \left\{ \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 - n^{-1} \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 \right\} = O_p(n^2), \tag{B.16}$$

con $\sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) = O_p(n)$, y

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) - \frac{t}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{n,p}(\lambda, \tau_0) \right) = O_p(n) \tag{B.17}$$

Para completar el estudio del comportamiento de estos estadístico, queda por establecer el comportamiento asintótico del estimador de la varianza a largo plazo, dado por

$$\hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} w(h/q_n) \left(n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n \hat{\eta}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \hat{\eta}_{t-h,p}(\lambda, \tau_0) \right)$$

donde $w(\cdot)$ es la función kernel o de ponderación, con pesos decrecientes con el retardo temporal, de las autocovarianzas muestrales y q_n es el parámetro bandwidth o ancho de ventana, con $q_n = o_p(\sqrt{n})$ y $1/q_n + \sqrt{n}/q_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, empleando los residuos MCO en (5.1) y el resultado de convergencia en (B.14) del proceso de suma parcial normalizado. Así, a partir de esos resultados y el argumento de Phillips (1991), se tiene que

$$(nq_n)^{-1} \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) \xrightarrow{c.s.} \omega_u^2 K(w) \int_0^1 V_{i,p}(s, \tau_0)^2 ds, \quad K(w) = \int_{-1}^1 w(s) ds$$

de forma que $\hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) = O_p(nq_n)$. Por tanto, combinando los resultados (B.15)-(B.17), se tiene que $\hat{M}_{p,q_n}^{(j)}(\lambda, \tau_0) = O_p(n/q_n)$, $j = 1, 2, 3$, de forma que bajo el PGD de un cambio en persistencia, los contrastes de estacionariedad KPSS, V/S y KS divergen a la misma tasa y, por tanto, tienden al rechazo de la hipótesis nula, identificando erróneamente estacionariedad en diferencias con un cambio estructural en el componente determinista. ■

Prueba del Teorema 3. En primer lugar, teniendo en cuenta (B.4), que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} (\tilde{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0)) \\ &\quad - n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \cdot I(r \geq \lambda) (\tilde{\mathbf{U}}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \tilde{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0)) \end{aligned}$$

y bajo el supuesto considerado de que la varianza a largo plazo del proceso u_t es de la forma $\omega_u^2 = \sigma_u^2 \cdot \tilde{\omega}_u^2$ y $\sigma_u^2 = (c/n)^2$ con $c \geq 1$, se puede así conseguir el factor de normalización extra $(1/n)$ en los dos últimos términos de la anterior expresión mientras que respecto del primer término se verifica ahora que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \varepsilon_j + \sum_{j=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^j u_i G_k(h_i(\tau_0)) \Rightarrow \omega_\varepsilon W_0(r) + c \tilde{\omega}_u V_k(r, \tau_0) = \omega_\varepsilon V_k^0(r, \tau_0)$$

para $k = 1$, con $G_1(h_i(\tau_0)) = h_i(\tau_0)$ y $k = 2$, con $G_2(h_i(\tau_0)) = 1 - h_i(\tau_0)$, donde

$$V_k^0(r, \tau_0) = W_0(r) + c \frac{\tilde{\omega}_u}{\omega_\varepsilon} V_k(r, \tau_0), \quad k = 1, 2.$$

El resto de resultado se obtienen empleando los argumentos de la prueba del Teorema 2 y del Teorema del Mapeado Continuo a partir de las expresiones de los estadísticos de contraste de estacionariedad con cambio estructural. ■

APÉNDICE C. Resultados de simulación

C.1 Comportamiento de los contrastes de cambio de persistencia frente a la alternativa de estacionariedad con cambio estructural

A efectos del análisis empírico, se han calculado los percentiles críticos de los contrastes de cambio en persistencia para tamaños muestrales $n = 100, 200$ y 1000 . Los resultados aparecen en el siguiente cuadro C.1.0. El cuadro C.1.1 presenta los tamaños empíricos de estos contrastes (caso de no cambio estructural) para $n = 100$ al nivel de significación 5%, mientras que los cuadros siguientes C.1.2-C.1.5 presentan la potencia empírica de estos contrastes al 5% de significación frente a la alternativa de estacionariedad con cambio estructural, con diferentes localizaciones (λ_0) y magnitudes de los parámetros de salto (δ_0, δ_1).

Para el cómputo de la potencia empírica se consideran diferentes localizaciones del cambio estructural, $\lambda_0 = 0.10, 0.50$ y 0.90 , tanto para el caso de corrección por la media ($p = 0$), como en el caso de corrección por la media y una tendencia lineal ($p = 1$). Los coeficientes de salto se han considerado como $\delta_i = c_i n$, $i = 0, 1$, con $c_i = 0.001, 0.005$ y 0.01 , incumpliendo así el supuesto teórico impuesto en el Apéndice A, pero que aún así permite verificar el comportamiento establecido teóricamente para estos contrastes.

CUADRO C.1.0. PERCENTILES SUPERIORES DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE DE CAMBIO EN PERSISTENCIA

		Corrección por la media ($p = 0$)				Corrección por la media y tendencia lineal ($p = 1$)				
		0.900	0.950	0.975	0.990	0.900	0.950	0.975	0.990	
Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1) $\hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	$n = 100$	13.588	17.424	22.752	30.111	6.698	8.345	10.229	12.746
		$n = 200$	13.045	17.317	21.732	29.118	6.686	8.435	10.144	12.465
		$n = 1000$	13.710	17.870	22.759	29.829	6.938	8.664	10.542	13.351
	$j = 2$	$n = 100$	3.638	5.011	6.463	8.604	2.388	2.904	3.435	4.403
		$n = 200$	3.541	4.713	6.002	7.977	2.365	2.853	3.489	4.269
		$n = 1000$	3.559	4.641	5.789	7.629	2.347	2.906	3.438	4.377
	$j = 3$	$n = 100$	3.746	5.436	7.886	11.252	1.539	2.056	2.559	3.546
		$n = 200$	3.435	5.090	7.201	10.597	1.511	1.986	2.506	3.304
		$n = 1000$	3.349	4.954	7.223	10.745	1.474	1.959	2.517	3.599
Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0) $\hat{H}'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	$n = 100$	12.891	17.221	21.872	29.025	6.552	8.341	10.027	12.879
		$n = 200$	12.838	17.274	20.589	27.011	6.677	8.241	9.881	12.042
		$n = 1000$	13.810	18.219	23.555	30.289	7.111	8.807	11.022	13.155
	$j = 2$	$n = 100$	3.525	4.644	5.936	7.623	2.346	2.891	3.438	4.314
		$n = 200$	3.471	4.504	5.610	7.333	2.328	2.815	3.261	4.154
		$n = 1000$	3.510	4.645	5.879	7.668	2.381	2.964	3.536	4.444
	$j = 3$	$n = 100$	3.514	5.271	7.445	10.749	1.515	1.998	2.624	3.606
		$n = 200$	3.288	5.039	6.678	9.238	1.489	1.886	2.416	3.284
		$n = 1000$	3.362	5.260	7.379	10.402	1.501	2.056	2.675	3.477
Contraste I(0) frente a dirección de cambio desconocida $\hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 4$	$n = 100$	17.221	22.262	27.399	34.948	8.300	10.088	12.098	15.203
		$n = 200$	17.187	21.117	26.686	33.769	8.303	10.009	11.622	13.869
		$n = 1000$	17.913	23.130	28.468	35.354	8.732	10.765	12.511	15.892
	$j = 5$	$n = 100$	4.802	6.224	7.623	9.496	2.901	3.437	4.101	5.162
		$n = 200$	4.576	5.849	7.179	9.541	2.836	3.375	4.025	4.881
		$n = 1000$	4.642	5.826	7.189	9.476	2.936	3.483	4.242	5.206
	$j = 6$	$n = 100$	5.297	7.668	9.943	13.861	2.029	2.596	3.238	4.439
		$n = 200$	5.004	6.889	9.217	12.669	1.923	2.473	3.094	3.951
		$n = 1000$	5.068	7.239	9.688	13.077	1.985	2.600	3.269	4.484

Nota. Resultados obtenidos con 10000 replicaciones de Monte Carlo bajo la hipótesis nula I(0) con errores iidN(0,1).

CUADRO C.1.1. TAMAÑO EMPÍRICO DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA

Punto de cambio estructural: $\lambda_0 = 0.10$		$(c_0, c_1) = (0.000, 0.000)$	
$\tau_l = 0.10, \tau_u = 0.90$		$p = 0$	$p = 1$
Contrastes I(0) frente a cambio I(0) a I(1) $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0564	0.0660
	$j = 2$	0.0636	0.0790
	$j = 3$	0.0620	0.0768
Contrastes I(0) frente a cambio I(1) a I(0) $H'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0440	0.0348
	$j = 2$	0.0452	0.0430
	$j = 3$	0.0400	0.0310
Contrastes I(0) frente a dirección de cambio desconocida $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 4$	0.0610	0.0582
	$j = 5$	0.0704	0.0676
	$j = 6$	0.0678	0.0670

Nota. Tamaño empírico al 5% nominal. Simulación con $n = 100$ y 5000 replicaciones.

CUADRO C.1.2. POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA FRENTE A LA ALTERNATIVA I(0) CON CAMBIO ESTRUCTURAL

Punto de cambio estructural: $\lambda_0 = 0.10$		$(c_0, c_1) = (0.001, 0.001)$		$(c_0, c_1) = (0.005, 0.005)$		$(c_0, c_1) = (0.01, 0.01)$	
		$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$
$\tau_l = 0.10, \tau_u = 0.90$							
Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1) $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0604	0.0438	0.0362	0.0104	0.0120	0.0120
	$j = 2$	0.0400	0.0188	0.0196	0.0000	0.0030	0.0000
	$j = 3$	0.0664	0.0330	0.0384	0.0034	0.0122	0.0040
Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0) $H'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0732	0.1758	0.1468	0.9982	0.4214	1.0000
	$j = 2$	0.0484	0.1396	0.1564	0.9998	0.5188	1.0000
	$j = 3$	0.0774	0.1756	0.1666	1.0000	0.4646	1.0000
Contraste I(0) frente a dirección de cambio desconocida $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 4$	0.0666	0.1304	0.1010	0.9930	0.3124	1.0000
	$j = 5$	0.0400	0.0876	0.0984	0.9978	0.3886	1.0000
	$j = 6$	0.0750	0.1272	0.1146	1.000	0.3432	1.0000

Nota. Potencia empírica al 5% nominal. Simulación con $n = 100$ y 5000 replicaciones.

CUADRO C.1.3. POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA FRENTE A LA ALTERNATIVA I(0) CON CAMBIO ESTRUCTURAL

$\tau_l = 0.10, \tau_u = 0.90$		$\lambda_0 = 0.50$		$\lambda_0 = 0.90$	
$(c_0, c_1) = (0.001, 0.001)$		$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$
Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1) $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0672	0.9996	0.0662	1.0000
	$j = 2$	0.0658	0.9980	0.0610	0.0122
	$j = 3$	0.0674	1.0000	0.0680	1.0000
Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0) $H'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0464	1.0000	0.0434	1.0000
	$j = 2$	0.0428	1.0000	0.0374	0.0000
	$j = 3$	0.0408	1.0000	0.0438	1.0000
Contraste I(0) frente a dirección de cambio desconocida $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 4$	0.0730	1.0000	0.0710	1.0000
	$j = 5$	0.0692	1.0000	0.0640	0.0034
	$j = 6$	0.0768	1.0000	0.0724	1.0000

CUADRO C.1.4. POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA FRENTE A LA ALTERNATIVA I(0) CON CAMBIO ESTRUCTURAL

$\tau_l = 0.20, \tau_u = 0.80$		$\lambda_0 = 0.10$		$\lambda_0 = 0.90$	
$(c_0, c_1) = (0.001, 0.001)$		$p = 0$	$p = 1$	$p = 0$	$p = 1$
Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1) $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0428	0.0212	0.0456	1.0000
	$j = 2$	0.0428	0.0992	0.0464	0.0000
	$j = 3$	0.0410	0.0676	0.0494	1.0000
Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0) $H'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 1$	0.0536	0.0240	0.0532	1.0000
	$j = 2$	0.0552	0.1368	0.0566	0.0000
	$j = 3$	0.0532	0.0972	0.0574	1.0000
Contraste I(0) frente a dirección de cambio desconocida $H_{j,p}(\hat{\tau}_n)$	$j = 4$	0.0526	0.0260	0.0542	1.0000
	$j = 5$	0.0526	0.1308	0.0574	0.0000
	$j = 6$	0.0512	0.0878	0.0598	1.0000

C.2 Comportamiento de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural frente a la alternativa de cambio de persistencia

A continuación se presentan los valores críticos de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural para valores seleccionados de los puntos de cambio (contrastos condicionales) para los cálculos de potencia empírica de los cuadros C.2.1-C.2.7. El modelo con cambio estructural considerado es de la forma

$$y_t = (1, t) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + (h_t(\lambda_0), th_t(\lambda_1)) \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \eta_t \quad (t = 1, \dots, n)$$

Los resultados de simulación hacen referencia a unos casos particulares, modelos 1, 2, 2a y 2b, considerados en Buseti y Harvey (2001, 2003) y Harvey y Mills (2003), que vienen dados por:

(a) modelo (1): $\beta_1 = \delta_1 = 0$

(c) modelo (2a): $\delta_1 = 0$

(b) modelo (2): $\lambda_0 = \lambda_1$

(d) modelo (2b): $\lambda_0 = \lambda_1, \delta_0 = -\delta_1 \lambda_1$

Los cuadros C.2.1-C.2.4 presentan los resultados de la potencia empírica de los contrastes $\hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$ frente a la alternativa de cambio en persistencia de I(0) a I(1), y los cuadros C.2.5-C.2.7 en el caso de cambio de I(1) a I(0), en todos los casos para un valor dado fijo de $\lambda = 0.20$ y distintos valores de τ . El cuadro C.2.4 presenta los resultados para los casos representados por la aplicación de la sección 6, para tratar de explicar los resultados obtenidos.

CUADRO C.2.0. PERCENTILES SUPERIORES DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE CONDICIONALES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL, $q_{\alpha}^{(j)}(p, \lambda)$

Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$				$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$				$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$			
		0.900	0.950	0.975	0.990	0.900	0.950	0.975	0.990	0.900	0.950	0.975	0.990
$\lambda = 0.01$		0.3398	0.4489	0.5681	0.7494	0.1492	0.1824	0.2189	0.2684	1.1964	1.3269	1.4543	1.6324
0.1		0.2789	0.3640	0.4653	0.5994	0.1369	0.1682	0.2002	0.2422	1.1374	1.2558	1.3759	1.5389
0.2		0.2294	0.3038	0.3767	0.4751	0.1270	0.1541	0.1894	0.2237	1.0712	1.1914	1.3074	1.4439
0.3		0.1832	0.2357	0.2985	0.3806	0.1177	0.14465	0.17627	0.21854	1.0076	1.1121	1.2120	1.3632
0.4		0.1582	0.1994	0.2442	0.3004	0.1109	0.1379	0.1679	0.2173	0.9523	1.0523	1.1385	1.2511
0.5		0.1503	0.1864	0.2234	0.2649	0.1102	0.1393	0.1711	0.2121	0.9397	1.0271	1.1073	1.2114
0.6		0.1595	0.1966	0.2449	0.3005	0.1117	0.1410	0.1658	0.2073	0.9485	1.0527	1.1401	1.2504
0.7		0.1853	0.2439	0.3039	0.3879	0.1188	0.1482	0.1762	0.2236	1.0066	1.1109	1.2091	1.3522
0.8		0.2274	0.2977	0.3813	0.4805	0.1251	0.1562	0.1869	0.2318	1.0794	1.2053	1.3158	1.4487
0.9		0.2828	0.3759	0.4761	0.6138	0.1382	0.1702	0.2005	0.2431	1.1443	1.2693	1.3887	1.5299
0.99		0.3485	0.4692	0.5899	0.7659	0.1512	0.1879	0.2239	0.2726	1.2046	1.3470	1.4605	1.6449

<i>(continuación)</i>		Modelo (2)				Modelo (2a)				Modelo (2b)			
		0.900	0.950	0.975	0.990	0.900	0.950	0.975	0.990	0.900	0.950	0.975	0.990
$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\lambda = 0.01$	0.1161	0.1439	0.1739	0.2114	0.1159	0.1439	0.1738	0.2114	0.1172	0.1455	0.1744	0.2091
	0.1	0.0969	0.1209	0.1455	0.1719	0.0982	0.1226	0.1458	0.1736	0.1038	0.1287	0.1501	0.1825
	0.2	0.0799	0.0983	0.1190	0.1479	0.0861	0.1036	0.1262	0.1516	0.0898	0.1104	0.1317	0.1656
	0.3	0.0650	0.0787	0.0929	0.1112	0.0862	0.1031	0.1189	0.1410	0.0784	0.0961	0.1113	0.1321
	0.4	0.0555	0.0659	0.0752	0.0898	0.0975	0.1209	0.1445	0.1776	0.0730	0.0882	0.1049	0.1249
	0.5	0.0525	0.0617	0.0712	0.0821	0.1060	0.1331	0.1638	0.2075	0.0689	0.0836	0.0971	0.1175
	0.6	0.0551	0.0658	0.0755	0.0909	0.0961	0.1182	0.1416	0.1712	0.0712	0.0854	0.1011	0.1196
	0.7	0.0651	0.0783	0.0919	0.1133	0.0867	0.1031	0.1196	0.1431	0.0795	0.0967	0.1128	0.1390
	0.8	0.0807	0.0973	0.1145	0.1384	0.0859	0.1028	0.1203	0.1474	0.0898	0.1091	0.1291	0.1548
	0.9	0.0973	0.1227	0.1475	0.1774	0.0983	0.1241	0.1487	0.1779	0.1024	0.1267	0.1534	0.1886
	0.99	0.1176	0.1459	0.1745	0.2168	0.1174	0.1458	0.1744	0.2168	0.1173	0.1474	0.1758	0.2212
$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\lambda = 0.01$	0.8138	0.8824	0.9466	1.0266	0.8136	0.8822	0.9455	1.0266	0.8153	0.8804	0.9492	1.0288
	0.1	0.7764	0.8412	0.9058	0.9806	0.7763	0.8416	0.9048	0.9819	0.7865	0.8573	0.9207	0.9916
	0.2	0.7327	0.7997	0.8586	0.9274	0.7482	0.8120	0.8686	0.9378	0.7523	0.8226	0.8801	0.9539
	0.3	0.6877	0.7433	0.7921	0.8581	0.7505	0.8114	0.8628	0.9256	0.7193	0.7805	0.8344	0.9002
	0.4	0.6383	0.6887	0.7332	0.7993	0.7698	0.8327	0.9031	0.9877	0.6959	0.7537	0.8046	0.8754
	0.5	0.6202	0.6684	0.7122	0.7589	0.7869	0.8613	0.9305	1.0056	0.6754	0.7330	0.7841	0.8484
	0.6	0.6371	0.6864	0.7329	0.7899	0.7716	0.8327	0.8916	0.9694	0.6856	0.7405	0.7931	0.8582
	0.7	0.6814	0.7379	0.7936	0.8520	0.7468	0.8110	0.8652	0.9362	0.7195	0.7803	0.8359	0.9036
	0.8	0.7332	0.7960	0.8477	0.9153	0.7480	0.8038	0.8556	0.9218	0.7539	0.8218	0.8749	0.9467
	0.9	0.7771	0.8456	0.9014	0.9743	0.7775	0.8464	0.9025	0.9773	0.7825	0.8533	0.9128	0.9856
	0.99	0.8124	0.8883	0.9519	1.0259	0.8117	0.8879	0.9516	1.0255	0.8119	0.8874	0.9515	1.0204

Nota 1. Resultados basados en $n = 1000$ observaciones con 10000 repeticiones de Monte Carlo bajo la hipótesis nula $I(0)$ bajo cambio estructural con localización del punto de cambio conocido $\lambda = \lambda_0 = 0.2$, con errores $iidN(0,1)$.

Nota 2. La distribución nula del estadístico de contraste V/S coincide con la de los estadísticos KPSS para los modelos (2), (2a) y (2b), puesto que en el caso de que la regresión auxiliar del contraste contenga una tendencia temporal, con o sin cambio estructural, se verifica que la suma de las sumas parciales acumuladas de residuos MCO es cero, $\sum_{t=1}^n \hat{S}_{t,1}(\lambda) = 0$.

CUADRO C.2.1 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA $I(0)$ A $I(1)$

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		A.1 $\tau = 0.10 < (\lambda_0, \lambda_1)$				A.2 $\tau = 0.20 = (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	
σ_u^2	0	0.046	0.047	0.095	0.045	0.049	0.098	
	0.0001	0.514	0.533	0.601	0.498	0.521	0.595	
	0.001	0.917	0.947	0.953	0.917	0.946	0.954	
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$			
σ_u^2	0	0.049	0.049	0.051	0.050			
	0.0001	0.263	0.233	0.268	0.241			
	0.001	0.848	0.838	0.850	0.846			
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$			
σ_u^2	0	0.049	0.048	0.049	0.050			
	0.0001	0.268	0.234	0.266	0.237			
	0.001	0.870	0.855	0.857	0.845			
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$			
σ_u^2	0	0.051	0.048	0.051	0.051			
	0.0001	0.290	0.263	0.294	0.266			
	0.001	0.868	0.863	0.869	0.871			

Nota 1. Potencia empírica al 5% nominal. Simulación con $n = 1000$ y 10000 repeticiones.

Nota 2. Observar que la potencia del contraste V/S para los modelos (2), (2a) y (2b) es idéntica a la del contraste KPSS por la inclusión del término de tendencia lineal, aún con cambio estructural (ver nota cuadro anterior).

Nota 3. Para todo $Var(u_t) > 0$, el estadístico de contraste se ha calculado utilizando como factor de escala la varianza muestral de los residuos MCO, es decir, un estimador de la varianza a corto plazo, sin corrección por la correlación temporal entre los términos de error.

CUADRO C.2.2 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(0) A I(1)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		A.3 $\tau = 0.30 > (\lambda_0, \lambda_1)$			A.4 $\tau = 0.50 > (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.048	0.049	0.094	0.046	0.045	0.094
	0.0001	0.501	0.514	0.592	0.428	0.427	0.516
	0.001	0.911	0.943	0.950	0.850	0.885	0.905
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.049		0.046	0.049		0.046
	0.0001	0.253		0.228	0.181		0.161
	0.001	0.831		0.828	0.738		0.735
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.046		0.046	0.048		0.046
	0.0001	0.248		0.224	0.177		0.162
	0.001	0.838		0.832	0.741		0.733
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.047		0.047	0.049		0.046
	0.0001	0.267		0.247	0.186		0.168
	0.001	0.834		0.840	0.747		0.748

CUADRO C.2.3 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(0) A I(1)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		A.5 $\tau = 0.80 > (\lambda_0, \lambda_1)$			A.6 $\tau = 0.90 > (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.045	0.048	0.095	0.048	0.054	0.099
	0.0001	0.130	0.123	0.203	0.055	0.052	0.108
	0.001	0.491	0.483	0.575	0.165	0.156	0.243
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.049		0.046	0.053		0.049
	0.0001	0.106		0.096	0.062		0.055
	0.001	0.426		0.428	0.170		0.170
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.047		0.045	0.054		0.049
	0.0001	0.099		0.095	0.059		0.053
	0.001	0.419		0.422	0.165		0.165
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0	0.047		0.046	0.053		0.049
	0.0001	0.108		0.099	0.060		0.056
	0.001	0.429		0.432	0.172		0.170

CUADRO C.2.4 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(0) A I(1)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.80, n = 170$		A.1 $\tau = 0.80 = (\lambda_0, \lambda_1)$			A.2 $\tau = 0.90 > (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.0491	0.0326	0.0924	0.0487	0.0309	0.0929
	0.001	0.0392	0.0262	0.0905	0.0435	0.0311	0.0932
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.0663		0.0554	0.0687		0.0549
	0.001	0.0680		0.0526	0.0672		0.0550
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.0481		0.0397	0.0496		0.0368
	0.001	0.0485		0.0361	0.0461		0.0366
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.0466		0.0362	0.0500		0.0377
	0.001	0.0508		0.0325	0.0506		0.0373

CUADRO C.2.5 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(1) A I(0)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		B.1 $\tau = 0.10 < (\lambda_0, \lambda_1)$			B.2 $\tau = 0.20 = (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.046	0.045	0.093	0.049	0.052	0.096
	0.001	0.051	0.068	0.105	0.059	0.092	0.136
	0.01	0.166	0.293	0.424	0.316	0.465	0.599
	0.1	0.627	0.739	0.862	0.768	0.881	0.956
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.049		0.046	0.046		0.046
	0.001	0.049		0.047	0.051		0.045
	0.01	0.063		0.063	0.096		0.120
	0.1	0.386		0.639	0.594		0.829
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.051		0.048	0.054		0.054
	0.001	0.102		0.116	0.168		0.202
	0.01	0.478		0.560	0.647		0.745
	0.1	0.843		0.927	0.946		0.987
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.048		0.049	0.049		0.049
	0.001	0.057		0.051	0.081		0.070
	0.01	0.177		0.162	0.397		0.405
	0.1	0.649		0.761	0.862		0.939

Nota. (ver notas del cuadro C.2.1)

CUADRO C.2.6 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(1) A I(0)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		B.3 $\tau = 0.30 > (\lambda_0, \lambda_1)$			B.4 $\tau = 0.50 > (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.057	0.059	0.108	0.235	0.225	0.318
	0.001	0.174	0.195	0.259	0.691	0.721	0.766
	0.01	0.719	0.756	0.839	0.965	0.979	0.987
	0.1	0.972	0.986	0.996	0.999	0.999	1.000
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.059		0.058	0.137		0.119
	0.001	0.179		0.169	0.586		0.589
	0.01	0.628		0.644	0.959		0.968
	0.1	0.965		0.985	0.999		1.000
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.066		0.062	0.144		0.125
	0.001	0.295		0.303	0.662		0.658
	0.01	0.865		0.896	0.987		0.990
	0.1	0.995		0.999	1.000		1.000
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$	$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \lambda)$		$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda)$
σ_u^2	0.0001	0.082		0.078	0.159		0.143
	0.001	0.335		0.341	0.658		0.664
	0.01	0.796		0.823	0.978		0.983
	0.1	0.986		0.996	0.999		0.999

Todos estos resultados de potencia empírica se han obtenido (como señala la nota 3 del cuadro C.2.1) empleando como factor de escala en la construcción de los estadísticos de contraste, $\hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$, la estimación de la varianza a corto plazo basado en los residuos MCO, es decir, con $q_n = 0$. Se han efectuado también los cálculos de la potencia empírica empleando estimaciones consistentes de la varianza a largo plazo, $q_n > 0$, con corrección por heterocedasticidad y/o autocorrelación, empleando tanto valores fijos como estimados del parámetro bandwidth en la estimación noparamétrica como la estimación paramétrica. En todos los casos, no presentados aquí, los valores de la potencia son ligeramente inferiores a los presentados aquí, puesto que $\hat{\omega}_{n,p}^2(q_n, \lambda) > \hat{\omega}_{n,p}^2(0, \lambda)$, pero las principales conclusiones del análisis son las mismas.

CUADRO C.2.7 POTENCIA EMPÍRICA DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL FRENTE A LA ALTERNATIVA DE CAMBIO EN PERSISTENCIA I(1) A I(0)

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0.20$		B.5 $\tau = 0.80 > (\lambda_0, \lambda_1)$			B.6 $\tau = 0.90 > (\lambda_0, \lambda_1)$		
Modelo (1)		$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$
σ_u^2	0.0001	0.475	0.484	0.562	0.501	0.527	0.590
	0.001	0.897	0.927	0.937	0.912	0.942	0.950
	0.01	0.998	0.999	0.999	0.999	1.000	0.999
	0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Modelo (2)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$	
σ_u^2	0.0001	0.214	0.194		0.262	0.236	
	0.001	0.788	0.783		0.827	0.823	
	0.01	0.997	0.996		0.998	0.998	
	0.1	1.000	1.000		1.000	1.000	
Modelo (2a)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$	
σ_u^2	0.0001	0.227	0.196		0.270	0.240	
	0.001	0.839	0.825		0.872	0.857	
	0.01	0.999	0.999		0.999	0.999	
	0.1	1.000	1.000		1.000	1.000	
Modelo (2b)		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$		$\hat{M}_{n,p}^{(1),(2)}(q_n, \hat{\lambda})$	$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda})$	
σ_u^2	0.0001	0.244	0.222		0.289	0.267	
	0.001	0.825	0.822		0.857	0.853	
	0.01	0.998	0.998		0.999	0.999	
	0.1	1.000	1.000		1.000	1.000	